FORMULARIO DI GEOMETRIA

A cura di Valter Gentile

Biblioteca di Ingegneria
Università degli studi di Siena

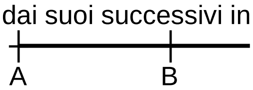
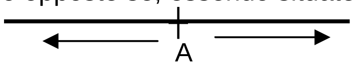
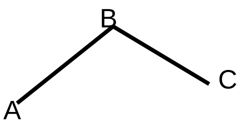
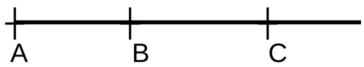
E-Notes pubblicata dalla Biblioteca Centrale di Ingegneria
Siena, 12 settembre 2006

GEOMETRIA

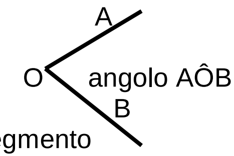
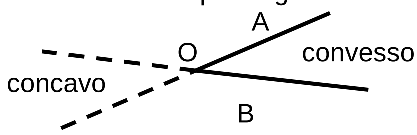
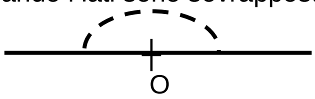
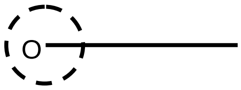
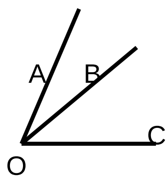
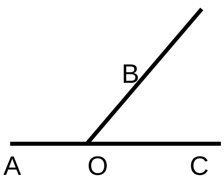
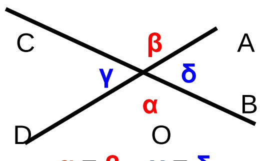
Principi (da scheda 1 a 5)	Solidi (da scheda 18 a 35)	Teoremi Di Guldino (sch. 50 - 51)
Figure Piane (da scheda 6 a 17)	Relazioni notevoli (da scheda 36 a 49)	Esempi solidi di rotazione(sch. 52)

Figure piane		Solidi			
S = area b = base	h = altezza π = 3,141592	S_l = area laterale S_b = area di base	S_t = area totale V = Volume	h = altezza del solido S = area	π = 3,141592

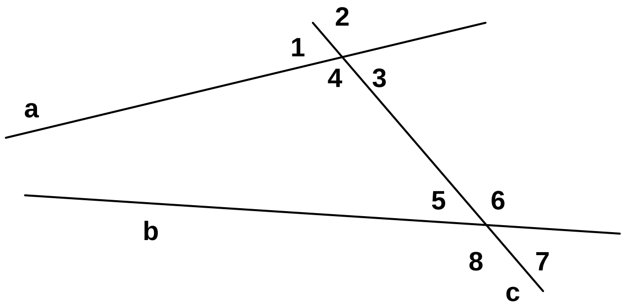
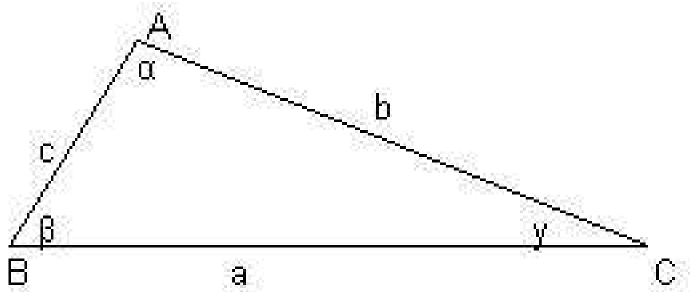
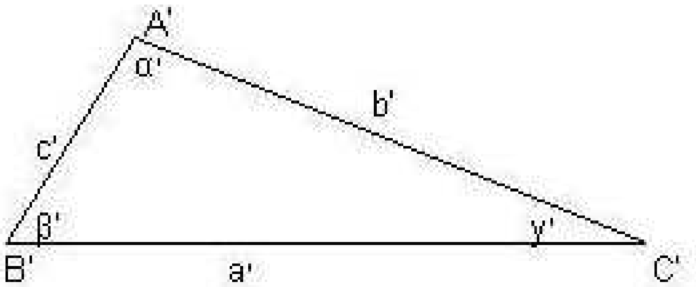
Geometria del piano: definizioni

Concetti fondamentali	
Elementi della geometria :	gli elementi fondamentali della geometria sono il punto, la retta, il piano
Concetto di punto :	Ci si forma il concetto di punto, osservando corpi minutissimi (granello di sabbia); lo si rappresenta con un segno piccolissimo della matita sulla carta, lo si indica con una lettera maiuscola.
Concetto di retta :	Ci si forma il concetto di retta, osservando un filo teso, prolungato all'infinito da ambo le parti. Una retta si indica con una lettera dell'alfabeto minuscola, o con due lettere maiuscole indicanti due qualsiasi dei suoi punti.
Concetto di piano :	Ci si forma il concetto di piano osservando la superficie levigata di un tavolo, prolungata all'infinito da ogni parte. Un piano si indica con una lettera dell'alfabeto greco (α = alfa, β = beta etc…)
Definizione di spazio :	Dicesi spazio l'insieme di tutti i punti esistenti
Definizione di figura :	Si chiama figura geometrica un qualsiasi gruppo di punti
Definizione di geometria :	Si chiama geometria la scienza che tratta delle figure geometriche; geometria piana quella che tratta di figure costituite da punti di uno stesso piano; geometria solida, quella che tratta di figure costituite da punti non giacenti tutti sullo stesso piano , e cioè di figure nello spazio.
Postulato della retta :	per due punti distinti passa una retta ed una sola, i punti di una retta sono ordinati in due versi distinti, opposti l'uno all'altro, in modo che non v'è né un primo né un ultimo punto e che fra i due punti, vi sono infiniti punti intermedi.
Postulato del piano :	Data una retta qualsiasi di un piano, i punti del piano vengono da essa divisi in due gruppi o semipiani tali che : 1) ogni punto del piano appartiene all'uno o all'altro dei due semipiani 2) la retta che congiunge due punti situati in semipiani opposti incontra la retta data, in un punto compreso fra di essi, mentre la retta individuata da due punti situati nello stesso semipiano non ha in comune con la retta alcun punto compreso fra essi.
Definizione di semiretta :	Si chiama semiretta quella parte di retta costituita da un suo punto (origine) e dai suoi successivi in uno dei due versi segnati sulla retta  semiretta AB Due semirette si dicono opposte se, essendo situate sulla stessa retta, hanno versi opposti 
Segmenti :	Chiamasi segmento la figura formata da due punti distinti (estremi) e da quelli della retta da essa determinata, che sono fra essi compresi  segmento AB
Segmenti consecutivi ed adiacenti :	Due segmenti si dicono consecutivi se hanno solo un estremo in comune o gli altri due da parti opposte; adiacenti se, oltre ad essere consecutivi giacciono su di una stessa retta.  segmenti consecutivi  segmenti adiacenti Osservazione: Se due segmenti non hanno estremi in comune possono trovarsi in tre posizioni diverse : 1) un estremo di uno è interno all'altro; in tal caso si dice che si separano 2) i punti di uno sono tutti interni all'altro e allora si dice che uno è interno all'altro 3) I punti di ciascuno sono estremi all'altro e allora si dice che uno è tutto esterno all'altro.

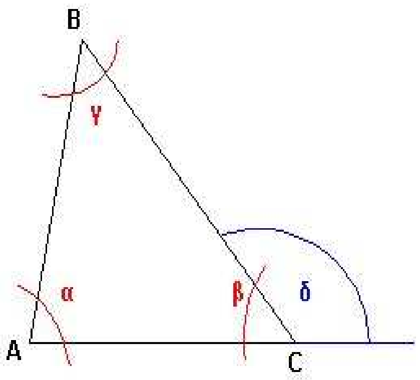
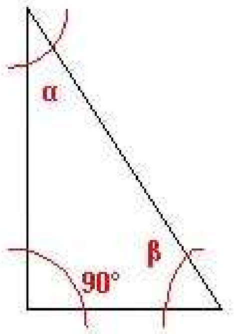
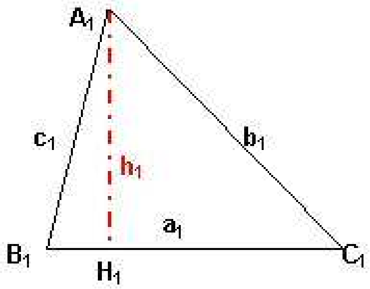
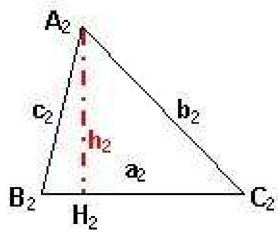
Geometria del piano : angoli

Concetti fondamentali	
Semipiani ed angoli:	Si dice semipiano la figura costituita dai punti di una retta e dai punti del piano , che si trovano dalla stessa parte rispetto a quella della retta, la quale si dice contorno.
Angolo:	Si dice angolo una delle due parti in cui viene diviso il piano da due semirette uscenti da uno stesso punto; oppure Si dice angolo l'insieme dei punti comuni a due semipiani i cui contorni si incontrano in un punto detto vertice, mentre le semirette che lo limitano si dicono lati. Osservazione : 1) Un angolo si può considerare generato dalla rotazione di una semiretta attorno ad un punto  2) Due punti interni ad un angolo sono estremi di un segmento tutto interno all'angolo, mentre un segmento che congiunge un punto interno con un punto esterno incontra certamente uno dei lati dell'angolo 3) Una retta passante per il vertice e per un punto interno ad un angolo lascia i lati da parti opposte, mentre una retta passante per il vertice e per un punto esterno, lascia i lati dalla stessa parte.
Angolo convesso e concavo:	Un angolo dicesi convesso se non contiene il prolungamento dei suoi lati; Un angolo dicesi concavo se contiene il prolungamento dei suoi lati 
Angolo piatto e giro:	Un angolo si dice piatto quando i suoi lati sono semirette opposte; giro quando i lati sono sovrapposti.  angolo piatto  angolo giro
Angoli consecutivi, adiacenti, opposti al vertice:	Due angoli si dicono: 1) consecutivi quando hanno un lato in comune e gli altri due da parti opposte rispetto a questo lato; 2) adiacenti quando, oltre ad essere consecutivi hanno gli altri due lati sulla stessa retta e opposti; 3) opposti al vertice quando i lati dell'uno sono il prolungamento dei lati dell'altro; due angoli opposti sono congruenti.  Angoli consecutivi  angoli adiacenti  $\alpha = \beta$ $\gamma = \delta$ angoli opposti al vertice
Misura degli angoli:	Gli angoli possono misurarsi in : 1) gradi : un grado è la novantesima parte di un angolo retto 2) radianti : un radiante è la misura di un angolo al centro di una circonferenza che sottende un arco di lunghezza pari al raggio Relazione tra misure degli angoli espresse in gradi (**α**)e radianti (**r**) $360° : 2\pi = \alpha : r$ da cui $r = \pi\,\alpha / 180$ o $\alpha = 180\,r/\pi$ se $\alpha < 90°\ (\pi/2)$ = **angolo acuto** se $\alpha = 90°\ (\pi/2)$ = **angolo retto** se $\alpha > 90°\ (\pi/2)$ = **angolo ottuso** se $\alpha = 180°\ (\pi)$ = **angolo piatto** se $\alpha = 360°\ (2\pi)$ = **angolo giro**
Angoli complementari:	Due angoli si dicono complementari se: $\alpha + \beta = 90°$
Angoli supplementari:	Due angoli si dicono supplementari se: $\alpha + \beta = 180°$ (es. angoli adiacenti)

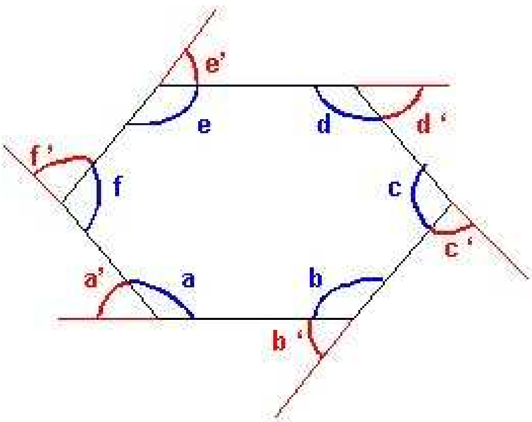
Geometria del piano: angoli, tipi di triangoli

