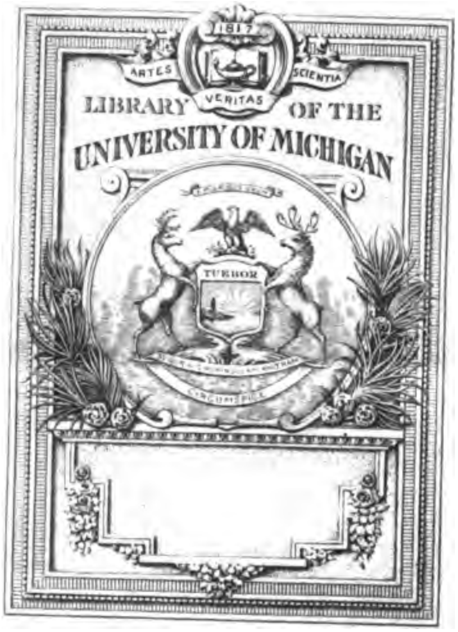
1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR

SUL
CALCOLO INTEGRALE
DELL' EQUAZIONI
DI
DIFFERENZE PARZIALI
CON APPLICAZIONI

DI FRANCESCO CARDINALI

BOLOGNA

1807

Hoc, quidquid est, utilitas excogitavit
Quintilian.

A Sua Eccellenza

IL SIGNOR

FERDINANDO MARESCALCHI

GRANDE UFFICIALE DEL REGNO D' ITALIA, MINISTRO DELLE RELAZIONI ESTERE, CANCELLIERE DELL' ORDINE DELLA CORONA DI FERRO, E GRAN CROCE DELLA LEGION D' ONORE DI FRANCIA

Eccellenza

L' accoglienza infinitamente cortese fatta dall' Eccellenza

N. G. S.

Vostra a quest' operetta, favore segnalatissimo che parte da quell'affezione magnanima che stanzia nel petto di Lei per ogni maniera di utili studj, e da quell' ingenita benevolenza che Le rende cari ed accetti coloro che pongono in questi la mente e le sollecitudini, non vuol rimanersi già nota a me solo, ma sibbene farsi palese a tutt' uomo. E di essa io mi fo scudo, che oltre all' avere annichilita la mia servil timidezza sì ch' io posso dirmi con quell' Antico giulivamente non sine Dis animosus infans, mi guida anche, senza ch' io perciò tema la nota di prosontuoso, ad infingermi di potere tra coloro che nella matematica disciplina sono sapienti ed in fama, se non con le laudi tarde a meritarsi e a riscuotersi, comparire per lo meno senza disdoro. E ciò voleasi a buon dritto per me cercare con ogni cura, che divisato avea di consecrare questa produzione all' Eccellenza Vostra che, a dir le molte in poco e a non offendere con gli elogi quella modestia cui ho promesso di rispettare, è in alto rango locata presso a quel Grande ed Augusto, testé Fulmin di guerra, ora Datore di pace, a cui per toccare una sola e la sola qui-accoucia delle sue glorie, sta a cuore con manifestata pre-dilezione l' incremento di quella scienza che figlia e madre dell' eterno immutabile Vero, sola può tale denominarsi. Ed ecco che con le laudi tarde a meritarsi e a riscuotersi, comparire per lo meno senza disdoro. E ciò voleasi a buon dritto per me cercare con ogni cura, che divisato avea di consecrare questa produzione all' Eccellenza Vostra che, a dir le molte in poco e a non offendere con gli elogi quella modestia cui ho promesso di rispettare, è in alto rango locata presso a quel Grande ed Augusto, testé Fulmin di guerra, ora Datore di pace, a cui per toccare una sola e la sola quiaccoucia delle sue glorie, sta a cuore con manifestata predilezione l' incremento di quella scienza che figlia e madre dell' eterno immutabile Vero, sola può tale denominarsi. Ed ecco che io compreso altamente dell' importanza di offerire a Vostra Eccellenza cose non indegne di Lei, io Le intitolo sur una delle più rilevanti provincie dell' alta analisi matematica, da dodici lustri scoperta, il ritrovamento, qual ch' egli sia, di ciò che parve irreperibile, o fu almeno lasciato irreperto da quei sommi per altro e venerandi, le cui vestigie saranno sempre con rispetto e riconoscenza calcate in tutte l' età, Eulero, Dalembert, ed i posteri loro più rinominati. Primario oggetto e particolare del mio lavoro si è l' integrazione non generalizzata finquì di molt' equazioni che usansi allo scioglimento di problemi rilevantissimi, come di quelli per modo d' esempio che vertono sulle corde vibranti di variabil densezza, sulla propagazione del suono, sull' oscillazione delle catene pesanti, sulla determinazione delle figure de' corpi celesti, sulla vibrazione delle lamine elastiche, e di altri siffatti. Oltrediché e l' integrar d' equazioni novelle si contiene in questa mia trattazione, ed una colletta de' più importanti problemi già da alcuni resoluti in Idrodinamica, in Acustica, in Meccanica celeste, non che in altre fisiche provincie, e nuovi metodi di soluzione di alcuni fra essi, ed oltre a ciò quasi a modo di parergo e di finimento, un' epitome storica de' primordj e progressi di questo calcolo d' equazioni.

Che se alla splendidità del nome, della carica, delle virtù, delle cognizioni che adornano l' Eccellenza Vostra non corrisponde che troppo imperfettamente quest' opera, vi corrisponde però, ed in questo mi pregio di non cedere a niuno, quell' altissima stima e divozion senza limiti, che in un colla gratitudine immedesimate offrono a Vostra Eccellenza nel presente lavoro un esiguo sì ma candido di se stesse e non vile e non perituro argomento

Francesco Cardinali

EPITOME

DELLA STORIA DEL CALCOLO INTEGRALE DELLE DIFFERENZE PARZIALI.

Tra gli utili utilissimi ritrovati del secolo non ha guari trascorso merita un luogo distinto il calcolo integrale delle differenze parziali, o dei differenziali parziali, come piacque ad altri d'intitolarlo. L'embrione di esso rinvienesi in una dissertazione dell'Eulero stampata dell'anno 1734 fra quelle dell'accademia di Pietroburgo. All'Eulero tenne dietro Dalembert che nel 1746 pubblicò la sua opera appellata *réflexions sur la cause générale des vents*; per entro alla quale i germi di questa parte della matematica disciplina si veggono un po' più sviluppati. E per lui videsi essa poggiare in maggior pregio e chiarore, quand' egli il primo, come raccogliesi dagli atti dell'accademia di Berlino del 1747, sciolse il problema delle corde vibranti senza supporre col Taylor che tutti i punti della corda giugnessero sincroni all'asse.

E quindi anche allettato Eulero dal bello che in se racchiude sì fatto problema vi spese attorno le sue sollecitudini, il cui risultamento furon lavori della maggior conseguenza, pertinenti alle corde vibranti e alla propagazione del suono, e consegnati negli atti accademici di Berlino, di Turino, di Pietroburgo. E quì è veramente dove il calcolo integrale delle differenze parziali, pe' varj aspetti sotto cui l' Eulero lo ragguardò, fe sentire più che più le sue forze, e fe conoscere e fissare la sua vera natura, il suo temperamento.

Ma oltre all' aver dimostrato il nostro calcolo suscettivo d' applicazioni in una moltitudine di problemi fisico-matematici, compì l' opera l' illustre di Basilea col metterne in piena luce il metodo, e con darne, com' ei ne diè, l' algoritmo che ammirasi nell' esimia sua dissertazione stampata del 1762 fra quelle di Pietroburgo; intitolata *investigatio functionum ex data differentialium conditione*.

Tempo è però che come i nostrani furono o primi in moltissime fra l' arti e le scienze, o non ultimi in pochissime, e come spezialmente nelle matematiche dottrine e scoperte non è loro contesa benemerenza e supremità se non se dagl' ingeniosi e vivaci e destri loro rapsodi, sorga e si faccia conoscere in alto seggio un italiano anco su questo argomento dell' integrazione delle differenze parziali. Ed ecco l' illustre Lagrange che ci fa retrocedere di un triennio rammentandoci di non essere stato allora da meno d' Eulero e di Dalembert quando nel 1759 gli atti della turinese accademia ci fecero vedere un suo grave scritto sulla natura e propagazione del suono, adorno di leggi eleganti e peregrine, dov' egli fe chiara mostra del suo profondo sapere in questa nuova emanazione dell' alta analisi. Egli stesso poscia da quel valentuomo ch' egli è, svolge diversi problemi analitici e fisici relativi sempre al nostro calcolo, dei quali lavori vanno ricchi i tomi successivi della stessa colletta accademica.

In questi pregevoli depositi fanno bella ed importante comparsa fin del 1770 anco due valorosi ragionamenti del chiarissimo sig. Monge, de' quali uno pertiene al modo di determinare le funzioni arbitrarie ch' entrano negl' integrali dell' equazioni a differenze parziali; e l' altro s' aggira sur un metodo di molto ingenioso per integrar una classe d'equazioni a differenze parziali con i coefficienti variabili sì, ma sudditi ad una certa determinata legge.

Il primo di tali due ragionamenti è da dirsi senza alcun dubbio di non lieve importanza per que' primi tempi in cui il calcolo integrale delle differenze parziali non era bastantemente adulto e formato. E neppure è da passare sotto silenzio che l'autore ne aveva dato un saggio in un trattatello letto all'accademia di Parigi, che venne alla luce posticipato nei tomi dei litterati stranieri, (*Sçavans étrangers*) del 73, in cui leggesi la promessa di consegnare negli atti turinesi il ragionamento testé memorato.

Negli atti accademici di Parigi dello stesso anno 1770 si vede un discorso del celebre Condorcet che verte in particolar modo intorno all'eliminazione delle funzioni arbitrarie, e delle costanti arbitrarie ch'entrano negl'integrali dell'equazioni a differenze parziali. Nel discorso medesimo l'autore dà una pennellata sul metodo di stabilire se un'equazione a differenze parziali sia integrabile. Avea di già il Condorcet fino dal 68 dato a vedere d'essere pienamente in possesso di questo calcolo, avvegnachè la sua opera sul calcolo integrale contiene un elegante metodo d'integrazione per l'equazioni a differenze parziali.

Questo primo discorso del Condorcet fu seguìto da un secondo stampato del 1771 negli stessi atti accademici di Parigi. Spicca in esso precipuamente la determinazione delle funzioni arbitrarie che entrano negl' integrali dell' equazioni a differenze parziali, mediante l' integrazione d' equazioni a differenze finite, e a differenze finite e infinitesime. Verso la fine di questo discorso mette l' autore a disamina la famosa quistione delle curve discontinue, dove non so se debba dirsi più per rispetto o per intima suasione ei lascia trasparire una tal quale pendenza verso le sì contese teorie del suo maestro Dalembert.

Dell' anno 1772 dette il sig. Lagrange nella collezione accademica di Berlino una dissertazione pertinente alle differenze parziali, nella quale incomincia a sviluppare delle teorie pregevoli sopra l' integrazione dell' equazioni a differenze parziali lineari del prim' ordine; argomento che egli poscia, come vedremo, condusse all' apice della perfezione.

Nei tomi che abbiamo accennati dei litterati stranieri veggiamo sotto l' anno 1773, che il sig. Monge produsse un altro suo scritto risguardante la determinazione delle funzioni arbitrarie mercè d' equazioni a differenze finite, ciò che in parte era stato dal Condorcet accennato un po' prima nel suo secondo discorso di cui abbiamo fatto mentovazione.

Negli atti dell' accademia di Parigi del medesimo anno avvi una lunga insieme, e dotta scrittura del sig. Laplace concernente l'equazioni lineari di second' ordine a differenze parziali. Egli primamente va in essa divisando delle trasformazioni utilissime che servono a meglio tentare l'integrazion generale dell' equazioni antidette. Passa secondamente a scandagliar co' suoi calcoli e raziocinamenti la possibilità o impossibilità d' integrarle, nel che arrischia degli asserti di cui il rigore e l' evidenza matematica non si chiamerebbe paga e contenta. In un trattatello che sto preparando spero di far vedere come generalmente un' equazione a differenze parziali lineari di second' ordine con i coefficienti funzioni di due variabili, si possa far sempre dipendere da equazioni a differenze ordinarie; ciò che varrebbe a provare non essere in parte legittime le conseguenze dedotte dal sig. Laplace nella sua prementovata scrittura.

Dello stesso sig. Laplace ci diedero gli atti sovraccitati del 79 un altro lungo e dotto ragionamento relativo alle serie dove applica le sue teorie all' equazioni di differenze parziali, nel quale son determinati per moltissime gl' integrali espressi da funzioni che rinchiudono degl' integrali definiti. Sul fine del ragionamento fa applicazioni del suo metodo a dell' equazioni singolari che comprendono differenze parziali finite per una variabile, e a differenze infinitesime per l' altra.

Negli atti di Berlino del 1781 il sig. Lagrange svolge la teoria del moto dei fluidi, nella quale integra per approssimamento la famigerata equazione di differenze parziali che determina il moto dei fluidi, e dove riunisce altre importanti riflessioni sul calcolo dell' equazioni a differenze parziali.

In quelli di Pietroburgo dell' anno medesimo vi sono quattro esimie dissertazioni; due dell' Eulero relative agli usi ed all' applicazioni del calcolo delle differenze parziali; la terza del sig. Golovin, l' altra del sig. Lexel. La prima è intitolata *de scillationibus minimis funis liberi suspensi*. La seconda, *de perturbatione motus chordarum ab earum pondere oriunda*. La terza, *applicatio ad sonos scyphorum vitreorum, qui sub nomine instrumenti harmonici sunt cogniti*. La quarta, *meditationes de formula qua motus laminarum elasticarum in annulos circulares incurvatarum exprimitur*. I soli argomenti delle medesime annunziano l' importanza delle cose di che vi si tratta e ragiona; e fora per l' una parte lung' opera non che circostanziarle, darne un sol cenno; supervacanea sarebbe per l' altra, perchè nella seconda sezione saranno da me recate in mezzo varie di quelle applicazioni che ivi si leggono.

Novella menzione ci occorre adesso di fare degli atti dell' accademia di Parigi nei quali fin dell' 83 si legge uno ed un altro discorso del sig. Cousin. Si prefigge egli nell' uno di ridurre ad equazione di differenze parziali qualunque equazion differenziale d'ordine superiore al primo, di ridurre per maniera d'esemplo, un' equazion di differenze ordinarie dell' ordin secondo ad una di differenze parziali di primo. Nel seguitamento egli svolge e scandaglia gl' integrali d'equazioni a differenze parziali, e siffatta disamina costituisce lo scopo primario di tale discorso. In quell' altro che porta per titolo *riflessioni sulla teoria matematica del moto de' fluidi* parla a dilungo dell' integrazione approssimante dell' equazioni inservienti al moto di essi.

Un anno dopo produsse lo stesso autore in quegli atti un discorso che puossi considerare come continuazione del primo dei due mentovati quì sopra. Oltrechè vi si veggon dedotte alcune conseguenze le quali non so quanto sieno a dirsi giuste e precise, il midollo di tale ragionamento è tratto in parte da alcune teorie generali stabilite precedentemente da altrui.

Ricomparisce nella stessa epoca, e negli stessi atti il sig. Monge con due egregj lavori sul nostro calcolo. Mira col primo a trovare l' espressione analitica della generazione delle superficie curve; s' intertien col secondo in particolar maniera sul metodo di fare sparire le funzioni arbitrarie mediante la differenziazione, e mostra il come non infrequentemente per mezzo dell' eliminazione conseguesi l' integrale d' un' equazione di differenze parziali.

La cronologìa ne rimena da quei di Parigi agli atti di Berlino ne' quali fin dell' 85 il sig. Lagrange ritorna anch' egli con una prestante dissertazione ove tratta dell' equazioni di differenze parziali del prim' ordine, e che viene ad essere un proseguimento di quanto erasi per lui scritto nel 72, con la differenza che nella predetta dissertazione molto più generalmente ne tratta. Ha poi dato in tutta la generalità nel XII quinterno della scuola politecnica di Francia l' integrazione di simili equazioni, in guisa che si può dire non restar altro a desiderarsi su tale argomento.

Negli atti dell' accademia di Turino dell' anno medesimo 1785 sono inseriti due ragionamenti del citato sig. Monge i quali s' aggirano sul calcolo di che ci occupiamo. Nel primo di questi fa egli vedere che una superficie curva è generata da una curva qualunque, costante di de' corpi celesti intorno a' loro centri di gravità, ove s' intertien lungamente su quell' equazione a differenze parziali che determina il moto de' fluidi. Tutto il più bello di questa dissertazione e dell' altre sue che abbiam sopra commemorate, è stato da lui riunito e raccolto nella sua celebre opera intitolata *mécanique célèste* arricchita di analoghe giunte belle tutte e pregevolissime.

Nel terzo volume matematico dell' Istituto medesimo si vede accennato che fur presentate alla classe fisica e matematica alcune dissertazioni, e che giudicate degne della pubblica luce fur destinate pel volume dei dotti stranieri; ma quì in Bologna questo volume non è stato veduto; anzi dopo le investigazioni fatte di esso in altri e più luoghi e tutte riuscite vane, è da credere esser rimasto inedito e smenticato. Pure non sembra affatto fuor di proposito, poichè altro non ci è dato, il riportare i temi di tali dissertazioni, che si trovan descritti così

1. *Sur l' intégration des équations aux différences partielles linéaires du second ordre, par* Parceval.

2. *Sur les séries et sur l' intégration complète d' une équation aux différences partielles linéaires du second ordre à coefficiens constans, par* le même.

3. *Sur l' intégrale complète et finie de l' équation des vibrations des lames élastiques*, *par* le même.

Nel quarto tomo del suddetto Istituto leggesi un ragionamento del sig. Biot intitolato *recherches sur l' intégration des équations différentielles partielles, et sur les vibrations des surfaces*, ov' ei dimostra che un' equazione differenziale parziale d' ordine qualunque, tra un numero qualunque di variabili, è sempre suscettiva d' un integrale espresso per una serie *finita* o infinita, e completato da un numero di funzioni arbitrarie eguale all' indice dell' ordine dell' equazione, poichè ciascuna di queste funzioni comprende tante quantità indipendenti fra loro, quante sono le variabili ch' entrano nella proposta, men due. Tutti questi risultamenti gli ottiene l' autore sviluppando il valore della variabile principale mediante il noto teorema di Taylor, o come portano altri opinione, di Giovanni Bernoulli. Applica poi le sue teorie ed i suoi calcoli alla determinazione dei movimenti delle superficie vibranti ed in ispezial guisa dei piani.

Trovasi finalmente nel quinto de' volumi prementovati giudicata degna dell' onore dei torchj una dissertazione titolata così *intégration générale et complète des équations de la* *propagation du son, l'air étant consideré avec ses trois dimensions, par* Parceval. Ma questa pure destinata ad arricchir il volume dei dotti stranieri, come testè dicemmo, per noi irreperibile, non lascia di se nel suo titolo e nel nome dell' autor suo che il desiderio d' esser letta e disseppellita.

Abbiamo una dissertazione del sig. Trambley fin del 1797 negli atti dell' accademia di Berlino, la quale oltre a varie osservazioni sopra il problema delle trajettorie, contiene diverse equazioni non lineari a differenze parziali, ed in un la promessa di vie meglio svolgere e rovistare questo tema importante in altro lavoro.

Eccomi in fine, sempre con cronologico ordine, a tre italiani viventi, Fossombroni, Brunacci, Paoli, maggiori della loro rinominanza, tutti e tre sorti in quella fortunata regione, altrice antiqua d' ingegni, ferace mai sempre d' inventori, la quale per tutti i suoi e per tutti i non suoi può citare quel grande che superò nell' ingegno l' uman genere, e di cui lasciò scritto Keppler con enfasi veramente inspirata, ch' ei salse sulle più alte muraglie dell' universo, e comprese tutto dall' ultime cose alle prime. Fra' tanti utili ritrovati che questo genio sovrano ha lasciati in dote alla matematica scienza, è da riporsi la teorìa delle velocità virtuali, fecondo principio meccanico che sparse una nuova universale irradiazione su tutte le macchine e semplici e composte. Or su questo argomento fino del 1796 diede alla luce un' insigne opera il sig. cav. Fossombroni, per entro a cui campeggia e spazia per ogni dove il suo alto sapere non che nelle geometriche e meccaniche indagazioni, in quelle della sublimissima analisi e precipuamente ove dessa si appoggia al calcolo delle differenze parziali, sì che egli prende il suo posto intra i cooperatori all' incremento e a' processi di questa sì importante filiazion matematica. Qualunque elogio però si potesse quì fare dell' opera di questo insigne geometra, non varrebbe mai tanto, quanto quello che parte comechè bel bello da un geometra di prim' ordine di quella nazione così circospetta nel laudare i suoi maestri gl' italiani, dal sig. Prony voglio dire, che nel giornale della scuola politecnica di Francia ne raccomanda ai giovani la lettura siccome d' opera nel suo genere rilevante.

