OPERE COMPLETE

DI

GALILEO GALILEI

Tomo XIV.

LE OPERE

DI

GALILEO GALILEI

PRIMA EDIZIONE COMPLETA

CONDOTTA SUGLI AUTENTICI MANOSCRITTI PALATINI

E DEDICATA

A S. A. I. E R. LEOPOLDO II

GRANDUCA DI TOSCANA

TOMO XIV

FIRENZE
SOCIETÀ EDITRICE FIORENTINA

1855

PATRONO DELLA EDIZIONE

S. A. I. E R. IL GRANDUCA LEOPOLDO II.

DIRETTORE

IL PROF. EUGENIO ALBÈRI.

OPERE FISICO-MATEMATICHE

Tomo IV.

ILLUSTRAZIONI

DEL VIVIANI E DEL GRANDI

AI

DIALOGHI DELLE NUOVE SCIENZE.

TRATTATO

DELLE RESISTENZE

PRINCIPIATO

DA VINCENZO VIVIANI

PER ILLUSTRARE LE OPERE (1)

DI GALILEO GALILEI,

COMPIUTO E RIORDINATO

DAL PADRE GUIDO GRANDI.

Definizioni Prime.

I. *Momento assoluto d'un grave e d'altra qualsivoglia forza, animata o no, s' intenda quel premere libero e non impedito che fa il grave o la forza all' ingiù per la perpendicolare all'orizzonte.*

II. *Resistenza assoluta della sezione d' un corpo, s' intenda quella repugnanza che le parti del solido, mediante la coerenza di dette parti in quella sezione, hanno ad essere separate dal momento assoluto d' un grave o d' una forza.*

III. *Misura assoluta della resistenza assoluta d' una sezione, s' intenda quel momento assoluto d' un grave o d'una forza, che equivaglia alla detta resistenza assoluta; cioè che con ogni poco di giunta di peso o di forza ne segua lo strappamento delle dette parti in detta sezione.*

IV. *Resistenza omogenea uniforme ....*

V. *Centro delle resistenze ....*

(1) O più veramente per illustrare la Giornata II dei Dialoghi delle Nuove Scienze, secondo quanto abbiam detto nell'Avvertimento del precedente volume.

NB. Lo stampato in carattere « *corsivo* » è la parte del Viviani, e lo stampato in « tondo » è quella del Grandi.

Prima di supplire queste due definizioni rimase imperfette, piacemi d'illustrare, con la scorta di ciò che altrove accenna il nostro Autore, le definizioni precedenti, e d'inserirvene prima alcune altre, le quali pare che manchino, e verisimilmente vi sarebbero state aggiunte dallo stesso Autore, se avesse potuto dare compimento a questa opera.

Il premere libero e non impedito d'un grave, o d'altra forza animata, s'intende quando preme senza verun vantaggio o svantaggio che possa apportargli l'ajuto d'una leva o di una contralleva, per cui operi la forza o la resistenza contrapposta: e questo dicesi momento assoluto, il quale in sè stesso è sempre invariabile, dipendendo dal peso di quel grave, o pure da quella quantità di peso, che quella forza animata regger potrebbe, senz'altra macchina, applicandosi a sostenerlo. Onde, coerentemente, altresì la resistenza assoluta della sezione d'un corpo è la quantità di quella forza che tiene attaccate nella detta comune sezione le parti del corpo, sicchè resistano allo strappamento che ne farebbe, direttamente tirando, cioè con direzione perpendicolare al piano di detta sezione, un peso attaccatovi o pure una forza animata che vi si applicasse col suo assoluto momento, cioè senza l'ajuto d'alcuna leva che ne faciliti l'effetto dello spezzarsi.

E perchè quella tal qual forza, che connette le parti del solido, non è a noi in sè stessa nota (e si disputa ancora tra' filosofi naturali donde ella dipenda, se dalla tessitura ed intralciamento delle fibre, o dallo squisito contatto d'ogni particella, o dalla pressione dell'ambiente, o da altro glutine interpostovi), perciò volendo pure esaminarne il valore, e paragonare le diverse resistenze, che a varie figure e quantità di sezioni possono convenire, non si può far altro che misurare il valore di qualunque resistenza col minimo peso che possa direttamente premendo superarla, o col grandissimo e sommo peso, che dal solido regger si possa prima di cedere e di spezzarsi; essendo pure il dovere, che se una forza, appoco appoco crescendo, giugne finalmente a vincere un'altra forza, prima d'arrivare a questo segno si equilibri con essa, e precisamente uguagli con l'assoluto momento suo il valore di quella, non potendo di minore diventare successivamente maggiore, se prima in qualche differenza di tempo non si fa uguale alla forza competitrice. E però, se avendo attaccato fortemente in alto alla volta d'una camera un cilindro di vetro, di pietra o di metallo, s'intenderà questo talmente prolungarsi, che venga col proprio peso a rompersi; o pure se vi si attaccherà successivamente maggiore e maggior peso, finattanto che tra il proprio peso del cilindro, e quello che si aggiunge da' piedi, ne succeda finalmente l' effetto dello strappamento; quel minimo peso che è abile a spezzare il corpo, o veramente quel sommo che da esso si può sostenere senza spezzarsi, e che precisamente pareggia l' assoluta resistenza di quella sezione del cilindro che dovrà scoprirsi nella rottura, con ragione si assumono per determinata misura di quella resistenza. E torna lo stesso prendere l' uno o l' altro dei detti pesi, cioè il maggiore che possa reggersi, od il minimo abile a rompere il corpo, non differendo questi da quegli che d' una quantita minore di qualsisia proposta, e per così dire infinitamente piccola, per cui appresso a' matematici non si altera l' uguaglianza.

Ma sentiamo il nostro Autore, che in questo proposito altrove si dichiara così:

La resistenza d' un solido assolutamente presa, s' intenda esser sempre misurata da quel peso, che posto nell' estremità del solido fitto per di sopra in una volta, o comunque fermato da un capo nel muro, purchè il peso tiri direttamente a perpendicolo del piano della rottura, è bastante appunto a spezzarlo.

Sicchè nel prolungare perpendicolarmente il cilindro AB (*Fig.* 1) *finchè segua il moto, cioè si faccia lo strappamento di esso dalla parte superiore, si viene con ciò a misurare la sua resistenza; imperocchè questo è l' istesso appunto che dire, che la resistenza in* B *equivale al momento assoluto* BA.

Si sperimenti adunque quanto peso ci voglia a strappare i cilindri di vetro per diritto a piombo, che abbiano questa, o simil figura. Sia AB (*Fig.* 2) *un piano stabile in forma di due piastre, ne' tagli delle quali siano gli scavi in semicircolo d'un foro, dove accostate insieme passi la verga di vetro* CD, *rimanendovi impegnata col suo termine superiore* C *più grosso del fusto, attaccando poscia al termine inferiore* D *tanto peso* E, *che faccia lo strappamento.*

Di qui si cava la tariffa delle resistenze assolute d' uguali sezioni di metalli, e si può provare se doppia sezione voglia doppio peso, come la ragione ce ne persuade.

Però supposta nota la resistenza d' un solido d' una data materia, che vien misurata dalla forza che la supera, tirandola perpendicolarmente, si potrà con regola misurare le resistenze rispettive (secondo la diffinizione da apportarsi qui appresso) de' medesimi solidi tenuti orizzontalmente, o in altra inclinazione.

Ora seguendo l' ordine delle prime definizioni, per supplire ciò che manca nel MS. del nostro Autore, diremo.

Definiz. IV. Momento rispettivo d'un grave, o d'altra forza animata, s'intenda quell'energia che ha, in riguardo alla maniera con cui si applica per via di leva o d'altra macchina, a muovere qualsivoglia resistenza; il quale momento conseguentemente varia, secondo la distanza dal centro del moto, e secondo la lunghezza della contralleva con cui opera il resistente, dalla quale riceve maggiore o minore vantaggio.

V. Resistenza respettiva della sezione d'un corpo è quella forza con cui contrasta ad essere spezzato esso corpo nella detta sezione, posata sopra qualche sostegno, quando il peso o altra forza animata, che s'applica a farne lo strappamento, tira obliquamente al piano della medesima sezione, con l'aiuto di maggiore o minor leva, secondo cui conseguentemente si varia in diverse circostanze il valore di tale resistenza: venendo però sempre misurata dal più gran peso che possa reggere, o dal minimo di quelli che in tal disposizione siano abili a superarla; e viene a significare lo stesso che il momento della resistenza assoluta, che gli conviene in diverse circostanze.

VI. Resistenza omogenea uniforme della sezione d'un solido è quando ciascuna fibra d'essa ha uguale resistenza assoluta, sicchè dallo stesso momento assoluto d'un grave o d'altra forza perpendicolarmente applicatavi può ciascheduna essere superata.

VII. Resistenza varia e difforme della sezione di un solido sarà quando le fibre di esso, non essendo ugualmente forti, non averanno ugual resistenza assoluta, ma da diversi momenti assoluti potrà qualunque di esse venire costretta allo strappamento, come accade in un legno nodoso, in un marmo di varie vene vergato ec.

VIII. Centro delle resistenze è quel punto in cui raccolta si concepisce tutta la forza delle resistenze sparse per ogni fibra; nella maniera che il centro di gravità si dice quel punto in cui raccolta si concepisce l'azione della gravità d'un corpo; anzi si crede l'uno e l'altro centro essere lo stesso punto.

Così il Galileo, padre di questa scienza, da per tutto suppone; ed è senza contesa alcuna in ciò seguitato dal Blondello, dal Leibnizio, dal Varignonio, dal Bernoullio e da quant'altri hanno poscia trattato di resistenze; i quali tutti concepiscono la resistenza respettiva di qualsivoglia sezione d'un corpo, applicata nel centro di gravità, e come riunitasi in esso, mentre gli danno per leva, con cui l'azione sua si rende più vantaggiosa, la distanza di detto centro di gravità dall'appoggio, sopra di cui far si debbe lo strappamento; della quale supposizione però niuno mettendosi in pena d'assegnarne qualche verisimil ragione, tanto più è da stimarsi l'acutezza del nostro Autore, che si provò, come sopra, a dare una particolare definizione del centro delle resistenze: sebbene non l'abbiamo ne' suoi scritti ritrovata compiuta: e di più ne accenna altrove il fondamento col seguente discorso.

È verissimo che il centro di gravità della sezione del solido fitto nel muro è il centro della resistenza dell' attaccamento dell'una superficie con l'altra sua contigua, poichè gl' infiniti attaccamenti e resistenze si debbono supporre e considerare tutte uguali, mentre il solido sia di materia omogenea. Se dunque le resistenze di que' filamenti del solido sono tutte eguali, e di uguale spessezza, saranno come tanti pesi eguali distribuiti in distanze eguali in una leva, che è la sezione, e che gravitano nel loro centro di gravità comune, che è il centro di gravità di detta leva.

Il che volendo più pienamente dichiarare, secondo la mente del nostro Autore, la quale abbastanza riluce dallo sbozzo d'una figura ivi disegnata, e dalle parole addotte di sopra, diremo, che la forza, per cui attaccate si tengono le fibre d'un corpo, fa il medesimo effetto che farebbe un peso, il quale calcasse e comprimesse ciascuna parte contro dell'altra; onde siccome se innumerabili colonnette gravi ST, ST (*Fig.* 3) egualmente alte premessero contro la superficie orizzontale EAC, l'azione loro s'intenderebbe riunita nel centro comune di gravità di esse, che corrisponderebbe appunto al centro D della figura EAC, quando le dette colonnette con le basi loro tutta la riempissero; di maniera che essendo la figura AEC sostenuta sopra la linea EC, sarebbe lo sforzo delle colonnette prementi eguale al momento di un peso, il quale, pareggiando il peso di tutte, fusse applicato nel punto D della leva DB, mobile d'intorno al sostegno B; così ancora, rivoltandosi la figura EAC (*Fig.* 4), e diventando verticale, o stendendosi in qualsivoglia altro piano, come quando è la comune sezione d'un muro e di un solido impegnatovi dentro, le fibre ST, ST, che tengono attaccato il solido AHIC alla superficie EAC, essendo tante forze prementi per la direzione ST, si debbono intendere come riunite nel centro di gravità D della figura EAC, ed operanti col vantaggio della leva DB, mobile d'intorno al sostegno B; non essendovi altro divario da questa disposizione all'altra di prima, che dell'essere le direzioni ST parallele o inclinate all'orizzonte, dove prima elle erano perpendicolari; il che non può variare nulla nel modo di operare, sicchè ciò che prima facevano per un verso, ora non lo facciano per l'altro corrispondente alla loro costituzione, diretta non più al centro della terra, ma ad un altro punto lateralmente posto in una infinita distanza, nella medesima dirittura perpendicolare alla stessa sezione.

Supposizioni.

I. *Qualunque peso sempre discendere, qualunque volta il suo centro di gravità, movendosi, può accostarsi al centro comune de' gravi, se da maggiore forza e resistenza non venga impedito.*

II. *Qualunque peso liberamente si sospenda pel suo centro di gravità, non potersi giammai fermare, finattanto ch' esso centro non abbia acquistato l' infimo punto della circonferenza per cui si muove.*

III. *Qualunque solido posato sopra un sostegno, allora fermarsi, quando la linea retta, che congiugne il centro di gravità del solido ed il contatto di esso col sostegno, sarà perpendicolare all' orizzonte. Cioè allora il cilindro* AB (Fig. 5), *o cono o altro solido, starà fermo sopra il sostegno* C, *quando tirata dal centro di gravità loro* D *la linea* DC *sarà perpendicolare all' orizzonte: perchè qualunque grave ha momento per la perpendicolare tirata dal suo centro di gravità, che è la brevissima verso il centro comune de' gravi; e dovendosi muovere, non è maggior ragione che si muova dall' una parte più che dall' altra.*

IV. *Qualunque resistenza potersi superare da un peso o da una forza o da un momento che sia maggiore di essa resistenza.*

V. *In questa scienza delle resistenze, doversi astrarre dalla flessibilità de' corpi che fanno molla, potendo questi alterare le proporzioni investigate: siccome si dee prescindere ancora dalle tempere e varie crudezze de' metalli.*

Imperocchè la cedenza delle materie de' solidi altera le proporzioni delle resistenze a segno tale, che un medesimo ferro sarà ora più ora meno resistente, secondo la differenza delle tempere e secondo la sua flessibilità, che in virtù di dette tempere si fa or maggiore, or minore; e però data la resistenza assoluta d' un solido in una tal sezione, volendo ricercare la resistenza rispettiva, che è quella quando se gli fa forza pel traverso, converrà immaginarsi la materia nulla cedente, perchè più e più che cederà, maggiore e maggior peso vi vorrà a fare la rottura.

Quindi è che una spada ben temperata si piega bensì facilmente ma non così agevole cosa è il romperla, come si farebbe d' una pari lastra di ferro che fusse crudo e rozzo. Così per la stessa ragione più facilmente si spezza una verga di legno secco che quando era verde e flessibile; ed è stato osservato da Monsù Parent, che l' abete, il quale è più cedente della quercia, sostiene maggior peso prima di rompersi: di maniera che ordinariamente la resistenza di quello alla resistenza di questa si stima essere come 358 a 300, o come 119 a 100, secondo le sperienze rapportate nelle Memorie dell'Accademia Reale di Parigi del 1707. Dove ancora si riferisce dal medesimo autore, che nel cedere e piegarsi le fibre di un solido, la curvatura di esso raccorcia la leva d'intorno a una sua parte quadragesima quinta, allorchè il solido è ritenuto in un termine solo, ma la scorcia d'un sessagesimo solamente, quando sia ritenuto in ambi gli estremi. Il che però ricercherebbe più esatta e diligente osservazione; essendo verisimile che la varietà delle materie permetta che le fibre superiori diversamente si stendano, e le inferiori si comprimano, cagionandosi uno stiramento ed una compressione quando più quando meno violenta, la quale un grandissimo dispendio di forze richiede, ed a cui una diversa piegatura del solido corrisponde, e per conseguenza si viene a scorciare con diversissima proporzione la leva; onde non solamente delle resistenze assolute, ma ancora delle rispettive, considerate per altro in pari circostanze, è vero ciò che altrove dice il nostro Autore, e può registrarsi per sesta supposizione, cioè che

VI. *La diversità della materia altera la resistenza, poichè due solidi eguali e simili, ma di materia diversa, come di vetro l'uno, e l'altro d'acciajo ec., resistono disugualmente.*

VII. *La separazione delle due superficie del solido tenuto per traverso si fa nel medesimo instante, tanto nei punti remoti dal sostegno, che nei vicini, e che in quelli di mezzo; stante che tale separazione si fa con moto regolare dell'una superficie che si muove, dall'altra che sta ferma.*

Il che è coerente all'ipotesi del Galileo, che suppose altresì strapparsi in uno istante tutte le fibre del solido, quando si rompe trasversalmente; come di necessità debbe succedere, secondo la quinta supposizione, che le fibre non sieno cedenti, ma che senza allungarsi o stendersi per di sopra, nè serrarsi o comprimersi per di sotto, si strappino. È ben vero che il Mariotte nel suo Trattato del moto dell'acque, parte 5, disc. 2, il Leibnizio negli Atti di Lipsia del mese di luglio 1684, ed il Varignonio nelle Memorie dell'Accademia Reale del 1702, stimarono più verosimile ipotesi il supporre che si stendano e stirino alquanto le fibre, e più le lontane dal sostegno che le vicine, a proporzione della distanza dal centro del moto, cioè dal sostegno sopra di cui si fa la rottura; e poscia il Sig. Jacopo Bernoulli, di questa medesima supposizione non contento, ne propose un'altra da lui e da altri creduta più vera, in cui s'immagina che prima di spezzarsi il solido alcune fibre vicino all'appoggio si comprimano, altre più sopra si stendano, sicchè tra l'une e l'altre vi abbia un punto di mezzo che non soffre veruna compressione o stendimento alcuno, e da cui verso l'una e l'altra parte sempre più si aumentino l'estensioni delle fibre superiori e le compressioni delle inferiori, come apparisce da una lettera di questo celebre matematico, scritta li 12 marzo 1705, ed inserita nelle Memorie dell'Accademia Reale di Parigi dello stesso anno. Ma queste diversità d'opinioni dimostrano appunto quanto difficil cosa sia il determinare la vera e naturale ipotesi, la quale può essere che in varj casi molto diversa si trovi: e però quanto meglio sia l'astraere da cotesti accidenti, per illustrare teoricamente la materia che abbiamo per le mani, come ha fatto il Galileo, e con esso il nostro Autore, lasciando a' filosofi ed a' pratici osservatori della natura il mettere in conto quelle differenze che può recar seco la diversa tessitura e fortezza e flessibilità delle fibre in qualsivoglia materia; limitando con esse o modificando le conclusioni dedotte generalmente da' fondamenti teorici di questa dottrina.