Concetti fondamentali		
Angoli formati da due rette tagliate da una trasversale:		
	4 e 6 ; 3 e 5 sono detti alterni interni	4 e 5 ; 3 e 6 sono detti coniugati interni
	2 e 8 ; 1 e 7 sono detti alterni esterni	1 e 8 ; 2 e 7 sono detti coniugati esterni
	1 e 5 ; 4 e 8 ; 2 e 6 ; 3 e 7 sono detti corrispondenti	
	Se la retta a è perpendicolare alla retta b allora gli angoli alterni interni, alterni esterni, corrispondenti sono congruenti, mentre sono supplementari gli angoli coniugati interni e coniugati esterni	
I triangoli sono detti:	 	
	scaleno se a ≠ b ≠ c	equilatero se a = b = c
	isoscele se a = b ≠ c	rettangolo se α = 90
Criteri di congruenza dei triangoli:	I triangoli ABC e A'B'C' sono congruenti (ABC = A'B'C') se si verifica una delle seguenti condizioni: 1) hanno congruenti due lati e l'angolo compreso b = b'; c = c' ; α = α' 2) hanno congruenti due angoli ed il lato ad essi comune α = α' ; β = β' ; c = c' 3) hanno congruenti due angoli ed il lato opposto ad uno di essi α = α' ; β = β': a = a' 4) hanno i tre lati rispettivamente congruenti a = a' ; b = b'; c = c'	

Triangoli: proprietà angoli, similitudine

Figure angoli	Figure similitudine	
α, β, γ = ampiezze angoli interni δ = angolo esterno		Nomenclatura specifica
  	  	$B_1C_1 = a_1$ $C_1A_1 = b_1$ $A_1B_1 = c_1$ $A_1H_1 = h_1$ $B_2C_2 = a_2$ $C_2A_2 = b_2$ $A_2B_2 = c_2$ $A_2H_2 = h_2$ $a_1 + b_1 + c_1 = 2p_1$ $a_2 + b_2 + c_2 = 2p_2$ S_1 = area triangolo $A_1B_1C_1$ S_2 = area triangolo $A_2 B_2C_2$
Proprietà degli angoli di un triangolo: 1) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ 2) un angolo esterno di un triangolo è uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti $\delta = \alpha + \beta$ 3) gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali $\alpha = \beta$ 4) gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari $\alpha + \beta = 90°$ $\alpha = 90° - \beta$ $\beta = 90° - \alpha$	Proprietà triangoli simili : 1) Due triangoli si dicono simili se hanno gli angoli rispettivamente uguali e i lati omologhi in proporzione $A_1 = A_2$ $B_1 = B_2$ $C_1 = C_2$ $a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2$ 2) Per dire che due triangoli sono simili occorre e basta che sia soddisfatta una delle seguenti condizioni: a) che gli angoli siano ordinatamente uguali $A_1 = A_2$ $B_1 = B_2$ $C_1 = C_2$ b) che un angolo dell'uno sia uguale ad un angolo dell'altro e che i lati che li comprendono formino una proporzione $A_1 = A_2$ $b_1 : b_2 = c_1 : c_2$ c) che i lati dell'uno siano proporzionali ai lati dell'altro $a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2$ 3) In due triangoli simili i perimetri stanno come due lati omologhi $2p_1 : 2p_2 = a_1 : a_2$ 4) In due triangoli simili le altezze relative a due lati omologhi stanno come due lati omologhi $h_1 : h_2 = a_1 : a_2$ 5) Due triangoli simili stanno come i quadrati costruiti su due lati omologhi o su due altezze omologhe. $(A_1B_1C_1) / (A_2B_2C_2) = S_1/S_2 = (a_1 / a_2)^2 = (h_1 : h_2)^2$	
	Due lati di due triangoli simili si dicono corrispondenti od omologhi quando sono opposti ad angoli uguali.	

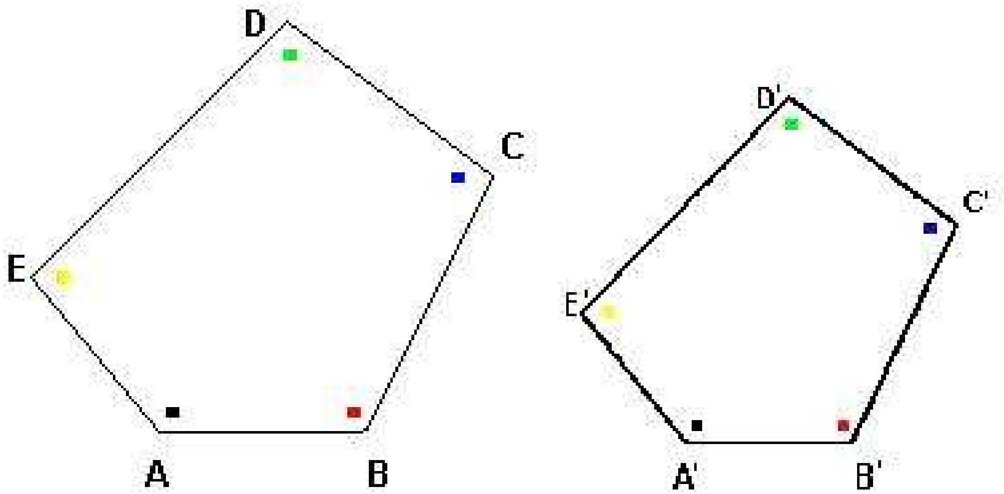
Poligoni convessi: proprietà angoli, similitudine

Figura angoli	Nomenclatura specifica	n = numero lati poligono **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f** = angoli interni **a'**, **b'**, **c'**, **d'**, **e'**, **f '** = angoli esterni
 	Nel caso della figura a lato: esagono equiangolo si ha: **a** + **b** + **c** + **d** + **e** + **f** = (6 – 2)180°= (4) 180°= **720°** **a'** + **b'** + **c'** + **d'** + **e'** + **f '** = **360°** **a** = (4) 180°/ 6 = 720°/ 6 = **120°** **a'** = 360°/ 6 = **60°**	

Proprietà angoli interni ed esterni di un poligono convesso

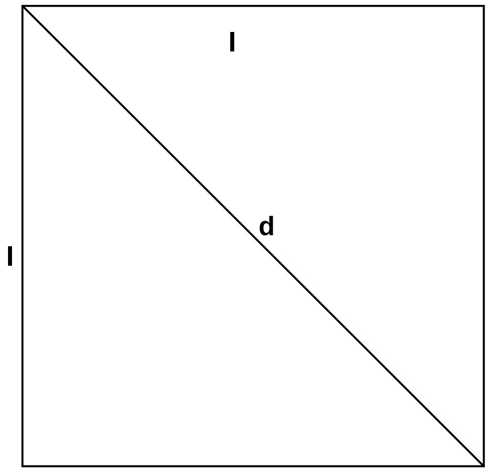
1) La somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono convesso è **(n – 2) 180°**
2) La somma delle ampiezze degli angoli esterni è **360°**, qualunque sia il numero dei lati
3) L'ampiezza di ciascun angolo interno di un poligono equiangolo di n lati è **(n – 2) 180°: n**
4) L'ampiezza di ciascun angolo esterno di un poligono equiangolo di n lati è **360°: n**

Figure similitudine

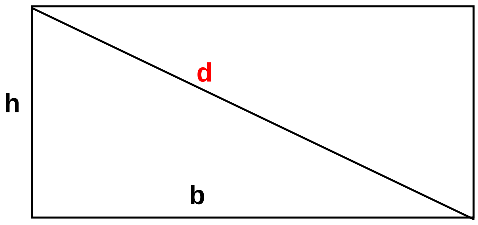
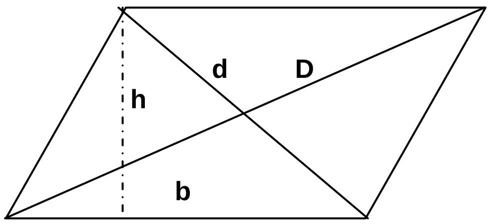


1) Due poligoni si dicono simili quando hanno gli angoli rispettivamente uguali e i lati omologhi proporzionali.
   A = A' ; B = B' ; C = C' ; D = D' ; E = E'
   AB = A'B' ; BC = B'C' ; CD = C'D' ; DE = D'E' ; EA = E'A'
2) I perimetri di due poligoni simili stanno tra loro come due lati omologhi
   2p : 2p' = AB : A'B'
3) Due poligoni regolari dello stesso numero di lati sono simili; i loro perimetri, i loro raggi , le loro apoteme stanno fra loro come due lati omologhi
   2p : 2p' = r : r ' = a : a' = AB : A'B'
4) Due poligoni simili stanno fra loro come i quadrati costruiti su due lati omologhi
   S : S' = $(AB)^2$: $(A'B')^2$

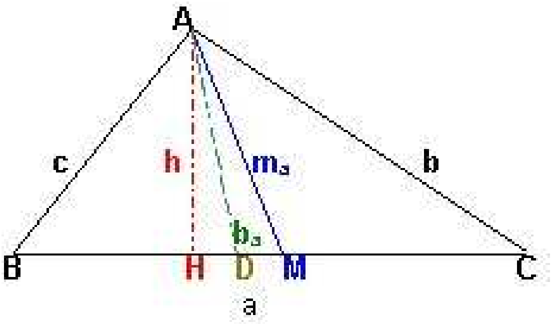
QUADRATO

Figura	Nomenclatura specifica	l = lato d = diagonale
	**Formule dirette**	$S = l^2$ $S = d^2 / 2$
	Formule inverse	$l = \sqrt{S}$ $d = \sqrt{2S}$
	Relazioni notevoli	$d = l\sqrt{2}$ $l = d / \sqrt{2}$

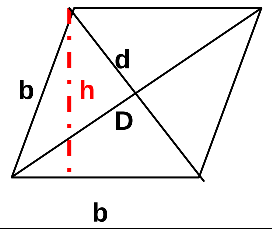
RETTANGOLO e PARALLELOGRAMMO

Figura	Nomenclatura specifica	d = diagonale minore D = diagonale maggiore
	**Formule dirette**	**$S = bh$** **$d = \sqrt{b^2 + h^2}$** **(valida per il solo rettangolo)**
	**Formule inverse**	**$b = S / h$** **$h = S / b$**
Dicesi parallelogramma un quadrilatero con i lati opposti paralleli: 1) I lati opposti sono uguali e paralleli; 2) Gli angoli opposti sono uguali e quelli adiacenti supplementari (somma pari a 180°) 3) Ogni diagonale scompone il parallelogramma in due triangoli uguali. 4) Le diagonali si tagliano scambievolmente per metà. 5) L'area si ottiene moltiplicando la lunghezza della base per quella della altezza.	**Relazioni notevoli**	

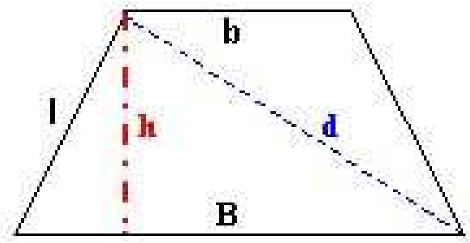
TRIANGOLO

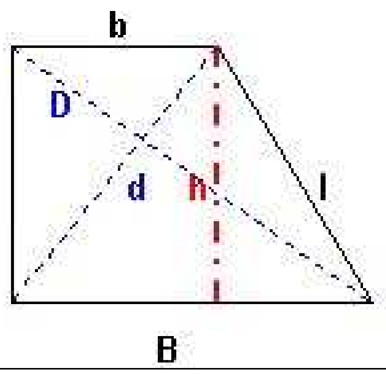
Figura e note	Nomenclatura specifica	a, b, c lati del triangolo p = semiperimetro m_a= mediana relativa al lato BC b_a= bisettrice relativa all'angolo **Â**
	**Formule dirette**	**$S = ah / 2$** **$m_a=(\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}\ ) / 2$** **$m_b=(\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}\ ) / 2$** **$m_c=(\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}\ ) / 2$** **$b_a=(2\sqrt{bc\ p(p - a)}\ ) / (b + c)$** **$b_b=(2\sqrt{ac\ p(p - b)}\ ) / (a + c)$** **$b_c=(2\sqrt{ab\ p(p - c)}\ ) / (a + b)$**
Punti notevoli di un triangolo: **Circoncentro** = intersezione degli **assi** dei lati di un triangolo; **Incentro** = intersezione delle **bisettrici** degli angoli interni di un triangolo; **Baricentro** = intersezione delle **mediane** di un triangolo	**Formule inverse**	**$a = 2S / h$** **$h = 2S / a$**
Vedi scheda 31	**Relazioni notevoli** **Area in funzione dei lati (form. Erone)**	**$S = \sqrt{p\ (p - a)(p - b)(p - c)}$**

ROMBO

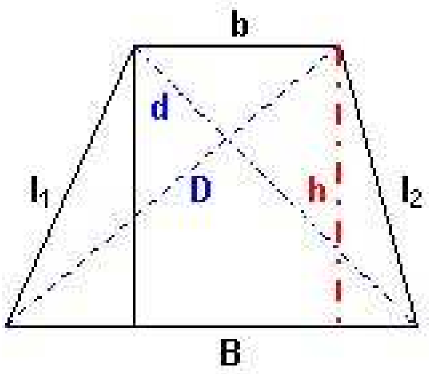
Figura	Nomenclatura specifica	d = diagonale minore D = diagonale maggiore
	**Formule dirette**	**$S = (D\ d)/ 2$** **$S = bh$** **$b = \sqrt{(d/2)^2 + (D/2)^2}$**
	Formule inverse	**$D = 2S / d$** **$d = 2S / D$** **$b = S / h$** **$h = S / b$**
Dicesi rombo un parallelogramma con quattro lati uguali. 1) gli angoli opposti sono uguali e gli adiacenti supplementari (somma pari a 180°) 2) Le diagonali si tagliano scambievolmente a metà e sono fra loro perpendicolari; 3) Le diagonali sono bisettrici degli angoli, i cui vertici sono gli estremi delle diagonali;	**Relazioni notevoli**	