Venendo ora al secondo de' tre memorati toscani, non si può dar commendazione che basti al *calcolo integrale dell' equazioni lineari* opera pregevolissima del sig. cav. Brunacci che vide la pubblica luce nel 1798, la cui mercè si cessò di desiderare una limpida ed estesa dottrina di questa emanazione d' analisi, ch' è di tanto e cotanto rilevo nell' indagini matematiche. Nulla dirò dell' equazioni lineari di differenze finite, nè di quelle pur lineari d' infinitesime, e nè di altrettali di differenze parziali finite, che in quell' opera si contengono, ricche tutte a dovizia d' importanti scoperte, di fina sagacità, di magistrale ordine, e di limata non vulgare chiarezza. Pretermettendo adunque ciò che non feci argomento di questo sommario, e restringendomi a far parola di quelle sole equazioni che al mio assunto pertengono, dirò primamente che prende ivi l' autore a integrare la generale equazion lineare di differenze parziali dell' ordine *ennesimo* con i coefficienti invariabili, ed assegna per questa l' integrale dotato d' un numero n di funzioni arbitrarie. E avvegnachè l' equazione dell' ordine ch' ei piglia ad esamina, è da lui supposta mancante del secondo membro, proseguita e insegna che anchechè la proposta lo possedesse, e fosse questo funzione di due variabili ma d' una certa forma prestabilita, l' integrale della proposta medesima si potria conseguir non pertanto, non dipendendone l'asseguimento se non se dall'integrazione di due equazioni lineari con i coefficienti costanti, le quali pur sannosi, com' è notorio, integrar per intero. Passa secondamente l'autore a considerare dell' equazioni tra quattro e più variabili con i coefficienti invariabili ed assegna per queste ancora gl' integrali completi, e come già quelle a tre variabili, così egli arreda anche queste di utili ed ingegnose riflessioni. Terzamente egli mostra con una posizione del tutto nuova il modo di far dipendere l' integrazione d' un' equazione a differenze parziali dell' ordine *n* da altre dello stess' ordine sì, ma a differenze ordinarie, la qual sostituzione abbiamo pur noi con esito felice impiegata in alcune dell' equazioni trattate nella prima classe di quest' operetta. Ultimamente si volge con artificj suoi proprj ad integrare equazioni di differenze parziali con i coefficienti funzioni di due variabili; e gl' integrali dati da questo autore hanno il vantaggio d' essere rappresentati da formole più semplici di quelle de' metodi usati dagli scrittori che primi si occuparono in siffatte disquisizioni.

Antesignano d' un nuovo rampollo della sublime analisi ecco l' integrator celeberrimo dell' equazioni di differenze parziali finite ed infinitesime, il sig. Paoli. Le sue dotte primizie su questo tema depositate nell' ottavo volume degli atti della società italiana, furon foriere dell' altra sua insigne operetta uscita alla luce in Pisa del 1804, colla quale ei ne porge diffusamente la teoria di tali equazioni.

Si fa egli in primo luogo a trattare delle linearie di differenze parziali finite ed infinitesime del primo, del secondo, del terz' ordine, e dell' *ennesimo* con i coefficienti costanti fra tre variabili, ed assegna per esse tutte gl' integrali compiti. Passa in secondo a considerare l' equazioni medesime non più con i coefficienti costanti, ma come funzioni di una variabile, e chiaramente dimostra che l' integrazione in tal caso si può far sempre dipendere da equazioni di differenze parziali finite corredate de' coefficienti mutabili. Prova in terzo luogo l' autore per l' una parte, che se oltre a' termini moltiplicati per la variabile principale e per le sue differenze vi fosse anche un termine funzione d' una delle variabili, l' integrazione non pertanto non patirebbe veruna difficoltà, e dimostra per l' altra che se il termine aggiunto funzione fosse di due variabili, l' integrazione ne soffrirebbe moltissime: benchè ciò non ostante annovera moltissimi casi in cui anche colla funzione aggiunta puote afferrarsi l' integrazione. Suggetta in quarto ai suoi metodi l' integrazione dell' equazioni a differenze miste intra quattro, cinque variabili ed ancor più, fornite de' coefficienti costanti, e stabilisce anco per queste equazioni gl' integrali completi. In quinto si volge a quelle nelle quali la differenza di una e di un' altra variabile è finita, quella di una terza è infinitesima; e che oltre la variabile principale, funzione dell' altre tre variabili contengono de' coefficienti costanti. A queste purè ed assegna gl' integrali completi con due metodi limpidi elegantissimi, ed aggiugne oltre a tutti i termini in cui entra la variabile principale colle sue differenze, un altro termine funzione di tre variabili, non senza dare gl' integrali completi anche per le novelle equazioni che così ne risultano. Passa finalmente a mostrare il chiarissimo autore gli usi delle cose esposte, e pria investiga la somma delle serie infinite; fa quindi vedere il come si possa mercè le sue teorie svolgere le funzioni in serie, e come s' ottengano gl' integrali per serie dell' equazioni di differenze parziali infinitesime. Tali cose importanti contenute nell' originale operetta del dotto Professore di Pisa e quì lineate appena e in iscorcio, fanno sommissimo onore non che a Lui, all'Italia tutta che e per Lui e per tanti altri Insigni ha a dovizia da indurre a ritrattarsi volentieri chi disse l'Italia non avere oggidì matematici, come se tutto fosse oltramonti, e tutto fosse portatile fin l'ingegno e la mente degl' italiani.

Ora per terminar questo abbozzo della storia del calcolo delle differenze parziali, dirò che l'Eulero dee per l'una parte riguardarsene come il principale discopritore, e che per l'altra Dalembert primo ne fece un' applicazione importante ed originale, e somministrò dell' aperture all' Eulero medesimo, come questi ingenuamente conviene; onde sembra potersi senza torto conchiudere col sig. Bossut che questi due illustri hanno presso a poco un eguale diritto alla gloria di sì bella e vantaggiosa inventiva.

APPENDICE.

Era presso al suo termine la stampa di quest' epitome storica, quando svolgendo il catalogo de' libri del sig. Molini di Firenze, vidi in esso accennato il primo volume de' dotti stranieri (*sçavans étrangers*) dell' Istituto di Francia, cui, forse per la fresca data della sua impressione che è dell' anno ultimo precorso, non mi fu dato di rinvenire in altr' indice, oltre ad averne fatta inutil ricerca appo questa Regia Biblioteca dell' Università di Bologna, dove probabilmente per lo stesso motivo della sua recentezza fui assicurato che un tal volume non avea finora veduto la pubblica luce. Ho pertanto trovate in esso di relative al nostro calcolo delle differenze parziali le seguenti dissertazioni del sig. Parseval.

1. *Intégration générale et complète des équations de la propagation du son, l' air étant considéré avec ses trois dimensions.*

2. *Mémoire sur la résolution des équations aux différences partielles linéaires du second ordre.*

3. *Intégration générale et complète de deux équations importantes dans la mécanique des fluides.*

4. *Mémoire sur les séries et sur l' intégrations complète d' une équation aux différences partielles linéaires du second ordre à coefficiens constans.*

La prima, la seconda, e la quarta di esse furono memorate anche quì sopra, ma solamente di titolo. La terza nol fu, ch' io non ne aveva contezza, e fecivi in quel cambio menzione d' un' altra che sebbene citata dagli atti dell' Istituto di Parigi, come destinata a tener posto nel suddetto volume dei dotti stranieri, non pertanto non vi si trova inserita. Dico io dunque che nella prima delle testè nominate, il chiarissimo autore suppone già scoperte l'equazioni fra tre, quattro, e cinque variabili di differenze parziali lineari, e cioè le tre equazioni che determinano la propagazione del suono pe' casi che l'aria abbia una, due, e tre dimensioni. In seguito suppone trovato l'integrale pel caso d'una dimensione, intanto che l'equazione non è se non quella, la quale determina il moto d'una corda in vibrazione, di densezza uniforme; e di fatto l'integrale fu per la prima volta, come è noto, dato dal Dalembert, se non che il nostro autore il presenta cambiato in questa guisa

$$u = F(z, y, x + t\sqrt{a}) + f(z, y, x - t\sqrt{a})$$

volendo che z, y sieno considerati costanti per questo perchè nella risoluzione dell'equazione non si ha riguardo che al caso d'una dimensione soltanto. Passa a mostrare, che volendosi l'integrale dell'equazione infra quattro variabili, sarà di mestieri far variare y nell'espressione di u, e sostituire questo valore di u, e de' suoi differenziali in un integrale di forma definita, il quale integrale posto nell'equazione fra quattro variabili, la costituisce identica. Similmente per conseguir l'integrale dell'equazione fra cinque variabili presuppone l'autore un altro integrale di forma definita, il quale rinchiude l'integrale co' suoi differenziali dell'equazione fra quattro variabili; la qual espressione sostituita vien a rendere identica l'equazione per lo caso di tre dimensioni. Quindi conchiude che l'integrale nel caso di due dimensioni, dipende da quello cognito per una, e che l' integrale per quello di tre dipende dal caso di due: onde tutta la difficoltà non risiede altro che nella somma della serie che rappresenta l'integrale dell'equazioni intra quattro, e cinque variabili. Ad ottenere questa somma presenta l' autore degli artifizj sagaci ed eleganti e degni d' essere avuti in considerazione.

La seconda delle suddette dissertazioni vien ad essere un supplemento di quanto venne esposto nel 73 dal sig. Laplace negli atti di Parigi, poichè ritenendo il Sig. Parseval tutto ciò che di sostanziale contienesi nella trattazione di quel geometra, ne offre il risultamento di alcune sue proprie ricerche, che puote esser utile per integrar l'equazioni di second'ordine con gli coefficienti variabili.

Si aggira la terza dissertazione sull' integrar di due equazioni del sig. Lagrange concernenti alla meccanica de' fluidi. E prima il sig. Parseval iscandaglia quella che dà il prefato geometra alla pag. 501. della sua *meccanica analitica*, e che pertiene alla propagazione del suono nel caso dell'oscillazioni di una grandezza qual ch'ella siasi; e la intègra con elegantissimo metodo, prestabilito il supposto che il fluido non sia animato da forza alcuna acceleratrice. Intègra poi quella che leggesi alla pag. 487. dell'opera prementovata, non dando altra limitazione al problema che l'ipotesi d'una delle coordinate costanti, ciocchè vale quanto supporre il canale orizzontale e composto di lamine fluide che muovonsi tutte secondo un'identica legge.

La quarta ed ultima dissertazione che verte sulle serie e sur un'equazione di differenze parziali con i coefficienti invariabili, non racchiude cose, che sebbene trattate dall'autore da quel valentuomo ch'egli è, rechino insieme avanzamento e progresso al nostro calcolo, laonde non avvisiamo dello storico nostro proposito il darne il sunto.

Mi propongo in quest' opera di dare un metodo generale per integrare in termini finiti dell' equazioni a differenze parziali d' ordine secondo, terzo, ec. con delle applicazioni alla fisica matematica. Per chiarezza maggiore ho divisato di separare tutta la materia in due sezioni. Nella prima puramente analitica tratterò estesamente dell' integrazione di diverse classi d'equazioni a differenze parziali, alcune affatto nuove, altre integrate soltanto in alcuni casi particolari. Nella seconda prenderò a risolvere alcuni problemi di fisica matematica, fra' quali quelli delle corde vibranti nel caso di variabile densità, della propagazione del suono, dell' oscillazioni d' una catena pesante, ec. problemi, alcuni dei quali saranno da me trattati co' nuovi metodi introdotti da Lagrange, e felicemente promossi dal pr. Brunacci. L' equazioni finali che emergeranno dai medesimi problemi, saranno per l' appunto di quelle già considerate nella prima sezione.

SEZIONE PRIMA

Integrazione di alcune classi d' equazioni a differenze parziali.

CLASSE I.

1. Questa classe d'equazioni a differenze parziali abbraccia un numero esteso d' equazioni di qualunque ordine. Dalla generale equazione di second' ordine comincierò l' integrazione, passando all' altre degli ordini superiori.

Sia per tanto l' equazione

$$\left.\begin{aligned} Mz + N\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) \\ + P\left(\frac{dz}{dy}\right) + Q\left(\frac{ddz}{dydx}\right) \\ + \left(\frac{ddz}{dy^2}\right) \end{aligned}\right\} = 0$$

dove M, N, P, e Q sono solamente funzioni di x; ed M è la funzione derivata di N; e P con una costante indeterminata è la funzione derivata di Q.

Per rendere lineare la proposta equazione;

mi servirò della posizione data dal pr. Brunacci nel corso di matematica sublime, consistendo questa in fare $z = ue^{ay} + z'$, essendo u; e z' due nuove funzioni di x, e a una costante indeterminata da determinarsi. Avremo per questa supposizione

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = e^{ay}\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dz'}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = e^{ay}\left(\frac{ddu}{dx}\right) + \left(\frac{ddz'}{dx^2}\right)$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = aue^{ay}$$

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = a^2ue^{ay}, \quad \left(\frac{ddz}{dydx}\right) = aue^{ay}\left(\frac{du}{dy}\right)$$

Fatte le sostituzioni e ordinando, si troverà la trasformata

$$\left\{\left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + \left[N + aQ\right]\left(\frac{du}{dx}\right) + \left[M + aP + a^2\right]u\right\}e^{ay}$$
$$\ldots\ldots + \left(\frac{ddz'}{dx^2}\right) + N\left(\frac{dz'}{dx}\right) + Mz' = 0$$

che potremo separare nelle due equazioni (1), e (2)

$$\left(\frac{ddu}{dx^2}\right)+\left[N+aQ\right]\left(\frac{du}{dx}\right)+\left[N+aP+a^2\right]u=0\;..(1)$$

$$\left(\frac{ddz'}{dx^2}\right)+N\left(\frac{dz'}{dx}\right)+Mz'=0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

Dunque l' integrazione della proposta dipende dalle due equazioni lineari a coefficienti variabili (1), e (2): ma queste sono della forma richiesta nel teorema di derivazione da me fissato in una memoria stampata nel tomo XIII degli atti della società italiana delle scienze, volendosi nel medesimo che il coefficiente di u nell' equazione (1) sia la funzion derivata del coefficiente $\left(\frac{du}{dx}\right)$; e che il coefficiente della z' nell' equazione (2) sia la derivata del coefficiente $\left(\frac{dz'}{dx}\right)$.

2. Usando però dei metodi esposti in quella memoria per integrare simili equazioni, troveremo che l' equazione (1) si trasformerà nel quadrinomio differenziale

$$dp+p^2dx+\left[N+aQ\right]pdx+\left[M+aP+a^2\right]dx=0$$

posto $u=e^{\int pdx}$. Similmente l' equazione (2) si ridurrà al quadrinomio

$$dq + qq\,dx + q\,N\,dx + M\,dx = 0$$

fatto $z' = e^{\int p\,dx}$

Per integrare il primo quadrinomio supporrò $p = \log. s + \log. t$, essendo s, e t due nuove variabili; ed avremo, sostituendo

$$\frac{ds}{s} + \frac{dt}{t} + [\log. s + \log. t]^2 dx +$$

$$[\log. s + \log. t][N + a\,Q]dx + [M + a\,P + a^2]dx = 0$$

equazione che potremo spezzar in due onde determinare le variabili s, e t. Sarà dunque

$$\frac{ds}{s} + [M + a\,P + a^2]dx = 0$$

$$\frac{dt}{t} + [\lg. s + \lg. t]^2 dx + [\lg. s + \lg. t][N + a\,Q]dx = 0$$

Dalla prima si ricava integrando

$$\log. s = -[N + a\,Q]$$

essendo come si è detto M la derivata di N, e $P + a$ la derivata di Q. La seconda, fatte le sostituzioni e riduzioni opportune, si converte nell' equazione

$$\frac{dt}{t}+\left[\log. t\right]^2 dx-\log. t\left[N+aQ\right]dx=0$$

I metodi d' integrazione per quest' ultima equazione sono già noti; onde eseguita l' operazione come conviene, si troverà l' integrale espresso dalla seguente formola

$$t=\frac{e^{\int[N+aQ]dx}}{\int e^{\int[N+aQ]dx}dx}$$

Sostituendo in vece di s e t i valori trovati, avremo

$$p=\frac{e^{\int[N+aQ]dx}}{\int e^{\int[N+aQ]dx}dx}-\left[N+aQ\right]+A$$

che sarà l' integrale del quadrinomio proposto.

Si troverà fatte, le operazioni come sopra, l' integrale del secondo quadrinomio espresso dalla formola che segue

$$q = \frac{e^{\int N dx}}{\int e^{\int N dx} dx} - N + A'$$

Ma si è supposto $u = e^{\int p dx}$, e $z' = e^{\int q dx}$; dunque sostituendo, sarà

$$u = B e^{\int \left[\frac{e^{\int [N + aQ] dx}}{\int e^{\int [N + aQ] dx} dx} - [N + aQ] + A \right] dx}$$

$$z' = B' e^{\int \left[\frac{e^{\int N dx}}{\int e^{\int N dx} dx} - N + A' \right] dx}$$

integrali finiti dell' equazioni (1), e (2). Le quantità A, B, A', B', sono le diverse costanti arbitrarie aggiunte all' integrazioni.

Ponghiamo i valori trovati di u, e z' nella prima posizione; ed avremo

$$z = B\, e^{ay} e^{\int \left[\frac{e^{\int [N + aQ] dx}}{\int e^{\int [N + aQ] dx} dx} - [N + aQ] + A \right] dx}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots + B' e^{\int \left[\frac{e^{\int N dx}}{\int e^{\int N dx} dx} - N + A' \right] dx}$$

espressione che indicherà l'integrale finito della proposta equazione a differenze parziali del second' ordine.

3. Resta indeterminata la costante a, ma sviluppando la quantità esponenziale

$$B e^{\int\left[\frac{e^{\int[N+aQ]dx}}{\int e^{\int[N+aQ]dx} dx} - [N+aQ]+A\right]dx}$$

secondo le potenze di a, si troverà per z un' espressione di questa forma

$$z = X e^{ay} + X' a e^{ay} + X'' a^2 e^{ay} + X''' a^3 e^{ay}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots + B' e^{\int\left[\frac{e^{\int N dx}}{\int e^{\int N dx} dx} - N + A'\right]dx}$$

essendo X, X', X'', ec. funzioni conosciute di x. Mettiamo ora $f(y)$ per e^{ay} (indicando per $f(y)$ una funzione qualunque di y), $\left(\frac{df(y)}{dy}\right)$ per $a e^{ay}$, $\left(\frac{d^2 f(y)}{dy^2}\right)$ per $a^2 e^{ay}$, ec. e si avrà

$$z = X f(y) + X' \left(\frac{df(y)}{dy}\right) + X'' \left(\frac{d^2 f(y)}{dy^2}\right) + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots + B'e^{\int\left[\frac{e^{\int N dx}}{\int e^{\int N dx} dx} - N + A'\right]dx}$$

Questa formola rappresenterà l' integrale della proposta corredato di una funzione arbitraria $f(y)$. Perchè tale espressione di z potesse dirsi l' integrale completo, dovrebbe secondo i geometri che primi si occuparono in queste ricerche, contenere due funzioni arbitrarie. Ma i recenti analisti hanno dimostrato non essere una tale conseguenza sempre legittima, come potrassi riscontrare in diverse memorie e corsi di matematica scritti in quest' ultimi tempi, fra' quali quello del pr. Brunacci (tom. II. cap. 2. pag. 322. e 323.)

4. Sia proposta in secondo luogo l' equazione di terz' ordine a differenze parziali

$$\left.\begin{aligned} M\left(\frac{dz}{dx}\right) + N\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) \\ + P\left(\frac{ddz}{dydx}\right) + Q\left(\frac{d^3z}{dydx^2}\right) \\ + \left(\frac{d^3z}{dy^2dx}\right) \end{aligned}\right\} = 0 .$$

essendo $M, N, P,$ e Q come al §. 1. Quest' equazione si trasformerà nella trattata, se faremo

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=Z \qquad \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)=\left(\frac{dZ}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{ddz}{dydx}\right)=\left(\frac{dZ}{dy}\right) \qquad \left(\frac{d^3z}{dydx^2}\right)=\left(\frac{ddZ}{dydx}\right)$$

$$\left(\frac{d^3z}{dy^2dx}\right)=\left(\frac{ddZ}{dy^2}\right) \qquad \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)=\left(\frac{ddZ}{dx^2}\right)$$

Sostituiti questi valori, avremo l' equazione

$$\left.\begin{aligned} MZ+N\left(\frac{dZ}{dx}\right)+\left(\frac{ddZ}{dx^2}\right) \\ +P\left(\frac{dZ}{dy}\right)+Q\left(\frac{ddZ}{dydx}\right) \\ +\left(\frac{ddZ}{dy^2}\right) \end{aligned}\right\}=0$$

che è della forma richiesta: quindi Z verrà espresso dalla seguente formola

$$Z=Xf(y)+X'\left(\frac{df(y)}{dy}\right)+X''\left(\frac{d^2f(y)}{dy^2}\right)+\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots+B'e^{\int\left[\frac{e^{\int Ndx}}{\int e^{\int Ndx}dx}-N+A'\right]dx}$$

Ma abbiamo supposto $\left(\frac{dz}{dx}\right)=Z$, e $\left(\frac{dz}{dx}\right)dx=Z\,dx$; integrando dunque, ricaveremo $z=\int Z\,dx+F(y)$, essendo $F(y)$ una funzione arbitraria di y, che devesi aggiungere all'integrale in vece della costante arbitraria. (Si consultino i trattati di matematica di Paoli, Eulero, Brunacci, ec. dove si vedrà il metodo d'integrare generalmente l'equazione differenziale $\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right)dx^n=f(x,y)\,dx^n$.)

Sostituendo ora il valore di Z, si troverà

$$z=\int\left\{Xf(y)+X'\left(\frac{df(y)}{dy}\right)+X''\left(\frac{d^2f(y)}{dy^2}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+B'e^{\int\left[\frac{e^{\int N\,dx}}{\int e^{\int N\,dx}\,dx}-N+A'\right]dx}\right\}dx+F(y)$$

espressione completa e che indicherà l'integrale finito della proposta equazione di terzo ordine a differenze parziali.