VIII. *Nello strappare un solido per diritto, si hanno da considerare due resistenze: una è quella dell' attaccamento de' filamenti del solido, la quale è diversa secondo le diversità delle materie d' esso solido, e ne' metalli secondo le tempere: l' altra è quella del vacuo, che in tutte le materie è sempre la stessa, a proporzione delle grossezze del solido: ma nello strappare il solido per traverso, pare che la resistenza del vacuo cessi affatto, poichè mostra l' esperienza, che volendo separare con moto parallelo una lamina di vetro liscio da un' altra lamina simile, vi vuole buona forza, che è quella del vacuo; ma volendole separare con moto angolare, non vi si ricerca punto di forza.*

Da molti luoghi di quest' opera già espressamente apparisce che l'Autore nostro vi lavorava intorno per fino dall' anno 1644, ma quando la malignità di qualche invidioso volesse sospettare, essere stata per affettazione aggiunta assai dopo in varj luoghi del MS. la nota di tempo più antico, eccone in questa stessa supposizione un altro evidente riscontro, dove nomina *la forza del vacuo*, seguendo la maniera di favellare degli antichi, adoperata ancora dal Galileo suo maestro nel primo dialogo; il che dimostra essere ciò stato scritto prima dell' anno 1644, in cui il Torricelli, per mezzo della sua famosa sperienza, di cui appunto fu ministro e primo esecutore il nostro Viviani, rinvenne la vera cagione di ciò che s' attribuiva alla forza del vuoto, e palesò esser questa la sola pressione dell' aria; non essendo verisimile che dopo sì celebre e sì felice scuoprimento, a lui prima che ad altri notissimo, seguitasse il nostro Autore a chiamare col volgo *forza del vuoto*, cioè di un mero nulla, quello che potea, con maggiore proprietà di parlare e con più ragionevole sentimento, chiamare forza della pressione dell' aere esterno o d' altro fluido ambiente.

Diremo adunque, che siccome essendo congiunte insieme due pulitissime lastre di marmo o di vetro, si sperimenta grandissima difficultà in separarle direttamente, non ostante che a tale effetto non sia d' uopo lo strappare veruna fibra, per cui si connetta questa lastra con quella, ma in vigore solamente della pressione, con cui l' aere esterno (o forse altro fluido più tenue) calca l' una contro dell' altra, resistono alla separazione, mancandovi l' aria di mezzo, che ajuti a spignere secondo la direzione della forza che tenta disgiugnerle; così dovendosi direttamente strappare un corpo, separandone un pezzo dall' altro contiguo, si sente la stessa ripugnanza che si proverebbe quando fussero già divisi, ma per uno squisito contatto, per opera della pressione del fluido ambiente, stessero insieme attaccati: ed oltre a ciò si prova tutta la difficultà che risulta dalla tessitura, intralciamento o forza interna che hanno le fibre, per cui resistono alla divisione. Laddove quando trasversalmente si tenta lo spezzamento d' un solido, rimane solo la seconda difficultà da superare, ma non la prima, perchè da ogni lato essendo premuto il solido, cioè da destra a sinistra e da sinistra a destra, ogni poco di forza che si applichi, per volerlo spignere più per un verso che per l' altro, viene aiutata dall' una o dall' altra delle pressioni opposte che si equilibrano; onde (se non ostasse l' intralciamento delle fibre o l' interna forza con cui esse alla divisione resistono) facilmente ne seguirebbe la separazione d' un pezzo dall' altro; e per ciò molto più agevole sarà ancora per questo capo il vincere la resistenza rispettiva che l' assoluta, benchè non vi fusse il vantaggio della leva, come se il solido sporgesse fuori del muro per una distanza eguale al suo semidiametro, e che perciò il peso attaccato alla sua estremità fosse lontano dal sostegno altrettanto, quanto ne è lontana la resistenza che si concepisce tutta ridotta nel centro della sua base, ad ogni modo maggior peso sarebbe necessario per romperlo, tirando con direzione perpendicolare alla base, che tirando obliquamente.

E potrebbe anch' essere che questa, e non lo stiramento delle fibre, fosse la cagione, per cui le sperienze fatte dal Sig. Paolo Wrzio, come riferisce il Blondello ed il Leibnizio, e le altre fatte dal Mariotte, mostrarono ricercarsi allo strappamento diretto de' solidi un molto maggior peso di quello che, secondo la teoria del Galileo, avrebbe dovuto bastare, in paragone di quel peso che li rompeva tirandoli obliquamente. Per esempio, riferisce il Mariotte che per istrappare direttamente un cilindretto di legno, il cui diametro era di 3 linee, vi vollero 330 libbre di peso, quando, secondo il calcolo del Galileo, se ne sarebbero ricercate solo 180. Chi sa che quelle 150 di più, le quali vi s' impiegarono, non corrispondessero appunto alla pressione dell' aria, da cui il Galileo fece astrazione, per non averne alcuna notizia?

È ben vero che se avesse il Sig. Viviani riveduta e perfezionata questa sua opera, non solamente, in vece della forza del vacuo, surrogata averebbe la pressione dell' aria, ma non credo che impegnato si sarebbe a dire, essere questa forza la stessa in tutte le materie, solamente variando a proporzione delle grossezze de' solidi; perchè secondo la tessitura ed intralciamento delle parti componenti de' solidi, è manifesto, alcuni essere di più rara, altri di più serrata struttura, e dai pori di queste o di quelle materie, dove più dove meno perfettamente, venir esclusa l' aria grossa o sottile: dalle quali circostanze si varia in molte maniere il momento dell' aria esterna premente, facendosi ora maggiore ed ora minore. Si può prescindere però ancora da questa forza, per dar luogo alla teoria generale, mettendola poi in conto, quando occorra, nella pratica.

IX. *In oltre poi si possono considerare le sezioni de' solidi come gravi, e a guisa d'Archimede figurarsi che i piani abbiano peso, e che poi tali piani posati sul sostegno della leva. . . .*

M' immagino volesse dire che tali piani, considerati come gravi, applicati al sostegno della leva, contrastino col peso o con la forza che tende a fare lo strappamento; e così l' immaginario peso di detti piani (considerato però come tendente ad un centro posto in infinita distanza da essi, per una direzione perpendicolare a' medesimi) equivalga alla forza della resistenza assoluta o rispettiva, che per un verso direttamente, o almeno in parte, opposto alla direzione della potenza che cerca di effettuare lo strappamento, li va continuamente tirando. Donde tanto più chiaro apparisce che il centro delle resistenze (come si è detto alla definiz. 8) sia il medesimo che il centro di gravità della sezione, in cui si fa la rottura.

Anzi in seguito di questa supposizione il nostro Autore ha proposte quest' altre da lui chiamate

Definizioni Seconde.

I. *Piani o sezioni d' uguale gravità in specie chiamo quelle, delle quali parti eguali pesano ugualmente.*

II. *Piani o sezioni d' ugual gravità assoluta, quelle che pesano ugualmente, o uguali o disuguali che siano tra di loro.*

III. *Piani o sezioni di diversa gravità in specie quelle, delle quali parti uguali pesano disugualmente.*

IV. *Piani o sezioni di diversa gravità assoluta quelle, le quali pesano disugualmente o uguali o disuguali che siano tra di loro.*

Queste diverse maniere di gravità, credo che appresso il nostro Autore equivalgano a varie resistenze uniformi o difformi già di sopra definite; in quanto che ce ne possono rappresentare varj gradi, riducendoli ad una idea più distinta che abbiamo della diversa gravità, che in varie materie corporee già ci è nota e manifesta; il che giova a fissarci meglio la fantasia e fare sì che più chiaro si concepisca la diversa forza di resistenza, che per esempio ha il marmo dal ferro o dal legno, con l'analogia del peso diverso che in pari mole hanno varj corpi, come piombo, argento, acqua, pietra ec.

E sebbene vi ha chi crede che io avrei fatto meglio a dissimulare queste seconde diffinizioni, per essere superflue, secondo il detto d'alcuni moderni, da'quali viene risolutamente asserito, non doversi definire l'uguaglianza e disuguaglianza, essendo a suo giudizio cose chiare per sè stesse e manifeste, *e di lor natura, per così dire, indefinibili,* assicurando che *nè Euclide, nè alcun altro matematico si è mai messo a definire l'egualità, quando l'ha voluta applicare ad altre cose;* tuttavolta io non ho stimato bene di ometterle, sì per dar fuori intieramente tutto ciò che il nostro Autore avea preparato sopra questa materia, e sì perchè sono di parere che non si possano riprendere queste definizioni del Sig. Viviani, a similitudine di quelle che nello stesso proposito, per i corpi d'egual gravità assoluta e d'egual gravità specifica, recò il Galileo nelle Galleggianti, ed il Borelli nel suo Archimede: per non dir nulla che la pretesa induzione di Euclide e degli altri matematici è falsa, avendo noi da Euclide, nel libro 3 degli Elementi, la definiz. prima de' cerchi eguali, e la quarta delle rette egualmente lontane dal centro del cerchio; e nel lib. 11 la decima de' solidi eguali e simili; e nel frammento che di lui ci resta delle cose leggiere e gravi, la definiz. 1 de' corpi uguali in grandezza, e la definiz. 4 de'corpi eguali in potenza; e da Apollonio, nel lib. 6, la definiz. 1 delle sezioni coniche uguali, e la sesta de' segmenti loro uguali; e da Teodosio, nel lib. 1 degli sferici, la sesta de' cerchi ugualmente distanti dal centro della sfera; e da Gregorio di S. Vincenzio, nel lib. 5 della quadratura del cerchio, la definz. 7 delle parabole uguali, e nel sesto l'ottava dell'iperbole uguali; e da Alessandro Marchetti, nel libro della resistenza de' solidi, la definizione di quelli che sono di uguale e di quelli che sono di maggiore o minor resistenza; e da questi medesimi scrittori, da' quali fu mosso questo scrupolo, la definizione (buona o rea che ella siasi) degli angoli solidi uguali, e l'altra dell'uguale moltiplicità; onde il celebre matematico Isacco Barrovio, nella terza lezione matematica, di quelle che recitò nel 1665 in Cantabrigia, e stampate furono nel 1684 in Londra, giudiciosamente disse: *Illorum nihil moror sententiam, qui aequalitatis, similitudinis, et ejusmodi relationum ingenitas nobis a natura species arbitrantur; quando commentum illud, ut jam antea vidimus, haud sit necessarium et minus idoneum scientiis, nec ulla, quod ego percipiam, praeter metaphysicas quasdam vocabulorum perplexitates et argutias, solida ratione subnixum:* del che più a lungo nelle seguenti lezioni poscia discorre.

Ma è tempo ormai, premessi questi principj, di venire alle proposizioni.

Proposizione I, Teorema I.

I momenti di resistenza della medesima sezione e di sezioni uguali sono tra di loro come le distanze del centro di gravità d'esse dal sostegno.

Ciò è evidente, perchè essendo la stessa grandezza di sezione, e supponendosi le materie omogenee, sarà la stessa resistenza assoluta, e solo varierà la respettiva, cioè il momento di detta resistenza a misura della leva favorevole, cui viene applicata, la qual leva non è altro che la distanza del centro di gravità della figura (in cui riconcentrata si concepisce la resistenza per la definizione) dall'appoggio, sopra di cui si fa il moto nella rottura del solido.

Proposizione II, Teorema II.

I momenti delle resistenze nelle sezioni de' solidi, le di cui basi siano disuguali, ed eguali le altezze, sono come le medesime basi.

Ciò si verifica in tutte quelle figure di sezioni, nelle quali i centri di gravità dividono gli assi nella medesima ragione.

Imperocchè essendo uguali l'altezze, saranno altresì uguali le distanze de' centri di gravità da' sostegni; e però i momenti delle resistenze di tali sezioni varieranno solamente a misura che variano le grandezze loro; onde saranno come le basi disuguali di esse.

Corollario I. In qualsivoglia sorta di figure, essendo uguali le distanze del centro di gravità di esse dal sostegno, saranno i momenti delle loro resistenze proporzionali alle grandezze di esse figure.

Corollario II. Quindi è agevol cosa il raccogliere, che generalmente i momenti delle resistenze di due sezioni A, C, hanno la ra-

A C B

gione composta di quella che è tra le grandezze di esse e di quella che passa fra le distanze de' loro centri di gravità da' sostegni; imperocchè presa di mezzo un'altra sezione B uguale di grandezza alla A, ma che abbia il centro di gravità ugualmente distante dal sostegno, come ha l'altra C; sara il momento della resistenza A al momento della resistenza C in ragione composta di quella che ha il momento della resistenza A al momento della resistenza B, e di quella che è tra il momento della resistenza B ed il momento della resistenza C; ma la prima ragione (per la prop. 1) è eguale alla ragione delle distanze de' centri di gravità da' sostegni che sono in A ed in B (ovvero in C); e la seconda ragione è quella che passa tra le stesse grandezze delle sezioni B (ovvero A) e C (pel Corollario precedente); dunque il momento della resistenza A a quello della resistenza C è in ragione composta delle ragioni di esse grandezze A, C, e delle distanze de' centri loro di gravità da' sostegni.

Proposizione III, Teorema III.

I momenti delle resistenze nelle sezioni de' solidi, le quali abbiano ugual base e disuguale altezza, sono tra di loro come i quadrati dell' altezze (purchè le dette sezioni siano tali, che i centri di gravità di esse dividano gli assi nella stessa ragione).

Siano le figure ACB, GEH (*Fig.* 6) *le comuni sezioni di alcuni solidi orizzontalmente distesi, e dal muro in cui perpendicolarmente sono fitti, e si suppongano o mezze ellissi o rettangoli o triangoli o parabole, purchè abbiano le basi uguali* AB, GH, *ma l' altezze disuguali* CD, EF. *Dico che il momento della resistenza* ACB *al momento della resistenza* GEH (*i quali momenti, pel Corollario* 2 *della precedente, provengono dalle grandezze delle dette sezioni e dalle distanze de' centri di gravità loro da' sostegni ne' quali si sospendono i detti solidi, cioè dalle* OD, PF), *sta come il quadrato dell' altezza* CD *al quadrato dell' altezza* EF *di dette sezioni.*

Imperocchè questa sorta di figure, avendo ugual base, sono come l'altezze CD, EF; ed i centri loro di gravità sono dalla base distanti per una parte proporzionale di dette altezze: di maniera che OD a PF sia come CD ad EF; e però la ragione dei detti momenti, composta di quella delle grandezze e dell' altra delle dette distanze, è duplicata di ciascuna di esse; onde è come la ragione de' quadrati dell' altezza CD, EF. Il che ec.

Corollario. Quindi ancora può dedursi, essere la ragione dei detti momenti duplicata di quella delle distanze da' sostegni, cioè come i loro quadrati.

Proposizione IV, Teorema IV.

I momenti delle resistenze nelle sezioni simili di qualche solido sono tra di loro come i cubi dell' altezze.

Perchè la grandezza delle figure simili è in ragione duplicata di quella de' lati omologhi o dell' altezze loro: si aggiunga la ragione delle distanze de' centri di gravità da' sostegni, la quale è pure la medesima con quella dell' altezze; ne risulterà la ragione composta di quella delle grandezze e delle dette distanze, cioè (pel coroll. 2 della prop. 2) quella de' momenti delle resistenze, uguale alla triplicata dell' altezze, cioè a quella de' cubi delle medesime; il che ec.

Corollario. Quindi i momenti delle sezioni di qualsivoglia solido rotondo sono come i cubi de' diametri d' esse sezioni.

Proposizione V, Teorema V.

Dei cilindri e prismi ugualmente grossi e disugualmente lunghi, le resistenze ad essere spezzati per traverso hanno reciproca proporzione delle lunghezze; o per meglio dire, le forze che si ricercano per ispezzare tali solidi, hanno reciproca proporzione delle dette lunghezze.

Poichè, posto che il peso E (*Fig.* 7) *sia il minimo, che appeso in* C *serva per ispezzare in* BA, *colla leva* BC; *con leva minore di essa, maggior peso si richiederà per fare l' istesso effetto; e tanto maggiore, quanto la prima leva supera la seconda: non essendo altro il ridursi tal solido prossimo allo spezzarsi, che un farsi l' equilibrio tra la resistenza posta nel centro della base* BA *ed il peso posto in diversi luoghi della lunghezza del solido, considerato come nulla pesante.*

L' intenzione del Sig. Viviani era, che questa proposizione si ponesse dopo la prima delle resistenze del Galileo, perchè questi non la prova, ma bensì la suppone per sè nota nella proposizione quinta.

Proposizione VI, Teorema VI.

Se A *equilibra* B (*Fig.* 8), *e* D *equilibra* C, *sempre il peso* A *al peso* D *ha la proporzione composta di quella della distanza* GE *alla* EH, *e di quella del peso* B *al peso* C, *o resistenza* B *alla* C, *e della distanza* LF *alla* FI.

Poichè il peso A *al peso* D *ha la proporzione composta del peso* A *al peso* B, *del* B *al* C *e del* C *al* D; *ma il peso* A *al* B *sta come* GE *ad* EH; *e il peso* B *al* C *sta come l' istesso* B *al* C, *o come la resistenza* B *alla* C; *ed il peso* C *al* D *come la distanza* LF *alla* FI; *dunque il peso* A *al peso* D *è in ragione composta delle suddette proporzioni. Il che ec.*

Proposizione VII, Teorema VII.

Se saranno le due libre AB, CD (*Fig.* 9) *con i sostegni* E, F, *e colle contralleve* AE, CF *uguali tra loro, e con i pesi e resistenze* G, H, *che tra loro stiano come le leve* EB, FD *omologamente; dico che se in* B *e* D *si appenderanno i pesi* I, L *che equilibrino le resistenze* G, H, *i detti pesi* I, L *saranno uguali.*

Poichè, per l' antecedente, il peso I *al peso* L *ha la proporzione composta della* AE *alla* EB, *del peso* G *al peso* H, *cioè, per supposizione, della* EB *alla* FD, *e della* FD *alla* FC; *ma anche l'* AE *alla* FC *ha la proporzione composta delle medesime linee, cioè della* AE *alla* EB, *della* EB *alla* FD, *e della* FD *alla* FC; *dunque il peso* I *al peso* L *sta come la* AE *alla* FC, *cioè gli è uguale; il che ec.*

Proposizione VIII, Teorema VIII.

Siano le due libre, come sopra, con i bracci uguali AE, CF (*Fig.* 10) *e le resistenze* G, H, *che tra loro abbiano suddupla proporzione delle leve* EB, FD. *Dico che il contrappeso* I *al contrappeso* L (*da' quali si equilibrano le* G, H) *ha suddupla proporzione delle leve reciprocamente prese, cioè della leva* FD *alla* EB; *o pure sta come la leva* FD *alla media* FM *tra* FD *ed* EB.

Poichè, per la prop. 6, *il peso* I *al peso* L *ha proporzione composta delle proporzioni di* AE *ad* EB *e della resistenza* G *alla resistenza* H, *cioè della leva* EB *ad* FM (*che ha suddupla proporzione della* EB *alla* FD) *e della leva* FD *alla* FC, *cioè della* FM *alla* FN (*quarta proporzionale dopo* FD, FM, FC); *ma ancora l'*AE *alla* NF *ha la proporzione composta delle medesime linee; e però come il peso* I *al peso* L, *così sta* AE *ovvero* CF *ad* FN, *cioè* FD *ad* FM: *ma la* FD *alla* FM *ha suddupla proporzione della* FD *alla* EB, *per essere* FM *media proporzionale fra esse; dunque il peso* I *al peso* L *ha suddupla proporzione della leva* FD *alla* EB *reciprocamente prese, il che ec.*

Proposizione IX, Teorema IX.

Se sarà come il peso A *al peso* B (*Fig.* 11), *così la leva* DG *alla* FH, *sarà il contrappeso* I *al contrappeso* L, *come* a CD *alla* EF.

Poichè il peso I *al peso* A *sta come* CD *alla* DG, *ed il peso* A *al peso* B *sta come la* DG *alla* FH; *dunque, per l' ugualità, il peso* I *al peso* B *sta come la* CD *alla* FH; *ma il peso* B *al peso* L *sta come* HF *ad* FE; *dunque per l' ugualità, il peso* I *al peso* L *sta come la* CD *alla* EF; *il che si doveva dimostrare.*

Corollario. Agevolmente quindi si ricava che nelle premesse circostanze, essendo ancora CD uguale ad EF, saranno i contrappesi I ed L tra di loro uguali, che è la prop. 7 già di sopra dimostrata.