TRAPEZIO

<table>
<tr><td>Figura</td><td>Nomenclatura specifica</td><td>b = base minore
B = base maggiore
l = lato obliquo
d = diagonale minore (nel trapezio isoscele sono uguali)
D = diagonale maggiore</td></tr>
<tr><td></td><td>Formule dirette</td><td>$S = (B + b)h / 2$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Formule per il trapezio isoscele</td><td>$l^2 = h^2 + [(B - b)/2]^2$

$d^2 = h^2 + [(B + b)/2]^2$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Formule per il trapezio rettangolo</td><td>$l^2 = h^2 + (B - b)^2$

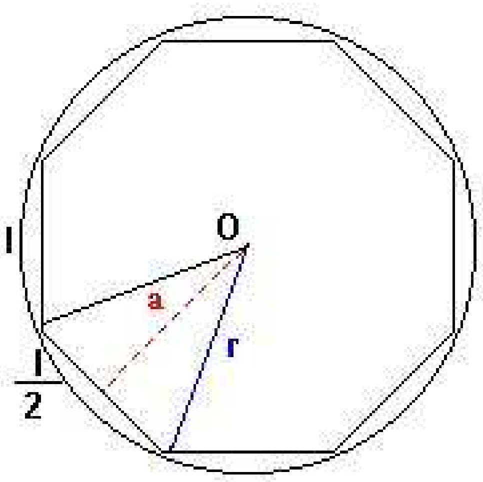
$D^2 = h^2 + B^2$

$d^2 = h^2 + b^2$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Formule inverse</td><td>$(B + b) = 2S / h$

$h = 2S / (B + b)$</td></tr>
<tr><td>Un trapezio dicesi isoscele quando ha i lati obliqui uguali e anche gli angoli alle basi sono uguali

Un trapezio dicesi rettangolo quando ha un lato perpendicolare alle basi</td><td>Relazioni notevoli</td><td></td></tr>
</table>

POLIGONO REGOLARE
(e relazioni fra i lati e i raggi dei cerchi circoscritti)

<table>
<tr><td colspan="2">Figura</td><td rowspan="2">Nomenclatura specifica</td><td rowspan="2">r = raggio cerchio circoscritto
p = semiperimetro
a = apotema
n = numero dei lati
l_3 = lato triangolo equilatero
l_4 = lato quadrato
l_5 = lato pentagono regolare
l_6 = lato esagono regolare
l_{10} = lato decagono regolare</td></tr>
<tr><td>Triangolo equilatero
Quadrato
Pentagono regolare</td><td>Esagono regolare
Decagono regolare</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td>Formule dirette</td><td>$S = p\,a = nla / 2$

$2p = nl$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Formule inverse</td><td>$a = S / p$

$p = S / a$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Un poligono dicesi regolare quando ha i lati e gli angoli uguali.

Congiungendo i vertici di un esagono reg. con il centro otteniamo sei triangoli equilateri di lato l.

Il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è la sezione aurea del raggio.</td><td>Relazioni notevoli</td><td>$r = \sqrt{a^2 + (l/2)^2}$

$l_3 = r\sqrt{3}$

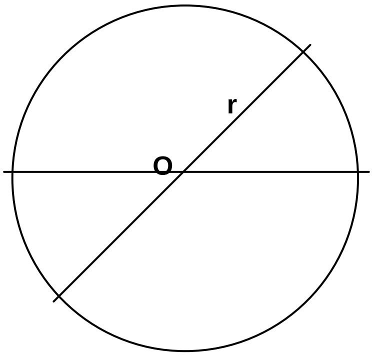
$l_4 = r\sqrt{2}$

$l_5 = [\, r(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\,) \,] / 2$

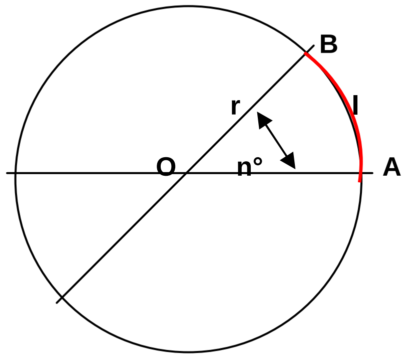
$l_6 = r$

$l_{10} = [\, r\,(\sqrt{5} - 1)\,] / 2$</td></tr>
</table>

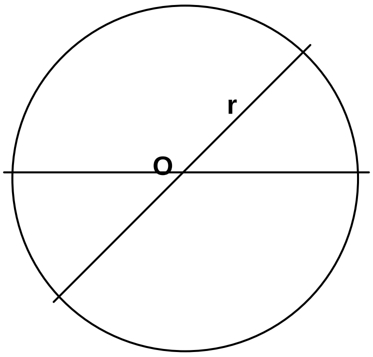
CIRCONFERENZA

Figura	Nomenclatura specifica	c = circonferenza r = raggio
	**Formule dirette**	**$c = 2\pi r$**
	Formule inverse	**$r = c / 2\pi$**
	Relazioni notevoli	

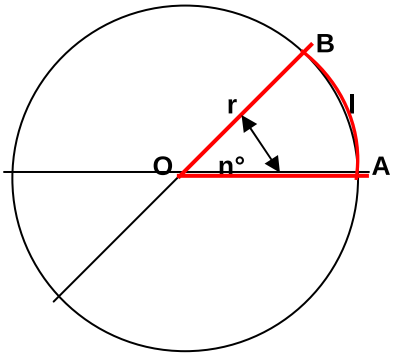
ARCO

Figura	Nomenclatura specifica	l = misura dell'arco r = raggio della circonferenza n° = misura, in gradi dell'angolo al centro
	**Formule dirette**	**$2\pi r : 360° = l : n°$** quindi **$l = (\pi r n°) / 180°$**
	Formule inverse	**$n° = 180° l / \pi r$** **$r = 180° l / \pi n°$**
	Relazioni notevoli	

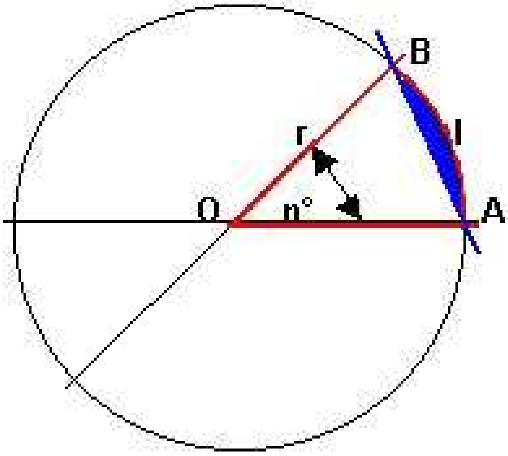
CERCHIO

Figura	Nomenclatura specifica	l = misura dell'arco r = raggio della circonferenza n° = misura, in gradi dell'angolo al centro
 	**Formule dirette**	**$S = \pi r^2$**
	Formule inverse	**$r = \sqrt{(S / \pi)}$**
	Relazioni notevoli	

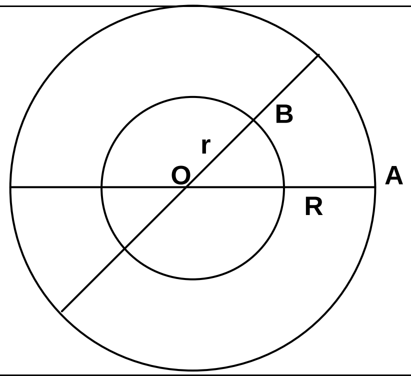
SETTORE CIRCOLARE

Figura	Nomenclatura specifica	r = raggio della circonferenza n° = ampiezza angolo al centro del settore l = lunghezza dell'arco
	**Formule dirette**	Dalle proporzioni: **$l : \pi r = n° : 180°$** **$S : \pi r^2 = n° : 360°$** Otteniamo : **$S = (\pi r^2 n°) / 360$** **$S = lr / 2$**
	Formule inverse	**$r = \sqrt{(360° S / \pi n°)}$** **$n° = 360° S / \pi r^2$** **$l = 2S / r$** **$r = 2S / l$**
	Relazioni notevoli	

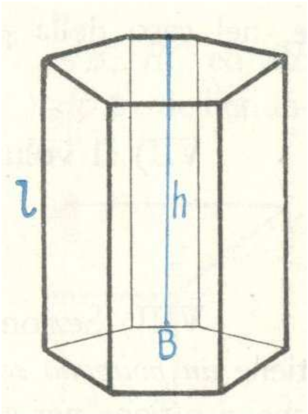
SEGMENTO CIRCOLARE AD UNA BASE

Figura	Nomenclatura specifica	r = raggio della circonferenza
	**Formule dirette**	**$S = [(\pi\, r^2\, n°) / 360] - (r^2 \operatorname{sen} n°) / 2$** **$p = [(\pi\, r\, n°) / 180] + 2r \operatorname{sen}(n° / 2)$**
	Formule inverse	
	Relazioni notevoli	

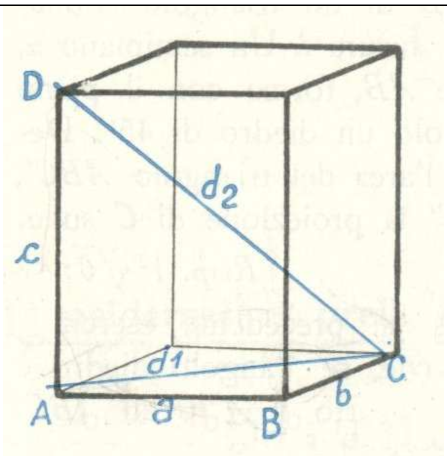
CORONA CIRCOLARE

Figura	Nomenclatura specifica	R = raggio del cerchio maggiore r = raggio del cerchio minore
 	**Formule dirette**	**$S = \pi (R^2 - r^2) = \pi (R - r)(R + r)$** **$2p = 2 \pi (R + r)$**
	Formule inverse	
	Relazioni notevoli	

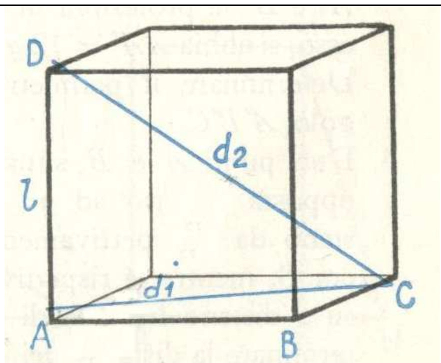
PRISMA RETTO

Figura	Nomenclatura specifica	2p = perimetro di base
	**Formule dirette**	S_b = dipende dalla figura di base $S_l = 2ph$ $S_t = S_l + S_b$ $V = S_b\, h$
	Formule inverse	$h = S_l / 2p$ $2p = S_l / h$ $S_b = V / h$ $h = V / S_b$
	Relazioni notevoli	

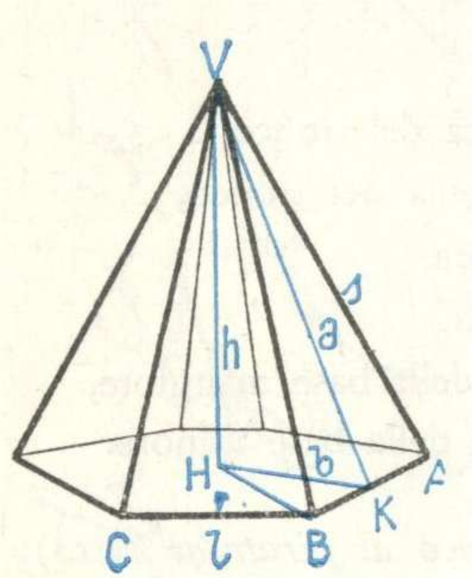
PARALLALEPIPEDO RETTANGOLO

Figura	Nomenclatura specifica	a, b = dimensioni di base c = altezza d_2 = diagonale del parallelepipedo d_1 = diagonale della base
	**Formule dirette**	$S_b = a\ b$ $S_l = 2(a + b)\ c$ $S_t = 2\ (ab + bc + ac)$ $V = a\ b\ c$
	Formule inverse	$c = S_l / 2\ (a + b)$ $2\ (a + b) = S_l / c$ $a\ b = V / c$ $c = V / a\ b$
	Relazioni notevoli Dai triangoli rettangoli: ACD e ABC	$d_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ $d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$