5. Sia in terzo luogo da integrarsi l'equazione di quart' ordine a differenze parziali

$$\left.\begin{aligned} M\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)+N\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)+\left(\frac{d^4 z}{dx^4}\right) \\ +P\left(\frac{d^3 z}{dy dx^2}\right)+Q\left(\frac{d^4 z}{dy dx^3}\right) \\ +\left(\frac{d^4 z}{dy^2 dx^2}\right) \end{aligned}\right\}=0$$

Per ridurre quest' equazione alla forma della trattata al §. 1, faremo $\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)=Z$, ed eseguite le medesime operazioni come al §. 4, avremo primieramente

$$Z=Xf(y)+X'\left(\frac{df(y)}{dy}\right)+X''\left(\frac{d^2 f(y)}{dy^2}\right)+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots+B'e^{\int\left[\frac{e^{\int N dx}}{\int e^{\int N dx} dx}-N+A'\right]dx}$$

ed in secondo luogo si avrà

$$z=\int dx \int Z dx+x F(y)+F'(y)$$

dunque sostituendo si troverà l' integrale dell' equazione a differenze parziali di quart' ordine, espresso con la seguente formola

$$z = \int dx \int \Big\{ X f(y) + X' \left(\frac{d f(y)}{d y}\right) + X'' \left(\frac{d^2 f(y)}{d y^2}\right)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots + B' e^{\int \left[\frac{e^{\int N dx}}{\int e^{\int N dx} dx} - N + A' \right] dx} \Big\} dx$$

$$+ x F(y) + F'(y)$$

6. Apparisce chiaramente che co' medesimi artificj si potrà generalmente integrare l'equazione a differenze parziali dell' ordine n

$$\left.\begin{aligned} M \left(\frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}}\right) + N \left(\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}\right) + \left(\frac{d^n z}{dx^n}\right) \\ + P \left(\frac{d^{n-1} z}{dy dx^{n-2}}\right) + Q \left(\frac{d^n z}{dy dx^{n-1}}\right) \\ + \left(\frac{d^n z}{dy^2 dx^{n-2}}\right) \end{aligned}\right\} = 0$$

semprechè si faccia $\left(\frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}}\right) = Z$; e fatte le sostituzioni, si otterrà la solita equazione di second' ordine.

$$\left.\begin{aligned} MZ + N\left(\frac{dZ}{dx}\right) &+ \left(\frac{ddZ}{dx^2}\right) \\ + P\left(\frac{dZ}{dy}\right) + Q\left(\frac{ddZ}{dydx}\right)& \\ &+ \left(\frac{ddZ}{dy^2}\right) \end{aligned}\right\} = 0$$

che generalmente sappiamo integrare.

7. Si potrebbe pure co' metodi esposti ridurre l' equazione dell' ordine $m + n + 2 = r + 2$ (ponendo $m + n = r$) a quella di second' ordine

$$\left.\begin{aligned} M\left(\frac{d^r z}{dx^r}\right) + N\left(\frac{d^{r+1} z}{dx^{r+1}}\right) &+ \left(\frac{d^{r+2} z}{dx^{r+2}}\right) \\ + P\left(\frac{d^{r+1} z}{dydx^r}\right) + Q\left(\frac{d^{r+2} z}{dydx^{r+1}}\right)& \\ &+ \left(\frac{d^{r+2} z}{dy^2 dx^r}\right) \end{aligned}\right\} = 0$$

purchè si faccia $\left(\frac{d^r z}{dx^r}\right) = Z$.

Possiamo dunque stabilire generalmente che qualunque altra equazione della forma di quelle fin quì considerate sarà completamente integrabile, se i coefficienti M, N, P, e Q godranno delle proprietà ènunciate; e però resta dimostrato un teorema analitico, che può essere di scorta per distinguere se un' equazione a differenze parziali della forma trattata ammette un integrale finito e completo usando degli esposti metodi.

CLASSE II.

8. L' equazioni che prenderò ad integrare in questa classe sono dell' ultima importanza per le applicazioni ai problemi d' idrodinamica, e d' astronomìa fisica. Il sommo Eulero nel tomo terzo dell' opera intitolata *Miscellanea Taurinensia* ed altrove, si propose d' integrare l' equazion generale

$$a\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = b\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{c}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{c}{x^2}z$$

dalla quale dipendono infinite altre di uso esteso in molte ricerche difficili ed interessanti. Ecco come questo celebre autore si esprime „Ce n' est pas une pure speculation, qui a fourni cette équation, mais elle renferme la solution de plusieurs questions physico-mathématiques de la dernière importance „. I passi fatti dall' Eulero non sono che pochi e limitati ad alcuni casi particolari; soltanto procurò egli di sodisfar in parte alla ricerca, trovando una serie indefinita la quale adempisse alla condizione richiesta. Ma siccome i geometri bramano gl' integrali espressi in termini finiti, così spero co' metodi ch' io son per esporre di aver appagate le loro brame, giacchè offrirò compiutamente integrata la proposta equazione a differenze parziali.

9. Ponghiamo dunque $z = [z' + u]\, e^{\int p dx}$ essendo z' funzione di y ed x; ed u e p funzioni solamente di x. Differenziando, avremo

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = e^{\int p dx}\left(\frac{dz'}{dy}\right) \qquad \left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = e^{\int p dx}\left(\frac{ddz'}{dy^2}\right)$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left[\left(\frac{dz'}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dx}\right) + p\,[z' + u]\right] e^{\int p dx}$$

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \left[\left(\frac{ddz'}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddu}{dx^2}\right)\right] e^{\int p dx} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\left[2p\left[\left(\frac{dz'}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dx}\right)\right] + [z' + u]\left[\left(\frac{dp}{dx}\right) + p^2\right]\right] e^{\int p dx}$$

e sostituiti questi valori nella proposta, si troverà l'equazione trasformata

$$a\left(\frac{ddz'}{dy^2}\right) = b\left(\frac{ddz'}{dx^2}\right) + b\left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + [2bp + \frac{c}{x}] \times$$

$$[\left(\frac{dz'}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dx}\right)] + [z' + u][b\left(\frac{dp}{dx}\right) + bp^2 + \frac{cp}{x} - \frac{c}{x^2}]$$

Siccome quest' equazione contiene le tre indeterminate z', u, e p, potremo determinar queste mediante l' equazioni

$$b\left(\frac{ddz'}{dx^2}\right) - a\left(\frac{ddz'}{dy^2}\right) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$b\left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + [2bp + \frac{c}{x}][\left(\frac{dz'}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dx}\right)] = 0 \ldots (2)$$

$$bdp + bppdx + \frac{cp}{x}dx - \frac{c}{x^2}dx = 0 \ldots\ldots (3)$$

La prima (1) è un' equazione a differenze parziali ed appartiene al famoso problema delle corde vibranti nel caso di uniforme densità; e sono noti i metodi per integrarla. La seconda (2) è a differenze ordinarie di second' ordine; e ne sono pur noti i metodi d' integrazione. Finalmente la terza (3) è un quadrinomio differenziale di prim' ordine; e dipende la sua integrazione dal teorema stabilito nell' enunciata memoria stampata fra quelle della società italiana delle scienze.

10. Ad integrare l'equazione (1) mi servirò della cognita sostituzione $z' = g\, e^{\alpha x + \beta y}$, essendo α, β, e g costanti da determinarsi. Questa supposizione ci dà

$$\left(\frac{dz'}{dx}\right) = g\, e^{\alpha x + \beta y}\alpha \qquad \left(\frac{dz'}{dy}\right) = g\, e^{\alpha x + \beta y}\beta$$

$$\left(\frac{ddz'}{dx^2}\right) = g\, e^{\alpha x + \beta y}\alpha^2 \qquad \left(\frac{ddz'}{dy^2}\right) = g\, e^{\alpha x + \beta y}\beta^2$$

Sostituiamo questi valori nella proposta; e dopo averla divisa per $g\, e^{\alpha x + \beta y}$, avremo $a\beta^2 = b\alpha^2$ da cui si ricava $\beta = \pm \alpha\sqrt{\frac{b}{a}}$. Questi due valori di β ci danno due valori per z', cioè

$$z' = g\, e^{\alpha\left[x + y\sqrt{\frac{b}{a}}\right]} \qquad z' = g'\, e^{\alpha'\left[x - y\sqrt{\frac{b}{a}}\right]}$$

Per α', g' indico altre due costanti arbitrarie diverse da α, g.

Anche la somma di questi due valori di z' sodisfarà alla proposta, e sarà

$$z' = g\, e^{\alpha\left[x + y\sqrt{\frac{b}{a}}\right]} + g'\, e^{\alpha'\left[x - y\sqrt{\frac{b}{a}}\right]}$$

Ora posta $F\,[x+y\sqrt{\frac{b}{a}}]$ per $g\,e^{\alpha[x+y\sqrt{\frac{b}{a}}]}$, e $F'[x-y\sqrt{\frac{b}{a}}]$ per $g'e^{\alpha'[x-y\sqrt{\frac{b}{a}}]}$, avremo perciò

$$z'=F\,[x+y\sqrt{\frac{b}{a}}]+F'\,[x-y\sqrt{\frac{b}{a}}]$$

essendo $F\,[x+y\sqrt{\frac{b}{a}}]$, $F'\,[x-y\sqrt{\frac{b}{a}}]$ due funzioni arbitrarie.

11. Trovato l'integrale dell'equazione (1), vediamo come si possa integrare l'equazione (2); e per questo ponghiamo la detta equazione sotto la forma

$$b\left(\frac{ddu}{dx^2}\right)+[2bp+\frac{c}{x}]\left(\frac{du}{dx}\right)+[2bp+\frac{c}{x}]\left(\frac{dz'}{dx}\right)=0$$

la quale, fatto $\left(\frac{du}{dx}\right)=q$, si ridurrà a

$$bdq+[2bp+\frac{c}{x}]\,qdx+[2bp+\frac{c}{x}]\left(\frac{dz'}{dx}\right)dx=0$$

Mediante la sostituzione bernoulliana del prodotto di due nuove variabili, si troverà l'integrale di quest'ultima equazione espresso per

$$q=A-e^{-\int[2p+\frac{c}{bx}]dx}\int e^{\int[2p+\frac{c}{bx}]dx}[2p+\frac{c}{bx}]\left(\frac{dz'}{dx}\right)dx$$

$$a\left(\frac{d^4 z}{dx^2 dy^2}\right)=b\left(\frac{d^4 z}{dx^4}\right)+\frac{c}{x}\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)-\frac{c}{x^2}\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$$

Riducasi l' equazione di quart' ordine a quella di secondo, e ciò con fare $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)=z'$. Integrata frattanto l' equazione in z', e chiamato W l' espressione risultante di z', avremo

$$z=\int dx \int W dx + x F(y) + F'(y)$$

integrale finito, e completo dell' equazione di quart' ordine a differenze parziali.

16. Apparisce evidentemente che con gli stessi artificj si potrà ridurre all' equazione di second' ordine l' equazione a differenze parziali dell' ordine n

$$a\left(\frac{d^n z}{dx^{n-2} dy^2}\right)=b\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right)+\frac{c}{x}\left(\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}\right)-\frac{c}{x^2}\left(\frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}}\right)$$

purchè si faccia $\left(\frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}}\right)=z'$. Tutta la difficoltà dunque sarà riposta in dover integrare quest' ultima equazione a differenze ordinarie dell' ordine $n-2$: ma abbiamo già accennato essere sempre generalmente integrabile una simile equazione, come di fatti si può riscontrare negli autori sopra citati.

17. Riprendiamo l' equazione

$$a\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)=b\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)+\frac{c}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)-\frac{c}{x^2}z$$

conciossiachè non sarà opra perduta l' intertenersi su d' alcune riflessioni curiose che ne suggerisce.

Primamente se volesse trasformarsi questa equazione in altre simili, basterebbe supporre

$$z=x^m z'$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=x^m\left(\frac{dz'}{dx}\right)+m\,x^{m-1}z'$$

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)=x^m\left(\frac{ddz'}{dx^2}\right)+2\,m\,x^{m-1}\left(\frac{dz'}{dx}\right)+\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m[m-1]x^{m-2}z'$$

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)=x^m\left(\frac{ddz'}{dy^2}\right)$$

Sostituendo questi valori si avrà la trasformata

$$a\left(\frac{ddz'}{dy^2}\right)=b\left(\frac{ddz'}{dx^2}\right)+\frac{2bm+1}{x}\left(\frac{dz'}{dx}\right)+\frac{[bm+c][m-1]}{xx}z'$$

nella quale m sarà per noi arbitraria. Determiniamo dunque m in modo che $2bm+c=0$, e $m=-\frac{c}{bb}$: avremo $z=x^{-\frac{c}{2b}}z'$, e la trasformata si cangierà in

$$a\left(\frac{ddz'}{dy^2}\right)=b\left(\frac{ddz'}{dx^2}\right)-\frac{c[2b+c]}{4bxx}z'$$

la qual equazione avendo un termine di meno debbe riguardarsi assai più semplice della proposta equazione.

Si potrebbe pure con la stessa sostituzione far piuttosto sparire l' ultimo termine, determinando cioè m in modo che $[bm+c][m-1]=0$, e però $m=-\frac{c}{b}$, $m=1$. Per questi due valori di m la nostra trasformata si cambierà in queste due equazioni

$$a\left(\frac{ddz'}{dy^2}\right)=b\left(\frac{ddz'}{dx^2}\right)-\frac{b}{x}\left(\frac{dz'}{dx}\right)$$

$$a\left(\frac{ddz'}{dy^2}\right)=b\left(\frac{ddz'}{dx^2}\right)+\frac{2b+c}{x}\left(\frac{dz'}{dx}\right)$$

che sommate somministrano l' equazione

$$h\left(\frac{ddz'}{dy^2}\right)=\left(\frac{ddz'}{dx^2}\right)+\frac{1}{x}\left(\frac{dz'}{dx}\right)$$

(avendo posto $h=\frac{a}{b}$), che è del pari mancante d' un termine, e perciò più semplice della proposta.

18. Secondariamente se nell' offerta equazione facciamo $c=2b$, ne nascerà l' altra

$$\frac{a}{b}\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)=\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)+\frac{2}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)-\frac{2}{xx}z$$

che è generalmente integrabile co' metodi esposti dall' Eulero nella citata opera *Miscellanea taurinensia*, come pure con altri che fra non molto saremo per esporre. L' autore medesimo con artificj analoghi integra poi molte altre equazioni provenienti tutte dal dare a c certi valori numerici.

19. In terzo luogo se si volesse far dipendere l' integrazione della nostra equazione a differenze parziali da un' altra equazione a differenze ordinarie, ed omogenea di ordine secondo, basterebbe servirsi del metodo seguente. Si faccia (come al §. 1) $z=ue^{\beta y}+z'$, essendo u, e z' funzioni di x solamente, e β una costante indeterminata. Sarà per questa supposizione, trasformata la proposta nell' equazione

$$\left[b\left(\frac{ddu}{dx^2}\right)+\frac{c}{x}\left(\frac{du}{dx}\right)-\left[\frac{c}{xx}+a\beta\beta\right]u\right]e^{\beta y}\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots+b\left(\frac{ddz'}{dx^2}\right)+\frac{c}{x}\left(\frac{dz'}{dx}\right)-\frac{c}{x^2}z'=0$$

che potremo separare in due, onde determinare le nuove variabili u e z'.

Ponghiamo dunque

$$b\left(\frac{ddu}{dx^2}\right)+\frac{c}{x}\left(\frac{du}{dx}\right)-\left[\frac{c}{xx}+a\beta\beta\right]u=0$$

$$b\left(\frac{ddz'}{dx^2}\right)+\frac{c}{x}\left(\frac{dz'}{dx}\right)-\frac{c}{xx}z'=0$$

La seconda di quest' equazioni sappiamo generalmente integrarla, dipendendo essa dal teorema di derivazione che abbiamo accennato di sopra: dunque tutta la difficoltà sarà ridotta a dover integrare la prima equazione data per u, x, e costanti. Per tentare quest' integrazione facciamo $u=e^{\int p^m dx}$, ed avremo, sostituendo la trasformata

$$bmp^{m-1}\left(\frac{dp}{dx}\right)+bp^{2m}+\frac{c}{x}p^m-\frac{c}{xx}-a\beta\beta=0$$

Facciamo $m=-1$, e sarà

$$\frac{b}{pp}\left(\frac{dp}{dx}\right)-\frac{b}{pp}-\frac{c}{px}+\frac{c}{xx}+a\beta\beta=0$$

la qual equazione differenziata nell' ipotesi di dx costante, darà

$$\frac{b}{pp}\left(\frac{ddp}{dx^2}\right)-\frac{2}{p^3}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2+\left[\frac{2b}{p}+\frac{c}{xp^2}\right]\left(\frac{dp}{dx}\right)+\frac{c}{px^2}-\frac{2c}{x^3}=0$$

che è un' equazione omogenea di second' ordine a differenze ordinarie. (Intendo quì per equazione omogenea di second' ordine, ciò che dalla comune degli analisti ordinariamente si vuole, fra quali veggasi l' Eulero nell' aurea sua opera di calcolo integrale, tom. II.)

20. Osserviamo in quarto luogo, che se nella proposta equazione facciamo $c=0$, essa si trasformerà nell' altra semplice e tanto celebre

$$a\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)=b\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$$

la quale determina il moto di una corda vibrante nel caso che la sua densità sia uniforme. Abbiamo già dimostrato che l' integrale d' una tale equazione è

$$z=F\left[x+y\sqrt{\frac{b}{a}}\right]+F'\left[x-y\sqrt{\frac{b}{a}}\right]$$

essendo $F\left[x+y\sqrt{\frac{b}{a}}\right]$, $F'\left[x-y\sqrt{\frac{b}{a}}\right]$ le due funzioni arbitrarie che compiono l' integrale.

21. Vediamo finalmente come ottener si possa l' integrale delle due equazioni più sopra

trovate al §. 17, servendoci di metodi affatto diversi dagli esposti fin quì. Siano dunque le equazioni

$$a\left(\frac{ddz'}{dy^2}\right)=b\left(\frac{ddz'}{dx^2}\right)-\frac{c[2b+c]}{4bxx}z' \;\ldots\ldots(1)$$

$$h\left(\frac{ddz'}{dy^2}\right)=\left(\frac{ddz'}{dx^2}\right)+\frac{1}{x}\left(\frac{dz'}{dx}\right)\;\ldots\ldots\ldots(2)$$

delle quali si voglia l' integrale completo.

Se primamente nell' equazione (1) facciamo $z'=Ce^{\alpha y}e^{\alpha[u+t]}$, essendo C, α due costanti indeterminate; u una funzione di y; e t una funzione di x solamente, avremo per questa supposizione la trasformata

$$a\alpha\left(\frac{ddu}{dy^2}\right)+a\alpha^2\left[1+\left(\frac{du}{dy}\right)\right]^2=b\alpha\left(\frac{ddt}{dx^2}\right)+b\alpha^2\left(\frac{dt}{dx}\right)-\frac{c[2b+c]}{4bxx}$$

che potremo spezzar in due, onde determinare u, t. Ponghiamo dunque

$$\left(\frac{ddu}{dy^2}\right)+\alpha\left[1+\left(\frac{du}{dy}\right)\right]^2=0$$

$$\alpha\left(\frac{ddt}{dx^2}\right)+\alpha^2\left(\frac{dt}{dx}\right)^2-\frac{c[2b+c]}{4bbxx}=0$$

equazioni che sono integrabili co' metodi cogniti. Eseguite frattanto le operazioni, si troverà l' integrale finito della prima indicato per

$$u=\left[\frac{1+A}{\alpha}\right]\log.[\alpha y-A]+A'-\alpha\int\frac{ydy}{\alpha y-A}=Y$$

e similmente l' integrale della seconda verrà espresso dalla formula

$$t=\int\left\{\frac{Bx^{\frac{b-a}{\alpha}}-1}{bx-aB^{\frac{b-a}{\alpha}+1}}\right\}dx+B'=X$$

essendo $a=\frac{\alpha}{2h}[1+\sqrt{(1+4h)}]$, $b=\frac{\alpha}{2h}[1-\sqrt{(1+4h)}]$, e $h=c\left[\frac{2b+c}{4bb}\right]$. Le quantità A, A', B, e B' sono le diverse costanti arbitrarie introdotte dalle rispettive operazioni d' integrazione.

Ponghiamo ora nella supposta sostituzione i valori trovati di t e di u; ed avremo

$$z'=Ce^{\alpha y}e^{\alpha[Y+X]}$$

che esprimerà l' integrale della proposta equazione a differenze parziali. Se ora sviluppiamo la quantità $e^{\alpha[Y+X]}$ secondo le potenze di α, si troverà per z' un' espressione di questa forma

$$z'=TCe^{\alpha y}+T'C\alpha e^{\alpha y}+T''C\alpha^2e^{\alpha y}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oppure sostituendo, come nella prima classe al §. 3, sarà

$$z' = Tf(y) + T'\left(\frac{df(y)}{dy}\right) + T''\left(\frac{ddf(y)}{dy^2}\right) + \ldots\ldots$$

essendo T, T', ec. funzioni di x, e y conosciute.

Passiamo in fine a considerare l' equazione (2); e facciamo nella medesima $z' = Cue^{\beta y + t}$, essendo C, u, t come per l' equazione (1), e β una costante indeterminata. Per questa supposizione, avremo la trasformata

$$\left(\frac{ddu}{dy^2}\right) + 2\beta\left(\frac{du}{dy}\right) + \beta^2 u = \beta\left(\frac{ddt}{dx^2}\right) + \beta^2\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{\beta}{x}\left(\frac{dt}{dx}\right)$$

che potremo separare nelle due equazioni

$$\left(\frac{ddu}{dy^2}\right) + 2\beta\left(\frac{du}{dx}\right) + \beta^2 u = 0$$

$$\left(\frac{ddt}{dx^2}\right) + \beta\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{1}{x}\left(\frac{dt}{dx}\right) = 0$$

le quali sono integrabili co' metodi cogniti.

Ad integrare la prima di queste equazioni, sarà necessario che ci serviamo dell' elegantissimo metodo dato dal sig. pr. Brunacci nel tomo II. del suo calcolo sublime, ed altrove; a fine di scansare l' artificio usato dal sig. Dalembert per il caso delle radici eguali.