Proposizione X, Teorema X.

Se nelle libre similmente divise (*Fig.* 12) CG, EH, *ne' loro sostegni* D, F, *sarà come la resistenza* A *alla resistenza* B, *così il quadrato* DG *al quadrato* FH, *sarà il contrappeso* I, *che equilibra lo* A, *al contrappeso* L, *che equilibra* B, *come il quadrato* CD *al quadrato* EF.

Perchè presa la DM *media tra* CD, DG, *e la* FN *media tra* EF, FH, *sarà come il peso* I *alla resistenza* A, *così la* CD *alla* DG, *cioè come il quadrato* CD *al quadrato* DM: *e come la resistenza* A *alla* B, *così il quadrato* DG *al quadrato* FH, *cioè come il quadrato* DM *allo* FN *(il che appresso dimostrerassi); dunque per l'ugual proporzione, come il peso* I *alla resistenza* B, *così il quadrato* CD *al quadrato* FN; *ma la resistenza* B *al peso* L *sta come la* FH *alla* FE, *cioè come il quadrato* FN *al quadrato* EF: *dunque di nuovo, per l' ugual proporzione, il peso* I *al peso* L *starà come il quadrato* CD *al quadrato* EF. *Il che si dovea dimostrare.*

Non si trova nel MS. del Sig. Viviani la promessa dimostrazione di quell' assunto, cioè che il quadrato DG al quadrato FH sia come il quadrato DM al quadrato FN; ma si raccoglie ciò agevolmente, supposta la simile divisione delle due leve CG, EH in D ed F (da noi però aggiunta nel titolo di questa proposizione, la quale altrimenti non si potrebbe verificare); stante la quale, per essere le proporzioni di GD a DC e di HF ad FE tra di loro uguali, ancora le loro sudduple (e lo stesso sarebbe delle suttriple, suquadruple ec. e d' altre quantosivoglia ugualmente moltiplici o summoltiplici di esse) saranno tra di loro parimente uguali; e però GD a DM sarà come HF ad FN; e permutando, tanto esse, quanto i loro quadrati, saranno proporzionali.

Anzi si potrebbe quindi rendere la proposizione più generale, ed ancora dimostrarla più speditamente, dicendo, che se nelle due libre CG, EH, similmente divise da' sostegni D, F, le resistenze A, B saranno in qualsivoglia proporzione multiplice o summoltiplice delle braccia DG, FH, o come i quadrati, cubi ec. o radici quadrate, cubiche ec. di esse, i contrappesi I, L averanno la stessa ragione ugualmente multiplice o summoltiplice di quella delle braccia CD, EF, o saranno parimente come i quadrati, o cubi, o radici quadre, o cubiche ec. loro corrispondenti. Perchè essendo A ad I come GD a DC, cioè come HF ad FE per l'ipotesi, ovvero come B ad L per l' equilibrio, sarà permutando, come A a B, così I ad L; onde se la prima ragione è multiplice o summoltiplice di quella di DG ad FH, la quale permutando è la medesima con quella di CD ad EF, ancora la seconda ragione, cioè di I ad L, sarà parimente multiplice o summoltiplice di quella di CD ad EF. Il che ec.

Ma se le due libre CG, EH non fussero proporzionalmente divise in D, F, supponendosi col nostro Autore essere le resistenze A, B come i quadrati delle braccia DG, FH, saranno i contrappesi I, L come i rettangoli CDG, EFH; imperocchè starà I ad A, come CD a DG, o pure come il rettangolo CDG al quadrato DG; ed A a B sta come il quadrato DG al quadrato FH, e B ad L come FH ad EF, cioè come il quadrato FH al rettangolo EFH; dunque per l' ugual proporzione starà I ad L come il rettangolo CDG al rettangolo EFH; il che ec.

Proposizione XI, Teorema XI.

Se le resistenze di due libre staranno come le dignità dello stesso grado delle contralleve, e le leve saranno uguali, i contrappesi staranno come le dignità delle medesime contralleve d' un grado più alte.

In questa bellissima ed universale proposizione intende l'Autore per dignità le potestà algebraiche, come quadrati, cubi, biquadrati, sursolidi ec. denominate da' loro esponenti 2, 3, 4, 5 ec., e dice che essendo I ad L (*Fig.* 9) come qualunque dignità della leva EB, denominata dal numero *m*, ad una simile della leva FD, essendo le due EA, FC uguali, saranno i contrappesi G, H nella ragione delle dignità d' un grado più alte, appartenenti alle medesime leve EB, FD, cioè denominate dal numero *mi*.

Imperocchè G ad I sta come BE ad EA; I ad L sta come la dignità di EB denominata dal numero *m* alla simile della FD; L ad H è come CF, ovvero AE, ad FD; adunque G ad H ha ragione composta di BE ad EA, e di EA ad FD (le quali due fanno la sola ragione di EB ad FD), e di quella che ha la dignità di EB, denominata da *m*, alla simile dignità di FD; e però sta come la dignità della EB un grado più alta, cioè denominata da *mi*, alla simile dignità di FD: perchè queste tali dignità avrebbero altresì la proporzione composta delle medesime proporzioni. Il che si dovea dimostrare.

Corollario I. Quindi se I ad L sta come il quadrato EB al quadrato FD, sarà G ad H come il cubo di EB al cubo di FD.

Corollario II. Viceversa, se G ad H ha la proporzione, che è tra qualsivogliano dignità dello stesso grado, di EB ad FD, saranno I ed

L nella proporzione delle dignità un grado più basse delle medesime EB, FD.

Corollario III. Quando G ad H fosse in ragione suddupla delle EB, FD (che è quanto dire corrispondenti alle dignità di EB, FD, denominate dalla metà dell' unità), allora per essere I ad L come le stesse dignità di EB, FD un grado più basse, cioè denominate da una metà meno del nulla, saranno reciprocamente in ragione suddupla di FD ad EB, come nella proposizione 8.

Corollario IV. Ma essendo G ad H come appunto EB ad FD (che sono le dignità semplici denominate dall' unità); per essere le I ed L corrispondenti alle dignità delle medesime un grado più basse, cioè denominate dallo zero, dovranno essere tra di loro nella ragione di ugualità, come nella proposizione 7.

Proposizione XII, Teorema XII.

Nei cilindri senza peso proprio, che si vanno allungando fuori del muro a squadra, i pesi equivalenti alle resistenze vanno scemando colla proporzione reciproca delle lunghezze.

Il peso F (*Fig.* 13) *equilibri la resistenza* AB, *ed il peso* G *la resistenza* CD; *dico che il peso* F *al peso* G *sta come la* DE *alla* BE. *Poichè congiunta la* EC, *convenga colla* BA *in* H: *per la proposizione* 6, *il peso* F *al* G *averà proporzione composta della contralleva* AB *alla leva* BE, *e della resistenza* AB *alla resistenza* CD, *cioè della* BE *alla medesima* BE, *e della leva* DE *alla contralleva* DC, *cioè della* EB *alla* BH. *Ma ancora la* AB *alla* BH *ha proporzione composta delle medesime linee, cioè di* AB *alla* BE, *e della* BE *alla medesima* BE, *e della* BE *alla* BH; *adunque come il peso* F *al peso* G, *così la* BA (*ovvero la* DC) *alla* BH, *cioè la* EC *alla* EH, *o pure la lunghezza del cilindro* ED *alla lunghezza del cilindro* EB, *che è la proporzione reciproca proposta da dimostrarsi.*

Ciò era stato di sopra già dimostrato dal Sig. Viviani alla proposiz. 5, con maggiore speditezza, ma con minor rigore geometrico; onde non ho stimato superfluo l' apportare l' una e l' altra proposizione.

Proposizione XIII, Teorema XIII.

Se saranno le due libre AB, CD (*Fig.* 14) *sostenute in* E, F, *e le resistenze nell' estremità delle contralleve* AE, CF *siano* G, H, *che fra loro stiano come i quadrati della medesime contralleve, e siano le leve* EB, FD *uguali fra loro, e i pesi* I, L, *che pareggino le dette resi-*

stenze: dico, che il peso I *al peso* L *sta come il cubo di* AE *al cubo di* CF.

Si faccia, come AE *a* CF, *così* CF *ad* M, *e così* M *ad* N; *e si faccia, come la* AE *alla* M, *così la* FD *alla* P: *che essendo la* AE *alla* M *come la* CF *alla* N, *sarà anche la* FD *alla* P *come la* CF *alla* N; *e permutando, la* FD *alla* CF *come* P *alla* N; *e perchè il peso* I *al peso* L *ha proporzione composta di* I *a* G, *di* G *ad* H, *e di* H *ad* L; *e come* I *a* G, *così* AE *ad* EB, *cioè* AE *ad* FD; *e come* G *ad* H, *così il quadrato* AE *al quadrato* CF *per supposizione, cioè la linea* AE *alla* M, *cioè come la* FD *alla* P *per costruzione; sarà per l'ugualità ordinata il peso* I *all'* H, *come la* AE *alla* P; *ed il peso* H *al peso* L *sta come la* DF *alla* FC, *cioè come la* P *alla* N, *come già si è dimostrato: dunque di nuovo per l'ugualità il peso* I *al peso* L *sta come l'*AE *alla* N, *cioè come il cubo di* AE *al cubo di* CF; *il che ec.*

Ciò si deduce dalla generale proposizione undecima: come nel corollario primo di essa ho fatto vedere.

Proposizione XIV, Teorema XIV.

Stanti le medesime cose, se si farà, come il peso I *al peso* L, *così* DF *ad* FG, *ed in* G *si ponga il peso* K *uguale al peso* I; *dico che il peso* K *si equilibrerà col peso* H, *e che la leva* BE *alla leva* FG *sarà come il cubo della contralleva* AE *al cubo della contralleva* CF.

Imperocchè essendo il peso I, *ovvero* K, *al peso* L, *come* DF *ad* FG, *reciprocamente sarà eguale il momento d'ambidue i pesi* L, K; *ma il momento di* L *uguagliava quello di* H; *adunque ancora il momento di* K *uguaglierà quello di* H, *onde ambidue staranno in equilibrio: ma come si è dimostrato nella precedente, il peso* I *al peso* L *è come il cubo di* AE *al cubo di* CF; *ed ora si è fatto, come* I *ad* L, *così* DF *ad* FG, *o pure* BE *ad* FG: *dunque* BE *ad* FG *è come il cubo di* AE *al cubo di* CF. *Il che si doveva dimostrare.*

Proposizione XV, Teorema XV.

Dimostrare altrimenti, e con maniera più generale, la proposizione quarta del Galileo (1).

Siano i cilindri, o prismi, o altri solidi AC, EG (*Fig.* 15) *ugualmente lunghi, e disugualmente grossi, e senza peso: ed i pesi* D, H *equilibrino le resistenze* AB, EF. *Dico che il peso* D *al peso* H *sta come il cubo del diametro* AB *al cubo del diametro* EF.

(1) Pag. 119 dei Dialoghi delle Nuove Scienze.

Poichè le CBA, GEF *sono due libre, come nella proposiz.* 13, *colle leve uguali* BC, FG, *e contralleve* AB, EF, *i quadrati delle quali stanno come le resistenze* AB, EF, *ed i pesi* D, H *le equilibrano; dunque staranno questi tra loro come i cubi delle contralleve* AB, EF. *Il che si dovea dimostrare.*

Corollario I. Se le gravità specifiche de' cilindri AC, EG ugualmente lunghi saranno come i loro diametri, riusciranno i detti cilindri ugualmente resistenti, attesa la propria gravità di essi. Imperocchè essendo di pari lunghezza, le loro moli saranno come le basi, cioè come i quadrati de' diametri; ma le gravità specifiche sono come i medesimi diametri, per la supposizione; dunque i pesi assoluti di essi cilindri, i quali hanno la ragione composta di quella delle moli e di quella delle gravità specifiche, saranno come i cubi de' diametri o come le resistenze rispettive, colle quali contrastano i detti pesi in pari distanza per essere applicati ne' centri di gravità d' essi cilindri, cioè nel mezzo delle leve uguali BC, FG; e però tanto averà di momento e vigore il peso del primo cilindro contro la resistenza della propria base quanto il peso del secondo contro la resistenza della sua.

Corollario II. Anzi ciò vale ancora in due coni o conoidi o piramidi o altri solidi dello stesso nome, e tra di loro proporzionali colle proprie basi in pari lunghezza: quando le basi di essi non solamente siano simili, ma ancora similmente siano fitte nel muro.

Proposizione XVI, Teorema XVI.

I momenti de' pesi de' cilindri A, B (*Fig.* 16), *egualmente lunghi, contro le loro resistenze* CD, EF, *sono come le basi, e come i cilindri omologamente.*

Ciò è manifesto, perchè il peso di ciascuno è distante ugualmente dal sostegno; onde il momento dee corrispondere alla sola ragione dei pesi o delle moli o delle basi de' medesimi cilindri ugualmente lunghi ed altronde supposti omogenei.

Proposizione XVII, Teorema XVII.

I momenti respettivi, che hanno i cilindri o prismi gravi dell' istessa materia egualmente lunghi e disegualmente grossi, in ordine a superare per traverso le resistenze delle loro grossezze, hanno fra loro reciproca proporzione dei diametri delle medesime grossezze o basi.

Siano i due cilindri AC, DF (*Fig.* 17), *quali si è detto, ed il più grosso sia* AC. *Dico che il momento del proprio peso del cilindro* AC *per superare la resistenza della base* AB, *al momento del proprio peso* *del cilindro* DF, *per vincere la resistenza della base* DE, *ha la medesima proporzione del diametro* DE *all'*AB. *Per iscienza di che immaginiamoci i medesimi cilindri segnati* G, H *pendere dai mezzi* I, L *delle leve* BC, EF ; *collocati ne' mezzi delle dette leve (rispondendo in tali luoghi i centri delle gravità loro), tanta forza faranno i cilindri* AC, DF *così distesi verso le loro resistenze, quanta ne fanno i soli* G, H *loro eguali, pendenti in* I, L: *cioè i momenti de' soli* AC, DF *sono i medesimi de' soli* G, H *verso le dette resistenze. Intendasi di più. . . .*

Sin qui il Viviani, a compire la di cui dimostrazione, secondo quel poco di barlume che si cava dalla figura qui abbozzata, convien proseguire così. Intendasi di più un cilindro NOP uguale al DEF, dal cui centro di gravità M, posto nel mezzo di sua lunghezza, penda un cilindro K eguale al primo ABC; e siano le rette DE, AB, Q, R continuamente proporzionali. Sarà il momento rispettivo di G al momento pur rispettivo del peso uguale K, ed ugualmente lontano dal sostegno, come il cubo di NO, ovvero di DE, al cubo di AB, cioè come DE alla quarta R (imperocchè è tanto meno potente il momento di G a vincere la resistenza rispettiva della base AB, che non è il momento di K, per altro assolutamente uguale al primo, per superare la resistenza rispettiva della base NO, quanto viceversa questa resistenza che si oppone al secondo è minore di quella che contrasta al primo e lo rende però tanto meno efficace: sicchè tali resistenze essendo, per la prop. 4 del Galileo o per la 15 di questo, proporzionali a' cubi de' diametri, ancora i detti momenti saranno nella stessa ragione). Il momento poi del peso K al momento del peso H (contrastando ambidue in pari lontananza coll' uguali resistenze NO, DE) sta come il peso al peso, cioè come i quadrati de' diametri AB, DE, o pure come R ad AB; dunque per l' ugualità ordinata, il momento rispettivo di G al simile momento di H, cioè quello del proprio peso di ABC contro la resistenza della sua base, al momento del proprio peso di DEF contro la resistenza della sua, è reciprocamente come il diametro DE al diametro AB. Il che ec.

Proposizione XVIII, Teorema XVIII.

I momenti de' pesi de' cilindri eguali A, B (*Fig.* 18) *stanno fra loro come l' altezze, ovvero in reciproca proporzione delle basi.*

Essendo uguali i pesi degli uguali cilindri, si varia il momento loro solamente in ragione delle distanze da' sostegni, che sono la metà delle lunghezze, che misurano l' altezza de' cilindri : e però sono proporzionali alle dette altezze, o reciprocamente corrispondono alle basi de' medesimi cilindri.

Proposizione XIX, Teorema XIX.

Nei cilindri o prismi uguali, la resistenza dei più corti cresce in quintupla proporzione dei diametri delle loro grossezze e basi.

Siano i due cilindri uguali ABC, DEF (*Fig.* 19). *Dico la resistenza del più corto* DF *alla resistenza del più lungo* AC *all' esser rotti, aver quintupla proporzione del diametro* DE *all'*AB. *Poichè delle* AB, DE *piglinsi le quattro* G, H, I, K *in continua proporzione. Per la quinta del Galileo, la resistenza del cilindro* DF *alla resistenza del cilindro* AC *ha la proporzione composta della proporzione del cubo* DE *al cubo* AB, *e della lunghezza* BC *alla* EF, *cioè del quadrato* DE *al quadrato* AB, *per l'ugualità de' cilindri; ma come il cubo* DE *al cubo* AB, *così la linea* H *alla* BA, *ovvero la* K *alla* G; *e come il quadrato* DE *al quadrato* AB, *così la linea* G *alla* BA; *adunque la proporzione della resistenza del cilindro* DF *a quella dello* AC *si compone delle proporzioni di* K *a* G *e di* G *a* BA, *delle quali si compone ancora la proporzione di* K *a* BA; *e però, come la resistenza del cilindro* DF *a quella dello* AC, *così la linea* K *alla* BA; *ma la* K *alla* BA *ha quintupla proporzione della* K *alla* I, *cioè della* ED *alla* AB; *adunque la resistenza del cilindro* DF *a quella del cilindro* AC *averà quintupla proporzione del diametro* DE *al diametro* AB; *il che ec. Cioè, se un peso quanto* AB *pendente in* C *basta per rompere e staccare la base* BA; *per ispezzare in* DE *bisognerà mettere in* F *un peso quanto* K; *e questo precisamente segue considerando i solidi senza gravità ec.*

*Che se metteremo in conto le gravità loro, se saranno dell' istessa materia, come uguali, peseranno ugualmente; e se la gravità dell'*AC *prossimamente serve per fare la rottura in* AB, *acciò segua l' effetto medesimo nel cilindro* DF, *il suo peso non sarà bastante; ma tanto più ce ne bisognerà, di quanto la linea* AB, *considerata come misura del peso* AC, *o* DF, *è superata dalla linea* K; *e tal aggiunta di peso andrà posta nel mezzo della leva* EF; *essendo che l' uno e l' altro cilindro gravita col suo centro di gravità sopra il mezzo delle due leve* BC, EF.

Se la gravità specifica del cilindro DF a quella del cilindro AC sarà in quintupla proporzione de' diametri DE, AB, i cilindri uguali di mole AC, DF saranno ancora ugualmente resistenti; imperciocchè i pesi loro assoluti (essendo in pari mole) saranno come le loro gravità specifiche, cioè in quintupla ragione de' diametri, onde saranno proporzionali alle resistenze delle loro basi, per questa proposizione.

PROPOSIZIONE XX, TEOREMA XX.

I momenti de' cilindri e de' coni d' ugual base sono tra loro come i quadrati delle lunghezze.

Ciò è manifesto dalla proposizione 3 del Galileo, in cui questo stesso si dimostra ne' momenti de' prismi (1); e la stessa ragione vale in tutte le figure che hanno il centro di gravità in una parte proporzionale dell'asse, e che altronde crescono in pari base, come le altezze loro: quali sarebbero non solamente i cilindri, i coni e le piramidi, ma ancora le conoidi paraboliche e le mezze sferoidi, i prismi eretti sopra parabole di varie maniere ec.