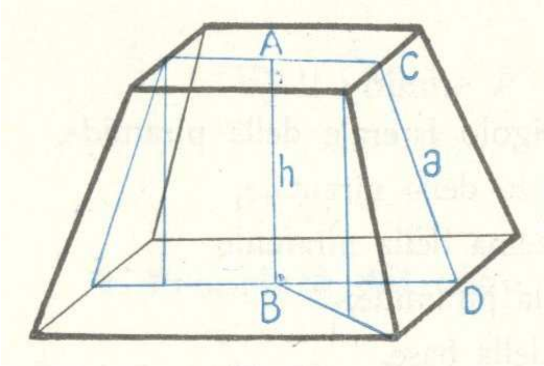
CUBO

Figura	Nomenclatura specifica	AB = BC = DA = l l = spigolo del cubo d_1 = diagonale di base del cubo d_2 = diagonale del cubo
	**Formule dirette**	$S_b = l^2$ $S_l = 4\,l^2$ $S_t = 6\,l^2$ $V = l^3$
	Formule inverse	$l = \sqrt{S_l / 4}$ $l = \sqrt{S_t / 6}$ $l = \sqrt[3]{V}$
	Relazioni notevoli	$d_1 = l\,\sqrt{2}$ $d_2 = l\,\sqrt{3} = 1{,}7320\,l$

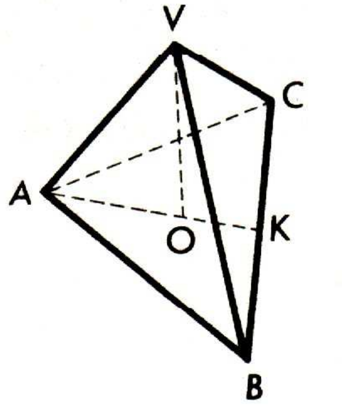
PIRAMIDE RETTA

Figura	Nomenclatura specifica	*VA* = *s* = misura dello spigolo laterale della piramide, *VH* = *h* = misura dell'altezza della piramide VK = a = apotema della piramide *BC* = *l* = misura del lato della base, *HK* = *b* = misura dell'apotema di base, *HB* = *r* = misura del raggio della base, p = semiperimetro di base
	**Formule dirette**	**S_b =** dipende dalla figura di base **$S_l = p\ a$** **$S_t = S_l + S_b$** **Per la piramide retta** **$S_t = S_l + S_b = p\ a + pb = p\ (a + b)$** **$V = (S_b\ h) / 3$**
	Formule inverse	**$p = S_l / a$** **$a = S_l / p$** **$S_b = 3V / h$** **$h = 3V / S_b$**
Sezionando una piramide con un piano parallelo alla base, si ottiene *un poligono sezione che è simile alla base.* Inoltre la piramide data e quella che si ottiene per sezione sono tali che *gli elementi lineari omologhi sono proporzionali,* *due facce omologhe stanno come i quadrati costruiti su due spigoli corrispondenti;* *le due piramidi stanno come i cubi costruiti su due segmenti omologhi*	**Relazioni notevoli** Dai triangoli rettangoli:	**$s^2 = h^2 + r^2$** (da VHB) **$a^2 = h^2 + b^2$** (da VHK) **$r^2 = (l/2)^2 + b^2$** (da BKH per pir. Reg.) **$s^2 = (l/2)^2 + a^2$** (da VKB per pir. Reg.)

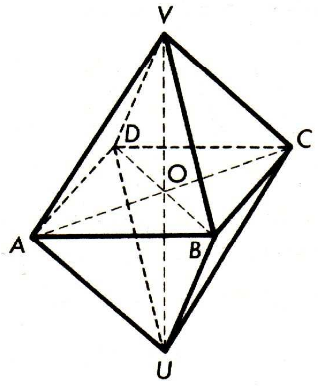
TRONCO DI PIRAMIDE RETTA

Figura	Nomenclatura specifica	AB = h = misura dell'altezza del tronco CD = a = apotema del tronco 2p' = perimetro della base minore 2p = perimetro della base maggiore S_b = area base minore S_B = area base maggiore
	**Formule dirette**	**S_b =** dipende dalla figura di base **$S_l = (p + p') a$** **$S_t = S_l + S_b + S_B$** **$V = h (S_b + S_B + \sqrt{S_b S_B}) / 3$**
	Formule inverse	**$p + P = S_l / a$** **$a = S_l / (p+ P)$**
Si ricordi che le basi S_b, S_B sono due *poligoni simili,* e che stanno fra loro, oltre che come i quadrati di due lati omologhi, anche come i quadrati delle loro distanze dal vertice della piramide cui appartiene il tronco.	**Relazioni notevoli**	

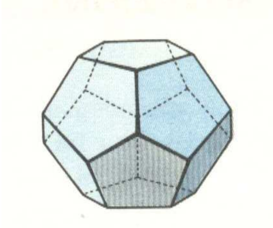
Tetraedro

Figura	Nomenclatura specifica	A_{tri} = area triangolo equilatero (una faccia) A_{tot} = area totale l = spigolo (VC=BC=AV ecc) h = altezza (VO)
	**Formule dirette**	$A_{tri} = l^2 \sqrt{3} / 4$ si avrà $A_{tot} = 4 (l^2 \sqrt{3} / 4) = l^2 \sqrt{3}$ $V = [(l^2 \sqrt{3} / 4) (l \sqrt{6} / 3)] / 3$ $= l^3 \sqrt{2}/12$
	Formule inverse	
	Relazioni notevoli	Per il teorema di Pitagora si ha poi: $VO = h = \sqrt{[\, l^2 - (l\sqrt{3} / 3)^2} = (l \sqrt{6}) / 3$

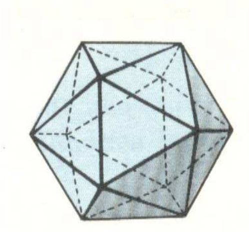
Ottaedro

Figura	Nomenclatura specifica	A_{tri} = area triangolo equilatero (una faccia) A_{tot} = area totale l = spigolo (VC=BC=AV=BU ecc) h = altezza piramide(VO) AC = diagonale
	**Formule dirette**	$A_{tri} = l^2 \sqrt{3} / 4$ si avrà $A_{tot} = 8 (l^2 \sqrt{3} / 4) = 2 l^2 \sqrt{3}$ $V = [(2l^2 /3) (l\sqrt{2} / 2)]$ cioé $= (l^3 \sqrt{2})/3$
	Formule inverse	
	Relazioni notevoli	$AC = l \sqrt{2}$ $VO = (l \sqrt{2}) / 2$

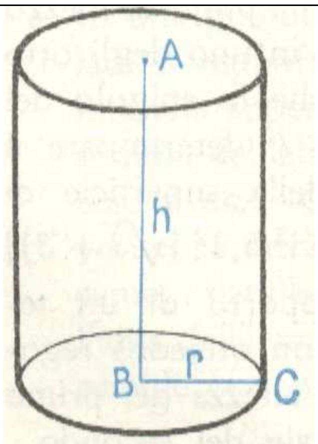
Dodecaedro

Figura	Nomenclatura specifica	A_{peni} = area pentagono regolare (una faccia) A_{tot} = area totale l = spigolo
 dodecaedro regolare	**Formule dirette**	$A_{tot} = 3\,(\sqrt{25 + 10\sqrt{5}})\, l^2$ $V = (15 + 7\sqrt{5})\, l^3 / 4$
	Formule inverse	
	Relazioni notevoli	

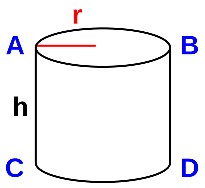
Icosaedro

Figura	Nomenclatura specifica	A_{tri} = area triangolo equilatero (una faccia) A_{tot} = area totale l = spigolo
 icosaedro regolare	**Formule dirette**	$A_{tot} = 5\ l^2\sqrt{3}$ $V = (3 + \sqrt{5})\ 5l^3 / 12$
	Formule inverse	
	Relazioni notevoli	

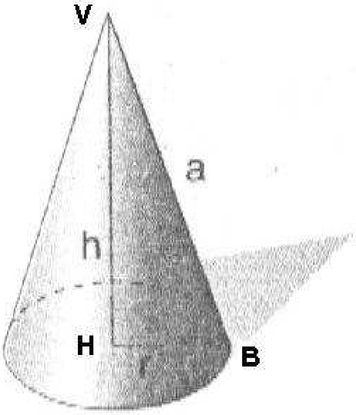
CILINDRO CIRCOLARE

Figura	Nomenclatura specifica	BC = r = misura raggio di base AB = h = misura dell'altezza del cilindro
	**Formule dirette**	$S_b = \pi r^2$ $S_l = 2\pi r h$ $S_t = 2\pi r (h + r)$ $V = \pi r^2 h$
	Formule inverse	$h = S_l / 2\pi r$ $r = S_l / 2\pi h$ $h = V / \pi r^2$ $r = \sqrt{V / \pi h}$
	Relazioni notevoli	

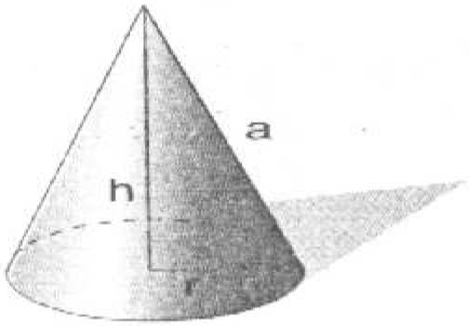
CILINDRO EQUILATERO

Figura	Nomenclatura specifica	r = raggio di base h = 2r La sezione mediana individuata dai punti **ABCD** è un quadrato.
	**Formule dirette**	$S_b = \pi r^2$ $S_l = 4\pi r^2$ $S_t = 6\pi r^2$ $V = 2\pi r^3$
	Formule inverse	$r = \sqrt{S_l / 4\pi}$ $r = \sqrt{S_t / 6\pi}$ $r = \sqrt[3]{(V / 2\pi)}$
	Relazioni notevoli	

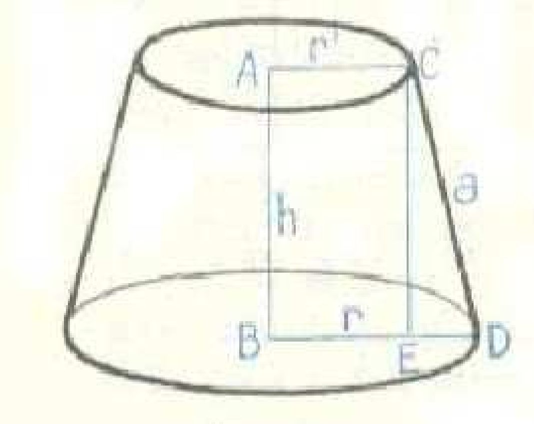
CONO CIRCOLARE RETTO

Figura	Nomenclatura specifica	HB = r = misura raggio di base VB = a = misura apotema del cono VH = h = misura dell'altezza del cono
	**Formule dirette**	$S_b = \pi r^2$ $S_l = \pi r a$ $S_t = \pi r (a + r)$ $V = (\pi r^2 h)/3$
	Formule inverse	$a = S_l / \pi r$ $r = S_l / \pi a$ $h = 3V / \pi r^2$ $r = \sqrt{(3V / \pi h)}$
	Relazioni notevoli Dai triangoli rettangoli **:**	$a^2 = h^2 + r^2$ *(da VHB)*

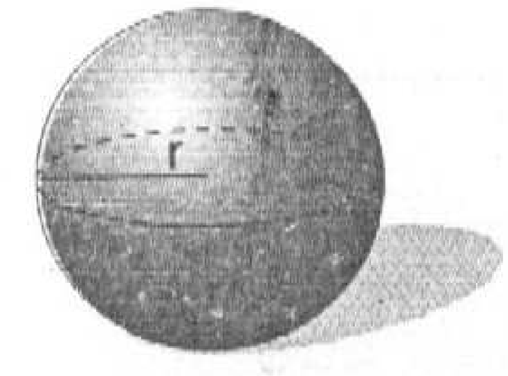
CONO EQUILATERO

Figura	Nomenclatura specifica	r = raggio di base a = 2r
	**Formule dirette**	$S_b = \pi r^2$ $S_l = 2\pi r^2$ $S_t = 3\pi r^2$ $V = (\pi r^3 \sqrt{3}) / 3$
	Formule inverse	$r = \sqrt{S_l / 2\pi r}$ $r = \sqrt{S_l / 3\pi}$ $h = 3V / \pi r^2$ $r = \sqrt{(3V / \pi h)}$
	Relazioni notevoli	$h = r \sqrt{3}$