Consiste questo nel fare $u = e^{\mu y} \int p dy$, essendo μ una costante indeterminata, e p una nuova funzione di y. Avremo dunque, sostituendo l' equazione

$$[\mu\mu + 2\beta\mu + \beta\beta] \int p dy + [2\beta + 2\mu] p + \left(\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

che potremo spezzare in due, onde determinare μ, e p; sarà perciò

$$\mu\mu + 2\beta\mu + \beta\beta = 0 \qquad [2\beta + 2\mu] p + \left(\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

Dalla prima si ricavano due valori negativi per μ ed eguali a β; e dalla seconda si ritrae $p = A$. Sostituendo nell' equazione d' ipotesi, avremo

$$u = e^{-\beta y} [\int A dy + A'] = e^{-\beta y} [Ay + A']$$

espressione che indicherà l' integrale finito e completo dell' equazione in u.

Per avere l' integrale della seconda equazione, facciamo $\left(\frac{dt}{dx}\right) = p$, e sarà da integrarsi l' equazione

$$dp + \beta ppdx + \frac{1}{x} pdx = 0$$

la quale somministra l' integrale finito

$$p = \frac{1 + B\beta x \log. x}{\beta x \log x}$$

Quindi sarà

$$t = \frac{1}{\beta} \log . \log . x + Bx + B'$$

integrale della seconda equazione a differenze ordinarie.

Sostituendo i valori trovati di u, e t nella prima posizione, si troverà un' espressione la quale soddisfarà alla proposta equazione a differenze parziali, e ne sarà per conseguenza l' integrale.

CLASSE III.

22. La forma generale d' equazioni che si prendono ad integrare in questa classe, comprende anche quelle considerate nella classe seconda; ed è la seguente

$$a \left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = b \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + f(x) \left(\frac{dz}{dx}\right) + f'(x) z$$

indicando $f(x)$ una funzione qualsivoglia della x, e $f'(x)$ il differenziale della detta funzione diviso per dx.

Per ottenere l' integrale di quest' equazione, supponghiamo come nell' antecedente classe, $z = [z' + u] e^{\int p dx}$. Fatte le sostituzioni e riduzioni opportune, avremo

$$\left.\begin{array}{l} b\left(\frac{ddz'}{dx^2}\right)-a\left(\frac{ddz'}{dy^2}\right)+b\left(\frac{ddu}{dx^2}\right)+\ldots\ldots \\ [2bp+f(x)]\left[\left(\frac{dz'}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dx}\right)\right]+\ldots\ldots\ldots \\ [z'+u]\left[b\left(\frac{dp}{dx}\right)+bpp+pf(x)+f'(x)\right] \end{array}\right\}=0$$

la qual equazione essendo composta delle nuove indeterminate z', u, e p, potremo determinar queste mediante le tre equazioni

$$a\left(\frac{ddz'}{dy^2}\right)-b\left(\frac{ddz'}{dx^2}\right)=0$$

$$b\left(\frac{ddu}{dx^2}\right)+[2bp+f(x)]\left[\left(\frac{dz'}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dx}\right)\right]=0$$

$$bdp+bppdx+pf(x)dx+f'(x)dx=0$$

Queste tre equazioni sono integrabili co' metodi esposti nella seconda classe; e però avremo

$$z'=F[x+y\sqrt{c}]+F'[x-y\sqrt{c}]$$

$$u=A'+Ax-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int\left[e^{-\int[2bp+f(x)]dx}\int e^{\int[2bp+f(x)]dx}[2bp+f(x)]\left(\frac{dz'}{dx}\right)dx\right]dx$$

e

$$p=\frac{e^{n\int f(x)dx}+[B-nf(x)]\int e^{n\int f(x)dx}dx}{\int e^{n\int f(x)dx}dx}$$

Sostituendo questi valori di z', u, e p nella supposta posizione, si avrà

$$z=e^{\int pdx}\Big\{F[x+y\sqrt{c}]+F'[x-y\sqrt{c}]+A'+Ax-\ldots$$

$$\int\Big[e^{-\int[2bp+f(x)]dx}\int e^{\int[2bp+f(x)]dx}[2bp+f(x)]\left(\frac{dz'}{dx}\right)dx\Big]dx$$

espressione che mostrerà l' integrale completo della proposta equazione a differenze parziali.

23. Se per un primo caso particolare abbiamo $f(x)=\left(\frac{dX}{Xdx}\right)$, essendo X una funzione qualsivoglia di x, avremo da integrare l'equazione

$$a\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)=b\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)+\left(\frac{dX}{Xdx}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)+X'z$$

chiamando per brevità X' il differenziale di $\left(\frac{dX}{Xdx}\right)$, e diviso per dx.

Sostituendo pertanto nell' integrale del paragrafo precedente in luogo di $f(x)$ il corrispondente valore, si avrà una formola che indicherà l' integrale di quest' ultima equazione a differenze parziali con i coefficienti funzioni della x.

24. Prendiamo per un secondo caso $f(x) = \frac{m}{x}$, e sarà $f'(x) = -\frac{m}{xx}$: quindi sostituendo, avremo l' equazione

$$a\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = b\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{m}{xx}z$$

che è la stessa equazione considerata in principio della classe seconda, e però quell' integrale servirà per quest' equazione colla sola differenza che c si cambia in m.

25. Sia in terzo luogo $f(x) = h \log. x$, e sarà $f'(x) = \frac{h}{x}$: dunque dovrà integrarsi l' equazione

$$a\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = b\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + h \log. x \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{h}{x}z$$

Per avere quest' integrale, metteremo in vece di $f(x)$, il suo valore h log. x, ed in tal guisa si otterrà l' integrale della proposta.

26. Finalmente facciamo $f(x) = \text{Arc. sen.}\, x$, sarà $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$; prendendo 1 per il rag-

gio del circolo il cui arco ha per seno x. Ciò posto, ci si offrirà l' equazione

$$a\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)=b\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)+\text{Arc. sen.}\,x\left(\frac{dz}{dx}\right)+\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}z$$

che potrà integrarsi, ponendo nell' integrale sopra trovato in vece di $f(x)$ la corrispondente espressione di Arc. sen. x.

27. Anche questa classe d' equazioni ne comprende infinite d'ordini superiori, le quali sono poi facilmente riducibili a quella di second' ordine a differenze parziali di cui abbiamo parlato.

Sia primieramente proposta l' equazione di ordine terzo a differenze parziali

$$a\left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right)=b\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)+f(x)\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)+f'(x)\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

di cui si voglia l' integrale finito e completo. Si ridurrà prima quest' equazione a quella di secondo sopra trovata, ponendo cioè $\left(\frac{dz}{dx}\right)=z'$: ed in secondo luogo si chiamerà W il valore ricavato dall' equazione in z'. Si avrà perciò

$$z=\int W\,dx+F(y)$$

essendo $F(y)$ la funzione arbitraria di y, che devesi aggiungere all' integrale affinchè questo sia completo.

28. Similmente l'equazione di quart'ordine

$$a\left(\frac{d^4z}{dx^2\,dy^2}\right)=b\left(\frac{d^4z}{dx^4}\right)+f(x)\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)+f'(x)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$$

darà l' integrale

$$z=\int dx\int W\,dx+xF(y)+F'(y)$$

supponendo prima $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)=z'$, e poscia integrando due volte ed aggiungendo sempre le opportune funzioni arbitrarie.

29. In generale si vede che l'equazione dell' ordine n a differenze parziali darà l'integrale completo

$$z=\int dx\int dx\ldots\ldots\int W dx+F(y)+xF'(y)+\ldots.$$

CLASSE IV.

30. Comecchè il genere d' equazioni che considero in questa classe sia affatto diverso da quelle avute in considerazione fin quì, tuttavìa mediante convenevoli trasformazioni si giunge a presentarle sotto la forma di quelle integrate nelle precedenti classi, oppur in altre che sono integrabili con la massima facilità.

La forma generale di tali equazioni è

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = f(x) \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$$

essendo $f(x)$ una funzione qualunque di x, e costanti. Se ponghiamo per un primo caso particolare $f(x) = hx^m$, $x = u^{\frac{2}{2-n}}$; e $z = \frac{z'}{u}$, avremo da integrare l'equazione

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = h x^m \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$$

oppure

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = h \left[\frac{2-n}{2}\right]^2 u^{\frac{2m-2n}{2-n}} \left(\frac{ddz'}{du^2}\right)$$

Ma abbiamo

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{1}{u} \left(\frac{dz'}{dy}\right) \qquad \left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = \frac{1}{u} \left(\frac{ddz'}{dy^2}\right)$$

$$\left(\frac{dz}{du}\right) = \frac{1}{u} \left(\frac{dz'}{du}\right) - \frac{z'}{uu}$$

$$\left(\frac{ddz}{du^2}\right) = \frac{1}{u} \left(\frac{ddz'}{du^2}\right) - \frac{2}{uu} \left(\frac{dz'}{du}\right) + \frac{2}{u^3} z'$$

dunque sostituendo, sarà

$$\left(\frac{ddz'}{dy^2}\right)=h\left[\frac{2-n}{2}\right]^2 u^{\frac{2m-2n}{2-n}}\left[\left(\frac{ddz'}{du^2}\right)-\frac{2}{u}\left(\frac{dz'}{du}\right)+\frac{2}{uu}z'\right]$$

Determiniamo pertanto n in modo che $\frac{2m-2n}{2-n}=0$; ne viene $m=n$, e perciò l'equazione da integrarsi sarà

$$\left(\frac{ddz'}{dy^2}\right)=h\left[\frac{2-m}{2}\right]^2\left[\left(\frac{ddz'}{du^2}\right)-\frac{2}{u}\left(\frac{dz'}{du}\right)+\frac{2}{uu}z'\right]$$

che potremo trattare con i metodi esposti nelle due ultime classi, oppur con quello di Eulero indicato al §. 18. Ma siccome abbiamo promesso d'integrare quest'equazione con altri artificj; così passeremo a supporre come nella prima classe $z'=pe^{\beta y}+t$, essendo p, t funzioni di u soltanto, e β una costante indeterminata. Fatte le sostituzioni, e riduzioni opportune, si troverà che la trasformata si spezza nell'equazioni

$$\left(\frac{ddp}{du^2}\right)-\frac{2}{u}\left(\frac{dp}{du}\right)+\frac{2}{uu}p-g\beta\beta p=0.$$

$$\left(\frac{ddt}{du^2}\right)-\frac{2}{u}\left(\frac{dt}{du}\right)+\frac{2}{uu}t=0$$

La prima, posto $p=e^{\int q\,du}$, si riduce al quintinomio differenziale

$$dq + qqdu - \frac{2}{u}\,qdu + \frac{2}{uu}\,du - g\beta\beta\,du = 0$$

Similmente, fatto nella seconda $t = e^{\int rdu}$, si avrà il quadrinomio differenziale di prim' ordine

$$dr + rr\,du - \frac{2}{u}\,rdu + \frac{2}{uu}\,du = 0$$

Quest' equazioni si ponno mettere sotto le forme eleganti

$$[q - \frac{1}{u}]^2\,du + d.[q - \frac{1}{u}] = g\beta\beta\,du$$

$$[r - \frac{1}{u}]^2\,du + d.[r - \frac{1}{u}] = 0$$

Ponghiamo $q - \frac{1}{u} = M$, e $r - \frac{1}{u} = N$, sarà

$$dM + MMdu = g\beta\beta du$$

$$dN + NNdu = 0$$

Dalla prima si ricava, integrando

$$M + g\beta\beta[\frac{1 - e^{2(A+u)}}{1 + e^{2(A+u)}}]$$

e dalla seconda si ritrae

$$N = \frac{1}{A'+u}$$

Quindi

$$q = \frac{1}{u} + g\beta\beta\left[\frac{1 - e^{2(A+u)}}{1 + e^{2(A+u)}}\right]$$

$$r = \frac{1}{u} + \frac{1}{A'+u}$$

Sostituendo questi valori di q, ed r, avremo

$$p = B\,u\,e^{g\beta\beta\int\left[\frac{1-e^{2(A+u)}}{1+e^{2(A+u)}}\right]du}$$

$$t = B'\,u[A'+u]$$

Dunque l'integrale della proposta verrà espresso dalla formola

$$z' = B\,u\,e^{\beta y}\,e^{g\beta\beta\int\left[\frac{1-e^{2(A+u)}}{1+e^{2(A+u)}}\right]du} + B'\,u[A'+u]$$

Sviluppando, come si è detto al §. 3 la quantità esponenziale $e^{g\beta\beta\int\left[\frac{1-e^{2(A+u)}}{1+e^{2(A+u)}}\right]du}$ secondo le potenze di β, avremo

$$z' = Vf(y) + V'\left(\frac{df(y)}{dy}\right) + \ldots\ldots\ldots + B'u[A'+u]$$

essendo V, V', ec. funzioni conosciute di u. Ma abbiamo supposto $z = z'u^{-1}$, e $u = x^{\frac{2-m}{2}}$; dunque sostituendo, e cangiando le quantità V, V', ec. in X, X', ec., avremo

$$z = x^{\frac{m-2}{2}}\left[Xf(y) + X'\left(\frac{df(y)}{dy}\right) + \ldots + B'x^{\frac{2-m}{2}}\left[A' + x^{\frac{2-m}{2}}\right]\right]$$

espressione che indicherà l' integrale finito della proposta equazione.

31. Si potrebbe pure con un' altra sostituzione integrare facilmente la medesima equazione

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = hx^m\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$$

Consiste questa sostituzione in fare $z = Ce^{\beta[u+t]}x^m$, essendo u funzione di y; t funzione di x; C e β costanti indeterminate. Sostituendo, e riducendo, avremo

$$\left(\frac{ddu}{dy^2}\right) + \beta\left(\frac{du}{dy}\right)^2 = \left(\frac{ddt}{dx^2}\right) + \beta\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{2m}{x}\left(\frac{dt}{dx}\right) + \frac{m[m-1]}{\beta xx}$$

la qual trasformata si può spezzar in due, onde determinare u, e t. Ponghiamo dunque

$$\left(\frac{ddu}{dy^2}\right)+\beta\left(\frac{du}{dy}\right)^2=0$$

$$\beta\left(\frac{ddt}{dx^2}\right)+\beta\beta\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\frac{2\beta m}{x}\left(\frac{dt}{dx}\right)+\frac{m[m-1]}{xx}=0$$

equazioni che sono integrabili senza bisogno d' artificj.

La prima dà l' integrale

$$u=\log.A'[\beta y+A]^{\frac{1}{\beta}}$$

e la seconda si riduce (posto $\left(\frac{dt}{dx}\right)=p$) a

$$\beta dp+\beta\beta ppdx+\frac{2\beta m}{x}pdx+\frac{m[m-1]}{xx}dx=0$$

Quest' equazione si può mettere sotto la forma

$$[\beta p+\frac{m}{x}]^2dx+d.[\beta p+\frac{m}{x}]=0$$

e fatto $\beta p+\frac{m}{x}=r$, sarà $dr+rrdx=0$; e integrando avremo $r=\frac{1}{B+x}$. Quindi si ricaverà

$$p=\frac{1}{\beta[B+x]}-\frac{m}{\beta x}, \text{ e } t=\log.\left[\frac{B'(B+x)^{\frac{1}{\beta}}}{x^{\frac{m}{\beta}}}\right]$$

Sostituendo questi valori, si avrà l' integrale dell' equazione

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = h\,x^m \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$$

32. Se facciamo parimente in quest' equazione $z = Ce^{\alpha y}u$; volendo che u sia solamente funzione di x, e C, α due costanti indeterminate, sarà, sostituendo

$$\left(\frac{ddu}{dx^2}\right) = \frac{\alpha\alpha}{hx^m}u$$

nella quale, fatto $u = e^{\int t dx}$, avremo

$$dt + t^2 dx = \frac{\alpha\alpha}{hx^m}dx$$

che è l' equazione di Riccati.

33. Sia per un secondo caso particolare $f(x) = he^x$: sarà da integrarsi l' equazione

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = h\,e^x \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$$

Facciamo $e^x = u^{m+n}$, e sostituendo, si trasformerà la proposta in

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = \frac{h}{(m+n)^2}u^{m+n+2}\left(\frac{ddz}{du^2}\right)$$

nella quale, posto $z = \frac{z'}{u}$, si avrà

$$\left(\frac{ddz'}{dy^2}\right) = \frac{h}{(m+n)^2} u^{m+n+2} \left[\left(\frac{ddz'}{du^2}\right) - \frac{2}{u}\left(\frac{dz'}{du}\right) + \frac{2z'}{uu}\right]$$

Determinando m in modo, che sia vera l'equazione $m+n+2=0$, sarà ridotta la nostra equazione alla precedente. Supponghiamo che W sia il valore di z'; avremo $z = Wu^{-1} = We^{\frac{x}{2}}$ per integrale finito e completo della proposta.

34. Vediamo finalmente un terzo caso, cioè quando $f(x) = h\,\text{sen.}\,x$; ed allora si dovrà integrare l'equazione

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = h\,\text{sen.}\,x \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$$

Se supporremo $\text{sen.}\,x = au^m$, $\cos.\,x = bu^n$ e $z = z'u^{-1}$; avremo, sostituendo, la solita equazione

$$\left(\frac{ddz'}{dy^2}\right) = \frac{gh}{mm} u^{2n-m+2} \left[\left(\frac{ddz'}{du^2}\right) - \frac{2}{u}\left(\frac{dz'}{du}\right) + \frac{2z'}{uu}\right]$$

che potremo ridurre a quelle considerate, ponendo $2n - m + 2 = 0$, o sia $m = 2n - 2$.

In generale si vede che la proposta equazione a differenze parziali sarà sempre integrabile per qualunque funzione determinata si prenda in vece di $f(x)$: mentre non dipenderà che dal fare delle sostituzioni, facilissime a rinvenirsi dopo le cose esposte.

CLASSE V.

35. La forma generale dell'equazioni che si considerano in questa classe è la seguente

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)=\frac{\int\varphi(x)dx}{\varphi(x)}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)+\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

indicando per $\varphi(x)$ una funzione qualsivoglia di x, e quantità costanti. Dimostrerò come per l'equazione della classe quarta dati dei valori particolari alla funzione $\varphi(x)$, la proposta si ridurrà all'equazioni integrate di sopra. In fatti ponghiamo in primo luogo $\varphi(x)=hx^m$; sarà $\int hx^m dx=\frac{hx^{n+1}}{m+1}$, e $\frac{\int\varphi(x)dx}{\varphi(x)}=\frac{x}{m+1}$: quindi l'equazione da integrarsi sarà

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)=\frac{x}{m+1}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)+\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

nella quale posto $x=\frac{tt}{g}$, $z=\frac{z'}{t}$, e preso dt

costante, avremo la trasformata

$$\left(\frac{ddz'}{dy^2}\right)=\frac{g}{4(m-1)}\left[\left(\frac{ddz'}{dt^2}\right)+\frac{(2m+1)}{t}\left(\frac{dz'}{dt}\right)-\frac{(2m+1)}{tt}z'\right]$$

che è della forma stessa di quelle considerate nelle classi seconda e terza.

Sia W il valore di z' ricavato da questa ultima equazione, e sarà $z=\frac{z'}{t}=\frac{W}{\sqrt{gx}}$ l' integrale finito della proposta equazione.

36. Sia in secondo luogo $\varphi(x)=h\,\text{sen}.x$; sarà $\int h\,\text{sen}.x dx=h\cos.x$, e $\frac{\int h\,\text{sen}\,x dx}{h\cos.x}=\frac{\cos.x}{\text{sen}.x}$.

Ponghiamo $\cos.x=au^m$, $\text{sen}.x=bu^n$; avremo $dx=-\frac{ma}{b}u^{m-n-1}du$; e però dovrà integrarsi l' equazione

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)=\frac{b}{amm}u^{n-m+1}\left[u\left(\frac{ddz}{du^2}\right)-m\left(\frac{dz}{du}\right)\right].$$

Facciamo $z=\frac{z'}{u}$; e dopo le sostituzioni e riduzioni, si avrà

$$\left(\frac{ddz'}{dy^2}\right)=\frac{b}{amm}u^{n-m+2}\left[\left(\frac{ddz'}{du^2}\right)-\frac{(2+m)}{u}\left(\frac{dz'}{du}\right)+\frac{(2+m)}{uu}z'\right]$$

equazione che tornerà di quelle sopra trattate se determineremo n in modo che sia adempita l' equazione $n - m + 2 = 0$: dunque dopo tale supposizione avremo l' equazione

$$\left(\frac{ddz'}{dy^2}\right) = \frac{b}{amm}\left[\left(\frac{ddz'}{du^2}\right) - \frac{(2+m)}{n}\left(\frac{dz'}{du}\right) + \frac{(2+m)}{uu}z'\right].$$

Quindi si ricaverà $z = z'\left[\frac{\cos.x}{a}\right]^{-\frac{1}{m}}$, espressione che indicherà l' integrale della proposta.