PROPOSIZIONE XXI, TEOREMA XXI.

I momenti de' pesi de' cilindri simili contro le attaccature delle loro basi, stanno fra loro come il quadrato della lunghezza d' uno al quadrato della terza proporzionale dopo le lunghezze dei dati cilindri.

Siano i cilindri simili ABC, DFE (*Fig.* 20), *e si faccia, come la lunghezza* DE *alla lunghezza* AC, *così questa ad una terza* I. *Sarà il momento del peso* FE *al momento del peso* BC, *come il quadrato* DE *al quadrato* I; *imperocchè continuando la stessa proporzione a' termini* M, O, *sarà il momento di* FE *al momento di* BC *in ragione composta di quella de' pesi, o moli di tali cilindri, che è quella del cubo* DE *al cubo* AC, *cioè la stessa che della* DE *alla quarta proporzionale* M, *e della ragione delle lunghezze* DE, AC *o pure di* M *ad* O; *adunque il primo momento al secondo sta come* DE *ad* O; *ma per essere le cinque grandezze* DE, AC, I, M, O *continuamente proporzionali, la mezzana* I *è media proporzionale fra le due estreme* DE, O; *onde quella a questa è come il quadrato* DE *al quadrato* I; *dunque il momento del cilindro* FE *al momento del simile cilindro* BC *è come il quadrato della lunghezza del primo al quadrato della terza proporzionale dopo le due lunghezze de' cilindri proposti. Il che ec.*

Perchè la ragione del quadrato AC al quadrato I è doppia di quella della linea AC alla I; e la DE alla I di nuovo ha doppia ragione delle AC, DE; sarà la ragione del quadrato DE al quadrato I quadrupla di quella delle lunghezze AC, DE; e però i momenti dei cilindri simili sono in ragione quadrupla di quella delle lunghezze o de' diametri loro. Nè ciò si oppone alla proposizione 6 del Galileo (2).

(1) Dialoghi delle Nuove Scienze, pag. 118.
(2) Idem, pag. 123.

in cui dice essere i momenti de' suddetti cilindri *in triplicata proporzione dei diametri delle basi loro*, e però *in sesquialtera ragione delle resistenze* delle medesime basi, le quali (assolute o respettive che siano, come si vedrà nella proposizione seguente) sono *in duplicata ragione dei medesimi loro diametri;* imperocchè ivi si parla de' momenti rispettivi di essi cilindri, nella considerazione de' quali, secondo la definizione 4, si debbe aver riguardo alla lunghezza delle contralleve, alle quali si applicano le resistenze opposte a' pesi de' cilindri, co' quali contrastano; ed essendo le dette contralleve proporzionali alle lunghezze delle leve, cioè delle lunghezze nelle quali sono collocati i pesi de' cilindri, vengono a defalcare dalla ragione de' momenti assoluti (di cui qui dal Sig. Viviani si tratta) una delle semplici ragioni delle lunghezze; onde di quadrupla resta solamente tripla appresso il Galileo la ragione de' momenti rispettivi da lui considerati della ragione de' diametri medesimi, ed appresso il Viviani, senza il detto defalco, rimane la ragione de' momenti assoluti quadrupla di quella delle lunghezze, ovvero de' diametri de' cilindri simili.

Proposizione XXII, Teorema XXII.

Le resistenze, ancò respettive, de' cilindri o prismi simili, astraendo dalla gravità loro, stanno come le loro basi o come le loro grossezze.

I due cilindri simili siano ABC, DEF (*Fig.* 19). *Dico che la resistenza del cilindro* AC *alla resistenza dell' altro* DF, *ha l' istessa proporzione della base* AB *alla base* DE. *Per dimostrare ciò, piglinsi nella proporzione del diametro* AB *al diametro* DE, *le due* G, H *continue proporzionali. Per la quinta del Galileo, la resistenza di* AC *alla resistenza di* DF *averà proporzione composta del cubo di* AB *al cubo di* DE, *e della lunghezza* EF *alla* BC; *ma il cubo* AB *al cubo* DE *sta come la linea* AB *alla quarta* H; *e la lunghezza* EF *alla* BC *sta per la similitudine de' cilindri come la* ED *alla* BA, *cioè come la* H *alla* G; *adunque la proporzione delle dette resistenze si compone della proporzione dell'*AB *alla* H, *e di* H *alla* G; *delle quali proporzioni si compone ancora la proporzione della* AB *alla* G; *e però la resistenza di* AC *a quella di* DF *sta come la* AB *alla* G, *cioè come la base* AB *alla base* DE, *che è quello che si dovea dimostrare.*

Sicchè i cilindri o prismi, e solidi simili, tanto più sono resistenti quanto più sono grossi; sempre però astraendo la loro gravità ec.

Per esempio, se per superare la resistenza AB *si ricerca in* C *un peso almeno quanto è la linea* BA; *per superare la resistenza* DE, *bisognerà in* F *un peso quanto è la* G *terza proporzionale delle* AB, DE.

Onde si potrà dire che de' solidi simili i più corti sieno a proporzione più resistenti dei lunghi; poichè essendo il solido CA *al solido* DF *come la prima* AB *alla quarta* H : *se la forza d'un peso, quanto è la* AB, *serve per superare, posto in* C, *la resistenza* BA, *dovrebbe un peso quanto la* H, *posto in* F, *essere bastante per vincere la resistenza* DE; *ma non basta, volendovi un peso quanto la* G, *la quale è maggiore di* H; *dunque ec.*

Proposizione XXIII, Quesito I.

Cercare la proporzione de' momenti di due cilindri, quali si sieno, resultanti dalle loro gravità e dalle loro lunghezze, rispetto alle loro resistenze.

Sono in ragione composta di quella de' quadrati fatti da' diametri delle basi loro, e di quella delle lunghezze presa una volta (dalle quali due risulta la ragione de' pesi), e di quella delle stesse lunghezze presa un' altra volta (per conto delle distanze de' centri di gravità d'essi dai loro sostegni, le quali distanze sono ad esse lunghezze proporzionali) che vuol dire in duplicata ragione sì de' diametri come delle lunghezze: o pure in duplicata ragione de' rettangoli che passano per l'asse, ovvero delle superficie curve che sono a' detti rettangoli proporzionali, come è manifesto, ed è stato dimostrato dal Torricelli.

Proposizione XXIV, Quesito II.

Cercare la proporzione delle resistenze di due cilindri vuoti, ugualmente lunghi.

Siano le canne vuote ABF, GHM (*Fig.* 21); i di cui centri C, I; gli esteriori cerchi, da' quali si comprendono, AB, GH; gl' interiori OD, NK; e tirinsi le DE, KL perpendicolari a' diametri ne' punti D, K. Saranno le resistenze della prima e della seconda in ragione di quella che ha il quadrato DE al quadrato KL, e di quella del semidiametro CB al semidiametro IH.

Imperocchè le resistenze sono in ragione composta delle sezioni medesime, cioè dell' armille, per cui sono congiunte, e delle distanze dell' appoggio, sopra di cui si tenta di fare la rottura, per lo coroll. 2 della propos. 2; ma le dette armille sono come le differenze del cerchio esteriore dall' interiore, o come l' eccesso del quadrato CB sopra il quadrato CD, all' eccesso del quadrato IH sopra il quadrato IK, che è quanto dire come il quadrato DE al quadrato KL; e le dette distanze sono i semidiametri CB, IH; dunque le resistenze di queste canne sono nella di già detta ragione. Il che ec.

Proposizione XXV, Quesito III.

Cercare la resistenza di due cilindri vuoti, qualunque si siano.

Alle proporzioni assegnate nella precedente si aggiunga la reciproca delle lunghezze; e si averà, par la quinta del Galileo (1), la proporzione desiderata delle resistenze di dette canne, composta delle due addotte di sopra, e della contraria delle lunghezze HM, BF. Il che ec.

Proposizione XXVI, Quesito IV.

Cercare la proporzione delle resistenze di due cilindri vuoti simili.

Essendo simili le canne ABF, GHM della figura antecedente, averanno le resistenze proporzionali a' soli quadrati ED, LK, o pure ai rettangoli BDA, HKG; imperocchè, per la similitudine de' cilindri, l'altre due ragioni de' semidiametri CB, IH, e delle lunghezze prese reciprocamente, HM, BF (le quali sono come gli stessi semidiametri IH, CB), compongono la ragione di ugualità, da cui nulla si aggiugne, che alterar possa le resistenze.

Corollario. Quindi se i rettangoli o quadrati suddetti fussero uguali, cioè quando le basi sode armillari delle canne saranno di uguale estensione, essendo altronde i cilindri, da cui sono cavate, simili, averanno uguale resistenza.

Proposizione XXVII, Quesito V.

Cercare la proporzione delle resistenze in due cilindri, uno vuoto e l'altro pieno, qualunque si siano.

Suppongasi il cilindro ABF nella suddetta figura rimaner vuoto, ma l'altro GHM essere tutto pieno; è manifesto, che le resistenze loro saranno in ragione composta di quella del quadrato DE al quadrato IH (che è quella delle sezioni, cioè dell' armilla DBA al cerchio GH), e delle distanze CB, IH dagli appoggi, e delle lunghezze HM, BF prese reciprocamente.

Proposizione XXVIII, Quesito VI.

Cercare lo stesso ne' cilindri simili, l'uno vuoto e l'altro pieno.

Saranno le resistenze loro come il quadrato DE al quadrato IH, imperocchè l'altre due ragioni, per la simiglianza de' cilindri, sono reciprocamente le medesime; e però si compensano.

(1) Dialoghi delle Nuove Scienze, pag. 122.

Corollario I. Quando DE sarà eguale ad IH, cioè che il rettangolo o armilla DBA pareggerà rispettivamente il quadrato o cérchio del raggio IH, cioè essendo il sodo della canna uguale alla base del cilindro, saranno ambidue d'uguale resistenza, purchè siano simili nella figura esteriore.

Corollario II. E perchè ad un dato cilindro si possono ritrovare infiniti cilindri simili, di base maggiore e maggiore in infinito, al diametro delle quali si può applicare perpendicolarmente una retta uguale al semidiametro del minore; si potranno quindi determinare infinite canne simili, che averanno il sodo della base uguale alla base del dato cilindro, e ciascuna sarà di uguale resistenza con esso.

Corollario III. Anzi ancora determinare si possono infinite canne di uguale resistenza, le quali siano di base soda disugualissime, purchè si faccia, come il cubo del raggio IH del cilindro pieno, al prisma eretto sopra il quadrato DE (corrispondente alla quantità della sezione armillare del vuoto, determinata a capriccio, anche in un semidiametro CB arbitrario, purchè di essa DE sia maggiore) coll'altezza del raggio BC, così la lunghezza HM del dato cilindro alla lunghezza BF della canna d'uguale resistenza che si cercava; imperocchè, per la precedente, le ragioni componenti queste resistenze saranno appunto reciproche; onde ci daranno la ragione di ugualità.

Proposizione XXIX. Quesito VII.

Data la lunghezza A (*Fig.* 22), *fare un cilindro uguale al dato* BC.

Facciasi, come la A *alla* B, *così il diametro* C *del dato cilindro alla retta* E; *e sia* D *media tra le due* C, E. *Dico* D *essere il diametro del cerchio del cilindro* DA *uguale al dato* BC; *perchè sta la* A *alla* B *come la* C *alla* E, *cioè il cerchio* C *al cerchio* D; *saranno, per la* 25 *del* 12, *i cilindri* AD, CB *uguali; che è quello che si aveva a trovare.*

Proposizione XXX, Quesito VIII.

Data la lunghezza AD, *fare un cilindro uguale alla data canna* FCBG.

Sia, per l'antepenultima del Galileo, la CB *diametro del cerchio* (*Fig.* 23) *uguale alla ciambella* CBF; *e facciasi, come l'*AD *alla* BG, *così la* CB *ad un' altra* AE; *dico* AE *essere il diametro della base del cilindro che si cerca: essendo manifesto che il cilindro di* DA, AE, *è uguale al cilindro di* BG, BC: *ma questo è uguale alla canna, perchè il cerchio di* CB *è uguale alla ciambella; adunque il cilindro* DAE *è uguale alla canna. Il che è quello, che ec.*

Proposizione XXXI, Quesito IX.

Data la lunghezza AB (*Fig.* 24), *sotto di essa fare una canna uguale alla data* CDE.

Facciasi sotto la lunghezza AB, *per la precedente, il cilindro* AFB *uguale alla canna* CDE, *e trovisi tra il diametro* FA, *ed il doppio* AH, *la media proporzionale* AG; *ed intorno al diametro* GA *descrivasi un cerchio, ponendovi concentrico un altro* ML *uguale ad* FA. *Dico, la ciambella* GMAL *essere la base della canna, che si cerca; perciocchè sta, come* AF *al doppio* AH, *così il cerchio* FA *al cerchio della media* GA; *dunque il cerchio* FA, *ovvero* LM, *è la metà del cerchio* GA; *e però la ciambella* GLMA *è uguale al cerchio* FA; *onde, per la comune altezza* AB, *la canna* GLAB *è uguale al cilindro* FAB, *cioè alla canna* CDE. *Il che ec.*

Questo problema è capace d'infinite soluzioni, imperocchè trovato che sia il cilindro FAB uguale alla data canna CDE, nella data lunghezza AB, basta d'intorno al cerchio FA (*Fig.* 25) farvene un altro NP concentrico, di qualsivoglia grandezza ad arbitrio; e conducendo le due tangenti QFS, VAT nell'estremità del diametro AF, stenderle fino a tanto che seghino la circonferenza del cerchio esteriore NP ne' punti Q, S, V, T; che condotta QV segata in R ad angoli retti dal diametro NP parallelo alle dette tangenti, e coll'intervallo OR conducendo l'altro cerchio RX, averemo la ciambella NRXP uguale al medesimo cerchio AF, per essere la differenza de' quadrati NO, OR, cioè il rettangolo NRP, uguale al quadrato RQ, ovvero OF; e però altresì la differenza de' cerchi NO, RO (cioè la ciambella NRXP) uguale al cerchio del raggio OF; e però la canna, che all'altezza AB si facesse sopra la detta ciambella, uguaglierebbe il cilindro fatto sopra il cerchio AF alla medesima altezza, cioè sarebbe uguale all'altra data canna CDE; e ciò in infinite maniere, potendo il diametro NP del cerchio esteriore essere determinato ad arbitrio.

Proposizione XXXII, Quesito X.

Sotto la lunghezza AB *fare una canna uguale al cilindro sodo* CDE.

Facciasi, per la propos. 29, *nella lunghezza* AB *il cilindro* FAB *uguale al dato* CDE, *ed il cerchio* AG (*secondo la costruzione della precedente*) *doppio della base* FA (*ovvero* LM *postavi concentrica*), *dico, la ciambella* GLA *essere la base di quella canna che si cerca; imperocchè il cilindro* CDE *è uguale al cilindo* FAB: *ma la canna* GLAB *è uguale al cilindro* FAB; *adunque l'istessa è uguale al cilindro* CDE. *Il che ec.*

Questo ancora può farsi in infinite maniere, secondo la nota fatta alla precedente, dove si è insegnato di fare quante ciambelle si vogliano e di qualunque diametro della loro esteriore convessità, tutte uguali al cerchio AF, il quale colla data lunghezza AB si suppone che pareggi il dato CDE; si può quindi ancora dedurre, potersi fare una canna della medesima materia e lunghezza d'un'altra, ma per cagione della maggiore grossezza, che ne slontana il centro della base dall'appoggio, più e più resistente in infinito.

Proposizione XXXIII, Teorema XXIII.

Le lunghezze massime de' cilindri orizzontalmente fitti nel muro, che sieno d'uguale grossezza, ma di differente gravità in ispecie, non istanno in reciproca proporzione delle medesime gravità.

Imperocchè in tal caso, essendo le moli de' cilindri d'ugual base come le lunghezze loro, e queste essendo reciproche della gravità in ispecie, i cilindri averebbero le moli reciproche delle loro specifiche gravità; e però sarebbero di peso assoluto uguale; onde i momenti loro sarebbero proporzionali alle lunghezze, quando altronde i momenti delle resistenze nelle loro uguali sezioni sarebbero gli stessi; e però i più lunghi cilindri si proverebbero di minore resistenza.

Proposizione XXXIV, Teorema XXIV.

Allora tali cilindri sono d'egual momento verso le loro resistenze, quando i quadrati delle loro lunghezze hanno reciproca proporzione delle gravità in ispecie; ovvero che le lunghezze hanno reciproca proporzione delle gravità assolute.

Siano i cilindri ugualmente grossi ABC, HGI (*Fig.* 26), e la gravità in ispecie del cilindro GL a quella del cilindro BD sia reciprocamente come il quadrato della lunghezza AD al quadrato della lunghezza HL. Dico, essere uguale il momento d'entrambi verso le resistenze loro: imperocchè si tagli dal cilindro BD la parte BF ugualmente lunga, e però di mole uguale al cilindro GL; sarà il peso assoluto GL al peso assoluto BF, o pure (per l'uguale distanza dagli appoggi H, A) il momento di GL al momento di BF, come la gravità specifica di quello alla gravità specifica di questo; cioè, per l'ipotesi, come il quadrato AD al quadrato HL, ovvero AF; ma ancora il momento del cilindro BD al momento del cilindro BF sta come il quadrato AD al quadrato AF, per la prop. 20, dunque il momento di BD uguaglia il momento di GL. Il che si dovea dimostrare.

Perchè poi si è veduto, essere il cilindro GL al cilindro BF, quanto al loro peso assoluto, come il quadrato AD al quadrato AF; ed essendo il cilindro BD allo stesso BF, quanto al peso, come la lunghezza AD alla lunghezza AF; ne segue che il peso assoluto GL al peso assoluto FB ha doppia proporzione di quella che ha il peso BD al peso BF; cioè, che l'assoluto peso BD è mezzano proporzionale tra i pesi assoluti GL, BF: onde ancora l'assoluto peso GL all'assoluto peso BD starà come il peso BD al peso BF, cioè reciprocamente, come la lunghezza AD alla lunghezza AF, ovvero HL; e però si verifica ancora la seconda parte di questa proposizione. Il che ec.

Si potrebbe ancora cercare con questa occasione, di due cilindri ugualmente lunghi, qual proporzione debbano avere le grossezze e le gravità specifiche, per riuscire ugualmente resistenti. E trovo che i diametri delle basi debbono essere come le gravità specifiche; imperocchè ciò essendo, la ragione composta della mole alla mole (che in pari lunghezza de' cilindri è come i quadrati de' diametri) e della gravità specifica dell'uno alla gravità specifica dell'altro, cioè, per l'ipotesi, del diametro al diametro, sarà la ragione de' cubi d'essi diametri; ma il peso assoluto al peso assoluto ha la ragione composta di quella delle moli, e di quella delle gravità specifiche; dunque nel nostro caso sarebbe il peso assoluto dell'uno al peso assoluto dell'altro, come il cubo del diametro del primo al cubo del diametro del secondo; cioè, per la prop. 15, come la resistenza rispettiva della base del primo alla resistenza rispettiva della base del secondo; che però essendo essi pesi, mercè dell'uguale lunghezza de' cilindri, ugualmente distanti da' loro sostegni, averanno i momenti loro proporzionali a' momenti delle resistenze delle loro basi, supposte altronde omogenee. Il che ec.

Che se più generalmente volessimo investigare due cilindri di varia lunghezza e grossezza e di differente gravità specifica, ugualmente però resistenti, basterebbe fare che i loro diametri fossero in ragione composta di quella delle gravità specifiche e di quella de' quadrati delle lunghezze, come agevolmente dalle cose sopraddette si può inferire: ma non merita il conto stenderne più proposizioni, sì per non uscire da' limiti del trattato del Sig. Viviani, e sì perchè ad ogni modo fisicamente sarà impossibile che la resistenza di materie differenti di specie sia omogenea; onde l'ipotesi di simiglianti conclusioni non si troverebbe in pratica conforme alla natura, se non in casi rarissimi.