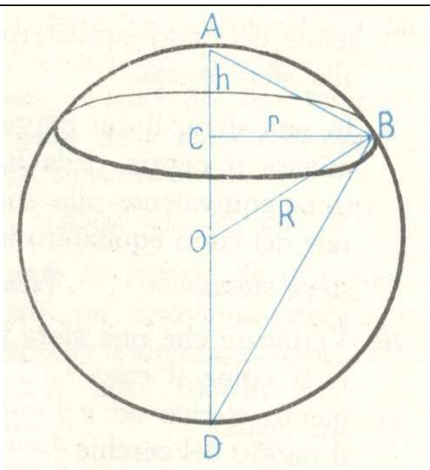
TRONCO DI CONO CIRCOLARE RETTO

Figura	Nomenclatura specifica	AB = h = misura altezza del tronco CD = a = misura apotema del tronco BD = r = misura raggio della base magg. AC = r' = misura raggio della base min. ED = r – r '
 Fig. 20.	**Formule dirette**	$S_b = \pi r'^2$ $S_B = \pi r^2$ $S_l = \pi a (r + r')$ $S_t = \pi a (r + r') + \pi (r^2 + r'^2) =$ $= \pi[a (r + r') + r^2 + r'^2]$ $V = \pi h (r^2 + r'^2 + rr')/ 3$
	Formule inverse	$a = S_l / \pi (r + r')$ $(r + r')= S_l / \pi a$
	Relazioni notevoli Da triangoli rettangoli :	$a^2 = h^2 + (r - r')^2$ (da CED)

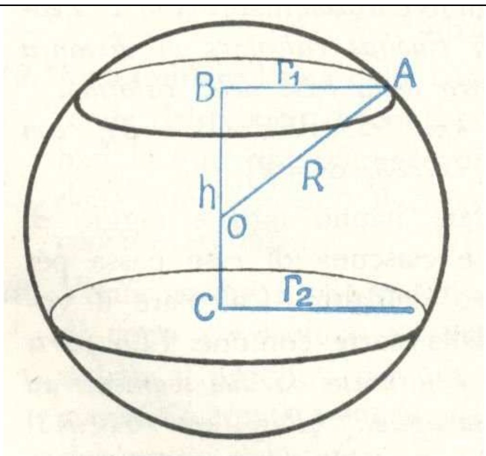
SFERA

Figura	Nomenclatura specifica	r = raggio
	**Formule dirette**	$S = 4\pi r^2$ $V = 4\pi r^3 / 3$
	Formule inverse	$r = \sqrt{S / 4\pi}$ $r = \sqrt[3]{3V / 4\pi}$
	Relazioni notevoli	

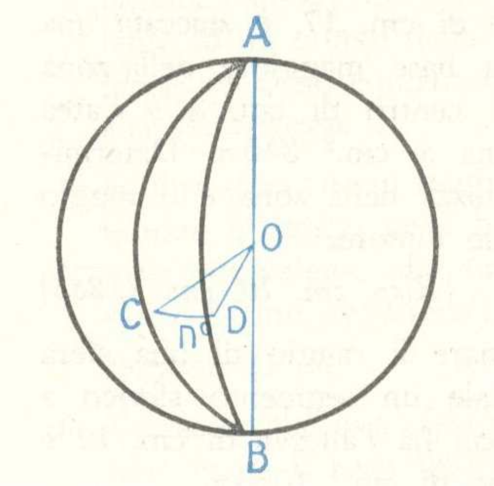
CALOTTA SFERICA E SEGMENTO SFERICO AD UNA BASE

Figura	Nomenclatura specifica	OB = R = misura raggio della sfera AC = h = misura altezza della calotta CB = r = misura raggio cerchio base calotta e segmento
	**Formule dirette**	Area calotta **$S = 2\pi R h$** Volume segmento ad una base **$V = \pi h^2 (R - h / 3)$**
	Formule inverse	
	Relazioni notevoli Da triangoli rettangoli	**$r^2 = h (2R - h)$** (da ABD per il 2° teor. Euclide)

ZONA SFERICA E SEGMENTO SFERICO A DUE BASI

Figura	Nomenclatura specifica	OA = R = misura raggio della sfera BC = h = misura altezza della zona e segmento BA = r_1 = misura raggio di una base CD = r_2 = misura raggio altra base
	**Formule dirette**	Area zona **$S = 2\pi R\, h$** Volume segmento ad due basi **$V = \pi h/6\ (3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$**
	Formule inverse	
	Relazioni notevoli	

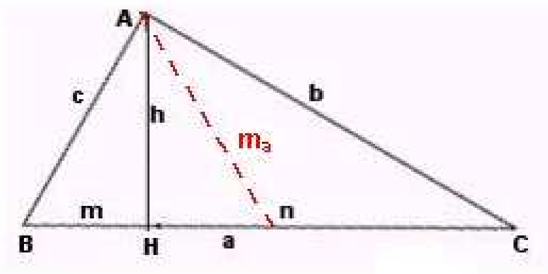
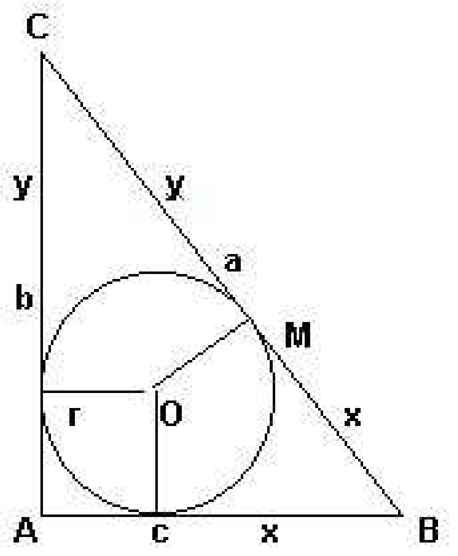
FUSO SFERICO o SPICCHIO

Figura	Nomenclatura specifica	n° = ampiezza angolo del fuso e spicchio OA = R = misura raggio della sfera
	**Formule dirette**	Area fuso **$S = \pi R^2 n° / 90$** Volume spicchio **$V = S R / 3 = \pi R^3 n° / 270$**
	Formule inverse	**$R = \sqrt{90 A / \pi n°}$**
	Relazioni notevoli	Sussistono le proporzioni **1) $4\pi R^2 : A = 360° : n°$** **2) $(4 \pi R^3) / 3 : V = 360° : n°$**

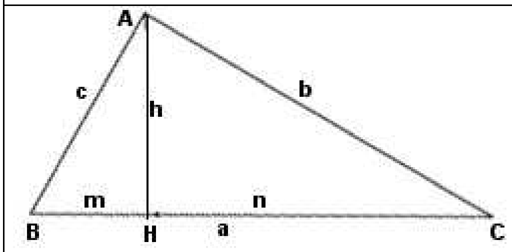
EQUIVALENZA E SIMILITUDINE NELLO SPAZIO

Concetti fondamentali e definizioni	Nomenclatura specifica	S, S' = superfici di poliedri V, V' = volumi di poliedri l, l' = spigoli omologhi di poliedri
Due solidi si dicono equivalenti quando occupano la stessa porzione di spazio.		
Detto volume di un solido, la misura dello spazio che esso occupa, si può dire che:due solidi sono equivalenti quando hanno ugual volume		
Due figure nello spazio sono simili se una di esse è congruente ad una figura omotetica dell'altra.		
Due poliedri si dicono simili se hanno rispettivamente uguali gli angoloidi, e ordinatamente simili le facce che li comprendono.		
Teorema 1° Le superfici di due poliedri simili sono proporzionali ai quadrati degli spigoli omologhi	**Relazioni notevoli**	$\mathbf{S : S' = l^2 : l'^2}$
Teorema 2° I volumi di due poliedri stanno fra loro come i cubi di due spigoli omologhi o delle rispettive altezze.	**Relazioni notevoli**	$\mathbf{V : V' = l^3 : l'^3 = h^3 : h'^3}$

TEOREMA DI PITAGORA
(per i triangoli rettangoli)

Figura	Nomenclatura specifica	a = ipotenusa be c = cateti
	**Formule dirette**	**$a = \sqrt{b^2 + c^2}$** **S = ah/2 =bc/2**
	**Formule inverse**	**$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(a - c)(a + c)}$** **$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a - b)(a + b)}$**
La mediana relativa all'ipotenusa è uguale al raggio del cerchi circoscritto al triangolo e, quindi, alla metà dell'ipotenusa. **$m_a = a/2$**	**Relazioni notevoli**	**ah = bc = 2S** **ah = bc da cui h = bc/a** **S = |xy|**

I°TEOREMA DI EUCLIDE
(per i triangoli rettangoli)

<table>
<tr><td>Figura</td><td>Nomenclatura specifica</td><td colspan="2">a = ipotenusa
b e c = cateti
n = proiezione di b sull'ipotenusa
m= proiezione di c sull'ipotenusa</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Formule dirette</td><td>$b^2 = a\,n$

$a = b^2 / n$</td><td>$c^2 = a\,m$

$a = c^2 / m$</td></tr>
<tr><td></td><td>Formule inverse</td><td>$b = \sqrt{a\,n}$

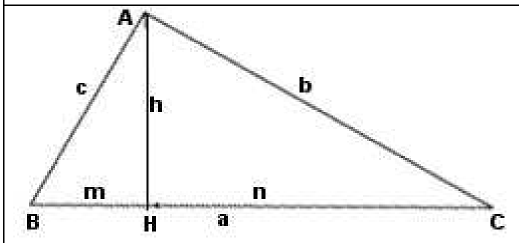
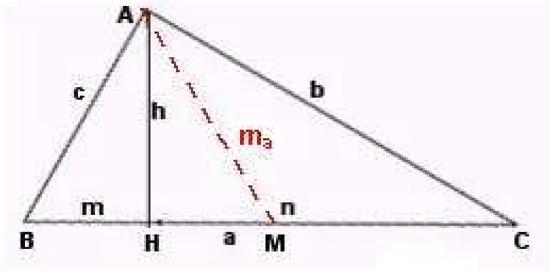
$n = b^2 / a$</td><td>$c = \sqrt{a\,m}$

$m = c^2 / a$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Relazioni notevoli</td></tr>
<tr><td colspan="4">Dividendo membro a membro le ultime due relazioni delle formule inverse otteniamo:

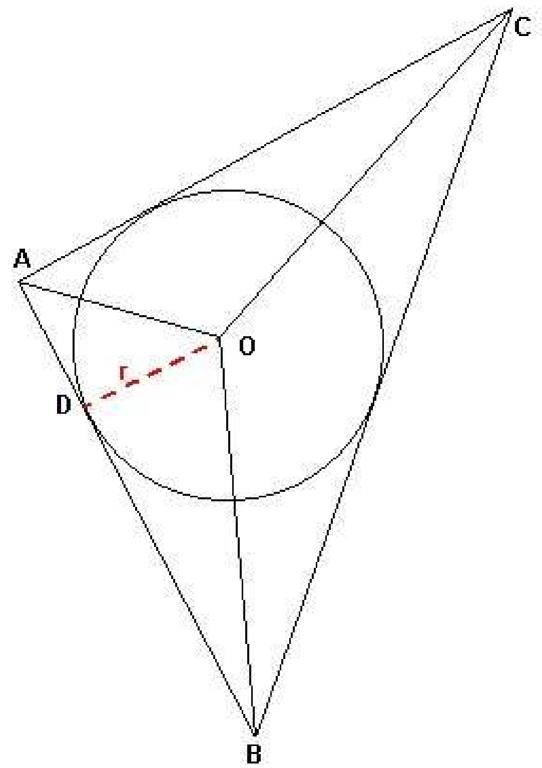
$n / m = b^2 / c^2$

e cioè il rapporto delle proiezioni dei due cateti sulla ipotenusa di un triangolo rettangolo è uguale al quadrato del rapporto dei corrispondenti cateti.</td></tr>
</table>

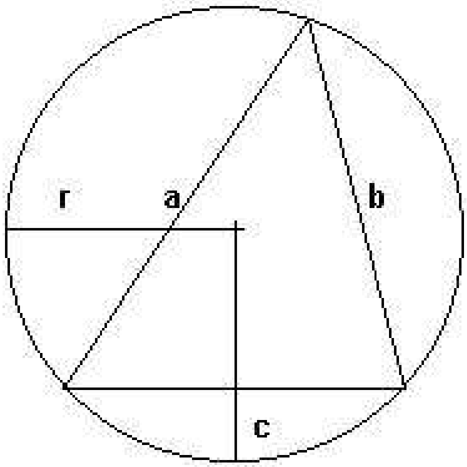
II°TEOREMA DI EUCLIDE
(per i triangoli rettangoli)

Figura	Nomenclatura specifica	a = ipotenusa b e c = cateti m e n = proiezioni di c e b sull'ipotenusa h = altezza relativa all'ipotenusa m_a = lunghezza mediana relativa all'ipotenusa
	**Formule dirette**	**$h^2 = m\ n$**
	**Formule inverse**	**$m = h^2 / n$** **$n = h^2 / m$** **$h = \sqrt{m\ n}$**
Relazioni notevoli		
Dal triangolo di Pitagora applicato ai triangoli ABC, ACH, ABH abbiamo: **$a^2 = b^2 + c^2$; $b^2 = h^2 + n^2$; $c^2 = h^2 + m^2$** per lo stesso teorema applicato al triangolo AHM si ha: **$(m_a)^2 = h^2 + MH^2 = h^2 + (MB - HB)^2$** ma essendo **$MB = a / 2 = m_a$** e **$HB = m$** **$(m_a)^2 = h^2 + (m_a - m)^2 = h^2 + (n - m_a)^2$** Dall'uguaglianze **$S = bc/2 = ah/2$** si deduce **$bc = ah$** da cui **$h = bc /a$**		