37. Sia finalmente $\varphi(x) = he^x$; e sarà $\frac{\int he^x dx}{he^x} = 1$; e però dovrà integrarsi l' equazione

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \left(\frac{dz}{du}\right)$$

I metodi d' integrazione per una simile equazione son diversi; ma non volendo scostarmi dalle cose esposte fin quì, mi servirò degli artificj adoprati nella prima classe, onde far dipendere l' integrazione della proposta da due equazioni a differenze ordinarie. Sia dunque $z = ue^{\beta y} + z'$, essendo, come più volte abbiamo detto, u, e z' nuove funzioni di x; e β una costante indeterminata da determinarsi; sostituendo, avremo la trasformata

$$\beta\beta u e^{\beta y} = e^{\beta y}\left[\left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + \left(\frac{du}{dx}\right)\right] + \left(\frac{ddz'}{dx^2}\right) + \left(\frac{dz'}{dx}\right)$$

che potremo separare nelle due

$$\left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + \left(\frac{du}{dx}\right) - \beta\beta u = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\left(\frac{ddz'}{dx^2}\right) + \left(\frac{dz'}{dx}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Ad integrare l'equazione (1), ponghiamo $u = e^{\int pdx}$, ed avremo l' equazione

$$dp + ppdx + pdx = \beta\beta dx$$

Se in quest' equazione facciamo $p = rt$, si avrà

$$rdt + tdr + rr\,tt\,dx + rtdx = \beta\beta dx$$

e spezzando quest' equazione in due a fine di determinare r, e t, ricaveremo, dopo fatte le operazioni, l' integrale $r = e^{-x}$, e l' equazione

$$dt + tt\,e^{-x}dx = \beta\beta e^{x}dx$$

per la cui integrazione non conosco alcun metodo diretto.

Ma l' equazione

$$dp + ppdx + pdx = \beta\beta dx$$

si può mettere sotto la forma elegante

$$[p + \frac{1}{2}]^2 dx + d.[p + \frac{1}{2}] = [\beta\beta + \frac{1}{4}]dx$$

nella quale fatto $p + \frac{1}{2} = s$, avremo

$$ds + ssdx = [\beta\beta + \frac{1}{4}]dx$$

equazione che dà l' integrale

$$s = [\beta\beta + \frac{1}{4}]\left[\frac{e^{(2\beta\beta + \frac{1}{2})x} - A}{e^{(2\beta\beta + \frac{1}{2})x} + A}\right]$$

Quindi sarà

$$p = \frac{2[\beta\beta + \frac{1}{4}][e^{(2\beta\beta + \frac{1}{2})x} - A] - e^{(2\beta\beta + \frac{1}{2})x} - A}{2e^{(2\beta\beta + \frac{1}{2})x} + A}$$

integrale finito e completo del quadrinomio di prim' ordine.

Dalle cose esposte apparisce che l' equazione in p trattata col primo metodo porta a dover integrare un trinomio differenziale di prim' ordine, di cui facilmente non si affacciano i metodi d' integrazione; e che al contrario mettendo la stessa equazione sott'altra forma, essa diviene completamente integrabile.

Per le riflessioni fatte di sopra possiamo stabilire il seguente teorema, cioè che „ l'equazion generale $dy + yyMdx = Ndx$ produrrà un integrale finito, ogni volta che i coefficienti della medesima sieno d'una certa forma, e vale a dire $M = e^{-x}$, e $N = ae^{x}$.„

Sostituendo il valore di p, che chiameremo X, avremo l'integrale dell'equazione (1) espresso dalla formola che segue

$$u = Be^{\int Xdx}$$

Si troverà pure che l'integrale dell'equazione (2) verrà indicato da

$$z' = B' - \frac{1}{A'e^{x}}$$

Ora ponendo i valori di u, e z' nella supposta posizione, avremo

$$z = B\, e^{\beta y}\, e^{\int Xdx} + B' - \frac{1}{A'e^{x}}$$

che sarà l'integrale finito e completo della proposta. Per determinare β bisognerà sviluppare la quantità esponenziale $Be^{\int Xdx}$ in una serie ordinata secondo le potenze di β, e fatte le stesse operazioni come più volte abbiamo detto, si avrà l'integrale corredato d'una funzione arbitraria.

38. A questa classe possiamo riportare la seguente forma generale d'equazioni

$$X'\left(\frac{d^n z}{dy^n}\right)+\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)+A\,X\left(\frac{dz}{dx}\right)=0$$

essendo A una costante qualunque; X una funzione di x; e X' la derivata di X. Ciò posto, se noi supporremo $z=Ce^{\alpha y}z'$, essendo z' funzione solamente di x; C e α costanti qualunque; si avrà la trasformata

$$\left(\frac{ddz'}{dx^2}\right)+AX\left(\frac{dz'}{dx}\right)+\alpha^n X'z'=0$$

nella quale, fatto $A=\alpha^n$, avremo l'equazione

$$\left(\frac{ddz'}{dx^2}\right)+\alpha^n X\left(\frac{dz'}{dx}\right)+\alpha^n X'z'=0$$

che dipende dal nostro teorema di derivazione più volte accennato, e però è completamente integrabile. Dunque la proposta equazione sarà sempre integrabile, dipendendo la sua integrazione da un'altra a differenze ordinarie la quale già sappiamo integrare.

CLASSE VI.

39. Nel voler render esatta la differenziale $Ady+Bdx$, o più generalmente $x^m Bdy+bAx^n dx$ s' incontra un' equazione a differenze parziali, la quale è facilmente riducibile a quelle considerate nelle classi precedenti.

Sia pertanto

$$Ady+Bdx=dp \qquad x^m Bdy+bx^n Adx=dq$$

sarà come è notorio

$$A=\left(\frac{dp}{dy}\right) \qquad x^m B=\left(\frac{dq}{dy}\right)$$

$$B=\left(\frac{dp}{dx}\right) \qquad bx^n A=\left(\frac{dq}{dx}\right)$$

Di quì si ricaverà

$$x^m\left(\frac{dp}{dx}\right)=\left(\frac{dq}{dy}\right) \qquad bx^n\left(\frac{dp}{dy}\right)=\left(\frac{dq}{dx}\right).$$

Ora differenziando queste due equazioni, fatta variare in una la x, e nell' altra la y, sarà

$$\left(\frac{d.x^m\left(\frac{dp}{dx}\right)}{dx}\right)=\left(\frac{ddq}{dxdy}\right) \qquad bx^n\left(\frac{ddp}{dy^2}\right)=\left(\frac{ddq}{dydx}\right)$$

che confrontate insieme, daranno l' equazione a differenze parziali

$$bx^{n-m}\left(\frac{ddp}{dy^2}\right)=\left(\frac{ddp}{dx^2}\right)+\frac{m}{x}\left(\frac{dp}{dx}\right)$$

Ma per ridurre quest' equazione alla forma di una di quelle precedentemente considerate, faremo

$$x=u^h \qquad\qquad p=zu^l$$

$$\left(\frac{dp}{dy}\right)=u^l\left(\frac{dz}{dy}\right) \qquad\qquad \left(\frac{ddp}{dy^2}\right)=u^l\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$$

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)=\frac{u^{l-h+1}}{h}\left(\frac{dz}{du}\right)+\frac{l}{h}u^{l-h}z$$

$$\left(\frac{ddp}{dx^2}\right)=\frac{u^{l-2h+2}}{hh}\left(\frac{ddz}{du^2}\right)+\frac{[2l-h+1]}{hh}u^{l-h+1}\left(\frac{dz}{du}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{l[l-h]}{hh}u^{l-2h}z$$

e sostituendo questi valori, avremo

$$bhhu^{[2-m+2]l-2}\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)=\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)+\frac{[2l-h+mh+1]}{u}\left(\frac{dz}{du}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots+\frac{l[l-h+mh]}{uu}z$$

la qual equazione potremo metterla sotto la forma di quelle precedentemente integrate, determinando h e l mediante le due equazioni

$$[2-m+2]\,l-2=0$$

$$2l-h+mh+1=-l[l-h+mh]$$

Sarà dunque per tali supposizioni ridotta la nostra equazione alla prima

$$bhh\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)=\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)+\frac{[2l-h+mh+1]}{u}\left(\frac{dz}{dx}\right)-\frac{[2l-h+mh+1]}{uu}z$$

che è quanto in principio ci eramo proposti.

Confrontiamo pertanto quest' ultima equazione con quella considerata nella classe seconda, e chiamando W il valore di z ricavato mediante l' integrazione, avremo

$$p=u^{l}W=x^{\frac{l}{b}}W;$$

quindi si troverà

$$q=\int x^{m}\left(\frac{d.x^{\frac{l}{b}}W}{dx}\right)dy+F(x)$$

essendo $F(x)$ la funzione arbitraria richiesta dall' integrazione nell' ipotesi di x costante, come già è manifesto.

CLASSE VII.

40. La forma generale d'equazioni che prendo ad integrare in questa classe è la seguente

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)\,z + f(x)\left(\frac{dz}{dx}\right) + a\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) \\ F'(y)z + F(y)\left(\frac{dz}{dy}\right) + b\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) \end{array}\right\} = 0$$

nella quale $f(x)$, $F(y)$ esprimono rispettivamente delle funzioni di x, e di y; e $f'(x)$, $F'(y)$ le derivate di queste funzioni.

Per integrare quest'equazione supporremo $z = Ce^{\alpha u + \mu z'}$, essendo u funzione di x; z' funzione di y; ed α, μ e C costanti qualunque. Ciò posto, avremo la trasformata

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) + \alpha f(x)\left(\frac{du}{dx}\right) + a\,\alpha\alpha\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + a\,\alpha\left(\frac{ddu}{dx^2}\right) \\ F'(y) + \mu F(y)\left(\frac{dz'}{dy}\right) + b\,\mu\mu\left(\frac{dz'}{dy}\right)^2 + b\,\mu\left(\frac{ddz'}{dy^2}\right) \end{array}\right\} = 0$$

che potremo spezzare nelle due

$$a\alpha\left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + a\alpha\alpha\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \alpha f(x)\left(\frac{du}{dx}\right) + f'(x) = 0$$

$$b\beta\left(\frac{ddz'}{dy^2}\right)+b\beta\beta\left(\frac{dz'}{dy}\right)^2+\beta F(y)\left(\frac{dz'}{dy}\right)+F'(y)=0$$

Queste due equazioni dipendono dal più volte citato teorema di derivazione; e però sono completamente integrabili. Sia dunque X il valore di u, e Y il valore di z'; avremo

$$z=Ce^{\alpha X+\beta Y}$$

per integrale della proposta equazione a differenze parziali.

41. Sia per un caso particolare $f(x)=x$, $F(y)=\frac{1}{y}$; l'equazione da integrarsi a differenze parziali sarà

$$\left.\begin{array}{l} z+x\left(\frac{dz}{dx}\right)+a\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) \\ -\frac{z}{yy}+\frac{1}{y}\left(\frac{dz}{dy}\right)+b\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) \end{array}\right\}=0$$

e le due equazioni a differenze ordinarie che si dovranno integrare, saranno

$$a\alpha\left(\frac{ddu}{dx^2}\right)+a\alpha\alpha\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\alpha x\left(\frac{du}{dx}\right)+1=0$$

$$b\beta\left(\frac{ddz'}{dy^2}\right)+b\beta\beta\left(\frac{dz'}{dy}\right)^2+\frac{\beta}{y}\left(\frac{dz'}{dy}\right)-\frac{1}{yy}=0$$

Siccome queste due equazioni dipendono dal teorema di derivazione che si trova negli atti della società italiana delle scienze, così se ci serviremo dei metodi esposti in quella memoria, troveremo gl' integrali delle due equazioni espressi dalle formule

$$u=\int\frac{e^{\frac{xx}{2a}}}{\alpha\int e^{\frac{xx}{2a}}dx}dx-\frac{xx}{2a\alpha}+Ax+A'$$

$$z'=\int\frac{[1+b]y^{\frac{1}{b}}}{B+b\beta y^{\frac{1+b}{b}}}dy-\log.y^{\frac{1}{b\beta}}+B'$$

Ora sostituendo questi valori di u, e z' nella supposta posizione, avremo l' integrale ricercato.

CLASSE VIII.

42. Il genere d'equazioni che prendo a considerare in questa classe è della forma

$$a\left(\frac{d^n z}{dy^n}\right)=b\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)+f(x)\left(\frac{dz}{dx}\right)+f'(x)z+cz$$

Ad integrare quest' equazione, facciamo $z=Ce^{\beta t}u$, volendo che u sia soltanto funzione di

y; t funzione di x; C e β costanti qualunque. Sostituendo, avremo l'equazione trasformata

$$a\left(\frac{d^n u}{dy^n}\right)=\left[b\beta\left(\frac{ddt}{dx^2}\right)+b\beta\beta\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\beta f(x)\left(\frac{dt}{dx}\right)+f'(x)+c\right]u$$

che potremo separare nelle due

$$a\left(\frac{d^n u}{dy^n}\right)-cu=0$$

$$b\beta\left(\frac{ddt}{dx^2}\right)+b\beta\beta\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\beta f(x)\left(\frac{dt}{dx}\right)+f'(x)=0$$

La prima di queste equazioni dà per integrale, come è notorio

$$u=Be^{\alpha y}+B'e^{\alpha' y}+B''e^{\alpha'' y}+\ldots\ldots$$

indicando B, B', B'', ec. le n costanti arbitrarie introdotte dall'integrazioni; e α, α', α'', ec. le radici dell'equazione $\alpha^n-c=0$.

La seconda equazione è della forma di cui più volte abbiamo dato l'integrale; e però chiamato W il valore di t ricavato dalla stessa equazione, avremo

$$z=Ce^{\beta W}[Be^{\alpha y}+B'e^{\alpha' y}+B''e^{\alpha'' y}+\ldots\ldots]$$

che sarà l'integrale della proposta equazione.

43. Se avessimo $c=0$, allora l'integrale

della proposta diventerebbe

$$z = Ce^{\beta W}[By^{n-1} + B'y^{n-2} + B''y^{n-3} + \ldots]$$

Similmente se $a=0$, e $c=0$, avremo

$$z = Ce^{\beta W}$$

per integrale dell' equazione proposta, come d' altronde sappiamo.

CLASSE IX.

44. Sia proposta l' equazione generale

$$\left(\frac{ddz}{dtdu}\right) + \frac{m}{t+u}\left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{m}{t+u}\left(\frac{dz}{du}\right) = 0$$

essendo m una costante qualunque. Per integrare direttamente quest' equazione non si presentano con facilità i metodi opportuni; anzi per quello che conosco, diversi celebri autori reputano una simile equazione assolutamente inintegrabile. Ciò non ostante, la proposta si può trasformare in altre che sono della forma di quelle, che completamente abbiamo integrate nelle classi precedenti.

Ponghiamo dunque

$$u = \frac{1}{2}x - \frac{b}{2a}y \qquad t = \frac{b}{2}x + \frac{b}{2a}y$$

avremo la trasformata

$$\frac{aa}{bb}\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)-\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)-\frac{2m}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)=0$$

che già abbiamo integrata nella seconda classe. Ora supponendo che l'integrale di quest' ultima equazione sia $z=W$, avremo per integrale della proposta un' espressione di questa forma $z=F(u,t)$, sostituendo però in W i valori di x e y dati dalle due equazioni sopra supposte.

Similmente se facciamo

$$u=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2m-1}}-\frac{b}{2(2m-1)a}y$$

$$t=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2m-1}}+\frac{b}{2(2m-1)a}y$$

avremo l' equazione

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)=\frac{bb}{aa}x^{\frac{4m}{2m-1}}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$$

che abbiamo pure integrata completamente nella classe quarta.

Si potrebbe con analoghi artificj trasformare la proposta in altre, che abbiamo già considerate nelle classi precedenti; onde si può concludere che la nostra equazione con i coefficienti funzioni di due variabili è generalmente integrabile: ciò che discorda da quanto hanno asserito alcuni geometri di prim' ordine.

CLASSE X.

45. Sia proposta la celebre equazione

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)+\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)+\left(\frac{ddz}{du^2}\right)=0$$

la quale si voglia trasformare in primo luogo in altre simili che sono di grand' uso nella teoria della figura de' corpi celesti. Ponghiamo

$x=r\cos.\mu$; $y=r\sin.\mu\cos.\pi$; $u=r\sin.\mu\sin.\pi$;

$r=\sqrt{(xx+yy+zz)}$; $\cos.\mu=\frac{x}{\sqrt{(xx+yy+zz)}}$; $\text{tang}.\pi=\frac{u}{y}$

avremo con ciò le differenze parziali di r, μ e π, relativamente alle variabili x, y e z; ed in conseguenza si ricaveranno i valori di $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$, $\left(\frac{ddz}{du^2}\right)$, in differenze parziali di z, relative alle variabili r, μ e π. Considerando dunque z come funzione delle variabili x, y, z, e in seguito, delle variabili r, μ e π, si avrà, differenziando

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=\left(\frac{dz}{dr}\right)\left(\frac{dr}{dt}\right)+\left(\frac{dz}{d\mu}\right)\left(\frac{d\mu}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{d\pi}\right)\left(\frac{d\pi}{dx}\right)$$

Per ottenere poi le differenze parziali $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\mu}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\pi}{dx}\right)$, non è necessario che far variare x nell' espressioni precedenti di r, cos. μ, cos. π. Differenziando dunque, avremo

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)=\cos.\mu\,;\quad \left(\frac{d\mu}{dx}\right)=-\frac{\sin.\mu}{r}\,;\quad \left(\frac{d\pi}{dx}\right)=0$$

sostituendo questi valori, sarà

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=\cos.\mu\left(\frac{dz}{dr}\right)-\frac{\sin.\mu}{r}\left(\frac{dz}{d\mu}\right)$$

e differenziando ancora il valore di $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, si otterrà la differenza parziale $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$ in differenze parziali di z, prese per rapporto alle nuove variabili introdotte, r, μ e π. Con un calcolo consimile si avranno i valori di $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$, e $\left(\frac{ddz}{du^2}\right)$.

Quindi la proposta si trasformerà in

$$\left(\frac{ddz}{d\mu^2}\right)+\frac{\cos.\mu}{\text{sen}.\mu}\left(\frac{dz}{d\mu}\right)+\frac{1}{\text{sen}.^2\mu}\left(\frac{ddz}{d\pi^2}\right)+r\left(\frac{dd.rz}{dr^2}\right)=0$$

la quale si può ancora trasformare nella seguente, posto cos. $\mu = w$

$$\frac{d.\left[(1-ww)\left(\frac{dz}{dw}\right)\right]}{dw}+\frac{1}{1-ww}\left(\frac{ddz}{d\pi^2}\right)+r\left(\frac{dd.rz}{dr^2}\right)=0$$

46. Se facciamo in secondo luogo nella proposta $rr = xx + yy$; e che z diventi per tale ipotesi funzione di r e u; avremo

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)=\frac{yy}{r^3}\left(\frac{dz}{dr}\right)+\frac{xx}{rr}\left(\frac{ddz}{dr^2}\right)$$

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)=\frac{xx}{r^3}\left(\frac{dz}{dr}\right)+\frac{yy}{rr}\left(\frac{ddz}{dr^2}\right)$$

e perciò la proposta si cangierà nell' equazione

$$\left(\frac{ddz}{du^2}\right)+\left(\frac{ddz}{dr^2}\right)+\frac{1}{r}\left(\frac{dz}{dr}\right)=0$$

che sappiamo generalmente integrare.

Facciamo in quest' ultima equazione $r = a + z'$; ed avremo

$$\left(\frac{ddz}{du^2}\right)+\left(\frac{ddz}{dz'^2}\right)+\frac{1}{a+z'}\left(\frac{dz}{dz'}\right)=0$$

Tutte l' equazioni ottenute in questa classe ci saranno utilissime nella seconda sezione, dove tratteremo d' alcuni problemi relativi all' astronomìa fisica. Avverto che parte degli artificj che abbiamo usati in questa X classe trovansi registrati nella grande e sorprendente opera dell' illustre Laplace intitolata *Mécanique céleste*, che si potrà consultare da chi voglia bene addentrarsi nel calcolo su questo rilevante argomento.

47. Vediamo finalmente come ottener si possa l' integrale della proposta

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddz}{dy^2}\right) + \left(\frac{ddz}{du^2}\right) = 0$$

e facciamo per questo $z = Ce^{\beta y}[s + z']$, essendo s funzione di x; z' funzione di x, e u; C e β costanti qualunque da determinarsi. Differenziando, avremo

$$\left(\frac{ddz'}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddz'}{du^2}\right) + \left(\frac{dds}{dx^2}\right) + \beta\beta s + \beta\beta z' = 0$$

la qual trasformata si potrà spezzare nelle due

$$\left(\frac{ddz'}{du^2}\right) + \left(\frac{ddz'}{dx^2}\right) + \beta\beta z' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\left(\frac{dds}{dx^2}\right) + \beta\beta s = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

onde determinare t ed s.

Per integrare la prima di quest' equazioni ponghiamo $z' = C' e^{\alpha u} t$, volendo che t sia solamente funzione di x; e C' ed α costanti indeterminate. Sostituendo, si avrà la trasformata

$$\left(\frac{ddt}{dx^2}\right) + (\beta\beta + \alpha\alpha)\, t = 0$$

che darà l' integrale finito

$$t = A' e^{\int \left[\frac{1 \pm e^{2(A-x)\sqrt{(-\alpha\alpha-\beta\beta)}}}{1 + e^{2(A-x)\sqrt{(-\alpha\alpha-\beta\beta)}}} \right] \sqrt{(-\alpha\alpha-\beta\beta)} \,.\, dx}$$

Ora sviluppando questo valore di t in una serie ordinata secondo le potenze di α, avremo un' espressione di questa forma

$$t = R + R' \alpha + R'' \alpha^2 + \ldots\ldots\ldots$$

Dunque sarà

$$z' = RC' e^{\alpha u} + R' C' e^{\alpha u} \alpha + R'' C' e^{\alpha u} \alpha^2 + \ldots$$

e sostituendo come sopra, avremo

$$z' = Rf(u) + R' \left(\frac{d.f(u)}{du}\right) + R'' \left(\frac{dd.f(u)}{du^2}\right) + \ldots\ldots$$

che sarà l' integrale dell' equazione (1).