Proposizione XXXV, Quesito XI.

Perchè un prisma triangolare più facilmente si pieghi voltandolo colla superficie allo in giù, che quando posa su l'angolo.

Non è la medesima forza che si richiede a superare la resistenza *del triangolo* A *che del triangolo* B (*Fig.* 27), *essendo per altro triangoli eguali e simili; e lo stesso può dirsi d' altre figure simili ed uguali, ma che tocchino in diversi luoghi: stante che i centri di gravità di dette figure non sono sempre nelle medesime distanze da' sostegni.*

Sicchè la difficultà di rompere il prisma triangolare A sopra la base, sta alla difficultà di romperlo nella disposizione B, dove posa su l' angolo, come la distanza del centro di gravità del triangolo dalla sua base alla distanza del medesimo dalla cima; come si può raccogliere dalla prop. 1 di questo trattato. Il che nel caso nostro dà una proporzione suddupla; ed in altri generi di figure dà altre proporzioni dipendenti da quelle, in cui si dividono gli assi da' loro centri di gravità.

Proposizione XXXVI, Quesito XII.

Se essendo eguali e dissimili le figure che servono di base a' prismi, segue lo stesso?

Alle volte senza dubbio seguirà il medesimo: quando cioè si varj la distanza del centro di gravità delle figure uguali e dissimili da' loro appoggi, sopra de' quali si cerca di fare la piegatura o lo strappamento; ma non già sempre: potendo, non ostante la dissimiglianza dell' uguale figura, mantenersi la medesima distanza dall'appoggio; come, per cagione d' esempio, sia il quadrato ABCD (*Fig.* 28), il cui centro di gravità H; onde la sua distanza dal sostegno della base sia HI. Si faccia l' altezza EI tripla della HI, e la base GF sesquiterza della BC; dico che il triangolo GEF sarà uguale al quadrato ABCD, e sarà d' uguale resistenza, ancora rispettiva, con esso, per avere il centro H comune al medesimo, e però ugualmente lontano dall' appoggio BC, ovvero GF; imperocchè posta FG uguale ad 8, la BC sarà uguale a 6, l' IH uguale a 3, la EI uguale a 9, la GI uguale a 4; e però tanto la perpendicolare EI moltiplicata per GI, metà della base GF del triangolo, fa 36, quanto il lato BC moltiplicato per sè stesso dà il quadrato ABCD parimente uguale a 36, sicchè il triangolo è uguale al quadrato: ed altronde, per essere la distanza HI un terzo dell' altezza EI, sarà il punto H centro di gravità del triangolo, siccome era ancora del quadrato, sicchè l' una e l' altra figura dovrà ugualmente resistere.

Proposizione XXXVII, Teorema XXV.

La proporzione de' momenti ne' coni ugualmente lunghi, o uguali di mole, o simili, o di base uguale ec. è la stessa che l' assegnata ne' cilindri.

In questa proposizione ho ridotte, per brevità, 4 proposizioni distintamente proposte dal nostro Autore; potendosi provare col medesimo o simil progresso delle passate, senza multiplicare figure e parole di soverchio.

Proposizione XXXVIII, Teorema XXVI.

Se saranno due leve divise proporzionalmente, le potenze sostenenti saranno come le resistenze.

Siano le due leve AC, FH (*Fig.* 29) proporzionalmente da' loro sostegni divise in B, G. Dico che la potenza E applicata in C a sostenere la resistenza D posta in A, alla potenza K, la quale collocata in H regge l'altra resistenza I posta in F, sta come la stessa resistenza D all'altra I.

Imperocchè, in vigore dell'equilibrio, sta la potenza E al peso o resistenza D, come AB a BC, cioè come FG a GH, per l'ipotesi, o di nuovo, per l'equilibrio, come K ad I; dunque sta E a D come K ad I; e permutando, E a K come D ad I. Il che ec.

Proposizione XXXIX, Teorema XXVII.

Le forze per ispezzare un cono fitto nel muro, vanno scemando colla proporzione che scemano le sezioni.

Sia il cono DBC (*Fig.* 30) fitto nel muro colla sezione BD, il cui centro A; ed in tale stato la sua resistenza sia pareggiata dal peso o potenza E. Poi s'intenda l'istesso cono impegnato similmente nel muro colla sezione IG, il di cui centro F, e la resistenza di questa resti uguagliata dal peso o potenza K. Dico essere E a K come BD ad IG; imperocchè le due leve ABC, FGC sono similmente divise dagli appoggi BG, per la similitudine de' triangoli ABC, FGC; dunque le forze E, K sono come le resistenze assolute poste in A ed F, per l'antecedente proposizione: ma le resistenze assolute sono come le sezioni medesime DB, IG; adunque le forze E, K sono proporzionali alle dette sezioni. Il che si dovea dimostrare.

Corollario. È manifesto che il medesimo accade in qualsivoglia piramide, le cui sezioni parallele alla base sono ancor esse come i cerchi d'un cono ugualmente alto e segato ne' medesimi punti della sua lunghezza; il che è avvertito ancora dal Sig. Viviani nel dimostrare altrimenti questa medesima proposizione, distesa altrove, come appresso si vedrà.

Proposizione XL, Teorema XXVIII.

Nei coni o piramidi fitte nel muro a squadra, i contrappesi equivalenti alle resistenze delle sezioni di diverse lunghezze, crescono come le *sezioni medesime, considerato il cono o la piramide senza peso: cioè riescono come i quadrati delle lunghezze.*

Sia il cono fitto nel muro ABG (*Fig.* 31), *ora fuori del muro quanto* EG, *ed ora quanto* FG; *ed il peso* H *equilibri la resistenza* CD, *il peso* I *la resistenza* AB. *Dico che il peso* H *al peso* I *sta come la sezione* CD *alla* AB.

Perchè presa la GL *terza proporzionale dopo le* GF, GE, *e da* L *tirata la* LM *parallela alle* AE, CF, *la quale si congiunga colla* GA *prolungata in* M, *averà il peso* H *al peso* I *la proporzione composta della contralleva* CF *alla* FG, *e della resistenza* CD *alla* AB, *cioè del quadrato* CD *al quadrato* AB *o pure del quadrato* GF *al quadrato* GE, *cioè della* GF *alla terza proporzionale* GL *e della leva* GE *alla contralleva* EA, (*per la prop.* 6) *cioè della* GL *alla* LM; *ma anche la* CF *alla* ML *ha la proporzione composta delle medesime* CF *ad* FG, *ed* FG *a* GL, *e* GL *ad* ML; *dunque il peso* H *al peso* I *starà come la* CF *alla* ML, *cioè come il quadrato* CF *al quadrato* AE, *ovvero come la sezione* CD *alla* AB, *cioè come il quadrato della lunghezza* GF *al quadrato della lunghezza* GE. *Il che ec.*

Potea questa stessa proposizione, siccome ancora la precedente, che è la medesima, dedursi immediatamente dalla prop. 10, la quale a tale oggetto si vede essere distesa dal Viviani nel suo MS.; imperocchè, essendo le leve FDG, EBG divise similmente da'sostegni D, B, e le resistenze DC, BA essendo come i quadrati delle lunghezze DG, BG, saranno i pesi equivalenti alle dette resistenze, cioè i pesi H, I proporzionali a' quadrati delle contralleve DF, BE, o come le sezioni medesime DC, BA, ovvero come i quadrati stessi delle lunghezze DG, BG, o degli assi FG, EG. Il che ec.

Proposizione XLI, Teorema XXIX.

Diversi solidi similari dell' istessa materia, uguali di mole e in conseguenza di peso, e della medesima lunghezza, e di resistenza assoluta uguale, ricercano forze diverse per romperli, non ostante che il centro delle loro resistenze sia egualmente in tutti lontano dal sostegno.

Sembra questo anzi un paradosso, che un teorema, di cui non è così facile a rintracciarne il vero e legittimo senso: nè altra prova si vede ad esso essere soggiunta nel MS. del Viviani, che una figura in cui si esprimono 4 piramidi quadrangolari, fitte colla base in uno stesso muro verticale, altre dirette, altre inclinate, ma tutte colla cima terminanti in una stessa linea parallela al detto muro; dal quale sbozzo non si può raccorre principio veruno atto ad illustrare il concetto dell'Autore, ma sembra egualmente strano in confronto di cotale disegno, che senza di esso. Imperocchè, come mai puote verificarsi, che diversa forza si richiegga allo spezzamento di due solidi omogenei, della stessa figura e grandezza, quando la resistenza loro assoluta si suppone la medesima, e dall'appoggio ugualmente lontana, e che i pesi o forze che s'applicano per superarla, o sia nel centro di gravità di detti solidi (il quale è in una stessa linea verticale parallela al muro, ed in conseguenza in una stessa distanza da' sostegni), o nella cima ed estremità di tali corpi lontanissima dal muro in cui sono impegnati (che vale a dire in una medesima distanza misurata dall'altezza comune ad essi, come è necessario che sia, a volere che in ugual base ugual mole e peso ritengano), adoperano la stessa leva, ricevendo dall'appoggio sopra le direzioni loro una medesima perpendicolare?

Ad ogni modo, non potendomi persuadere che il nostro Autore ciò proponesse inavvedutamente e senza verun fondamento, mi sono studiato d'indovinare il pensiero di lui, riflettendo ad una diversa direzione, che può considerarsi nella resistenza de' solidi, la quale non è mai stata da verun autore, ch'io sappia, avvertita; e pure, mettendola in conto, varia di molto il momento della resistenza e serve appunto a scoprire e salvare il sentimento del Viviani, proponendolo nella seguente maniera.

Si equilibri il peso H (*Fig.* 32), pendente dalla cima d'una piramide, cono, prisma, conoide o altro solido fitto nel muro colla sua base ABCD, a cui sia perpendicolare l'asse GE, colla resistenza di detta base: ed il peso O si equilibri similmente colla resistenza d'una ugual base, simile e similmente posta, IKLM, d'un altro solido uguale al primo e dello stesso genere di figura, ma il di cui asse NP sia obliquo al piano di detta base. Dico che il peso H al peso O sarà come il seno totale al seno dell'angolo RPQ, che fa l'asse del solido obliquo colla sua base, ovvero col muro medesimo, in cui sta fitto.

Da' centri delle basi E, P si mandino le perpendicolari EF, PR sopra gl'infimi lati confinanti col muro BC, KL, sopra il taglio de' quali si dee far la rottura. Si tiri ancora la perpendicolare RQ dal punto di appoggio R sopra l'asse obliquo NP, e si conducano altresì FH, RS perpendicolari sopra le direzioni GH, NS de' pesi attaccati alle cime G, N. È manifesto che saranno uguali, non solo le due EF, PR, ma ancora le FH, RS. E perchè la forza che tiene insieme attaccate le fibre de' solidi, secondo ciò che si è detto alla definiz. 8, si stima dal Galileo e dagli altri meccanici riunita nel centro di gravità di quella sezione in cui debbe seguire la rottura; ne segue che nell'asse GE, o NP, il quale passa pel centro di gravità di tutte le sezioni parallele alla base del solido, si dee considerare raccolta la resistenza di tutte le sue parti; e però nel detto asse conviene che si stenda la direzione di quella forza che fa la resistenza de' solidi. Per la qual cosa sarà FE nel primo e QR nel secondo solido la vera distanza de' sostegni F, R dalle direzioni delle resistenze d' essi solidi. E giacchè in caso d' equilibrio esser debbe il peso H alla resistenza della base AC del primo solido, come FE ad FH (cioè ad RS), e similmente la resistenza d'essa base AC o dell' uguale IL (che assolutamente è la medesima) sta al peso O, come RS ad RQ; dunque per l' ugualità ordinata, sarà il peso H al peso O, come EF ovvero RP ad RQ, cioè come il seno totale al seno dell' angolo RPQ, col quale resta inclinato al muro l' asse PN del solido obliquo. Il che dovevasi dimostrare.

Corollario I. Quindi è che in diverse inclinazioni le resistenze rispettive d' un medesimo solido saranno come i seni d' esse inclinazioni.

Corollario II. Le resistenze di sezioni diverse averanno la ragione composta e della grandezza d' esse e delle distanze de' loro centri dai sostegni (come nel coroll. 2 della prop. 2 di questo) e de' seni dell' inclinazione de' solidi col muro in cui sono fitti, e della reciproca delle lunghezze d' essi solidi, misurate nella distanza perpendicolare dalla cima loro alla base, come si cava dalla quinta del Galileo intesa più generalmente, e da ciò che in questa si è dimostrato; di maniera che essendo le sezioni di due solidi S, *s*, le distanze de' centri dal sostegno D, *d*, i seni dell' inclinazioni I, *i*, le lunghezze d' essi solidi L, *l*, saranno le resistenze del primo e del secondo solido, come i prodotti SDI*l*, *sdi*L.

Corollario III. Se le sezioni e le distanze de' loro centri di gravità, o i seni dell' inclinazioni de' solidi, saranno come le lunghezze di essi, il resto essendo uguale, riusciranno le resistenze de' solidi uguali. Come, per esempio, se sopra lo stesso cerchio AS (*Fig.* 33), il di cui centro è C, vi saranno due solidi, l' uno retto ABS, l' altro inclinato AFS, di maniera che l' asse CB sia uguale all' asse CF, onde le loro cime B, F siano nell' arco d' un quadrante circolare BFG; lo stesso peso, che sospendendosi in B sarebbe precisamente bastante a vincere la resistenza della sezione AS, ancora appeso dalla cima F basterebbe a vincere la resistenza della medesima sezione della base comune; imperocchè tirata FE perpendicolare all' orizzonte, sarà la lunghezza CB, ovvero CF, alla lunghezza CE, come la CS, raggio della base, alla SD condotta sopra la direzione FC della resistenza ad angoli retti, cioè come il seno totale al seno dell' inclinazione dell' angolo FCG, che fa l'asse del solido colla parete, di maniera che (ritenendo i simboli del corollario precedente) per essere in questo caso L ad *l*, come I ad *i*, sarà *i*L uguale ad I*l*; ed essendo la stessa sezione circolare e la medesima distanza dal sostegno CS in ambedue i solidi, e *sd* uguale ad SD; dunque SDI*l* è uguale ad *sdi*L, cioè le resistenze respettive dell'uno e dell'altro solido sono uguali.

Proposizione XLII, Teorema XXX.

In diversi piani inclinati, le resistenze de' medesimi solidi si diversificano, nel volerli rompere col medesimo peso; ed ancora considerando i soli momenti de' solidi.

Secondo lo sbozzo d'una figura segnata dall'Autore appresso a questa proposizione, credo che si debba esporre nella maniera che segue.

Sia il solido ABG (*Fig.* 34) impegnato in varj muri KA, KA diversamente inclinati all'orizzonte, ed il peso H sia abile a superarne la resistenza quando è fitto il solido nel muro verticale: il peso O sia quello che la vinca nel muro inclinato; e dal sostegno B al punto G, a cui si attaccano i detti pesi, conducasi la retta BG; siccome siano le BH, BI perpendicolari dal detto sostegno sopra la direzione de' pesi. Dico che il peso H al peso O starà reciprocamente come BI a BH, che sono i seni degli angoli BGI, BGH; ed in conseguenza le resistenze del solido in questi varj siti saranno diverse, e diversa impressione riceverebbero da un medesimo peso. E lo stesso vale quando, in luogo de' pesi aggiunti, si considerasse il momento del solo peso del solido, raccolto nel suo centro di gravità.

Imperocchè il peso H all'assoluta resistenza del solido, raccolta nel centro C della sua base, sta come CB a BH; e l'assoluta resistenza medesima sta al peso O come BI a CB; dunque per la ragione perturbata, il peso H al peso O sta come BI a BH. Il che dovea dimostrarsi.

Che se intenderassi il solido ABG tanto prolungarsi che il punto G rimanga lo stesso col suo proprio centro di gravità; allora prescindendo dal peso aggiunto, e considerando la gravità sola del solido raccolta in G, ed operante colla direzione GH ovvero GO, è manifesto che volendo supporre equilibrata la resistenza del solido in tutti questi siti col proprio peso, non potrebbe questi essere il medesimo, ma dovrebbe similmente variare in ragione reciproca de' seni BI, BH, corrispondenti agli angoli d'inclinazione BGO, BGH; e però quando suppongasi essere lo stesso peso del solido, averà viceversa i suoi momenti misurati dalla ragione diretta de' medesimi seni BH, BI. Il che ec.

Corollario I. La più gran resistenza respettiva sarà d'un solido applicato al piano orizzontale, come accade a quello, cui tende a rompere o a schiacciare il peso R, il quale uguagliar debbe la resistenza assoluta di esso. La minima resistenza respettiva sarà d'un solido applicato al muro verticale: e negli altri piani, secondo che saranno più all'orizzonte inclinati, si troverà sempre resistenza maggiore.

Corollario II. E viceversa, nel piano verticale avrà un solido il maggior momento e disposizione a rompersi col proprio peso o con uno stesso alla sua cima attaccato; e nel piano orizzontale averà il minimo de' suoi momenti, siccome ne' piani di mezzo l'averà mediocre; e tanto maggiore, quanto più al verticale si accosta, ma tanto minore, quanto più all'orizzontale si avvicina.

Proposizione XLIII, Problema XIII.

Si assegni la proporzione de' minimi rompenti il medesimo solido col proprio peso: e qual linea descrivano le estremità.

Si è già veduto nell'antecedente qual proporzione abbiano i minimi pesi, da' quali si spezzi il medesimo solido, in varj piani diversamente inclinati fitti a squadra colla stessa sezione; ma nel medesimo piano diversamente inclinandosi un dato solido, varierà la sezione in cui seguir dee la rottura (siccome in un cilindro o cono la base non si manterrebbe circolare, ma diventerebbe elittica), onde crescerebbe per tal capo la resistenza nella ragione sì dell'ampiezza di tal sezione e sì della distanza che averebbe il suo centro di gravità dal sostegno; ma scemerebbe viceversa il suo momento, a misura del seno dell'inclinazione (per le cose dette nella prop. 41), siccome nella stessa proporzione scemerebbe ancora il momento del peso attaccato alla cima del solido.

Sia per cagione d'esempio il cilindro GDK (*Fig.* 35) fitto a squadra in un muro verticale, e la resistenza della sua base circolare GLD sia equilibrata dal peso M. Poi s'intenda l'asse AC del cilindro muoversi attorno al punto C, rimanendo nel suo piano verticale, e venire nel sito CB, sicchè il cilindro sia HBO, il quale sega lo stesso muro nella base elittica HLE; e la resistenza di essa venga pareggiata dal peso N. Dico che M ad N ha la ragione composta della reciproca delle distanze EI, DK, per cui i sostegni E, D sono lontani dalle direzioni d'essi pesi, e di più di quella de' semidiametri CD, CE, che risultano nelle dette sezioni in ambidue i casi, e che sono le lontananze del centro della resistenza C dalli due appoggi D, E.

Imperocchè, per cagione dell'equilibrio, starà il peso M all'assoluta resistenza della base GLD, come CD a DK; e la resistenza assoluta GLD all'assoluta resistenza HLE sarà come la seziono alla sezione, cioè (per essere ad ambidue comune il semidiametro LC) come CD a CE: e finalmente la resistenza assoluta di questa sezione LHE (per la prop. 41) al peso N, che ne uguaglia il momento, è come la distanza EI alla distanza EF, o pure all'uguale BO, cioè alla CD; dunque per l'ugual proporzione sarà il peso M al peso N in ragione composta di EI a CD, di CD a DK, e della CD alla CE; ma le prime due ragioni formano quella di EI a DK, dunque il peso M al peso N starà in ragione composta della reciproca delle distanze EI, DK e della diretta de' semidiametri CD, CE. Il che doveva dimostrarsi.