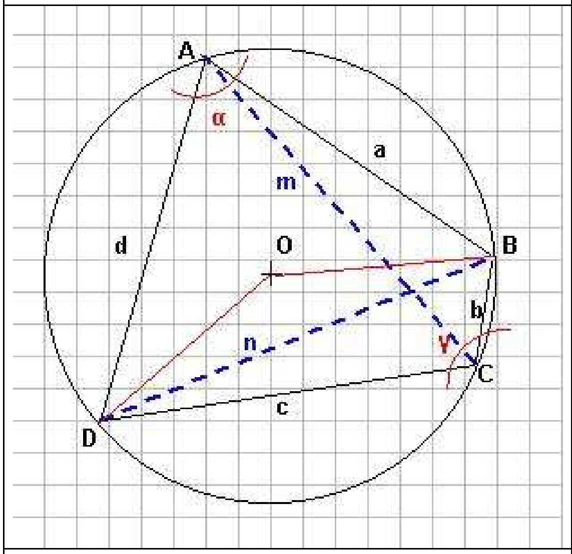
RAGGIO DEL CERCHIO INSCRITTO
(in un triangolo qualsiasi)

Figura	Nomenclatura specifica	r = raggio del cerchio inscritto S = area del triangolo p = semiperimetro del triangolo
	**Formule dirette**	**$r = S / p$**
	Formule inverse	
	Relazioni notevoli	

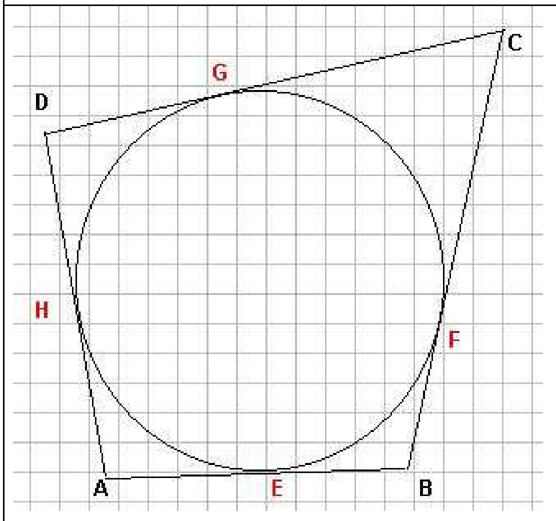
RAGGIO DEL CERCHIO CIRCOSCRITTO
(ad un triangolo qualsiasi)

Figura	Nomenclatura specifica	r = raggio del cerchio circoscritto S = area del triangolo a, b, c = lati del triangolo
	**Formule dirette**	**r = abc / 4S**
	Formule inverse	
	Relazioni notevoli	

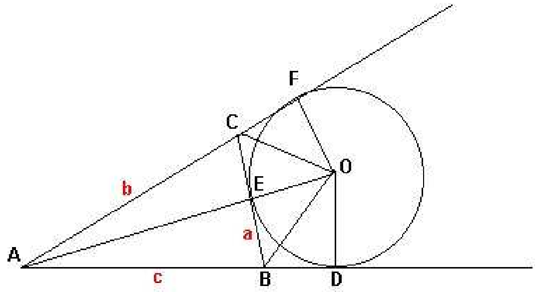
QUADRILATERO CONVESSO INSCRITTO IN UNA CIRCONFERENZA
(Teorema di Tolomeo)

Figura	Nomenclatura specifica	r = raggio del cerchio circoscritto a, b, c, d = lati del quadrilatero
	**Formule dirette**	**mn = bd + ac**
	Formule inverse	
Se un quadrilatero convesso è inscritto in una circonferenza, il rettangolo delle diagonali è equivalente alla somma dei rettangoli che hanno per dimensioni i lati opposti. In un quadrilatero convesso, inscritto in una circonferenza, gli angoli opposti sono supplementari.	**Relazioni notevoli** **α + γ = 180°**	

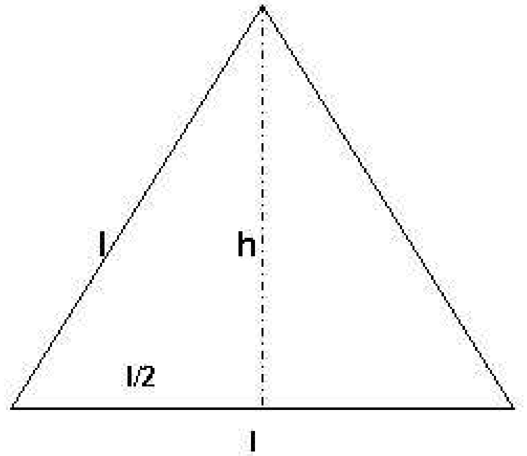
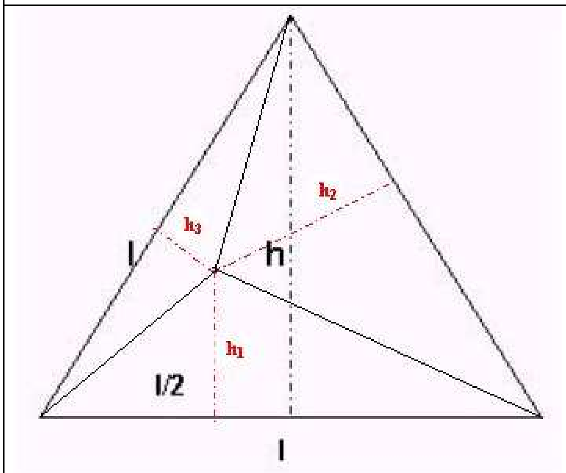
QUADRILATERO CONVESSO CIRCOSCRITTO AD UNA CIRCONFERENZA

Figura	Nomenclatura specifica	r = raggio del cerchio circoscritto AB, CD, AD, BC = lati del quadrilatero
	**Formule dirette**	**AB + DC = AD + BC**
	Formule inverse	
In un quadrilatero circoscritto ad un cerchio la somma dei lati opposti è uguale alla somma degli altri due.	**Relazioni notevoli**	

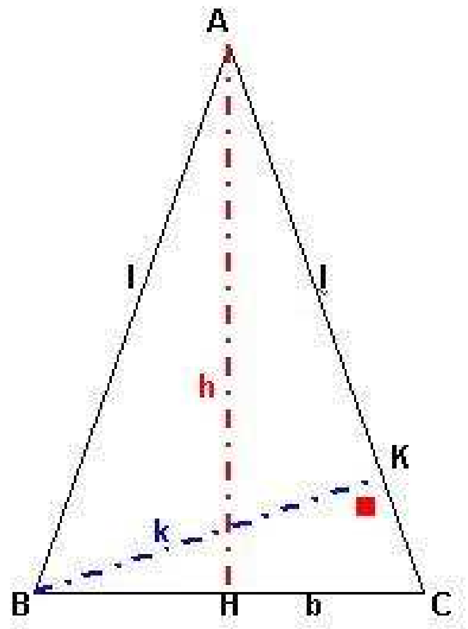
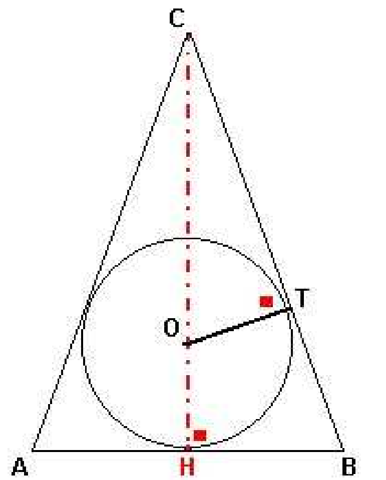
RAGGIO DEL CERCHIO EXINSCRITTO
(in un triangolo qualsiasi)

Figura	Nomenclatura specifica	r_a = raggio del cerchio exinscritto sul lato a r_b = raggio del cerchio exinscritto sul lato b r_c = raggio del cerchio exinscritto sul lato c S = area del triangolo p = semiperimetro del triangolo
	**Formule dirette**	$\mathbf{r_a = S / p - a}$ $\mathbf{r_b = S / p - b}$ $\mathbf{r_c = S / p - c}$
	Formule inverse	
	Relazioni notevoli	

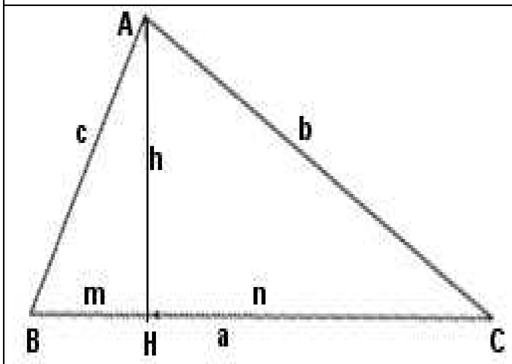
TRIANGOLO EQUILATERO
(relazioni notevoli)

Figura	Nomenclatura specifica	h = altezza l = lato del triangolo S = area Tutti gli angoli uguali a **60°**
	**Formule dirette**	**$h = (l\sqrt{3}) / 2 = 0{,}8660\ l$** **$S = (l^2 \sqrt{3}) / 4 = h^2\sqrt{3} / 3$** **$h = h_1 + h_2 + h_3$**
	**Formule inverse**	**$l = 2h / \sqrt{3} = (2h\ \sqrt{3}) /3 = h / 0{,}8660$**
Le formule trovate per il **quadrato** e per il **triangolo equilatero** sono particolarmente utili nel caso di problemi nei quali compaiono fig. aventi angoli di **45°, 30°, 60°, 120°** . Infatti, in tali problemi è possibile ricondursi a considerare quadrati o triangoli equilateri o, più spesso, loro parti.	**Relazioni notevoli**	

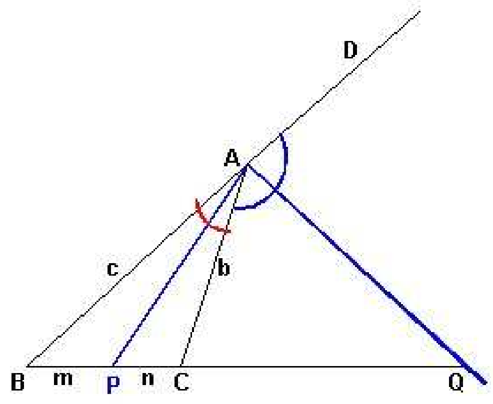
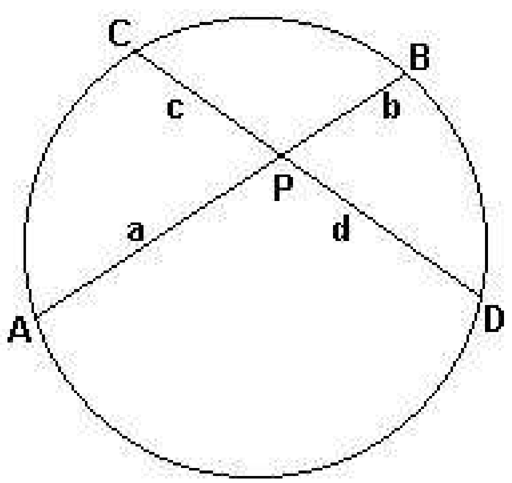
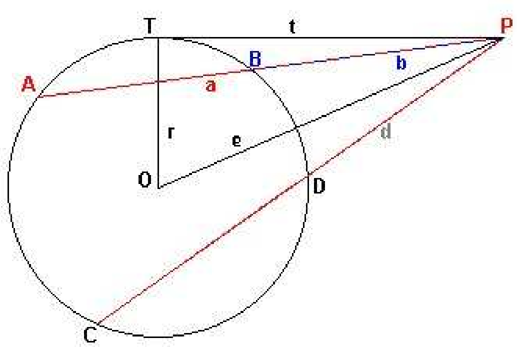
TRIANGOLO ISOSCELE – TRIANGOLO ISOSCELE CIRCOSCRITTO
(relazioni notevoli)

Figura	Nomenclatura specifica	h = altezza l = lato del triangolo b = base del triangolo S = area k = altezza relativa ad un lato = angolo retto
	**Formule dirette**	**$l = \sqrt{b^2/4 + h^2}$** **$S = bh/2 = lk/2$**
1) la bisettrice dell'angolo al vertice, l'altezza e la mediana relative alla base coincidono; 2) Le altezze relative ai lati uguali sono uguali, come pure le mediane relative a quei lati e le bisettrici degli angoli alla base.	**Formule inverse**	**$k = bh / l$**
	**Relazioni notevoli**	**$l^2 = h^2 + (b/2)^2$** **$CT = l – b/2$** Dai triangoli simili COT e CHB si ha : **$l : h – r = b/2 : r = h : l – b/2$**