Similmente facendo l'operazioni, si troverebbe che l' integrale dell' equazione (2) vien espresso dalla seguente formola

$$s = B'e^{\int \left[\frac{1 \pm e^{2\beta(B-x)\sqrt{-1}}}{1 + e^{2\beta(B-x)\sqrt{-1}}}\right]\beta\sqrt{-1}\,.\,dx}.$$

Fatte le sostituzioni, si avrà

$$z = C\,e^{\beta y}\left\{B'e^{\int \left[\frac{1 \pm e^{2\beta(B-x)\sqrt{-1}}}{1 + e^{2\beta(B-x)\sqrt{-1}}}\right]\beta\sqrt{-1}\,.dx} \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + Rf(u) + R'\left(\frac{d.f(u)}{du}\right) + R''\left(\frac{dd.f(u)}{du^2}\right) + \ldots\right\}$$

Per determinare β si svilupperà la quantità posta fra le grandi parentesi in una serie ordinata secondo le potenze della stessa lettera, ed avremo l' integrale indicato dalla formula

$$z = W\,F(y) + W'\left(\frac{d.F(y)}{dy}\right) + W''\left(\frac{dd.F(y)}{dy^2}\right) + \ldots$$

essendo W, W', W'', ec. composti di x, e u, e di una funzione arbitraria di u.

Mi lusingo che il metodo diretto, da me usato per integrare la proposta equazione tanto celebre fra i geometri, non lascierà niente a desiderare per la sua generalità da tanto tempo e da tanti Celebri investigata.

CLASSE XI.

48. Sia da integrarsi l' equazione

$$a\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=b\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)+c\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)+e\left(\frac{ddz}{du^2}\right)$$

che è tanto conosciuta dai geometri per gli usi estesi a cui ella serve nella fisica-matematica. Per integrare quest' equazione, faremo $z=Ce^{\beta(t+y)}[s+z']$; essendo s funzione di x; z' funzione di x e u; C e β costanti indeterminate. Avremo per questa supposizione la trasformata

$$e\left(\frac{ddz'}{du^2}\right)+b\left(\frac{ddz'}{dx^2}\right)+[c-a]\beta\beta z'+b\left(\frac{dds}{dx^2}\right)+[c-a]\beta\beta s=0$$

che si può spezzare in due onde determinare z', e s. Ponghiamo dunque

$$e\left(\frac{ddz'}{du^2}\right)+b\left(\frac{ddz'}{dx^2}\right)+[c-a]\beta\beta z'=0$$

$$b\left(\frac{dds}{dx^2}\right)+[c-a]\beta\beta s=0$$

e però avremo ridotta la ricerca all' integrazione di queste due ultime equazioni, che già abbiamo nell' antecedente paragrafo completamente integrate. Quindi l' integrale della proposta verrà indicato dalla formola che segue

$$z = WF(t+y) + W'\left(\frac{d.F(t+y)}{dt}\right) + \ldots\ldots$$

$$+ W''\left(\frac{d.F(t+y)}{dy}\right) + \ldots\ldots$$

49. A questa classe d' equazioni appartiene la seguente molto più generale, e cioè

$$a\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + b\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) + c\left(\frac{ddz}{du^2}\right) + f(x)\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = 0$$

nella quale, fatta la stessa sostituzione di sopra, avremo le due equazioni

$$c\left(\frac{ddz'}{du^2}\right) + a\left(\frac{ddz'}{dx^2}\right) + [b+f(x)]\,\beta\beta z' = 0$$

$$a\left(\frac{dds}{dx^2}\right) + [b+f(x)]\,\beta\beta s = 0$$

che saranno in moltissimi casi completamente integrabili, dipendendo la loro integrazione dai diversi valori che si ponno dare alla funzione $f(x)$.

50. Se per un caso particolare fosse

$b + f(x) = \frac{2}{xx}$ avremo le due equazioni

$$c\left(\frac{ddz'}{du^2}\right) + a\left(\frac{ddz'}{dx^2}\right) + \frac{2}{xx}\beta\beta z' = 0$$

$$a\left(\frac{dds}{dx^2}\right) + \frac{2}{xx}\beta\beta s = 0$$

le quali sappiamo, per le cose esposte, completamente integrare.

CLASSE XII.

51. Prenderemo ad esaminare in quest' ultima classe la seguente forma d' equazioni

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)z + f(x)\left(\frac{dz}{dx}\right) + a\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) \\ F'(y)z + F(y)\left(\frac{dz}{dy}\right) + b\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) \\ \varphi'(u)z + \varphi(u)\left(\frac{dz}{du}\right) + c\left(\frac{ddz}{du^2}\right) \end{array}\right\} = 0$$

Ad integrare quest' equazione, faremo $z = Ce^{X+Y+V}$, essendo X un' incognita funzione di x e costanti da determinarsi; e Y, V simili funzioni di y ed u. Differenziando e sostituendo avremo una trasformata che si potrà spezzare in tre equazioni, a fine di determinare X, Y, e V. Ne verrà dunque

$$a\left(\frac{ddX}{dx^2}\right)+a\left(\frac{dX}{dx}\right)^2+f(x)\left(\frac{dX}{dx}\right)+f'(x)=0$$

$$b\left(\frac{ddY}{dy^2}\right)+b\left(\frac{dY}{dy}\right)^2+F(y)\left(\frac{dY}{dy}\right)+F'(y)=0$$

$$c\left(\frac{ddV}{du^2}\right)+c\left(\frac{dV}{du}\right)^2+\varphi(u)\left(\frac{dV}{du}\right)+\varphi'(u)=0$$

equazioni le quali dipendono dal più volte citato teorema di derivazione che trovasi nella prima parte del volume XIII della società italiana delle scienze; e però potremo determinare le funzioni incognite X, Y e V, che sostituite nella supposta posizione, ci daranno l'integrale dell'equazione proposta.

52. Porremo fine a questa sezione, facendo le due seguenti avvertenze.

1.° Uno dei metodi che ho usati per integrar l'equazioni delle classi seconda e terza, consiste in fare principalmente $z=(z'+u)e^{\int pdx}$, supponendo u funzione solamente di x. Ma siccome nel progresso del calcolo si trova $\left(\frac{dz'}{dx}\right)$ incluso nel valore di u, (poichè è per ipotesi z' funzione di x, e y) e taluno potrebbe a prima vista conchiudere non essere giusta e legittima la primitiva supposizione; perciò avverto che vi sono molti casi in cui la funzione z' differenziata nell' ipotesi di x variabile e divisa per dx resta solamente una semplice funzione di x. Rimarranno di ciò convinti coloro che avranno a fondo esaminata la storia del problema delle corde vibranti, dove incontrasi quanto abbiamo accennato.

2.° Verso la metà del paragrafo 21 ho detto esser mestieri servirsi del metodo del pr. Brunacci per integrare un'equazione lineare di second' ordine, e che presenta il noto caso delle radici eguali. Deggio annotare che un altro toscano il sig. pr. Saladini fin dal 1775 avea presentato nel suo *compendio d' analisi tom. 2. pag.* 293 un metodo per integrare l' antidette equazioni, e che all' eleganza unisce questo pure il vantaggio di dare gl' integrali completi e senza bisogno di trascurare gl' infinitesimi d' ordine superiore, come si volea nel metodo di Dalembert.

SEZIONE SECONDA

Applicazioni ad alcuni problemi di fisica matematica.

53. Tutti i problemi di geometria nei quali si considerano delle superficie, e tutti quelli di meccanica in cui si considerano dei corpi o flessibili o fluidi, dipendono dalla teorìa dell' equazioni a differenze parziali. Quindi è che l' equazioni trattate nella prima sezione perchè sono a differenze parziali, apparterranno a problemi geometrici o meccanici. Ed ecco che lo scopo per noi avutosi in questa sezione, quello si è di mostrare come sciolti diversi problemi di fisica matematica, essi ne condurranno necessariamente a integrar l' equazioni considerate nella prima sezione. Non prenderemo già a risolvere tanti problemi quante sono state l' equazioni integrate, ma daremo soltanto una scelta dei più belli e più curiosi tra quei che spettano alla fisica matematica ricavati dalle collezioni citate nell' epitome storica del nostro calcolo posta in principio di questo libro. Il problema risguardante le corde vibranti, siccome quello a cui siam de-

bitori della scoperta dell' equazioni a differenze parziali, sarà trattato per il primo, cui ne succederanno altrettali che hanno con questo affinità e relazione.

Delle vibrazioni delle corde sonore.

54. I più usitati stromenti musici sono tutti formati di corde solide, o fluide, di minugia, di metallo, o d'aria, la quale è il corpo che suona negli stromenti da fiato. Nè questa scelta è senza la sua buona ragione; imperciocchè col suono predominante d'una corda espresso dall' unità sono immedesimati i suoni 2, 3, 4, 5 ec. che al principale si riferiscono nelle proporzioni fra tutte le più semplici. Gli altri corpi sonori accoppiano insieme suoni, che avendo tra loro stranissime relazioni, non possono, quantunque coperti dal principale, interamente appagare l' orecchio. Essendo adunque le corde più di qualsivoglia altro corpo adattate alla musica, ad esse rivolgo le mie riflessioni, e delle loro vibrazioni, e primieramente di quelle delle corde solide cercando le leggi, do principio dallo scioglimento del seguente problema.

PROBLEMA I.

Determinare l' equazione che rappresenta il moto d' una corda in vibrazione.

55. I geometri che fin quì hanno intrapresa la determinazione del moto delle corde vibranti, limitarono le loro ricerche alle condizioni seguenti.

1. Considerarono la corda, fissa nelle due estremità A e B (*fig.* 1.), e tesa da una forza qualunque, in modo che nello stato naturale la figura della corda venga rappresentata dalla retta AB.

2. Supposero che i moti non fossero che infinitamente piccoli, talchè la linea AYB rappresenti la figura della corda in moto per un istante qualunque, ed XY applicata di AYB sia perciò infinitamente piccola.

3. Supposero parimente che il moto di ciascun elemento Y si faccia sempre secondo la direzione dell' ordinata XY, o che infinitamente poco da questa si slontani, lo che val quanto supporre che l' inclinazione di ciascun elemento della corda Ya dall' asse AB sia infinitamente piccolo, oppure che la tangente

condotta a ciascun punto Y faccia con l' asse AB un angolo infinitesimo.

4. Si è voluto da Taylor, Bernoulli, e Giordano Riccati, che tutti i punti della corda AYB arrivino nel medesimo tempo all' asse, condizione che sempre più limitava la generalità del problema, e che Dalembert fece vedere essere assolutamente precaria.

Dalle cose esposte apparisce che cercandosi il moto della corda dopo che avrà ricevuto un impulso qualunque, si rende necessario, secondo gli autori che trattarono di questo problema, che la figura presa sull' istante sia tale, che non solo le ordinate XY sieno infinitamente piccole; ma ancora che l' inclinazione di tutti gli elementi della curva sieno essi pure infinitesimi. Colla soluzione che quì daremo, speriamo di generalizzare il problema, e di svincolarlo dai prementovati supposti.

56. Sia dunque una corda attaccata ai due punti fissi A, B (*fig.* 2.), e tesa ugualmente in ciascuno dei suoi punti con una data forza. Se supporremo che questa corda si scosti dalla prima posizion rettilinea AB, e che alla fine d' un certo tempo t vada a prendere la posizione curvilinea $AMM'M''B$, è chiaro che preso su questa curva un punto qualunque M, ed abbassata la perpendicolare MP, questa

sarà una funzione della corrispondente ascissa AP, e del tempo t; e la determinazione di MP ci farà conoscere la natura della curva $AMM'M''B$.

57. Prendiamo pertanto due porzioni uguali MM', $M'M''$ della curva $AMM'M''B$; e sieno F, F, le risultanti di tutte le forze che rispettivamente agiscano sopra ciascuna di queste porzioni; queste risultanti per supposizione saranno eguali. Sieno condotte ai punti M, M' le tangenti TM, e $T'M'$. Si faccia la lunghezza della fune $AB=a$, ed $AP=x$, $PP'=w=P'P''=$ ec., $PM=z_{x,t}=z$, $P'M'=z_{x+w,t}=z'$,

$$\text{tang. } MTP=\left(\frac{dz}{dx}\right), \quad \text{tang. } M'T'P'=\left(\frac{dz'}{dx}\right)$$

$$\text{sen. } MTP=\frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]}}, \quad \text{sen. } M'T'P'=\frac{\left(\frac{dz'}{dx}\right)}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz'}{dx}\right)^2\right]}}$$

$$\text{cos. } MTP=\frac{1}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]}}, \quad \text{cos. } M'T'P'=\frac{1}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz'}{dx}\right)^2\right]}}$$

Sulle direzioni delle forze F, F prendiamo due porzioni qualunque per rappresentarle, Decomposte queste due forze in altre quattro secondo gli assi delle x, e delle z, se chiameremo α, α' quelle che agiranno secondo le x; e

β, β' quelle che agiranno secondo le z, facilmente si vedrà essere

$$\alpha = F\cos. MTP \quad , \quad \alpha' = F\cos. M'T'P'$$

$$\beta = F\,\text{sen}. MTP \quad , \quad \beta' = F\,\text{sen}. M'T'P'$$

e sostituendo, sarà

$$\alpha = \frac{F}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]}} \quad , \quad \alpha' = \frac{F}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz'}{dx}\right)^2\right]}} \; ,$$

$$\beta = \frac{F\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]}} \quad , \quad \beta' = \frac{F\left(\frac{dz'}{dx}\right)}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz'}{dx}\right)^2\right]}}$$

Ma $\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]} = \sqrt{\left[1+\left(\frac{dz'}{dx}\right)^2\right]} = \left(\frac{dS}{dx}\right)$,

facendo l' arco $AM = S_x = S$. Dunque fatte le sostituzioni, avremo le quattro forze α, α', β, e β', ridotte ad

$$\alpha = \frac{F}{\left(\frac{dS}{dx}\right)} \; , \; \alpha' = \frac{F}{\left(\frac{dS}{dx}\right)} \; , \; \beta = \frac{F\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\left(\frac{dS}{dx}\right)} \; , \; \beta' = \frac{F\left(\frac{dz'}{dx}\right)}{\left(\frac{dS}{dx}\right)}$$

Osservando che le forze le quali agiscono tanto secondo le x, che secondo le z, sono opposte; ne verranno le risultanti

$$\frac{F}{\left(\frac{dS}{dx}\right)} - \frac{F}{\left(\frac{dS}{dx}\right)} = 0$$

$$\frac{F\left(\frac{dz'}{dx}\right)-F\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\left(\frac{dS}{dx}\right)}=\frac{F}{\left(\frac{dS}{dx}\right)}\left[\left(\frac{dz}{dx}\right)+w\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)+\text{ec.}-\left(\frac{dz}{dx}\right)\right]$$

$$=\frac{F}{\left(\frac{dS}{dx}\right)}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)w+\text{ec.}$$

e non tenendo conto che delle prime potenze di w, siccome evidentemente si dimostra dal pr. Brunacci, avremo la forza che agirà secondo l'asse delle z eguale ad $\frac{Fw}{\left(\frac{dS}{dx}\right)}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$.

59. Se si riguardi l' arco MM' come una verga inflessibile, questa verga sarà sollecitata nel senso delle z con la forza assoluta $\frac{Fw}{\left(\frac{dS}{dx}\right)}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$. Dividendo quest' espressione per la massa della verga, s' otterrà la forza acceleratrice secondo l' asse delle z; la qual forza si potrà comparare con la gravità ordinaria G, che è l' unità di peso.

Suppongbiamo la massa $AM=f(x)$; sarà $AM'=f(x+w)=f(x)+w\left(\frac{df}{dx}\right)+\text{ec.}$; quindi sarà la massa cercata $MM' = w\left(\frac{df}{dx}\right)$, trascurando anche quì le potenze di w superiori alla prima. Dunque la forza acceleratrice secondo le z sarà eguale a $\frac{F}{\left(\frac{dS}{dx}\right)\left(\frac{df}{dx}\right)}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$. Ma per il noto principio galileano delle forze acceleratrici e ritardatrici si ha $m = \pm\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$, essendo m la forza acceleratrice, o ritardatrice semplice; t il tempo; e z lo spazio percorso; dunque nel nostro caso, avremo $\frac{F}{\left(\frac{dS}{dx}\right)\left(\frac{df}{dx}\right)}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$. Similmente per lo stesso principio galileano applicato alla caduta de' gravi, si avrà; chiamando s lo spazio percorso, $G = \left(\frac{dds}{dt^2}\right)$, e integrando due volte, si avrà $Gt^2 = 2s$; e perciò $G\alpha\alpha = 2h$, chiamando α il tempo, che un grave impiega a cadere dall'altezza data h.

Siccome poi la formula $m = \left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$ non indica a rigore che una semplice proporzionalità, così avremo

$$G\alpha\alpha : 2h :: \frac{F}{\left(\frac{dS}{dx}\right)\left(\frac{df}{dx}\right)}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) : \left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$$

o sia

$$\frac{2hF}{G\alpha\alpha\left(\frac{dS}{dx}\right)\left(\frac{df}{dx}\right)}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)=\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$$

Posto $f(X)$ in vece di $\frac{2hF}{G\alpha\alpha\left(\frac{dS}{dx}\right)\left(\frac{df}{dx}\right)}$; avremo

in fine

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=f(x)\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$$

equazione fondamentale del problema, e che ha luogo egualmente se la densità della corda è costante, o se è variabile da un punto della curva all' altro.

PROBLEMA II.

Dell' oscillazioni d' una catena pesante.

60. Se supponghiamo che un filo privo di gravità e attaccato a un punto fisso, venga caricato di due pesi uguali, poscia di tre, di

quattro, e di un numero infinito di essi con che sien posti a distanze eguali l'uno dall'altro, si avrà l'idea d'una catena ugualmente pesante. Sia rappresentata questa catena per AC, o AF (*fig.* 3.), e sia A il punto fisso a cui rimane attaccata.

Prendiamo due punti qualunque M, M' sulla catena AF; si abbassino le perpendicolari MB, $M'B'$, che indicheranno gli spazj percorsi orizzontalmente. Si prenda l'origine dell'ascisse dal punto infimo C, e si ponga $AC = AF = l$, $AM = s$, $CB = x$, $BM = z_{x,t} = z$, si avrà $MM' = \left(\frac{ds}{dx}\right)$. Sia la forza di gravità nello stato naturale $= 1$. Poichè la forza acceleratrice in ciascun punto M della catena come dimostra D. Bernoulli negli antichi comentarj di Pietroburgo, è eguale alla somma de' seni degli angoli di contatto che sono fra A ed M, diminuita questa d'una terza proporzionale, che vien composta del corpo in M, della somma di tutti i corpi in MF, e del seno dell'angolo di contatto in M'; perciò si troverà la forza acceleratrice nel punto

$$M' = \int \frac{1}{\left(\frac{ds}{dx}\right)} d. \left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{(l-s)}{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2} \left(\frac{ddz}{dx^2}\right).$$

Dunque pe' noti principj meccanici si avrà l'equazione

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=\frac{(l-s)}{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)-\int\frac{1}{\left(\frac{ds}{dx}\right)}d.\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

nella quale, se faremo $l-s=x$, si ridurrà alla seguente

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=x\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)+\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

che è una di quelle integrate nella quinta classe, e perciò la soluzione del problema verrà ad essere adempita interamente.

61. Nel problema considerato abbiamo supposto che i pesi i quali caricavano la catena fossero eguali, e posti ad eguali distanze l'uno dall'altro; se ora supporremo soltanto che i pesi sieno disuguali, avremo in questo caso una catena di variabile grossezza, e l'equazione trovata cangierà d'aspetto.

Di fatto se oltre alle denominazioni e alle cose dette di sopra, rappresenteremo per $\int\varphi(x)dx$ la massa della porzione $l-s=x$ di catena, avremo la forza acceleratrice in M $=-\int d.\left(\frac{dz}{dx}\right)-\frac{\int\varphi(x)dx}{\varphi(x)}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$; quindi si ricaverà l'equazione

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=\frac{\int\varphi(x)dx}{\varphi(x)}\cdot\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)-\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

che è la generale considerata in principio della quinta classe.

PROBLEMA III.

Dell' oscillazioni d' un fluido elastico rinchiuso in un tubo di figura conoidale qualunque.

62. A meglio facilitar la ricerca supporremo tutto il fluido rinchiuso nel tubo di forma conoidale diviso in una infinità di strati perpendicolari all'asse, e la larghezza variabile di ciascuno di questi strati la supporremo eguale ad $F(x)$, cioè ad una funzione della parte corrispondente x dell'asse. Sia dato di più che gli strati conservino il loro parallelismo, e che z sia lo spazio infinitesimo percorso da uno strato qualunque $F(x)dx$ nel tempo t; chiaramente si vedrà che $F(x)dx$ si cangierà in $\left[F(x)+\frac{d.F(x)}{dx}z\right][dx+dz]=F(x)dx$ $+F(x)dz+\frac{dF(x)}{dx}zdx$, trascurando cioè gl' infinitesimi d' ordine secondo. Ma pe' noti prin-

cipj d'idrostatica, chiamando C l'elasticità del fluido nello stato naturale, si avrà l'elasticità del fluido contenuto nello strato $F(x)dx$ dopo il tempo t eguale a

$$C\frac{F(x)dx}{F(x)dx+F(x)dz+\frac{d.F(x)}{dx}z}=C\left[1-\left(\frac{dz}{dx}\right)-\frac{d.F(x)}{F(x)dx}z\right],$$

trascurando anche quì ciò che si deve. Ora presa la differenza negativa di quest' ultima espressione, si otterrà l'eccesso dell' elasticità d'uno strato qualunque sopra quella dello strato che segue immediatamente: dunque differenziando avremo $-C\left(\frac{ddz}{dx}\right)-C\,d.\frac{d.F(x)}{F(x)dx}.z$, la qual quantità presa negativamente darà l'elasticità cercata, e cioè $C\left(\frac{ddz}{dx}\right)+Cd.f(x).z$, posto $\frac{d.F(x)}{F(x)dx}=f(x)$. Moltiplicando pertanto quest' eccesso d'elasticità per la larghezza $F(x)+\frac{d.F(x)}{dx}.z$ dello strato, e dividendo tutto per la massa $F(x)dx$, avremo la forza acceleratrice che tende a far percorrere lo spazio z. Dunque pe' cogniti principj meccanici potremo formare l'equazione che esprimerà il moto del fluido nel tubo di forma conoidale; e sarà

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=C\left[\left(\frac{ddz}{dx}\right)+d.f(x)z\right]\left[\frac{F(x)+\frac{d.F(x)}{dx}z}{F(x)dx}\right]$$

la qual equazione per la supposizione di z infinitesima si riduce alla seguente

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=C\left[\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)+f(x)\left(\frac{dz}{dx}\right)+f'(x)z\right]$$

Quest' equazione è per l' appunto quella che abbiamo integrata nella terza classe. Se si farà $f(x)=\frac{m}{x}$, ne verrà la trasformata

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=C\left[\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)+\frac{m}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)-\frac{m}{xx}z\right]$$

la quale pertiene al caso che il tubo venga formato dalla rivoluzione d' una parabola o d' un iperbola qualunque.