Corollario. Il peso M al peso N, cioè la resistenza del cilindro orizzontale alla resistenza dell'obliquo, sta come il quadrato del semidiametro CD al quadrato del semidiametro CE. Imperocchè EI a DK, ovvero a CA, sta come CP a CB, ovvero come FE (cioè CD) a CE, essendo simili i triangoli CFE, CBP; dunque la ragione composta di EI ad DK e di CD a CE è duplicata di questa o pure è la stessa che la ragione del quadrato CD al quadrato CE; e però i detti pesi M, N, o resistenze de' solidi corrispondenti, sono come i quadrati de' semidiametri CD, CE.

Quanto all'altra particolarità del presente quesito, cioè di sapere qual linea descrivano l'estremità di questi solidi, non è così agevole il determinare che cosa l'Autore desiderasse per ciò di rinvenire; ma da una figura ivi disegnata, in cui si esprime un piano orizzontale ed un cilindro da esso in giù pendente a piômbo, con un altro obliquamente inclinato, accennando che sieno i minimi abili a sostenersi in tale positura, pare che il suo pensiero fusse d'indagare a qual linea terminino l'estremità di varj cilindri o coni o altri solidi di un medesimo genere, diversamente inclinati allo stesso piano e condotti alla precisa lunghezza in cui reggere si possano; ma perchè, secondo che si supponessero l'uno dall'altro più o meno distanti, la curva, in cui anderebbero a finire sarebbe diversa, io li supporrò tutti coll'asse che passi per lo stesso punto del piano, in cui sono fitti; e di più stenderò la speculazione (oltre all'orizzontale accennato nella bozza del Sig. Viviani) ancora al verticale; dal che sarà facil cosa l'immaginarsi quello che debba succedere in un piano di mezzo tra l'una e l'altra posizione.

Sia dunque il piano orizzontale DAG (*Fig.* 36), dentro a cui fitto a squadra si trovi il solido DBM (sia cono o cilindro o conoide ec.) la di cui base DM e l'asse AB, in cui sia il suo centro di gravità I;

e sopra la stessa base sia obliquamente disposto il solido DQM dello stesso nome, il di cui asse AQ ed il centro di gravità E; dico che i centri di gravità E, I (supponendo ciascuno di questi solidi, per mezzo del proprio suo peso, equilibrarsi colla resistenza della base comune) saranno in una curva IEP di tal natura, che condotte le EF, IK parallele all' orizzonte e terminate dalla verticale DC, che passa per l' estremo D della base, sarà sempre il rettangolo AEF uguale al rettangolo AIK; e dico ancora che le cime B, Q di detti solidi terminano alla curva BQG simile all' altra IEP, la quale riferendosi alla retta HLT parallela a CD, ma da essa distante in maniera che CB a BH sia come IA ad AB, ovvero EA ad AQ (essendo gli assi di detti solidi proporzionalmente divisi da' loro centri di gravità), sarà parimente il rettangolo AQL uguale al rettangolo ABH.

Si conduca DV perpendicolare sopra l' asse QA, ed EX perpendicolare a DM; pareggiandosi dunque il momento del solido DQM col momento della resistenza nella base DM, sarà il peso di esso all' assoluta resistenza DM, ovvero al peso del solido DBM, che direttamente tirando l' uguaglia, come reciprocamente la DV (distanza della direzione QA della resistenza dal sostegno D) alla DX (distanza della direzione del centro d' esso solido dal medesimo sostegno) cioè alla FE; ma il peso del solido DQM al peso dell' altro DBM sta come la mole alla mole, cioè (per avere la base DM comune) come l' altezza QR all' altezza BA; dunque QR a BA sta come DV ad FE; e permutando, QA a DV, cioè (per la similitudine de' triangoli QRA, DVA) QA ad AD è come BA ad FE; e di nuovo permutando, QA a BA (ovvero EA ad IA, che sono parti proporzionali degli assi tagliate da' loro centri di gravità) sarà come AD ad FE; onde il rettangolo AEF sarà uguale al rettangolo DAIK; e però la natura della curva IEP dipende dall' uguaglianza di detti rettangoli.

E perchè i rami AQ, AB sono proporzionalmente divisi in E, I, è manifesto, essere la curva BQG, condotta per le cime dei detti solidi, della stessa natura della curva IEP; e che però dipende da una simile uguaglianza di rettangoli AQL, ABH; siccome in fatti, essendo HB a BC, ovvero LN ad FO, come BA ad AI, cioè come QA ad AE o come QN ad EO; ancora la somma degli antecedenti LQ alla somma de' conseguenti FE starà nella stessa ragione di HB a BC; e permutando, LQ ad HB sarà come FE a BC, cioè a DA; ovvero (per le cose già dimostrate) come IA ad AE, che è quanto dire come BA a QA; e però il rettangolo AQL sarà uguale al rettangolo ABH. Il che ec.

Quanto alla descrizione di detta curva; se col centro A e semidiametro AB nella precedente figura si descriverà l'arco circolare BS, ed inclinata qualunque AS si prolungherà fino al concorso della HL in T; basterà dividere AS in Q in maniera che le tre linee TA, AQ, QS siano continuamente proporzionali; che il punto Q sarà nella curva cercata; imperocchè componendo, sarà AS, ovvero BA, ad AQ, come QT a TA, cioè come QL ad AZ o pure ad HB; e però il rettangolo ABH sarà uguale al rettangolo AQL, come ricerca la natura della curva BQG, proposta da costruirsi.

Ma se il muro DAR sarà verticale (*Fig.* 37), ed in esso parimente siano fitti il solido DBM retto e l'altro DQM obliquo, sopra la comune base, il di cui diametro DM, ambidue minimi tra gli atti a rompersi in vigore del proprio peso, e però equilibrati colla resistenza della base suddetta; dico che la curva, in cui terminano le cime di tali solidi, è di tale natura, che sempre al rettangolo AQR uguaglia il quadrato AB; e la curva IEP, la quale passa pel centro di gravità dei detti solidi, è simile all'altra: sicchè ancora il rettangolo AEX pareggia il quadrato AI.

Imperocchè il peso del solido MQD alla resistenza della base MAD sta, per le cose sopra dimostrate, come DV a DF, cioè ad EX, o pure (per la simiglianza de' triangoli DVA, EXA) come DA ad AE; ma la resistenza d'essa base MAD è al peso del solido MBD come DK, cioè AI a DA; dunque per l'ugualità perturbata il peso del solido MQD a quello del solido MBD sta come IA ad AE; ma il primo peso al secondo sta come l'altezza QR all'altezza AB; dunque QR ad AB sta come IA ad AE, cioè (per la proporzionale divisione degli assi fatta ne' centri di gravità de' solidi dello stesso genere) come AB ad AQ; e però il rettangolo AQR uguaglia il quadrato di AB. Il che ec.

Ed essendo il rettangolo AEX al rettangolo AQR, come il quadrato AE al quadrato AQ, cioè come il quadrato AI al quadrato AB, l'ugualità de' conseguenti ci assicura dell'ugualità degli antecedenti; e però la curva, che passa per tutti i centri di gravità di detti solidi, ci darà sempre il rettangolo AEX uguale al quadrato AI; onde sarà simile all'altra, che passa per le cime de' medesimi. Il che ec.

Per la costruzione poi di questa curva, descrivendo col centro A ed intervallo AB l'arco circolare BS, la cui tangente sia BT, ed inclinata qualsivoglia segante AT, basterà interporre fra le due AT, AS la mezzana proporzionale AQ, che sarà il punto Q della curva BQG ricercata; imperocchè la similitudine de' triangoli ABT, AQR ci darà QR ad AB, come AQ ad AT, cioè come AS (ovvero AB) ad AQ, e però il rettangolo AQR sarà uguale al quadrato AB, come richiede la natura di essa curva.

Proposizione XLIV, Quesito XIV.

Data la linea AB (*Fig.* 38) *centrica* (cioè che sia la distanza del centro di gravità B d' un solido CD dal centro A della sua base CE) *di un solido fitto a squadra nel piano orizzontale* CG *colla sua base* CE, *di maniera che col proprio peso equilibri la resistenza di detta base; e data l' inclinazione dell' asse* AF *d' un altro solido che abbia la medesima base, e sia similare al primo: determinare la lunghezza che debbe avere, acciocchè aggravando col proprio peso contro il sostegno* C, *equilibri appunto la medesima resistenza* CE (quando ancora si prescinda dalla diversa direzione che in tal sito pare che acquisti la forza della resistenza).

Dal centro di gravità del solido B *si tiri la* BF *parallela alla* AG *che concorra coll' asse inclinato in* F, *e per* F *la* FG *parallela alla* BA: *dipoi alla* CA *si applichi un parallelogrammo rettangolo, uguale al rettangolo* GAC *e che ecceda d' una figura quadrata; e sia questo il rettangolo* CHA; *e da* H *sia tirata* HI *parallela alla* GF, *che concorra in* I *colla* AF. *Dico che la* AI *è la centrica del solido ricercato.*

Perchè essendo il rettangolo CHA *uguale al rettangolo* GAC, *sarà come* HC *a* CA, *così* GA *ad* AH, *ovvero* FA *ad* AI, *o pure come il solido della centrale* AF *al solido della centrale* AI, *per esser questo su la medesima base* CE; *ma il solido della centrale* AF *è uguale al solido della centrale* AB *essendo su la stessa base e della medesima altezza; dunque* HC *a* CA *starà come il solido della centrale* AB *al solido della centrale* AI, *cioè come il peso assoluto del primo al peso assoluto del secondo: ma il peso assoluto del solido della centrale* AB *è la misura della resistenza assoluta di* CE; *adunque la resistenza assoluta di* CE *alla forza assoluta, cioè al peso del solido della centrale* AI, *starà come* HC *a* CA, *cioè come la leva alla contralleva, e però si farà l' equilibrio tra questo e quella. Il che ec.*

E perchè il rettangolo GAC *è uguale al rettangolo* CHA, *sarà* GA *ad* AH *come* HC *a* CA; *e dividendo,* GH *ad* HA *come* HA *ad* AC; *ovvero (tirata* CL *parallela ad* AB *e prolungata la* FA *in* L*) come* FI *ad* IA, *così* IA *ad* AL. *Quella curva adunque, che partendosi da* B *verso* G, *segherà le rette* AF *in* I, *in modo che (le medesime prolungate sino a* CL *) stia* LA *ad* AI *come ad* IF, *sarà quella che darà tutti i centri dei solidi similari che col momento del proprio peso saranno bastanti a pareggiare la resistenza della propria base, qualunque si sia la loro inclinazione. E tal linea curva sarà asintota alla* AG.

Se fusse stato riveduto questo trattato, ed a perfezione ridotto dal suo Autore, egli senza dubbio primieramente accorto si sarebbe che la curva BI, da lui qui descritta, è una vera iperbola d' Apollonio; imperocchè, stando HC a CA come GA ad AH, ovvero come FG (cioè BA) ad HI, il rettangolo dell' estreme CHI uguaglia quello delle mezzane CAB; e però la curva BI è una iperbola, che ha per asintoti le linee CK, CG.

In secondo luogo forse averebbe osservato che la vera distanza della resistenza, che è nella base CE dal suo sostegno C, non è la CA in riguardo al solido inclinato colla direzione dell' asse AF, in cui si raccoglie l' azione della resistenza del solido, passando per tutti i centri di gravità delle sezioni parallele a detta base CE, come si è avvertito nella proposiz. 41, ma bensì cotale distanza è la CM, perpendicolare alla detta direzione della resistenza, secondo l' asse del solido IA; il che fa degenerare l' iperbola BI nella curva da noi sopra descritta nella proposizione antecedente, la quale fu da me distesa prima che giungessi a vedere nel MS. del Signor Viviani questa sua costruzione; ed io non ho voluto omettere nè l' una nè l' altra: parendomi quella ben fondata secondo i principj meccanici, e questa almeno verificandosi, astraendo da quella particolare considerazione della direzione diversa, che sembra avere la resistenza in un solido obliquo (il perchè ho aggiunta al titolo della proposizione del Signor Viviani quell' ultima parentesi), tanto più che questa nuova considerazione delle direzioni nelle resistenze potrebbe non riuscire a gusto di tutti; e però era dovere, che secondo l' ipotesi di chi ancora credesse universalmente esercitarsi la forza della resistenza secondo una direzione sempre perpendicolare alla base, non ostante qualunque obliquità dello asse d' un solido, si determinasse la curva in cui terminano i centri o le cime de' solidi precisamente abili a sforzare la comune resistenza della base, come acutamente ha fatto qui il nostro Autore.

Proposizione XLV, Teorema XXXI.

Dimostrare in altra maniera la proposizione 14 del Galileo: cioè che nel cuneo ABG *(Fig. 39), il quale posa sul muro con uno de' suoi parallelogrammi, le resistenze all' esser rotto crescono come le lunghezze del cuneo fuori del muro.*

Equilibri H *la resistenza* AB, *ed* I *la resistenza* CD. *Dico che* H *ad* I *sta come* AG *a* GC.

Poichè H *ad* I *ha proporzione composta della* EA *ad* AG *e della resistenza* AB *alla* CD, *cioè della linea* EA *alla* CF, *ovvero della* AG *alla* GC *e della* GC *alla* CF *(per la prop. 6); ma anche* EA *a* CF *ha proporzione composta delle medesime* EA *ad* AG, AG *a* GC, GC *a* CF; *dun-*

que H *ad* I *sta come* EA *a* CF, *cioè come la lunghezza* AG *alla lunghezza* GC. *Il che ec.*

PROPOSIZIONE XLVI, QUESITO XV.

Nel cuneo triangolare FAB (*Fig.* 40), *quando il peso* N *fusse bastante a spezzare* AF *fitta nel muro: perchè più tosto il medesimo peso, anzi ancora minore, non dee prima spezzarlo in un' altra sezione* OP *più vicina all' estremo* B, *dove è sempre minor resistenza, col fare il cuneo in que' luoghi di mezzo sostegno di sè medesimo?*

Perchè dovendosi strapppare non direttamente, ma obliquamente, conviene che si spezzi sopra di un sostegno veramente immobile, o pure che si muova all' opposte parti, cioè allo insù, mentre il peso N, ed il carico del muro sopra F, premono all' ingiù, o almeno trattengono gli estremi del solido, che non si lascino trasportare dall' azione del sostegno che spinge all' insù. Ma nè il punto O, nè verun altro peso tra A e B, è sostegno immobile, o che abbia veruna azione da spignere insù, anzi è disposto a secondare il moto della leva AB, discendendo col peso N, e piegandosi in arco circolare d' intorno al centro A, il quale solo è veramente immobile; adunque lo spezzamento non può farsi in veruna sezione intermedia OP, ma unicamente nella AF, a cui sta sottoposto il taglio del muro.

Del resto, se talmente ferma fusse e rigida la porzione FO, che non potesse cedere ed accompagnare in alcuna maniera il moto della parte OB, potrebbe il peso N sforzare la sola parte OB alla separazione sopra il sostegno stabile, che la fermezza del solido porgerebbe in tal caso nel punto O. E credo che talvolta ciò succeda, vedendosi delle mensole di pietra sporte in fuori del muro, tronche o mozze assai lontano dal taglio d' esso muro in cui erano impegnate.

PROPOSIZIONE XLVII, QUESITO XVI.

Se i cunei triangolare e semirapabolico (*Fig.* 40 e 41) *debbano spezzarsi più tosto nella sezione* AM *fatta dalla minima retta* AM *sopra la linea* FMB, *dove è minore la resistenza, che nella* AF: *perchè la resistenza assoluta non può essere tanta in* AM *quanta in* AF, *per essere rettangoli della medesima altezza, che sono come le basi* AM, AF: *ed anco perchè la contralleva, dove tali potenze sono poste, è minore in* AM *che in* AF, *presa la distanza dallo stesso sostegno* A, *che è nel taglio del muro in cui si suppongono i cunei impegnati.*

Dee seguire la rottura regolarmente parlando nella AF, sezione comune del cuneo colla parete in cui è fitto: perchè, quantunque sia minore la resistenza di AM che di AF, la parte FM non essendo premuta contro il sostegno, e tenuta fissa nel muro, come si è avvertito essere necessario nella proposizione precedente, potrà secondare il moto dell'altra parte contigua MB, tirata giù dal peso N: onde cedendo, e piegandosi con essa, non potrà da lei separarsi; e però non seguirà la rottura nella retta perpendicolare AM, se non in caso che la materia FAM fosse talmente ferma e rigida, che non potesse nella maniera accennata cedere e piegarsi: perchè allora sarebbe come se il cuneo MAB fosse fitto in un muro AM inclinato all'orizzonte, e lo spezzamento seguirebbe secondo le regole di sopra assegnate nella proposizione 42.

Proposizione XLVIII, Teorema XXXII.

Se il cuneo triangolare ABCD (*Fig.* 42) *sarà fitto nel muro perpendicolarmente, ora colla sezione* AB *ed ora con l'altra* EF *parallela all'*AB; *appendendo all'estremità* D *un peso* H, *che sia bastante appunto a spezzare il solido nella sezione* AB ; *ed un' altra* G *che sia appunto bastante per superare la resistenza della sezione* EF, *dico che i pesi* G *ed* H *sono uguali: cioè a dire, che detto cuneo è per tutto egualmente resistente, considerato senza peso.*

Dividasi la AI *per mezzo in* O, *e giungasi la* DO, *segante la* EN *per mezzo in* Q. *Da* OQ *si alzino* OP, QR, *che congiungano i punti* P, R *centri di gravità delle sezioni* AB, EF *(le quali, per essere parallelogrammi che hanno uguali altezze* AL, EM, *daranno le distanze de' centri loro* PO, RQ *uguali). Ora qui le* DQ, DO *saranno le leve, dove in* D *sono applicate le forze o pesi* G, H; *e le* QR, OP *le contralleve, all'estremità delle quali in* R, P *sono applicate le resistenze* EF, AB; *ed il peso* G *pareggia la resistenza* EF , *ed il peso* H *equilibra la resistenza* AB. *Dunque per la prop.* 6 , *il peso* G *al peso* H *ha la proporzione composta della contralleva* RQ *alla leva* QD *e della resistenza* EF *alla* AB , *cioè della linea* EN *alla* AI *(essendo parallelogrammi con eguali altezze, che sono fra loro come le basi), cioè della leva* DQ *alla* DO *e della leva* DO *alla contralleva* OP; *ma anche la* QR *alla* OP *ha la proporzione composta delle medesime* RQ *a* QD, QD *a* DO, *e* DO *ad* OP; *dunque il peso* G *al peso* H *sta come la* QR *alla* OP ; *e però sono tra loro uguali. Il che si dovea dimostrare.*

In altra maniera si discorra così: Il momento della resistenza AB *al momento della resistenza* EF *sta, per la prop.* 2, *come la base* AI *alla base* EN, *cioè come la leva* OD *alla* QD, *ovvero come il momento del peso* H *pendente dalla leva* OD, *al momento del medesimo peso pendente dalla* *a* QD; *e permutando, il momento della resistenza* AB, *al momento del* *o* H *pendente da* OD, *starà come il momento della resistenza* EF *al* *mento del medesimo peso* H *pendente da* QD; *ma i primi momenti* *o uguali, dunque ancora i secondi; e però il medesimo peso, che* *dente da* OD *equilibra la resistenza* AB, *pendendo da* QD *equilibrerà* *resistenza* EF. *Il che ec.*

Più speditamente, per la proposizione 7, essendo nelle leve POD, D, le uguali braccia PO, RQ; ed in esse le resistenze proporzio- li alle contralleve OD, QD: da uguali contrappesi H, G si equili- ranno le suddette resistenze; il che ec.