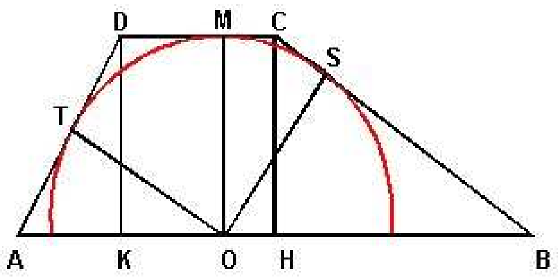
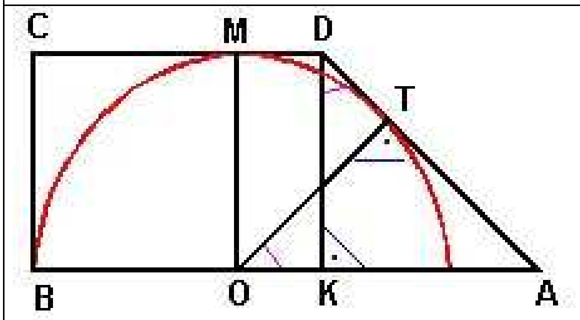
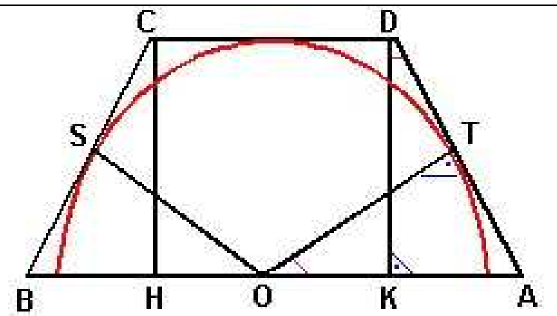
TEOREMA DI PITAGORA GENERALIZZATO
(per i triangoli qualsiasi)

Figura	Nomenclatura specifica	a = ipotenusa b e c = cateti B = angolo acuto
 	**Formule dirette**	**Se B = angolo acuto** $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2am}$ **Se B = angolo ottuso** $b = \sqrt{a^2 + c^2 + 2am}$
	Formule inverse	**Se B = angolo acuto** $a = \sqrt{b^2 - c^2 + 2am}$ $c = \sqrt{b^2 - a^2 + 2am}$ **Se B = angolo ottuso** $a = \sqrt{b^2 - c^2 - 2am}$ $c = \sqrt{b^2 - a^2 - 2am}$
	Relazioni notevoli	

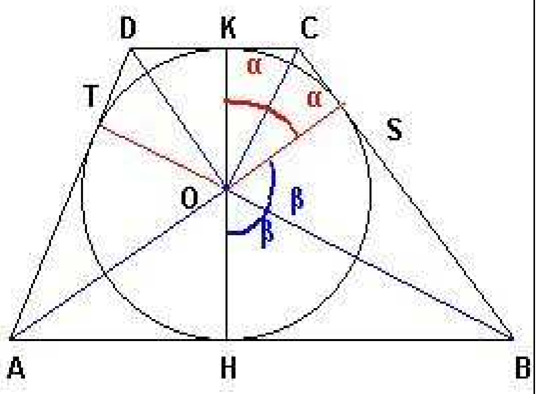
APPLICAZIONI DELLA SIMILITUDINE
(teoremi: bisettrici, corde, secante, tangente)

Figura	Nomenclatura specifica	**Formule**
	AB = c CA = b BP = m PC = n QB =prolungamento lato BC che incontra in Q la bisettrice esterna AP bisettrice angolo interno A AQ bisettrice angolo esterno A	**Teoremi delle bisettrici** I°Teorema **c : b = m : n** ed anche **c : b = QB : QC** II°Teorema **$(AP)^2$ + mn = b c**
	AB e CD corde passanti per P AP = a PB = b CP = c PD = d	**Teorema delle corde** **a : c = d : b** cioè **ab = cd**
	AB e CD due corde i cui prolungamenti passano per P AP = a BP = b CP = c DP = d PT = t OT = r OP = e	**Teorema delle due secanti** **a : c = d : b** cioè **ab = cd** Teorema della secante e della tangente **a : t = t : b** cioè **ab = t^2 = e^2 – r^2**

TRAPEZI CIRCOSCRITTI A SEMICERCHI
(relazioni notevoli)

Figura	Considerazioni
	Disegnamo la figura del trapezio circoscritto ad un semicerchio ed indichiamo con S, M, T i punti di contatto dei lati BC, CD, DA, con il semicerchio e con O, H, K, il centro del semicerchio e le proiezioni dei vertici C, D, sulla retta AB. Osserviamo che i triangoli CHB, OSB sono uguali per avere l'angolo B comune e i cateti VH, OS uguali perché entrambi uguali al raggio OM del semicerchio. I ha quindi: CH = OS HB = SB CB = OB Analogamente, sono uguali i triangoli DKA, OTA, per cui si ha pure DK = OT KA = TA DA = OA Applicando il teor. di Pitagora ai triangoli rettangoli CHB, DKA, otteniamo: $HB^2 = CB^2 – HC^2$ e $KA^2 = DA^2 – KD^2$ Poiché i segmenti di tangente condotti da uno stesso punto ad una medesima circonferenza sono ugiuali, abbiamo: CD =CS + DT = (CB – SB) + (DA – TA) = (CB – HB) + (DA – KA)
	La proprietà detta è di carattere generale ed in particolare Se il trapezio è **rettangolo** il quadrilatero OBCM è un quadrato
	Se infine il trapezio è **isoscele** i quattro triangoli CHB, OSB, DKA,OTA sono uguali e fra le misure B, b,r della base maggiore, della base minore e del raggio sussiste la relazione dovuta al teor. di Pitagora : **$(B/2)^2 = r^2 + [(B-b)/2]^2$** cioè **$4 r^2 + b^2 = 2Bb$**

TRAPEZI CIRCOSCRITTI A CERCHI
(relazioni notevoli)

<table>
<tr><th>Figura</th><th>Considerazioni</th></tr>
<tr><td>


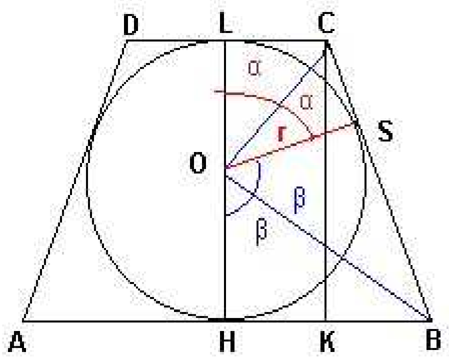
</td><td>
Disegnamo la figura del trapezio circoscritto ad un cerchio ed indichiamo con H, K, O, i punti di contatto del cerchio con la base maggiore e con la base minore e il centro del cerchio. Osserviamo, intanto, che il triangolo COB è retto in O. Infatti, dall'uguaglianza dei triangoli KOC, SOC e dei triangoli HOB,SOB risulta

KOC = SOC = α HOB = SOB = β

e poiché KOH = 180°, si ha:

$2\alpha + 2\beta = 180°$

$\alpha + \beta =$ COB $= 90°$

In modo del tutto analogo si dimostra che anche il triangolo DOA è retto in O. Si osserva inoltre, che i raggi OS, OT sono le altezze relative alle ipotenuse BC, DA di detti triangoli. Inoltre ricordando che i segmenti di tangente condotti da uno stesso punto ad una medesima circonferenza sono ugiuali abbiamo:
AB – CD = (AH + HB) – (CK + KD) =
(AT + BS) – (SC + DT)
</td></tr>
<tr><td>


</td><td>
La proprietà detta è di carattere generale, e si può affermare che in ogni trapezio circoscritto ad un cerchio:
1) il triangolo, ottenuto congiungendo gli estremi di uno dei lati obliqui col centro del cerchio è retto
2) il raggio del cerchio è medio proporzionale fra due segmenti nei quali il punto di tangenza divide un lato obliquo.

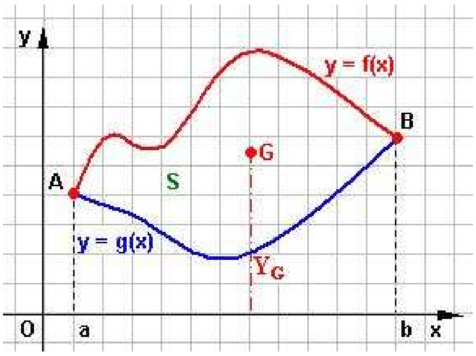
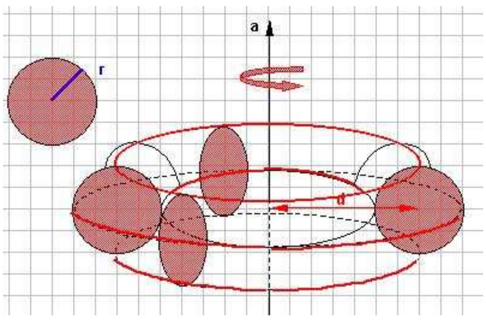
Se, in particolare, il trapezio è isoscele indicate con B, b, r le misure della base maggiore, della base minore e del raggio si ha :

$r^2 = (B/2)(b/2)$ da cui   **$r = \sqrt{B/2 \; b/2}$**

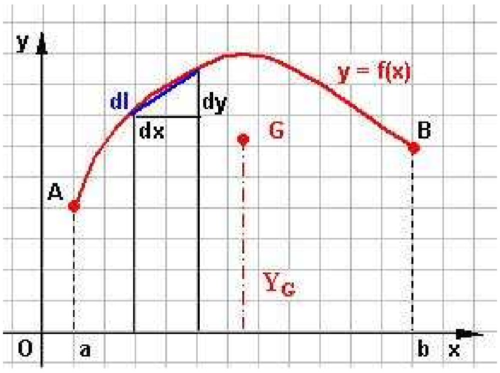
ovvero

$(2r)^2 = Bb$
da cui si deduce che il diametro del cerchio (cioè l'altezza del trapezio) è la media geometrica delle due basi.
</td></tr>
</table>

I°TEOREMA DI GULDINO

Figura	Considerazioni
	**1°Teorema di Guldino** La ricerca del volume di un solido generato dalla rotazione attorno ad un asse di una superficie piana, la si può fare tenendo presente il seguente teorema: Il volume del solido generato dalla rotazione di una superficie piana attorno ad un asse complanare e che non l'attraversi, è dato dal prodotto dell'area della superficie per la lunghezza della circonferenza, descritta dal baricentro. Sia data, una superficie piana, chiusa, di area S, limitata dagli archi di due curve rispettivamente di equazioni: y = f(x) e y = g(x) (con la condizione che per ogni a ≤ x ≤ b, si abbia: f(x) > g(X), e che tanto la f(x), quanto la g(x) siano funzioni continue, positive, ad un sol valore). Il volume V del solido, che tale superficie genera ruotando attorno all'asse x, sarà evidentemente dato dalla differenza dei volumi generati dalla rotazione attorno a detto asse, dei trapezoidi di base (a.b) e limitati rispettivamente dall'arco di curva y = f(x) e y = g(x). Cioè: $$V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx - \pi \int_a^b \{g(x)\}^2 dx =$$ $$= \pi \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\} dx \quad (*)$$ Dal caso generale, indicando con G ed Y_G, rispettivamente il baricentro dell'area S piana (consideriamola come una sottile lamina di densità costante e nota) e la sua ordinata, per quanto affermato dal teorema enunciato, si potrà scrivere: $$V = \pi \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\} dx = 2\pi Y_G \bullet S$$
	Tale formula consente: di determinare il volume V senza ricorrere all'operazione di integrazione, una volta nota l'area della superficie S, e la misura della distanza Y_G del baricentro dall'asse di rotazione; di determinare la distanza Y_G del baricentro, dall'asse di rotazione, noti il volume del solido e l'area S della superficie che lo genera; di determinare l'area **S** della superficie che ruota, noti il volume V del solido e la distanza Y_G del baricentro dall'asse di rotazione. Per il volume V del solido delimitato dalla superficie torica si ottiene l'espressione $$\mathbf{V = 2d(\pi r)^2}$$

II°TEOREMA DI GULDINO

<table>
<tr><th>Figura</th><th>Considerazioni</th></tr>
<tr><td>
</td><td>

2°Teorema di Guldino

Inoltre la ricerca della superficie di un solido generato dalla rotazione attorno ad un asse di una superficie piana, la si può fare tenendo presente il seguente teorema:
L'area della superficie generata dalla rotazione di un arco di linea piana, attorno ad un asse, complanare e che non l'attraversi, è misurata dal prodotto della lunghezza dell'arco per la circonferenza descritta dal baricentro della linea. (la linea piana **AB** la si può pensare come un'asta pesante, di sezione estremamente piccola, e di densità costante e nota).