Si sarebbe potuto sciogliere questo problema co' principj di Lagrange nuovamente introdotti; ma la soluzione sarebbe stata molto più lunga. Altronde chi amerà di risolverlo con queste nuove teorie, potrà consultare il lodato corso di matematica sublime del pr. Brunacci nel tomo secondo dove incontrerà la soluzione d' un problema quasi per lo affatto consimile.

PROBLEMA IV.

Sulla propagazione de' tremiti in un mezzo elastico.

63. S' imagini il mezzo nello stato d' equilibrio, e la sua densità eguale ad uno, e la sua elasticità equilibrata dal peso d' una colonna del medesimo fluido, la cui altezza sia eguale ad h. Si consideri in primo luogo un elemento qualunque di fluido che nello stato d'equilibrio si trovi nel punto D (*fig.* 4.), determinata la posizione di questo punto dalle tre coordinate perpendicolari fra loro $AB = x$, $BC = y$, $CD = z$. Sia dato che stante l' agitazione l' elemento D venga trasferito in D', essendo D' determinato dalle coordinate $AB' = x'$, $B'C' = y'$, $C'D' = z'$, le quali poichè sono certe funzioni di x, y, z; potremo supporre

$$dx' = Ldx + Mdy + Ndz$$
$$dy' = Pdx + Qdy + Rdz$$
$$dz' = Sdx + Tdy + Vdz$$

Consideriamo secondamente un volume di fluido, che nello stato d'equilibrio abbia la figura piramidale $DE'ED'$ (*fig.* 5.) rettangolare, e che per l' agitazione venga trasportato in $ded'e'$ la cui figura verrà ad essere pure piramidale . Facciamo

$$AB = x,\ BC = y,\ CD = z,$$
$$BB' = \alpha,\ CF = \beta,\ DE = \mu;$$

ed avremo il volume della piramide

$$DE'ED' = \tfrac{1}{6}\,\alpha\beta\mu\ .$$

Similmente facendo

$$Ab = x' \quad ,\ bc = y' \quad ,\ ce = z'$$
$$Ap = x' + L\alpha\ ,\ pq = y' + P\alpha\ ,\ qd' = z' + S\alpha\ ,$$
$$Ab' = x' + M\beta\ ,\ b'c' = y' + Q\beta\ ,\ cd = z' + T\beta\ ,$$
$$Am = x' + N\mu\ ,\ mn = y' + R\mu\ ,\ ne' = z' + V\mu\ ,$$

avremo con ciò determinata la posizione dei punti d, e, e', d'. Ora per avere il volume della nuova piramide $ded'e'$, basta osservare che questa non è che l'aggregato dei prismi $cc'nede' + cqned'e' + qc'nd'de'$ meno il prisma $cqc'ed'd$. Ma le solidità di questi prismi sono

Solid.$cc'nede' = \frac{1}{3}[ce + qd' + ne'] \times$ Area del T. cqn

Solid.$cqned'e' = \frac{1}{3}[ce + c'd + ne'] \times$ Area del T.cnc'

Solid.$qc'nd'de' = \frac{1}{3}[qd' + c'd + ne'] \times$ Area del T.$c'nq$

Solid.$cqc'ed'd = \frac{1}{3}[ce + qd' + c'd] \times$ Area del T. cqc'

sostituendo si avrà

Solid.$cc'nede' = \frac{1}{3}[3z' + S\alpha + V\mu] \times$ Area del T.cqn

Solid.$cqned'e' = \frac{1}{3}[3z' + T\beta + V\mu] \times$ Area del T. cnc

Solid.$qc'nd'de' = \frac{1}{3}[3z' + S\alpha + T\beta + V\mu]$ A.del T.$c'nq$

Solid. $cqc'ed'd = \frac{1}{3}[3z' + S\alpha + T\beta] \times$ Area del T. cqc'
e però la solidità della piramide $ded'e'$ sarà eguale $-\frac{1}{3}S\alpha \times$ Area del T. $cnc - \frac{1}{3}T\beta \times$ Area del T. $cqn + \frac{1}{3}V\mu \times$ Area del T. cqc'.

Per trovar l' aree di questi triangoli, osserveremo che $bp = Ap - Ab = L\alpha$, $bb' = Ab' - Ab = M\beta$, $bm = Am - Ab = N\mu$; e quindi l'area del triangolo $cnc = \frac{1}{2}bb'[2y' + R\beta] + \frac{1}{2}b'm[2y' + Q\beta + R\mu] - \frac{1}{2}bm[2y' + R\mu] = \frac{1}{2}[bm.Q\beta - bb'.R\mu] = \frac{1}{2}N\mu.Q\beta - \frac{1}{2}M\beta.R\mu = \frac{1}{2}\beta\mu[NQ - MR]$; quella del triangolo $cqn = \frac{1}{2}bm[2y' + R\mu] + \frac{1}{2}mp[2y' + P\alpha + R\mu] - \frac{1}{2}bp[2y' + P\alpha] = \frac{1}{2}\alpha\mu[LR - NP]$, fatte le sostituzioni come sopra; e finalmente si troverà l' area del triangolo $cqc' = \frac{1}{2}\alpha\beta[LQ - MP]$. Ricaveremo dunque che la solidità della piramide $ded'e'$ è eguale a

$$\tfrac{1}{6}\alpha\beta\mu\,(V[LQ - MP] - T[LR - NP] - S[NQ - MR])$$

e che però la densità del mezzo agitato in z' sarà eguale ad

$$1 : [LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT]$$

e chiamando p l' altezza della colonna che equilibra l' elasticità, avremo

$$p = h : [LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT]$$

e poichè questa è una funzione delle tre variabili x, y, z, porremo $dp = Edx + Fdy + Gdz$, onde si avrà

$$E = \left(\frac{dp}{dx}\right) \qquad F = \left(\frac{dp}{dy}\right) \qquad G = \left(\frac{dp}{dz}\right)$$

Sia, per restringere,

$$LQV - MPV + MRS - NQS + NPT + LRT = K$$

sarà $p = \frac{h}{K}$. Concepiamo ora un punto vicinissimo a D, e sia determinata la sua posizione dalle coordinate $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$; questo punto dopo l'agitazione si troverà vicinissimo ad e, e determinato dalle coordinate

$$x' + Ldx + Mdy + Ndz$$
$$y' + Pdx + Qdy + Rdz$$
$$z' + Sdx + Tdy + Vdz$$

Dunque reciprocamente se la posizione di questo punto vicinissimo ad e resti determinata dalle coordinate $x+\alpha$, $y+\beta$, $z+\mu$, la situazione di questo stesso punto nello stato d'equilibrio sarà determinata dalle coordinate $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, in modo che

$$dx = \frac{\alpha[QV - RT] + \beta[NT - MV] + \mu[MR - NQ]}{K}$$

$$dy = \frac{\alpha[RS - PV] + \beta[LV - NS] + \mu[VP - LR]}{K}$$

$$dz = \frac{\alpha[PT-QS]+\beta[MS-LT]+\nu[LQ-MP]}{K}$$

Ma essendo nel punto e l'elasticità $p=\frac{h}{K}$, sarà nel punto vicinissimo ad e eguale alla quantità $p+Edx+Fdy+Gdz$, e per abbreviare ponendo

$$E[QV-RT]+F[RS-PV]+G[PT-QS]=A$$
$$E[NT-MV]+F[LV-NS]+G[MS-LT]=B$$
$$E[MR-NQ]+F[NP-LR]+G[LQ-NP]=C$$

avremo in fine l' elasticità nel detto punto espressa per la quantità

$$p+\frac{A\alpha+B\beta+C\nu}{K}$$

essendone $\frac{1}{K}$ la densità.

64. Consideriamo in fine un parallelepipedo rettangolo $dcc''d''qp'mp$ (*fig.* 6) ; i cui lati paralelli alle coordinate x, y, z, sieno $cc''=\alpha$, $cd=\beta$, $cp=\mu$; il volume del parallelepipedo sarà eguale ad $\alpha\beta\mu$, e la massa eguale ad $\frac{\alpha\beta\mu}{K}$. Per conoscere le forze da cui viene sollecitato questo parallelepipedo, cerchiamo l'elasticità del mezzo a ciascuno dei suoi an-

goli mediante la seguente tavola

Punti.	*Coordinate.*			*Elasticità.*
c	x'	y'	z'	p
d	x'	$y'+\beta$	z'	$p+\frac{B\beta}{K}$
d''	$x'+\alpha$	$y'+\beta$	z'	$p+\frac{A\alpha+B\beta}{K}$
c''	$x'+\alpha$	y'	z'	$p+\frac{A\alpha}{K}$
p	x'	y'	$z'+\mu$	$p+\frac{C\mu}{K}$
m	x'	$y'+\beta$	$z'+\mu$	$p+\frac{B\beta+C\mu}{K}$
p'	$x'+\alpha$	$y'+\beta$	$z'+\mu$	$p+\frac{A\alpha+B\beta+C\mu}{K}$
q	$x'+\alpha$	y'	$z'+\mu$	$p+\frac{A\alpha+C\mu}{K}$

Ora siccome le faccie opposte del parallelepipedo $cdmp$, $c''d''p'q$, che hanno per superficie $\beta\mu$, differiscono in pressione di $\frac{A\alpha}{K}$; quindi ne nasce una forza che agisce secondo l' asse delle x, e che è uguale a $-\frac{A\alpha\beta\mu}{K}$. Similmente il parallelepipedo sarà sollecitato secondo le direzioni di y', e di z' da due forze consimili, cangiata soltanto la lettera A in B, e C rispettivamente. Dunque essendo $\frac{\alpha\beta\mu}{K}$ la massa del parallelepipedo, e introducendo l' altezza che un grave impiega a cadere in un secondo, avremo pe' noti principj galileani le tre equazioni

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=-2gA\,,\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=-2gB\,,\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=-2gC$$

le quali servono per tutti i tremiti possibili.

Ora facendo $x'=x+p$, $y'=y+q$, $z'=z+r$, essendo p, q, r quantità infinitesime; avremo

$$dp=(L-1)dx+Mdy+Ndz$$
$$dq=Pdx+(Q-1)dy+Rdz$$
$$dr=Sdx+Tdy+(V-1)dz$$

e quindi prossimamente $L=1$, $M=0$, $N=0$, $P=0$, $Q=1$, $R=0$, $S=0$, $T=0$, $V=1$, $K=1$. E pel differenziale di p avremo

$$E=-h\left[\left(\frac{dL}{dx}\right)+\left(\frac{dQ}{dx}\right)+\left(\frac{dV}{dx}\right)\right]$$

$$F=-h\left[\left(\frac{dL}{dy}\right)+\left(\frac{dQ}{dy}\right)+\left(\frac{dV}{dy}\right)\right]$$

$$G=-h\left[\left(\frac{dL}{dz}\right)+\left(\frac{dQ}{dz}\right)+\left(\frac{dV}{dz}\right)\right]$$

Similmente si troverà $A=E$, $B=F$, $C=G$; e per eliminare L, Q, V, osserveremo che è

$$L=1+\left(\frac{dp}{dx}\right) \qquad Q=1+\left(\frac{dq}{dy}\right) \qquad V=1+\left(\frac{dr}{dz}\right)$$

e sostituiti questi valori nelle tre equazioni trovate, avremo

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddp}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddp}{dx^2}\right)+\left(\frac{ddq}{dxdy}\right)+\left(\frac{ddr}{dxdz}\right)$$

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddq}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddp}{dxdy}\right)+\left(\frac{ddq}{dy^2}\right)+\left(\frac{ddr}{dydz}\right)$$

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddr}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddp}{dxdz}\right)+\left(\frac{ddq}{dydz}\right)+\left(\frac{ddr}{dz^2}\right)$$

Ora ponghiamo

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)+\left(\frac{dq}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dz}\right)=u,$$

avremo

$$\left(\frac{ddp}{dt^2}\right)=2gh\left(\frac{du}{dx}\right) \quad \left(\frac{ddq}{dt^2}\right)=2gh\left(\frac{du}{dy}\right) \quad \left(\frac{ddr}{dt^2}\right)=2gh\left(\frac{du}{dz}\right)$$

e facilmente si ricaverà l' equazione

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddu}{dx^2}\right)+\left(\frac{ddu}{dy^2}\right)+\left(\frac{ddu}{dz^2}\right)$$

che è quella che abbiamo presa in considerazione nell' undecima classe.

65. Se volessimo considerare il caso che il tremito iniziale fosse raccolto in uno spazio piccolissimo, e che in seguito si spandesse in qualunque senso; allora supponendo A il centro dell'agitazione primitiva, e $p=xs$, $q=ys$, $r=zs$, sarà s funzione del tempo t e della quantità $\sqrt{[xx+yy+zz]}=w$ che indicherà la distanza del punto A. Ma essendo come è manifesto

$$ds=\left(\frac{ds}{dt}\right)dt+\left(\frac{ds}{dw}\right)dw$$

avremo

$$ds=\left(\frac{ds}{dt}\right)dt+\frac{[xdx+ydy+zdz]}{w}\left(\frac{ds}{dw}\right)$$

Differenziando i valori di p, q, r, e sostituendo, avremo

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)=s+\frac{xx}{w}\left(\frac{ds}{dw}\right)$$

$$\left(\frac{dq}{dy}\right)=s+\frac{yy}{w}\left(\frac{ds}{dw}\right)$$

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)=s+\frac{zz}{w}\left(\frac{ds}{dw}\right)$$

e sostituiti questi valori nell'espressioni di u, cioè in

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)+\left(\frac{dq}{dy}\right)+\left(\frac{dr}{dz}\right)=u,$$

si otterrà

$$u=3s+w\left(\frac{ds}{dw}\right)$$

Ora essendo

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)=\frac{x}{w}\left(\frac{ds}{dw}\right) \qquad \left(\frac{dw}{dx}\right)=\frac{x}{w}$$

l'equazione

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddp}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddp}{dx^2}\right)+\left(\frac{ddq}{dxdy}\right)+\left(\frac{ddr}{dxdz}\right)$$

si trasformerà nella seguente

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right)=\frac{4}{w}\left(\frac{ds}{dw}\right)+\left(\frac{dds}{dw^2}\right)$$

A quest' equazione si riduranno pure le altre due, facendo le medesime operazioni.

Ponghiamo nell' equazione ottenuta $s=\frac{u}{w}$ avremo sostituendo

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddu}{dw^2}\right)+\frac{2}{w}\left(\frac{du}{dw}\right)-\frac{2u}{ww}$$

che è un caso particolare dell' equazion generale integrata nella classe seconda.

PROBLEMA V.

Determinare il moto relativo d' un sistema di corpi attorno ad un corpo considerato per centro de' loro moti.

66. Sia rappresentato da M il corpo che serve di centro al sistema di corpi indicati da m, m', m'', ec. Sieno α, β, μ, le coordinate rettangole di M; $\alpha + x$, $\beta + y$, $\mu + z$, quelle di m; $\alpha + x'$, $\beta + y'$, $\mu + z'$, quelle di m'; e così degli altri. Chiaramente si vedrà che x, y, z saranno le coordinate di m in riguardo ad M; che x', y', z' saranno quelle di m' in riguardo allo stesso corpo, e così si dica del resto. Facciamo

$$r = \sqrt{[x^2 + y^2 + z^2]}, \quad r' = \sqrt{[x'^2 + y'^2 + z'^2]}, \text{ ec.}$$

le r, r', ec. esprimeranno le distanze rispettive de' corpi m, m', ec. da M.

La distanza di m' da m è eguale a

$$\sqrt{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]}$$

e però la sua azione sopra lo stesso corpo m sarà per la legge della gravità universale

$$\frac{m'}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$$

Decomposta quest'azione parallelamente agli assi delle x, y, e z, la forza parallela all'asse delle x, e diretta in senso contrario della loro origine sarà

$$\frac{m.(x'-x)}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

la quale si può mettere sotto la forma

$$\frac{1}{m}.\left\{\frac{d.\dfrac{m.m'}{\sqrt{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]}}}{dx}\right\}$$

e così si dica dell'azione di m'' sopra m ec.

Supponghiamo dunque

$$Q=\frac{m.m'}{\sqrt{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]}}$$

$$+\frac{m.m''}{\sqrt{[(x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2]}}+\text{ec.}$$

verrà ad essere Q la somma dei prodotti a due a due delle masse m, m', m'', ec. divise per le loro distanze rispettive l'una dall'altra. Esprimerà $\frac{1}{m}\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ la somma dell'azioni de' corpi m, m', ec. sopra m decomposta parallelamente all'asse delle x, in senso contrario dell'origine delle coordinate.

Ora l'azione di m sopra M decomposta parallelamente all'asse delle x, ed in senso contrario della loro origine, sarà $\frac{mx}{r^3}$; quella di m sopra M decomposta ugualmente, sarà $\frac{mx'}{r'^3}$, e lo stesso sarà delle altre. Indicando per dt l'elemento del tempo, avremo pe' noti principj dinamici l'equazione per determinare α

$$\left(\frac{dd\alpha}{dt^2}\right) - \Sigma . \frac{mx}{r^3} = 0$$

similmente si avranno per determinare β e μ l'equazioni

$$\left(\frac{dd\beta}{dt^2}\right) - \Sigma . \frac{my}{r^3} = 0$$

$$\left(\frac{dd\nu}{dt^2}\right) - \Sigma . \frac{mz}{r^3} = 0 ,$$

L'azione di M sopra m decomposta parallelamente all'asse delle x e diretta in senso contrario della loro origine, sarà $-\frac{Mx}{r^3}$; e siccome la somma delle azioni de' corpi m', m'', ec. sopra m, decomposta secondo la medesima direzione, abbiamo veduto essere $\frac{1}{m}\left(\frac{dQ}{dx}\right)$, dunque avremo l'equazione

$$\left(\frac{dd.(\alpha+x)}{dt^2}\right)+\frac{Mx}{r^3}-\frac{1}{m}\left(\frac{dQ}{dx}\right)=0$$

nella quale posto in luogo di $\left(\frac{dd\alpha}{dt^2}\right)$ il suo valore $\Sigma.\frac{mx}{r^3}$, si avrà

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)+\frac{Mx}{r^3}+\Sigma.\frac{mx}{r^3}-\frac{1}{m}\left(\frac{dQ}{dx}\right)=0$$

Similmente avremo per rapporto ad y e z l'equazioni

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)+\frac{My}{r^3}+\Sigma.\frac{my}{r^3}-\frac{1}{m}\left(\frac{dQ}{dy}\right)=0$$

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)+\frac{Mz}{r^3}+\Sigma.\frac{mz}{r^3}-\frac{1}{m}\left(\frac{dQ}{dz}\right)=0$$

Queste tre equazioni si ponno mettere sotto la forma

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=\left(\frac{dT}{dx}\right),\ \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=\left(\frac{dT}{dy}\right),\ \left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=\left(\frac{dT}{dz}\right)$$

essendo

$$T=\frac{M+m}{r}-\Sigma.\frac{m'(xx'+yy'+zz')}{r'^3}+\frac{Q}{m}.$$

Se le variabili x', y', z', x'', y'', ec. che rinchiude T saranno indipendenti da x, y, e z, si vedrà facilmente risultare l' equazione

$$\left(\frac{ddT}{dx^2}\right)+\left(\frac{ddT}{dy^2}\right)+\left(\frac{ddT}{dz^2}\right)=0$$

che è quella integrata generalmente nella decima classe.

PROBLEMA VI.

Attrazione delle sferoidi.

67. Ogni corpo celeste separatamente preso è la riunione d' un infinità di molecole dotate d' un potere attrattivo. Le sue dimensioni sono piccolissime relativamente alla sua distanza dagli altri corpi del sistema mondiale, e il suo centro di gravità è incirca attratto, come se in quel punto vi fosse riunita tutta la massa; quindi è che esso stesso agisce sopra i differenti corpi in tutte queste supposizioni, e però puossi imaginare nella ricerca de' centri di gravità dei corpi celesti, che questi altro non sieno che punti massicci riuniti ne' loro centri di gravità. L' ipotesi della sfericità de' pianeti e de' loro satelliti si è trovata approssimata e bastantemente rigorosa; onde qui prenderemo soltanto a risolvere il seguente problema concernente all' attrazione delle sferoidi per confermar sempre più l' importanza

di quanto abbiamo esposto nella prima sezione.