Proposizione XLIX, Teorema XXXIII.

Se il cuneo parabolico ADI (*Fig.* 43) *sarà fitto nel muro perpen- olarmente, ed il peso* L *equilibri la resistenza* AD, *il peso* M *la resi- nza* EG, *dico che il peso* L *al peso* M *ha suddupla proporzione della* *a* IP *alla leva* IQ: *che è la proporzione reciproca delle lunghezze di* *to cuneo.*

Poichè la resistenza AD *alla* EG *sta come la linea* AB *alla* EH: *la* AB *alla* EH *ha suddupla proporzione del quadrato* AB *al quadrato* I, *cioè della leva* QI *alla* IP; *e le contralleve* QO, PN, *all' estremità le quali sono appese le resistenze* AD, EG, *sono uguali; dunque per prop.* 8 *il peso* L, *che equilibra la resistenza* AD, *al peso* M, *che equili- a* EG, *ha suddupla proporzione della leva* IP *alla leva* IQ; *il che ec.*

Corollario. *Prendendo la* IR *media fra* IP *ed* IQ, *la quale ad* IQ *parimente suddupla proporzione della* IP *alla* IQ, *sarà il peso* L *al* *o* M, *come* IR *ad* IQ, *o come* IP *ad* IR: *onde se per pareggiare la re- tenza* AD *si ricerca il peso* L, *per pareggiare la* EG, *quando il cuneo à più corto fuori del muro, ci vorrà un peso* M *che sia maggiore dello e tanto maggiore quanto la media* RI *tra le due leve* QI, PI, *è mag- re della minor leva* PI.

Proposizione L, Teorema XXXIV.

Se saranno due leve divise da' loro sostegni in maniera che le di- nze, dove si hanno da costituire le potenze, abbiano tra di loro doppia porzione delle distanze, dove saranno le resistenze: le quali resistenze no tra loro in doppia proporzione delle loro distanze medesime; le po- ze sostenenti fra loro saranno come le distanze delle resistenze.

Sia la BC a GH (*Fig.* 29) in ragione doppia di AB ad FG; e ancora la resistenza D alla resistenza I nella stessa doppia ra- ne di AB ad FG; le forze sostenenti E, K saranno come AB ad

FG. Imperocchè starà E a K in ragione composta di E a D, di D ad I, e di I a K; ma la prima ragione è, per l'equilibrio, quella di AB a BC; la seconda, per l'ipotesi, quella di BC a GH (essendo tanto l'una che l'altra doppia della ragione di AB ad FG), e la terza quella di GH ad FG; dalle quali ne risulta quella di AB ad FG; dunque E a K sta come AB ad FG. Il che ec.

Corollario. Quindi è chiaro che lo stesso accaderebbe se fusse D ad I come BC a GH, quantunque l'una e l'altra ragione non fusse doppia di quella di AB ad FG: seguendone subito, che sia E a K come AB ad FG, in vigore della precedente dimostrazione, indipendente da quella circostanza di ragione doppia, per cui si limita il teorema del Sig. Viviani.

Proposizione LI, Teorema XXXV.

Le forze per ispezzare un conoide parabolico, fitto nel muro, accorciando il conoide, scemano colla proporzione che scemano i diametri delle sezioni.

Perchè nel conoide BCD parabolico (*Fig. 44*), segato col piano IG parallelo alla base, sta la distanza AC alla distanza FG (nelle quali si costituiscono le potenze E, K abili a vincere la resistenza di dette sezioni, spezzando in esse il solido) in doppia ragione delle distanze AB, FG, nelle quali si applicano le resistenze, e queste sono come i cerchi DB, IG, i quali altresì hanno doppia ragione delle stesse distanze AB, FG; dunque, per la precedente, sarà E a K come AB ad FG, o pure come tutto il diametro DB al diametro IG. Il che era da dimostrarsi.

Proposizione LII, Teorema XXXVI.

Se nelle libre ABC, ODE (*Fig. 45*), *in cui i pesi* F, G, H, I *sono equilibrati, sarà il peso* F *al peso* H *come il quadrato del vette* AB *al quadrato del vette* OD, *e la contralleva* BC *alla contralleva* DE *sia come il cubo del vette* AB *al cubo del vette* OD, *saranno i pesi* G *ed* I *tra loro uguali.*

Si pigli DK uguale a BC, ed il peso L, posto in K, si equilibri con H; dunque il peso G al peso L, per la proposiz. 13, starà come il cubo di AB al cubo di OD, cioè, per l'ipotesi, come la distanza BC, ovvero DK, alla distanza DE; ma per essere uguali i momenti de' pesi I ed L, i quali si equilibrano collo stesso H, starà ancora I ad L come DK a DE; adunque G ad L sta come I ad L; e però G ed I sono uguali; Il che ec.

PROPOSIZIONE LIII, TEOREMA XXXVII.

La conoide nata da una parabola cubica, essendo fermata colla base nel muro, resiste ugualmente in qualsivoglia delle sue sezioni.

Se nel rettangolo AB (*Fig.* 46) *e nel triangolo* ACB *siano applicate le rette* DHE, FIG, *e tra le due* DE, EH *si piglino due medie proporzionali* EL, EM; *e similmente fra le due* FG, GI *le due medie* OG, NG, *e così sempre, i punti* B, O, L, A *saranno nel contorno d' una parabola cubica; di maniera che* DE *ad* EH, *o pure* AC *ad* EH, *cioè* CB *a* BE, *sarà come il cubo* DE, *o pure* AC, *al cubo* EL; *e ciò sempre. Ora dico, che se questa parabola cubica si ravvolgerà d' intorno all' asse* BC, *il solido rotondo* APB *da essa generato essendo fitto colla base nel muro, e da esso tirandolo fuori a qualsivoglia lunghezza, resisterà sempre ugualmente. Imperocchè il cerchio generato dal raggio* AC *al cerchio fatto dal raggio* LE, *cioè la resistenza assoluta del primo alla resistenza del secondo, è come il quadrato del braccio della leva* AC *al quadrato del braccio della leva* LE; *ma la contralleva* BC *alla contralleva* BE *è come il cubo della leva* AC *al cubo della leva* LE; *dunque per la precedente, lo stesso peso, che attaccato in* B *supera la resistenza della sezione* AC, *supererà ancora la resistenza di qualsivoglia altra sezione* LE. *Il che dovea dimostrarsi: avvertendo però che tutto questo si verifica astraendo dal proprio peso di detta conoide.*

O pure in altra maniera si discorra così. Il momento della resistenza del cerchio AC *al momento della resistenza del cerchio* LE *sta come il cubo* AC *al cubo* LE *(per la prop. 4)*, *cioè, per la natura del solido, come* CB *a* BE *o come il momento d' uno stesso peso attaccato in* B, *nella distanza* BC, *tale che pareggi il momento della resistenza* AC, *al momento del medesimo peso attaccato in* B *colla distanza* BE; *adunque permutando, il momento della resistenza* AC *al momento del peso in* B *colla distanza* BC, *sarà come il momento della resistenza* LE *a quello del peso in* B, *colla distanza* BE; *ma il peso in* B *colla distanza* BC *pareggia il momento della resistenza* AC; *dunque lo stesso colla distanza* EB *pareggerà il momento della resistenza* LE. *Il che ec.*

PROPOSIZIONE LIV, QUESITO XVII.

Cercare d' una figura piana (*Fig.* 47), *come* ABC, *talmente disposta d' intorno al suo asse* BC, *che i quadrati dell' applicate* AC, DE, *abbiano tra di loro la proporzione composta della superficie* ABC *alla superficie* DBE, *e dell' altezza* BC *all' altezza* BE.

Questa sarà un trilineo parabolico ABC, in cui la base BC sia tangente della cima B, e le AC, DE siano parallele all' asse della parabola; imperocchè, essendo il trilineo ACB un terzo del rettangolo circoscritto ACB, ed il trilineo DEB un terzo parimente del circoscritto rettangolo DEB, averà la superficie ACB alla superficie DEB la ragione composta delle ragioni de' lati CA a DE, (cioè del quadrato CB al quadrato EB) e di CB a BE; onde sarà come il cubo CB al cubo BE. Si aggiunga ora da entrambe le parti la ragione di CB a BE; sarà la ragione composta della superficie ACB alla superficie DEB, e della CB a BE, uguale a quella del biquadrato CB al biquadrato BE; ma stando AC a DE come il quadrato della CB al quadrato della BE; raddoppiata l' una e l' altra ragione, sarà il quadrato AC al quadrato DE, come il biquadrato CB al biquadrato BE; adunque il quadrato AC al quadrato DE ha la ragione composta di quella della superficie ACB alla superficie DEB e di quella dell' altezza BC all' altezza BE; che è quello che si dovea ritrovare.

Proposizione LV, Teorema XXXVIII.

La figura dotata delle condizioni sopraddette nell' antecedente proposizione, sarà ugualmente resistente in tutte le sezioni: intesa però cavata fuori di un muro coll' asse BC *orizzontale. E similmente il prisma che averà per base detta figura, sarà ugualmente resistente (attesa la propria gravità del medesimo prisma).*

La ragione è perchè le resistenze (rispettive) delle linee o piani AC, DE *sono fra loro come i quadrati di dette linee, per la proposiz.* 3; *ed i momenti delle superficie o solidi* ABC, DBE *hanno la proporzione composta delle dette proporzioni* (cioè delle superficie ABC, DBE e della distanza BC alla BE, delle quali proporzioni si suppone composta ancora la ragione del quadrato AC al quadrato DE); dunque le resistenze respettive delle sezioni, cioè i momenti co' quali esse resistono allo strappamento, staranno come i momenti delle figure cavate fuori del muro; e però da per tutto ugualmente resisteranno, in riguardo del proprio peso.

Proposizione LVI, Quesito XVIII.

Cercare d' un' altra figura solida rotonda d' intorno al suo asse (Fig. 48), di cui i cubi de' diametri ne' cerchi applicati AB, CD, *abbiano la proporzione composta del solido* AGB *al solido* CGD, *e dell' altezza* EG *all' altezza* FG.

La tromba parabolica, nata dal ravvolgersi il trilineo parabolico GEB d' intorno alla tangente della sua cima GE, soddisfà al quesito. Imperocchè il solido ABG al solido CDG (essendo ciascuno d'essi un quinto del cilindro circoscritto) ha ragione composta di quella de' cerchi, e de' quadrati AB, CD, e di quella dell'altezze EG, FG. Si aggiunga un'altra volta di comune la ragione di EG ad FG; sarà dunque la ragione composta di quella de' solidi ABG, CDG, e di quella dell'altezze EG, FG, uguale a quella che si compone dalla ragione de' quadrati AB, CD, e dell'altra de' quadrati EG, FG, cioè delle linee AE, CF, o delle duple di esse AB, CD; ma la ragione de' quadrati AB, CD, giunta a quella delle linee AB, CD, forma quella de' cubi AB, CD; dunque i cubi de' diametri AB, CD hanno la proporzione composta di quella del solido AGB al solido CGD, e di quella dell'altezze EG, FG. Il che ec.

Proposizione LVII, Teorema XXXIX.

La figura ritrovata nella precedente proposizione ci dà un solido, che fitto nel muro sarà per tutto ugualmente resistente, considerato come grave.

Perchè la resistenza del cerchio AB *alla resistenza del cerchio* CD *ha proporzione composta del cerchio o quadrato* AB *al cerchio o quadrato* CD, *e della linea* AB *alla linea* CD (pel corollario 2 della proposizione 2, che parla de' momenti delle resistenze assolute, i quali sono la medesima cosa colle resistenze respettive, delle quali qui si tratta, per la definizione 5), *ma ancora il cubo di* AB *al cubo di* CD *ha proporzione composta delle medesime proporzioni; e però dette resistenze sono come i cubi de' diametri* AB, CD *(come nella proposizione 4 si è dimostrato); ma i momenti de' solidi hanno altresì la proporzione composta della proporzione de' medesimi solidi e delle loro altezze;* dunque in questo caso le resistenze sono proporzionali a' momenti del peso de' solidi; e però tanto resiste l'uno che l'altro, in riguardo del proprio peso. Il che ec.

Proposizione LVIII, Quesito XIX.

Cercare qual sia quel piano e quel solido, che tirato fuori di una parete, sia in ogni stato ugualmente resistente o potente a reggere il proprio peso.

Al quesito ho soddisfatto nel mio problema 6 della parte 1 della risposta apologetica al Sig. A. M. in infinite maniere, dalle quali si deduce il cuneo parabolico, e la tromba altresì parabolica, che si generano dal compimento della parabola ordinaria, o combinandosi col rettangolo, per farne nascere un prisma, o rivolgendosi attorno la tangente verticale, per avere un solido rotondo, de'quali si è parlato nelle proposizioni 54, 55, 56 e 57, siccome ancora fu avvertito dal Sig. Leibnizio negli atti di Lipsia del 1684, e da Monsù Varignonio nelle memorie dell'Accademia Reale di Parigi del 1702; ed in oltre con infinite iperbole, o con lo spazio logaritmico, o con un prisma, sopra di esso spazio eretto a qualsivoglia altezza, si ottiene il medesimo intento, come ho dimostrato nel luogo citato, da ripetersi nell'appendice aggiunta in piè del trattato presente, problema 6, corollario 3 e 4.

Proposizione LIX, Quesito XX.

Cercare qual sia quel solido, cioè di che figura, il quale tenuto in piombo ha in ogni sezione ugual resistenza: cioè, che la sezione alla sezione stia come il solido al solido sopra di esse sezioni costituito.

Tale sarebbe il solido fatto dalla logaritmica AHB (*Fig.* 49), girata d'intorno al suo asintoto DO. Imperocchè, o si pigli il solido infinitamente lungo, che avrebbe la sezione della sua base nel cerchio descritto dal raggio FB, o quello che l'avrebbe nell'altro cerchio del raggio DA, sarebbe per lo teorema 9 di Cristiano Ugenio, da me dimostrato negli Ugeniani, cap. 9, n. 1. 6, 9, il primo solido sesquialtero del cono descritto dal triangolo FBO nel girare intorno ad FO; ed il secondo sarebbe pure sesquialtero del cono similmente descritto dal triangolo DAC, i quali coni, avendo per base i cerchi FB, DA e per altezza le suttangenti FO, DC, che sono per natura di questa curva tra di loro uguali, sarebbero in proporzione degli stessi cerchi FB, DA; e però ancora l'uno all'altro dei solidi fatti da essa logaritmica sarebbe nella ragione delle basi o sezioni, quali sarebbero i cerchi descritti da'raggi FBDA. Il che ec.

Lo stesso si dica d'un solido, le cui sezioni fossero tanti quadrati o triangoli o poligoni o altre figure simili, fatte sopra l'ordinate della detta logaritmica; o che avesse per sezioni tanti rettangoli uguali o proporzionali alli stessi quadrati, o alle medesime ordinate, come sarebbe un prisma d'una determinata altezza, fatto sopra la base dello spazio logaritmico suddetto infinitamente lungo; imperocchè secondo ciò che dimostrai negli Ugeniani (cap. 3, n.° 7) gli spazj logaritmici DABO, FBO sono come l'ordinate medesime DA, FB, e però il prisma eretto sul primo spazio a quello che si alzerebbe sul secondo colla medesima altezza averebbe la proporzione delle dette ordinate, ovvero de' rettangoli fatti da esse nella comune altezza del prisma, i quali sarebbero le sezioni dello stesso prisma ne' punti D, F; ed immaginandosi due figure, delle quali una fosse determinata a capriccio, crescente però in infinito col prolungamento dell' asse, e l'altra avesse per ordinata una quarta proporzionale dopo l'ordinata arbitraria della prima, l'ordinata della logaritmica allo stesso punto, ed un' altra qualsivoglia costante, intendendo fatti gl' infiniti rettangoli dall' ordinate di queste due figure, moltiplicate l' una coll' altra, il solido che ne risulterebbe sarebbe dotato della stessa proprietà col suddetto prisma, avendo le sezioni uguali sempre o proporzionali a' rettangoli di quello; sicchè infiniti solidi possono determinarsi, i quali, nella maniera desiderata in questo quesito, cioè coll' avere le sezioni delle grossezze loro proporzionali a' pesi de' medesimi, fossero d' eguale resistenza in riguardo allo strapparsi direttamente da un piano orizzontale, in cui fitti fossero a squadra, ed a piombo quindi pendessero. I quali tutti però sono di lunghezza infinita, e dipendono sempre nella generazione loro dalla descrizione della logaritmica; nè a me sovviene altra specie di solido, che possa soddisfare al quesito; anzi credo assolutamente impossibile, che verun solido di lunghezza determinata possa avere le suddette condizioni per l' effetto che si desidera.

Proposizione LX, Quesito XXI.

Cercare ancora quale sia quello spazio superficiale, che considerato in piombo, cioè pendente da alto, sia pure ugualmente resistente: cioè, che il taglio al taglio sia come la superficie alla superficie, qual sarebbe AEB (*Fig.* 50), *se stesse alla porzione sua* CED *come* AB *a* CD.

Questo altresì non può essere altro che il medesimo spazio della logaritmica, le di cui porzioni infinitamente lunghe, tagliate da qualsivoglia ordinata, sono come l' ordinate medesime, dalle quali resta segato, per le cose dimostrate ne' luoghi di sopra citati: e potrebbe anche aggiugnersi la superficie rotonda generata dalla trattoria BDE rivoltata intorno il suo asse FE, in cui parimente le superficie infinitamente lunghe ABE, CDE, tagliate con varj piani paralleli alla base, sono come le circonferenze AB, CD nelle quali si fa il taglio medesimo; come può ricavarsi da ciò che dimostrai negli Ugeniani, capitolo 12, n.° 15, e nella pistola geometrica al chiarissimo P. Ceva n.° 19.

Proposizione LXI, Teorema XL.

La figura piana d' intorno al proprio asse, le superficie della quale tagliate dall' applicate siano tra loro come le medesime applicate, non è figura di proporzionale aumento o estensione.