Volendo determinare la lunghezza **l** dell'arco di curva **AB** di equazione: y = f(x) (con la condizione che f(x) sia continua, positiva e ad un sol valore, per ogni x compreso in (a,b)), si consideri un elemento piccolissimo, dell'arco **AB**, tale da confondersi con la sua corda.
Detti: dx e dy, rispettivamente l'intervallino base e l'incremento della funzione, relativi all'elemento dl, si può scrivere:

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

da cui $$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

conseguentemente la lunghezza dell'arco sarà:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

cioè:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx \quad (**)$$

</td></tr>
<tr><td></td><td>

Indicando con **G** ed **Y_G**, il baricentro e la sua distanza rispetto all'asse di rotazione, e con S l'area della superficie, descritta dall'arco di lunghezza **l**, potremo scrivere

$$S = 2\pi Y_G\, l = 2\pi Y_G \bullet \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Tale formula consente:

a) di trovare S, noti **l** ed **Y_G**;
b) di trovare **l**, noti S ed **Y_G**;
c) di trovare **Y_G**, noti S ed **l**.

</td></tr>
</table>

ESEMPI SVOLTI PER SOLIDI DI ROTAZIONE

Figura

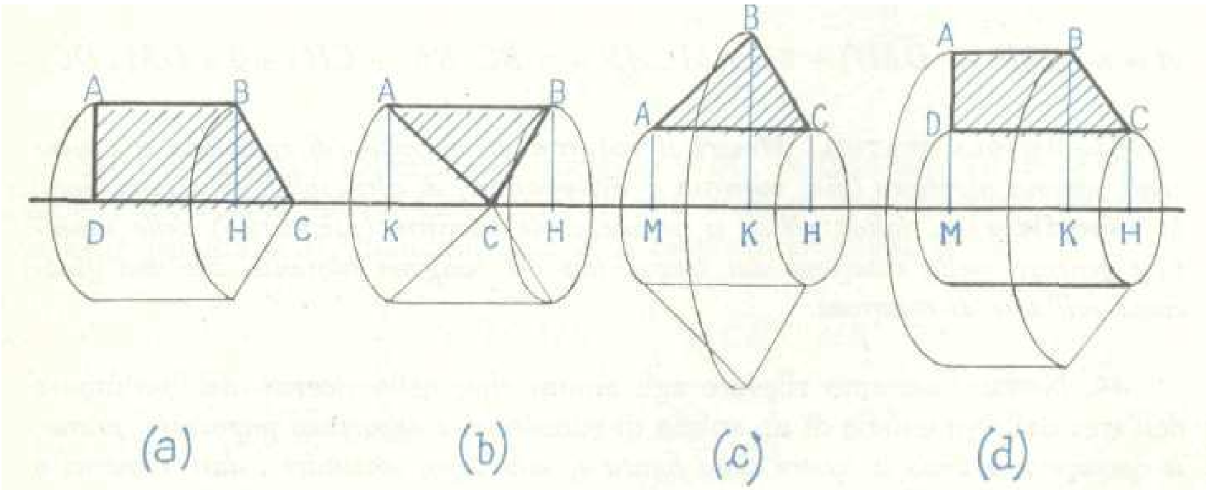


Fig. 28.

Considerazioni

La fig. 28 mostra i solidi ottenuti facendo ruotare di un giro completo determinati poligoni intorno alla retta *r (asse)* del loro piano, che non li attraversa. Qui di seguito diamo le espressioni che consentono di calcolare il volume *V* e l'area *A* di tali solidi.

a) $V = \pi AD^2 . DH + (\pi BH^2\ HC) / 3 = \pi\ AD^2(3\ DH + HC)$;
$A = \pi AD^2 + 2\ \pi\ AD\ AB + \pi\ BH\ BC = \pi AD\{.AD + 2\ AB + BC).$
Si noti che abbiamo sfruttato l'uguaglianza $AD = BH$.

b) $V = \pi AK^2\ AB - (\pi AK^2\ KC)/3 - (\pi BH^2\ CH)/3 =$
$= (\pi AK^2)/3\ [3\ AB - (KC + CH)] = (\pi AK^2)/3\ (3\ AB - AB) = (2\pi AK^2 AB)/3;$
$A = 2\pi\ AK \bullet AB + \pi AK \bullet AC + \pi BH \bullet CB = \pi AK(2AB + AC + CB);$
dove si è considerato $AK = BH$ e $KC + CH = KH = AB$.

c) $V = (\pi\ MK)/3\ (AM^2 + BK^2 + AM \bullet BK) + (\pi\ KH)/3\ (CH^2 + BK^2 + CH \bullet BK) - \pi AM^2 \bullet MH =$
$= \pi/3\ (AM^2 + BK^2 + AM \bullet BK)\ (MK + KH) - \pi AM^2 \bullet MH =$
$= \pi/3\ (AM^2 + BK^2 + AM \bullet BK)\ MH - \pi AM^2\ MH =$
$= \pi\ MH/3\ (AM^2 + BK^2 + AM \bullet BK - 3\ AM^2) = \pi\ MH/3\ [BK^2 + AM\ (BK - 2AM)];$

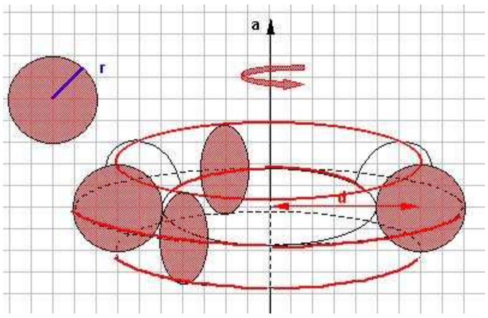
$A = \pi\ (AM + BK) \bullet AB + \pi\ (HC + BK) \bullet BC + 2\pi\ AM \bullet AC = \pi\ [(AM + BK)\ (AB + BC) + 2\ AM \bullet AC];$
avendo considerato che si ha: $AM = CH$ ed $MK + KH = MH = AC$.

d) $V = \pi\ AM^2 \bullet MK + (\pi\ KH)/3\ [BK^2 + CH^2 + BK \bullet CH) - \pi DM^2 \bullet MH;$
$A = \pi\ (AM^2 - DM^2) + 2\ \pi\ AM \bullet AB + \pi\ BC \bullet (BK + CH) + 2\ \pi\ DM \bullet DC.$

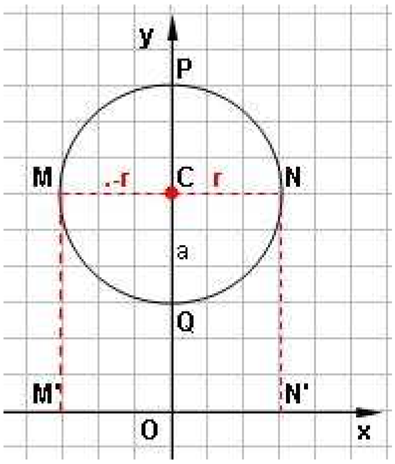
REGOLA PRATICA. *Mentre il* **volume** *di un solido di rotazione si ottiene come somma algebrica (cioè* **somma** *o* **differenza)** *di altri solidi di volume noto, la* **superficie** *del solido stesso si ottiene come* **somma** *(aritmetica) delle superficie generate nella rotazione dai singoli lati del poligono ruotante, che non giacciono sull'asse di rotazione.*

NOTA. Facciamo rilevare agli alunni che, nella ricerca del volume e dell'area della superficie di un solido di rotazione, *è opportuno impostare, prima, le operazioni usando le lettere della figura e, solo dopo, sostituire i dati numerici o letterali forniti dall'enunciato del problema o deducibili da questo.* Infatti, spesso ciò consente di effettuare delle semplificazioni preliminari, mediante le quali si possono evitare i calcoli relativi alla ricerca dei valori di determinati segmenti.
Così, nell'esempio b), i passaggi relativi al calcolo di *V* consentono, qualora l'enunciato assegni solo le lunghezze del lato *AB* e dell'altezza *AK* ad esso relativa, di evitare la ricerca della misura delle due proiezioni *KC* e *CH.*
La precedente avvertenza vale, in particolare, per i problemi che richiedono la determinazione di un *rapporto* di volumi o di aree. In questi problemi,
infatti, gli enunciati forniscono solo i dati essenziali, cioè quelli delle grandezze che non vengono semplificate. Pertanto chi, senza impostare i rapporti e fare le relative semplificazioni, passasse subito alla ricerca dei valori delle grandezze necessarie per la determinazione dei singoli volumi o delle singole aree, rischierebbe di trovarsi ad un punto morto per mancanza di dati.

ESEMPIO SVOLTO CON IL I°TEOREMA DI GULDINO

<table>
<tr><th>Figura</th><th>Considerazioni</th></tr>
<tr><td>
</td><td>I°Teorema di Guldino

Per il volume V del solido delimitato dalla superficie torica si ottiene l'espressione

$$V = 2d(\pi r)^2$$
come già detto.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Vediamone l'impostazione teorica:

La superficie torica, o toro, è la superficie generata dalla rotazione completa di una circonferenza intorno ad una retta del suo piano e non secante rispetto ad essa. Riferiamo il piano ad un sistema cartesiano così fatto: l'asse delle x coincidente con l'asse di rotazione, l'asse delle y passante per il centro C dalla circonferenza e diretto positivamente da O verso C. In tale sistema se a è l'ordinata di C e r il raggio della circonferenza ($r \le a$) l'equazione di questa è:

$$x^2 + (y - a)^2 = r^2$$

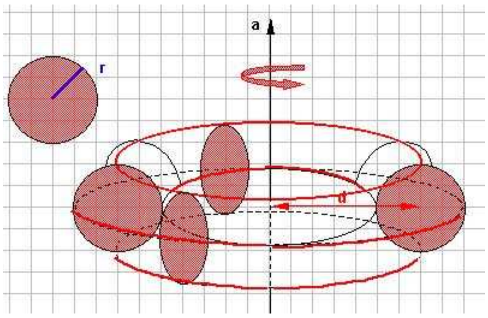
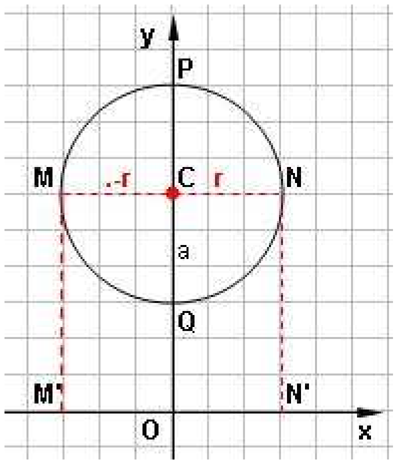
Il volume V richiesto è la differenza fra il volume V_1 del solido generato dalla rotazione del trapezoide M'MPNN' e il volume V_2 generato dalla rotazione del trapezoide M'MQNN'. Le semicirconferenze MPN e MQN hanno rispettivamente le equazioni

$$y = a + \sqrt{r^2 - x^2} \qquad y = a - \sqrt{r^2 - x^2}$$
conseguentemente applichiamo la (*):

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_{-r}^{r} (a + \sqrt{r^2 - x^2})^2\,dx -$$
$$\pi \int_{-r}^{r} (a - \sqrt{r^2 - x^2})^2\,dx =$$
$$= \pi \int_{-r}^{r} \left[(a + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - (a - \sqrt{r^2 - x^2})^2\right] dx = 4a\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx =$$
$$4a\pi \frac{\pi r^2}{2} = 2a(\pi r)^2$$

e quindi : $\mathbf{V = 2a(\pi r)^2}$</td></tr>
</table>

ESEMPIO SVOLTO CON IL II°TEOREMA DI GULDINO

Figura	Considerazioni
	**II°Teorema di Guldino** Analogamente per l'area S della superficie torica si ottiene l'espressione **S = 2πd(2πr)**
	Vediamone l'impostazione teorica: Facendo riferimento al precedente esempio e figura, la superficie torica si può pensare generata dalla rotazione delle due semicirconferenze $y = a + \sqrt{r^2 - x^2} \qquad y = a - \sqrt{r^2 - x^2}$ intorno all'asse x. Si ha, per tutte e due le curve, $ds = \frac{r dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ Data la simmetria della superficie rispetto al piano perpendicolare ad Ox e passante per Oy si può calcolare solo la metà dell'area. Per la (**), risulta: $\frac{S}{2} = 2\pi \int_0^r \frac{a + \sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}} r dx + 2\pi \int_0^r \frac{a - \sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}} r dx =$ $= 4\pi a r \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 4\pi a r \left[arcsen \frac{x}{r} \right]_0^r = 2\pi^2 a r$ e quindi **$S = 4\pi^2 ar$**

Bibliografia

Autore	Titolo opera	Casa editrice - anno	Volumi
E. Bovio – G. Repetti	Geometria Nuovi orientamenti	Lattes 1986	I°e II°
L. Cateni – R. Fortini	Il pensiero geometrico	Le Monnier 1966	I°e II°
S. Perotti Vanni	Aritmetica – Geometria – Algebra	Signorelli 1936	
E.Carboni –F.Ventola	Corso di Matematica	Paccagnella Ed. BO 1983	IV°

Alla memoria di mia madre.