68. Sieno x, y, z, le tre coordinate del punto attratto che indicheremo per m; sia dM una molecula della sferoide, e x', y', z', le coordinate di questa molecula; se chiameremo p la densità di dM, essendo p funzione solamente di x', y', e z', si avrà

$$dM = p \,.\, dx' \,.\, dy' \,.\, dz'$$

L' azione di dM sopra m, decomposta parallelamente all' asse delle x, e diretta verso la loro origine, sarà

$$\frac{p \,.\, dx' \,.\, dy' \,.\, dz' \,(x - x')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

o sia

$$-\left\{\frac{d \,.\, \dfrac{p \,.\, dx' \,.\, dy' \,.\, dz'}{\sqrt{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]}}}{dx}\right\}$$

e chiamando V l' integrale

$$\int \frac{p \,.\, dx' \,.\, dy' \,.\, dz'}{\sqrt{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]}}$$

esteso alla massa intera della sferoide, verrà ad essere V eguale alla somma di tutte le molecule della sferoide divise per le loro distanze rispettive dal punto attratto.

Supponghiamo
$R=[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{-\frac{1}{2}}$,
ed avremo $V=\int p.R.dx'.dy'.dz'$, integrale che debbe aver luogo, supponendo soltanto variabile x', y', e z'; dunque differenziando avremo

$$\left(\frac{ddV}{dx^2}\right)+\left(\frac{ddV}{dy^2}\right)+\left(\frac{ddV}{dz^2}\right)=$$

$$\int p.dx'.dy'.dz'\left[\left(\frac{ddR}{dx^2}\right)+\left(\frac{ddR}{dy^2}\right)+\left(\frac{ddR}{dz^2}\right)\right]$$

ma

$$\left(\frac{ddR}{dx^2}\right)+\left(\frac{ddR}{dy^2}\right)+\left(\frac{ddR}{dz^2}\right)=0$$

e però l' equazione trovata si ridurrà a

$$\left(\frac{ddV}{dx^2}\right)+\left(\frac{ddV}{dy^2}\right)+\left(\frac{ddV}{dz^2}\right)=0$$

la quale abbiamo completamente integrata nella classe decima.

PROBLEMA VII.

Attrazione delle sferoidi sopra un punto esteriore.

69. Rappresenti Z la somma di tutte le molecule della sferoide, divise tutte e ciascuna per

le loro distanze rispettive dal punto attratto; a, b, c le coordinate del punto attratto; x, y, z quelle di una molecula della sferoide, cui chiameremo dM; presa dall' interno della sferoide l' origine delle coordinate, avremo

$$Z = \int \frac{dM}{\sqrt{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]}}$$

Quest' integrale si dee prendere relativamente alle variabili x, y, z, ed i suoi limiti sono indipendenti da a, b, c; ciò posto, se differenzieremo, si avrà

$$\left(\frac{ddZ}{da^2}\right) + \left(\frac{ddZ}{db^2}\right) + \left(\frac{ddZ}{dc^2}\right) = 0$$

la qual equazione fu generalmente integrata nella classe decima, e perciò il problema dell' attrazioni delle sferoidi sopra un punto esterno vien ad essere completamente resoluto.

Per questi ultimi tre problemi si può consultare la meccanica celeste *dell' illustre* sig. Laplace, *onde vedere gli usi estesi a cui servono per risolvere delle questioni d' astronomia fisica della massima rilevanza.*

PROBLEMA VIII.

Del moto de' fluidi.

70. L'equazion generale che rappresenta l'equilibrio de' fluidi, viene indicata come è noto da

$$\delta p = q\,(P.\,\delta x + Q.\,\delta y + R.\,\delta z)$$

essendo p la pressione, q la densità, δ la caratteristica la quale però non si riferisce che alle coordinate x, y, z della molecula. Quando il fluido passa dallo stato d'equilibrio a quello di moto, allora fa d'uopo porre nell'equazione dell'equilibrio le quantità

$$P - \left(\frac{ddx}{dt^2}\right),\ Q - \left(\frac{ddy}{dt^2}\right),\ R - \left(\frac{ddz}{dt^2}\right),$$

in vece di P, Q, R, onde ottenere l'equazione che esprimerà il moto del fluido. Questa sarà

$$\delta V - \frac{\delta p}{q} = \delta x.\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) + \delta y.\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) + \delta z.\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$$

chiamando δV la quantità $P.\delta x + Q.\delta y + R.\delta z$. Ma l'equazione trovata equivale a tre equazioni distinte; poichè essendo le variazioni δx, δy, δz indipendenti, i loro coefficienti si ponno separatamente eguagliare a zero.

Per adempire alle condizioni della continuità del fluido, consideriamo all' origine del moto un parallelepipedo fluido rettangolo le cui dimensioni sieno da, db, dc, e (q) sia la densità primitiva; sarà la massa $(q).da.db.dc$. Ora se noi supponghiamo che (A) indichi questo parallelepipedo, è facile vedere che dopo il tempo t esso si cangierà in un parallelepipedo obliquangolo; mentre tutte le molecule situate primitivamente sopra una superficie qualunque di (A), resteranno in uno stesso piano, almeno trascurando gl' infinitesimi d' ordine secondo: tutte le molecule poste sopra gli spigoli paralleli ad (A) si troveranno sopra piccole rette eguali e parallele tra loro. Sia (B) questo nuovo parallelepipedo, e si concepisca che dalle estremità dello spigolo formato dalle molecule che in (A) compongono lo spigolo dc, si conducano due piani paralleli alle x, e alle y. Prolungando gli spigoli di (B) finchè incontrano i due piani, si avrà un nuovo parallelepipedo (C) compreso fra i due primi, ed eguale a (B): ciò chiaramente si vede mentre quanto uno de' due piani sottrae dal parallelepipedo (B), altrettanto vi aggiunge l' altro. Il parallelepipedo (C) avrà le due basi parallele al piano delle x e delle y; la sua altezza compresa tra le sue basi sarà eguale alla differenza di z presa nella sola ipotesi di c variabile, e si avrà $\left(\frac{dz}{dc}\right) dc$ per quest' altezza.

Ad ottenere la base del parallelepipedo *(C)* si osservi che essa è eguale alla sezione di *(B)* mediante un piano parallelo a quello delle x, y; e sia *(h)* questa sezione. In riguardo alle molecule di cui sarà formata, il valore di z sarà il medesimo, e si avrà

$$\left(\frac{dz}{da}\right).da+\left(\frac{dz}{db}\right).db+\left(\frac{dz}{dc}\right).dc=0$$

Sieno δM, δN, due lati contigui della sezione *(h)* di cui il primo sia formato da molecule della superficie $db.dc$ del parallelepipedo *(A)*, ed il secondo da molecule della superficie $da.dc$. Se dall'estremità di δM s'immaginino due rette parallele all'asse delle x, e si prolunghi il lato del parallelogrammo *(h)* parallelo a δM fino ad incontrare le rette, queste intercetteranno fra loro un nuovo parallelogrammo *(k)* eguale ad *(h)* e la cui base sarà parallela all'asse delle x. Essendo il lato δM formato da molecule della superficie $db.dc$, relativamente alle quali il valore di z è lo stesso; si vedrà che l'altezza di (K) è la differenza di y, supposti a, z, t costanti; e sarà

$$dy=\left(\frac{dy}{db}\right).db+\left(\frac{dy}{dc}\right).dc$$

$$0=\left(\frac{dz}{db}\right).db+\left(\frac{dz}{dc}\right).dc$$

donde si ricava l' altezza del parallelogrammo (K)

$$dy = \frac{\left[\left(\frac{dy}{db}\right) \cdot \left(\frac{dz}{dc}\right) - \left(\frac{dy}{dc}\right) \cdot \left(\frac{dz}{db}\right)\right] \cdot db}{\left(\frac{dz}{dc}\right)}.$$

La base di questo parallelogrammo è eguale ad una sua sezione mediante un piano parallelo all'asse delle x; questa sezione è formata da molecule del parallelepipedo (A), rapporto alle quali z, y sono costanti; dunque la lunghezza del parallelogrammo sarà eguale al differenziale di x preso nell' ipotesi di z, y, t costanti, e perciò si avranno le tre equazioni

$$dx = \left(\frac{dx}{da}\right) \cdot da + \left(\frac{dx}{db}\right) \cdot db + \left(\frac{dx}{dc}\right) \cdot dc$$

$$0 = \left(\frac{dy}{da}\right) \cdot da + \left(\frac{dy}{db}\right) \cdot db + \left(\frac{dy}{dc}\right) \cdot dc$$

$$0 = \left(\frac{dz}{da}\right) \cdot da + \left(\frac{dz}{db}\right) \cdot db + \left(\frac{dz}{dc}\right) \cdot dc.$$

Per restringere, facciamo

$$W = \left(\frac{dx}{da}\right) \cdot \left(\frac{dy}{db}\right) \cdot \left(\frac{dz}{dc}\right) - \left(\frac{dx}{da}\right) \cdot \left(\frac{dy}{dc}\right) \cdot \left(\frac{dz}{db}\right)$$

$$+ \left(\frac{dx}{db}\right) \cdot \left(\frac{dy}{dc}\right) \cdot \left(\frac{dz}{da}\right) - \left(\frac{dx}{db}\right) \cdot \left(\frac{dy}{da}\right) \cdot \left(\frac{dz}{dc}\right)$$

$$+\left(\frac{dx}{dc}\right)\cdot\left(\frac{dy}{da}\right)\cdot\left(\frac{dz}{db}\right)-\left(\frac{dx}{dc}\right)\cdot\left(\frac{dy}{db}\right)\cdot\left(\frac{dz}{da}\right)$$

e si avrà

$$dx=\frac{W\,.\,da}{\left(\frac{dy}{db}\right)\cdot\left(\frac{dz}{dc}\right)-\left(\frac{dy}{dc}\right)\cdot\left(\frac{dz}{db}\right)}$$

con che si esprime la base del parallelogrammo (K); dunque la sua superficie sarà $\frac{W\,.\,da\,.\,db}{\left(\frac{dz}{dc}\right)}$. Questa quantità esprime pure la superficie del parallelogrammo (h), la quale moltiplicata per $\left(\frac{dz}{dc}\right)\,.\,dc$, darà $W\,.\,da\,.\,db\,.\,dc$ che viene ad essere il volume dei parallelepipedi (C) e (B). Sia q la densità del parallelepipedo (A) dopo il tempo t; sarà la massa di (A) eguale a $q\,.\,W\,.\,da\,.\,db\,.\,dc$, la quale uguagliata alla sua massa primitiva, ne dà

$$qW=(q)$$

per l'equazione relativa alla continuità del fluido.

71. Cerchiamo ora di trasformare le due equazioni trovate, e per questo supponghiamo che u, υ, v, rappresentino le velocità d'una molecula fluida parallelamente agli assi delle x; delle y, e delle z; si avrà

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = u\,,\ \left(\frac{dy}{dt}\right) = v\,,\ \left(\frac{dz}{dt}\right) = \nu$$

Differenziando queste tre equazioni nel supposto di u, v, ν, funzioni di x, y, z, e del tempo t, avremo

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = \left(\frac{du}{dt}\right) + u\,.\left(\frac{du}{dx}\right) + v\,.\left(\frac{du}{dy}\right) + \nu\,.\left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \left(\frac{dv}{dt}\right) + u\,.\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\,.\left(\frac{dv}{dy}\right) + \nu\,.\left(\frac{dv}{dz}\right)$$

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = \left(\frac{d\nu}{dt}\right) + u\,.\left(\frac{d\nu}{dx}\right) + v\,.\left(\frac{d\nu}{dy}\right) + \nu\,.\left(\frac{d\nu}{dz}\right)$$

Quindi la prima dell' equazioni trovate si trasformerà in

$$\delta V - \frac{\delta p}{q} = \delta x.\left[\left(\frac{du}{dt}\right) + u.\left(\frac{du}{dx}\right) + v.\left(\frac{du}{dy}\right) + \nu.\left(\frac{du}{dz}\right)\right]$$

$$+ \delta y.\left[\left(\frac{dv}{dt}\right) + u.\left(\frac{dv}{dx}\right) + v.\left(\frac{dv}{dy}\right) + \nu.\left(\frac{dv}{dz}\right)\right]$$

$$+ \delta z.\left[\left(\frac{d\nu}{dt}\right) + u.\left(\frac{d\nu}{dx}\right) + \nu.\left(\frac{d\nu}{dy}\right) + \nu.\left(\frac{d\nu}{dz}\right)\right]$$

Per avere l'equazione relativa alla continuità del fluido, si concepisca che nel valore di W le quantità a, b, c, diventino x, y, z, e che x, y, z, sieno eguali ad $x + u\,dt$, $y + v\,dt$, $z + v\,dt$; ciò che equivale a supporre le coordinate primitive infinitamente vicine da x, y, z; avremo dunque

$$W = 1 + dt.\left[\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)\right]$$

e l' equazione

$$qW = (q)$$

si trasformerà in

$$(q) = q.\left\{1 + dt.\left[\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)\right]\right\}$$

Se consideriamo q funzione di x, y, z, e del tempo t, avremo

$$(q) = q - dt.\left(\frac{dq}{dt}\right) - u\,dt.\left(\frac{dq}{dx}\right) - v\,dt.\left(\frac{dq}{dy}\right) - \varphi\,dt.\left(\frac{dq}{dz}\right)$$

e sostituito questo valore di (q) nell' equazione precedente, essa si trasformerà in

$$0 = \left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.q\varphi}{dz}\right)$$

che è l' equazione relativa alla continuità del fluido e che anche, siccome facilmente si vede, è il differenziale dell' equazione

$$qW = (q)$$

presa per rapporto al tempo t.

La prima trasformata è suscettiva d'integrazione quando $u\,\delta x + v\,\delta y + \nu\,\delta z$ è una variazione esatta di x, y, z, essendo altronde q funzione della pressione p. Sia δQ questa variazione; l'equazione trasformata si cangierà in

$$\delta V - \frac{\delta p}{q} = \delta . \left(\frac{dQ}{dt}\right) + \frac{1}{2} \delta . \left[\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dz}\right)^2\right]$$

che integrata per rapporto a δ, verrà

$$V - \int \frac{\delta p}{p} = \left(\frac{dQ}{dt}\right) + \frac{1}{2} . \left[\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dz}\right)^2\right]$$

Bisognerebbe aggiungere a quest' integrale una costante arbitraria, funzione di t; ma questa costante si può supporre rinchiusa nella funzione Q. Quest' ultima funzione dà la velocità delle molecule fluide parallelamente agli assi delle x. y, z, perchè si ha

$$u = \left(\frac{dQ}{dx}\right), \quad v = \left(\frac{dQ}{dy}\right), \quad \nu = \left(\frac{dQ}{dz}\right)$$

La seconda trasformata per questi valori di u, v, ν, si cangierà in

$$0 = \left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{dq}{dx}\right) \cdot \left(\frac{dQ}{dx}\right) + \left(\frac{dq}{dy}\right) \cdot \left(\frac{dQ}{dy}\right) + \left(\frac{dq}{dz}\right) \cdot \left(\frac{dQ}{dz}\right)$$
$$+ q\left[\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddQ}{dy^2}\right) \pm \left(\frac{ddQ}{dz^2}\right)\right]$$

dalla quale ricaveremo per lo caso de' fluidi omogenei l' equazione

$$\left(\frac{ddQ}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddQ}{dy^2}\right) + \left(\frac{ddQ}{dz^2}\right) = 0$$

di cui abbiamo detto più volte ch' è integrabile completamente con gli artificj descritti nella decima classe.

PROBLEMA IX.

Del moto vibratorio dei timpani.

72. Il moto vibratorio dei timpani si può paragonare al caso di nn panno lino, o di una membrana stesa, ed in vibrazione. Affinchè più facilmente si possa sottoporre al calcolo il moto e precipuamente la tensione di una superficie, converrà osservare la sua generazione nata dalla tessitura dei fili spansi in lunghezza ed in larghezza, conciossiachè in questa guisa si formano di fatto i panni lini, giovando poi il rappresentarci un numero quasi infinito di fili nelle membrane. Consideriamo dunque in primo luogo per finiti gl' intervalli dei fili che normalmente s' incrociano, e sieno questi indicati da ω; e da ω insieme si rappresenti la larghezza di ciascuno dei fili, come se tutti fossero sì fattamente compressi, che da per tutto ugualmente riempiano

il piano. Nella figura 7. il numero dei fili paralelli al lato AB sarà eguale ad $\frac{AC}{w}$; la lunghezza eguale ad AB, e la larghezza eguale a w; onde la loro somma sarà eguale ad $AC \cdot AB$. Parimente la somma degli altri fili paralleli alla stessa AC sarà eguale ad $AB \cdot AC$, in modo che la superficie rettangolare $ABCD$ sarà eguale a $2\,AB \cdot AC$, imperciocchè in virtù della tessitura la materia si duplica da per tutto. Se moltiplichiamo la quantità $2\,AB \cdot AC$ per la grossezza, che chiameremo k, avremo il volume del panno lino eguale $2k \cdot AB \cdot AC$, con la qual quantità rappresenteremo pure la massa.

Potremmo attribuire a ciascuno dei fili una particolare tensione; ma affinchè il calcolo non riesca troppo nojoso, e poichè per la scambievole loro intrecciatura appena può sussistere l'inugualità della tensione, ponghiamo che ogni filo parallelo ai lati AB, e CD sia teso con tanta forza che resti eguale al peso del volume della stessa materia $= hkw$, onde tutt'insieme rimangano tesi d' una forza eguale $hk \cdot AC$; e che poi ciascuno dei fili paralleli ai lati AC, e BD rimanga teso d'una forza $= fkw$, talchè la tensione di tutti insieme venga ad essere $= fk \cdot AB$. Che se si concepisca un elemento qualunque raccolto nel punto Y, dove cioè sia riunita la materia che forma un sol quadratino la quale è $= 2kww$, è da osservarsi che la porzione pq

del filo riman tesa d'una forza $=hk\omega$; e che la tensione dell'altro filo trasversale qr è $=fk\omega$. Laonde se tali punti si sollevino dal naturale loro posto per minimi intervalli, rappresentati da $\pi.Y$, $\pi.p$, $\pi.q$, $\pi.r$, e $\pi.y$, l'elemento Y sarà premuto per di sotto, stante la tensione del filo py, colla

$$\text{forza} = hk\omega\left(\frac{2\pi.Y - \pi.p - \pi.y}{\omega}\right)$$

$$= hk(2\pi.Y - \pi.p - \pi.y)$$

e per la tensione del filo qr, colla

$$\text{forza} = fk\omega\left(\frac{2\pi.Y - \pi.q - \pi.r}{\omega}\right)$$

$$= fk(2\pi.Y - \pi.q - \pi.r)$$

Quindi pe' noti principj meccanici nascerà l'equazione

$$2k\omega\omega\left(\frac{dd.\pi.Y}{dt^2}\right) = \begin{bmatrix} -2ghk(2\pi.Y - \pi.p - \pi.y) \\ -2gfk(2\pi.Y - \pi.q - \pi.r) \end{bmatrix}$$

Che se fisseremo infinitesimi gl' intervalli ω dei fili; e per un punto qualunque Y che è in istato naturale nel piano $ABCD$, poniamo le coordinate ortogonali $CX = x$, $XY = y$, e quindi il medesimo punto nello stato variato si sollevi da questo stesso piano per l' intervallo $= z$, talchè sia $\pi . Y = z$, sarà z una funzione sì delle due variabili x, y, che del tempo t; e quindi pure sarà

$$\pi . Y - \pi . p = w \left(\frac{d z}{d x}\right)$$

$$\pi . y - 2 \pi . Y - \pi . p = w w \left(\frac{d d z}{d x^2}\right)$$

Similmente si avrà

$$\pi . y - \pi . r = w \left(\frac{d z}{d y}\right)$$

$$\pi . q - 2 \pi . Y - \pi . r = w w \left(\frac{d d z}{d y^2}\right)$$

e sostituiti questi valori nell' equazione trovata, essa si trasformerà in

$$\left(\frac{d d z}{d t^2}\right) = g h \left(\frac{d d z}{d x^2}\right) + f g \left(\frac{d d z}{d y^2}\right)$$

equazione mancante di k, cioè della quantità che esprimeva la grossezza della membrana. Si avverta chè la lettera g denota l' altezza della caduta in un secondo, laddove il tempo t si esprime in minuti secondi, e la quantità h, giusta le misure di sopra memorate, è proporzionale alla tensione de' fili paralleli all' ascissa x, la quantità poi f è proporzionale a quella di quelli paralleli all' applicata y.

Con metodi consimili si potrebbe parimente sciogliere il problema della vibrazione delle lamine elastiche, il quale porterebbe a risolvere l' equazione sopra trovata per la vibrazione della membrana.

73. Potrei quì offerire più e più altri problemi importanti relativi al calcolo delle differenze parziali, ma tengo per fermo che la scelta che ho presentata ai lettori sarà sufficiente a mostrare la rilevanza delle cose da noi trattate nella prima sezione. Nel corso delle mie ricerche su questa parte di matematica mi era passato per l' animo di formare una terza sezione, diretta a dilucidare e discutere alcuni punti nelle parti meccaniche ed analitiche da noi esposte, come per mo' di esempio quello delle curve discontinue, che tanto ha agitato i geometri.

Io voleva ad un' ora porre a disamina alcune fra le teorie esposte da Giordano Riccati in una dissertazione inserita nel prodromo dell' Enciclopedia italiana, relativa alle corde di variabil densezza, che comunemente dagli artefici d' istrumenti vengono scartate ed escluse abbenchè suddite ad una certa legge; ed a questo proposito presentar suggettate al calcolo alcune osservazioni e sperienze di non lieve importanza del sig. Luigi Muzzi Ripetitore d' eloquenza italiana e latina in questa Regia Università sulle predette corde e sull'organo della voce, osservazioni dalle quali egli ha anche tratto dell'applicazioni nuove e sagaci all' arringa, all' istrionica, e alla conservazione del vero senso de' concetti e pensamenti di cui lasciano erede la posterità gli scrittori.

Di queste cose tutte che mi forniscono copia di materiali, mi riserbo a trattare ampiamente in altr' opera cui spero quanto prima di metter mano.