Figura di proporzionale aumento d' intorno al proprio asse intendo quella, della quale qualunque parte terminata da qualunque applicata al *suo parallelogrammo circoscritto ha la medesima proporzione che qualunque altra parte terminata da un' altra applicata al suo parallelogrammo circoscritto; come segue nell' infinite parabole, che nella prima, cioè nel triangolo* ABC (*Fig.* 51), *il triangolo* BAC *al parallelogrammo* BD *sta come il triangolo* EAF *al suo parallelogrammo* EG, *perchè è sudduplo ec.*

E nella seconda parabola (cioè quella d'Apollonio) il bilineo BAC *al suo parallelogrammo* BD *sta come il bilineo* EAF *al suo parallelogrammo* EG, *perchè è sesquialtero ec. e così nell' altre.*

Se dunque nella figura ABC (*Fig.* 52) *d' intorno l' asse* BO, *fosse come la superficie* ABC *alla* DBE, *così la linea applicata* AC *alla* DE, *e così sempre; dico che questa figura non è di proporzionale aumento; perchè essendo tale, sarebbe, come il parallelogrammo* AB *al trilineo* ABO, *così il parallelogrammo* BD *al trilineo* DBH; *e permutando, il parallelogrammo* AB *al parallelogrammo* BD, *come il trilineo* ABO *al trilineo* DBH, *cioè (per la supposta proprietà della figura) come l' applicata* AO *alla* DH, *cioè alla* IO; *o pure come il parallelogrammo* AB *al parallelogrammo* IB; *adunque i parallelogrammi* DB, IB *sarebbero uguali tra loro, il tutto alla parte; il che è assurdo; adunque ec.*

È da notarsi che sebbene il Sig. Viviani non giunse a determinare la natura di cotesto spazio (il che non è maraviglia, essendo che la curva logaritmica allora non era assai nota fra' matematici, e molto meno divulgate erano le sue proprietà mirabili pubblicate da Cristiano Ugenio, e poscia da noi dimostrate: sebbene assai prima dello stesso Ugenio era stata ritrovata la dimensione dello spazio logaritmico, e dei solidi da esso generati, dall' incomparabile Evangelista Torricelli, come apparisce dall' indice dell' opere inedite di lui, rimase fino a questi ultimi tempi chiuse in una cassa serrata a chiavi tenute appresso di più possessori, della notizia delle quali ne abbiamo l' obbligo all' autore della prefazione stampata poco fa e premessa alle accademiche lezioni di esso Torricelli; e speriamo un giorno di doverlo altresì ringraziare per l' edizione di tutti que' preziosi monumenti, che con grandissimo vantaggio delle scienze, e somma gloria della nostra Italia, ci ha lasciati quel grand' ingegno); per altro è assai che almeno il nostro Autore indovinasse e dimostrasse, non poter essere lo spazio di cui si trattava proporzionale al parallelogrammo circoscritto, siccome poco credo che vi mancasse all' accorgersi che nè meno essere poteva alcuno spazio di finita e determinata lunghezza.

Oltre di ciò, in proposito delle figure di proporzionale augumento, si vede che il Sig. Viviani fin d'allora per sè stesso avvertì alla proporzione dell' infinite parabole co' parallelogrammi circoscritti, o a' triangoli iscritti de' quali fa menzione in questa stessa pagina colla nota seguente, in cui si vede una bellissima proprietà di questa progressione di spazj, scoperta avanti ad ogni altro dal nostro Autore.

Termini di proporzioni tra i parallelogrammi circoscritti all' infinite parabole, colle loro parabole.

Parabole: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ec.
Parallelogrammi: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ec.

Termini di proporzione dell' infinite parabole con i loro inscritti triangolari e regola per ritrovarli con facilità, scrivendo prima un sì ed un no, come si vede, i numeri dispari dall' unità ed a dirimpetto (ovvero direttamente al di sotto) i numeri della progressione naturale dall' unità: riempiendo poi i mezzi colla somma del termine di sopra (cioè dell' antecedente) con quel di sotto (vale a dire col conseguente), come si vede qui appresso.

Parabole $1, \overline{4}, 3, \overline{8}, 5, \overline{12}, 7, \overline{16}, 9$ ec.
Triangoli $1, \underline{3}, 2, \underline{5}, 3, \underline{7}, 4, \underline{9}, 5$ ec.

Anzi trovo essere stata dallo stesso nostro Autore determinata la ragione che osservano le porzioni, non solo dell' infinite parabole, ma ancora de' coni e conoidi da esse generate, come si vede nella seguente sua proposizione.

PROPOSIZIONE LXII, TEOREMA XLI. (*Fig.* 53)

Nella parabola lineare ABC, *la superficie* ABC *alla superficie* DBE *sta come il quadrato* AC *al quadrato* DE.

Nel cono ABC *(girando la parabola lineare intorno all' asse* BC*)* *il cono* ABC *al cono* DBE *sta come il cubo* AC *al cubo* DE.

Nella parabola quadratica ABC, *la superficie* ABC *alla* DBE *sta come il cubo* AC *al cubo* DE.

Nel conoide quadratico ABC *il solido* ABC *al solido* DBE *sta come il biquadrato* AC *al biquadrato* DE.

Nella parabola cubica la superficie ABC *alla* DBE *sta come il biquadrato* AC *al biquadrato* DE.

Nel conoide cubico, il solido ABC *al solido* DBE *sta come il surdesolido* AC *al surdesolido* DE *(intendendosi appresso gli Algebristi antichi per* surdesolidi *le quinte potestà di esse linee).*

Nella parabola quadrato-quadratica, la superficie ABC *alla* DBE *sta come il surdesolido* AC *al surdesolido* DE.

Nel conoide biquadratico, il solido ABC *al solido* DBE *sta come il* *cubo quadrato (cioè la stessa potestà) di* AC *al cubo quadrato (cioè parimente alla stessa potestà) di* DE *ec.*

E così gradatamente salendo, secondo la progressione delle medesime potestà algebraiche; ovvero per dirla più generalmente, se le parti dell' asse tagliate dalla cima, cioè CB, EB, sono proporzionali alle potestà dell' ordinate AC, DE, il di cui esponente, dal quale si denominano, sia qualunque numero m, la superficie ABC alla superficie DBE starà come la potestà dell' ordinata AC, il di cui esponente sia maggiore d' una unità, cioè $m+1$, ad una simile potestà dell' ordinata DE. Ma il solido ABC al solido DBE starà come la potestà dell' ordinata AC, il di cui esponente sia maggiore di m per due unità, cioè $m+2$, ad una simile potestà dell' ordinata DE. Il che può vedersi dimostrato appresso l'Angeli, il Vallisio ed altri tali autori.

Proposizione LXIII, Quesito XXII.

Cercare un solido rotondo d' intorno al proprio asse, come FLG (*Fig.* 54) *di cui i piani applicati* FG, HI *stiano tra loro come i solidi* FLG, HLI; *che questo ancora appeso perpendicolarmente sarà per tutto di uguale resistenza.*

Già si è veduto nella prop. 59 essere questo un solido generato dallo stesso spazio logaritmico, ovvero che abbia le sezioni proporzionali alle ordinate della logaritmica o a' quadrati di esse; nè occorre qui aggiungere altro, se non che di esso pure si verifica non esser cotal solido figura di proporzionale augumento, cioè non avere sempre qualunque sua porzione una medesima relazione al cilindro o prisma circoscritto; potendosi qui applicare la stessa dimostrazione addotta dal Viviani nella proposizione precedente; il che con espresso avviso fu accennato dal medesimo Autore nel luogo di sopra addotto; ove dopo le parole: *il che è assurdo, adunque ec.* così immediatamente soggiunge:

L' istesso si concluderà de' solidi rotondi, de' quali segati con piani paralleli alla base, stia come la base alla base, così il solido al solido.

Proposizione LXIV, Teorema XLII.

Se del cono solido o piramide ABCG (*Fig.* 55) *sospesa perpendicolare all' orizzonte, il peso della parte* ACGB *sarà bastante appunto a superare la resistenza della sezione* BC; *e che la misura della resistenza* BC *si figuri essere la linea* AG, *e la misura del peso* ACGB *sia la medesima* AG; *accorciando il cono o piramide fino alla sezione* AF, *dico che il solo peso della piramide* DG *non è bastante a superare la resistenza* EF, *e che per superarla si richiede un peso* H, *il quale al peso della pi-*

ramide DG *abbia la proporzione della* AD, *differenza dell' altezze, alla* DG *altezza della minore.*

Poichè prese dopo le AG, GD, GI, GL *continue proporzionali, essendo la prima* AG *misura del peso* BCG, *sarà la quarta* GL *misura del peso* EFG *(perchè le piramidi simili hanno triplicata proporzione de' lati omologhi); ed essendo la medesima prima* AG *misura della resistenza* BC, *sarà la terza* GI *misura della resistenza* EF *(perchè le resistenze assolute* BC, EF *sono tra loro come le sezioni* BC, EF, *che per essere simili hanno doppia proporzione de' lati omologhi* AB, DE, *cioè delle* AG, DG*). Se dunque una resistenza* BC, *rappresentata dalla linea* AG, *per essere superata vuole un peso quanto rappresenta la medesima linea* AG*; la resistenza* EF, *rappresentata dalla* GI, *vorrà un peso quanto la medesima* GI*: ma il peso della piramide* EFG *è quanto la linea* GL*; adunque il peso che manca per istrappare la piramide* FEG, *cioè il peso* H, *dovrà essere quanto la linea* LI*; e però il peso* H *al peso della sua piramide* EFG *starà come* IL *ad* LG, *cioè come* AD, *differenza dell' altezze, a* DG *altezza della piramide o cono più corto. Il che ec.*

Da questa utilissima proposizione e dall' ingegnosa maniera con cui l'Autore l' ha dimostrata, moltissime altre importanti verità si possono dedurre, le quali io brevemente accennerò ne' seguenti Corollarj, per non accrescere il numero delle proposizioni.

Corollario I. Giacchè il peso H al peso della piramide FDEG sta come IL ad LG; ed il peso di detta piramide al peso dell' intera CBG sta come LG ad AG; sarà per l' ugual proporzione il peso H al peso dell' intera piramide CABG come IL ad AG.

Corollario II. O pure, essendo il peso H al peso FDEG come AD a DG, cioè, preso per base comune il quadrato DG, come il prisma dell' altezza AD eretto sopra il quadrato DG, al cubo DG; ed il peso FDEG al peso CABG essendo come il cubo DG al cubo AG, sarà per l' ugualità ordinata il peso H al peso CABG come il prisma che abbia per altezza AD e per base il quadrato DG, al cubo AG.

Corollario III. Quindi può agevolmente determinarsi quale sia quella porzione di cono o piramide, che oltre al proprio peso è capace di reggere il maggior peso H aggiuntovi; imperocchè il maggior prisma che far si possa dalle parti d' una data linea, delle quali una serva per altezza e la rimanente sia il lato del quadrato della sua base, è quando l' altezza sia un terzo, ed il lato quadro della base comprenda gli altri due terzi della data linea, conforme è già noto a' geometri, e fu dimostrato dal Borelli nel sedicesimo assunto d'Archimede; dunque allora il peso H sarà il maggiore di tutti, quando la sezione FDE si farà in lontananza dalla base CAB per un terzo di tutta l'altezza di quella piramide CBG, che sarebbe sufficiente col proprio peso a vincere la resistenza della sua base; e conseguentemente la piramide FDEG così tagliata riuscirà della maggior resistenza che sia possibile.

Corollario IV. Per lo contrario, sapendosi per ipotesi o per esperienza che una piramide abbia la maggiore sua resistenza nella sezione FDE, cioè che sostenuta in essa sia capace di reggere, oltre la propria gravezza, il maggior peso possibile: si saprà ancora, che accrescendola fino al piano CAB, distante da detta sezione per la metà dell'altezza GD, la piramide CABG dovrà rompersi col proprio peso.

Corollario V. Quando il cono o piramide fosse fitto colla base nel muro, sporgendo fuori di esso coll'asse orizzontalmente disteso, e fusse come prima CABG il solido che in tale stato si rompesse col proprio peso: se poi si supponesse sporgersi fuori del muro la sola parte FGE, sarebbe questa parimente capace di reggere oltre la propria gravità un tale peso H, che liberamente pendendo dal termine G stesse al peso di tutta la piramide CABG come un quarto del prisma contenuto dall'altezza DA, e dal quadrato DG, al cubo della GA: come è facile il dedurlo dalle cose dette di sopra.

Corollario VI. Onde ciò che si è detto nel coroll. 3 e 4 del massimo peso che regger possa una piramide pendente da alto, come fitta a piombo in una volta, vale ancora nel sito che fosse impegnata in un muro coll'asse orizzontale.

Corollario VII. Si potrebbe ancora collo stesso metodo determinare la maggior resistenza di qualsivoglia altra specie di solido, e principalmente di quelli che nascono dall'infinite parabole o iperbole; e già ne ho in pronto alcune regole generali: ma non avendo tempo di stenderle e di confermarle colle dovute dimostrazioni, lascierò all'industria de' lettori il piacere di ritrovarle.

Proposizione LXV, Teorema XLIII.

Ne' cilindri o prismi, coni o piramidi, le basi loro essendo uguali e l'altezze disuguali, le forze abili a sostenerli eretti sopra un punto del contorno della loro base, come sopra un sostegno, saranno tra di loro uguali.

Sia il cilindro retto AB (*Fig.* 56), *la cui base* DB *e l'altezza* AB; *e sia un altro cilindro, la di cui altezza* CB *sopra la stessa base* DB. *Dico che le potenze* E, F, *dalle quali, applicate a' punti* A, C, *si mantengono i detti cilindri eretti e perpendicolari all'orizzonte, sopra il sostegno* B, *d'intorno a cui senza il ritegno di dette potenze si potrebbero rivoltare, sono tra di loro uguali.*

Imperocchè la potenza E, *che col vette* BA *sostiene il peso* ABD, *sta al detto peso come* DB *semidiametro della base (gravitando il cilindro sopra il centro d'essa base, cioè sopra il punto* D*) alla* BA; *ed il peso* ABD *sta al peso* CBD *come* BA *a* BC, *ed il peso* CBD *sta alla forza* F, *che lo sostiene applicata in* C, *come* BC *a* BD; *dunque, per l'ugual proporzione, la forza* E *alla forza* F *sta come* BD *alla stessa* BD, *cioè in ragione di ugualità. Il che ec.*

Corollario I. Per altissima che sia la colonna DBA, e conseguentemente essendo quantosivoglia pesantissima, si potrà da una piccola forza applicata all'estremo A sostenere ritta sopra un appoggio B, egualmente che possa la medesima forza reggere qualunque piccolo pezzo DBC della stessa colonna, applicandosi a sostenerla in C. E così uno scaffale, una spera, un armadio e cose simili, che sogliono col piede posare sopra una tavola o sul pavimento, o sopra le sue mensole o altri ritegni, e di sopra fermarsi con arpioni e spranghe attaccate al muro, non richiede maggior forza per essere più alto di quella che richiederebbe se in pari base fosse più basso, ed uniformemente gravato venisse in tutte le sue parti.

Corollario II. Un uscio o imposta di finestre, la quale si regge sopra due cardini: purchè abbia il cardine inferiore proporzionato a sostenere il peso totale di essa, potrà avere il cardine superiore di non maggior forza di quella che si richiederebbe a sostenerne una assai più bassa; e spesso nella pratica alle porte principali de' palazzi o delle città, s'impiega in ciò soverchia mole di ferro, o multiplicando senza necessità gli arpioni o facendoli troppo più del dovere massicci.

Corollario III. Similmente ne' coni ABD, C*bd* (*Fig.* 57), che abbiano l'uguali basi DB, *db* appoggiate a' sostegni B, *b*, e di altezza quantunque disuguale DA, *d*C, le forze E, F applicate per sostenerli alle loro cime saranno uguali per lo stesso raziocinio addotto in questa proposizione dal Sig. Viviani; e lo stesso vale d'altri solidi del medesimo nome, purchè sieno di tale specie di figura che in ugual base siano proporzionali alle loro altezze: nulla importando che qui i lati BA, *b*C non sieno le vere altezze de' solidi, ma bensì gli assi DA, *d*C; perchè essendo appunto i lati BA, *b*C obliqui alla direzione delle potenze E, F, i momenti di esse debbono corrispondere alle DA, *d*C, che sono i seni dell'inclinazione delle braccia BA, *b*C colle direzioni delle potenze; onde corre a capello la dimostrazione del Sig. Viviani anche quando si trattasse di conoidi o sferoidi, il profilo de' quali sarebbe curvo.

Proposizione LXVI, Teorema XLIV.

Le potenze G, H (*Fig.* 58), *che sostengono eretti i prismi simili* ABC, DBE *intorno i punti* C, E, *sono fra loro come i pesi assoluti dei medesimi prismi.*

Ciò vale ancora ne' coni, piramidi ed altri corpi simili: perchè averanno i loro centri di gravità similmente collocati ne' loro assi, e però corrispondenti alle basi loro in una lontananza simile da' sostegni C, E, cioè proporzionale alle leve CB, BE, onde il momento del solido ABC uguagliando quello del peso G, ed il momento del solido DBE pareggiando quello del peso H, sarà il primo momento al terzo come il secondo al quarto; sicchè la ragione composta della ragione de' pesi de' solidi ABC, DBE e di quella delle distanze de' centri loro di gravità da' sostegni C, E, sarà uguale alla ragione composta di quella dei pesi G, H e delle distanze CB, EB; tolte adunque dall' una e dall' altra parte le ragioni uguali delle distanze de' centri di gravità e delle distanze CB, EB, in cui operano i pesi G, H, rimarrà la ragione dei pesi de' solidi ABC, DBE uguale a quella de' pesi, ovvero potenze G, H. Il che si dovea dimostrare.

Proposizione LXVII, Quesito XXIII.

Sia AB (*Fig.* 59) *minima lunghezza*, *ed* AC *diametro della base d' un cilindro, che fitto a squadra in un muro, si spezzi dal proprio peso: e sia un' altra lunghezza data* O *di un altro cilindro. Cercasi quanto dovrà essere il diametro della sua base, acciocchè tal cilindro sia prossimo a spezzarsi dal proprio peso.*

Prendasi qualunque punto D, *e si giungano le* DC, DA, DB, *e prolunghinsi in infinito: e nel triangolo* ADB *adattisi la* FG *parallela alla* AB *ed eguale alla data lunghezza* O, *e prolunghisi in* H, *e per i punti* D, C *passi una parabola*, *la di cui cima sia* D *e tangente* DA, *e seghi la* GH *in* E. *Dico* EF *essere il diametro della base che si cerca.*

Imperocchè il momento della resistenza del cerchio, il cui diametro CA, nel cilindro che ha la lunghezza AB, al momento della resistenza del cerchio che ha per diametro EF, nel cilindro della lunghezza FG, per la prop. 4, è sempre in triplicata ragione di CA ad EF. Ma il momento del peso del primo al momento del peso del secondo cilindro, per la prop. 23, è in duplicata ragione de' rettangoli per l' asse CAB, EFG, ovvero CAD, EFD; cioè in duplicata ragione delle CA ed EF, e nella duplicata delle AD, DF; la quale per cagione della parabola è la medesima colla semplice di CA ad EF, che aggiunta alla duplicata delle medesime compone la ragione altresì triplicata di CA ad EF, adunque il momento della resistenza CA al momento della resistenza EF sta come il momento del peso del cilindro CAB a quello dell' altro cilindro EFG; e però se il primo uguaglia il terzo, ancora il secondo uguaglierà il quarto. Il che ec.

Corollario I. Quindi si può dedurre che ancora i cilindri fatti dai rettangoli DFE, DAC, circoscritti al trilineo parabolico DEF, e girati d' intorno alla retta DA, che tocca la parabola nella sua cima D, sarebbero di ugual resistenza, posto che fussero fitti colla base in un muro.

Corollario II. Anzi la stessa tromba parabolica, nata dalla rivoluzione del trilineo ECDF attorno la detta tangente DF, sarebbe d'uguale resistenza, come nella prop. 56 si è avvertito, perchè le sue parti essendo proporzionali a' cilindri circoscritti, e col centro di gravità altresì proporzionalmente distante dalla sua base, si manterrebbe la medesima proporzionalità de' momenti de' pesi di esse co' momenti delle resistenze nelle loro basi, appunto come avviene, pel corollario precedente, ne' cilindri circoscritti.

Proposizione LXVIII, Quesito XXIV.

Sia AB *diametro, e* BC *lunghezza minima d' un cilindro* (*Fig.* 60) *che fitto in un muro a squadra pel proprio peso si spezzi; e sia nel triangolo* ABD *applicata la* EF *parallela ad* AB, *che sia il diametro della base o grossezza d' un altro cilindro dell' istessa materia. Cercasi quale dovrà essere la sua lunghezza, acciocchè si riduca indifferente e prossimo allo spezzarsi pure dal suo proprio peso.*

Colla cima D *ed intorno al diametro* DBF, *descrivasi la parabola* DCG, *che passi pel punto* C; *imperocchè prolungata* EF *in* G, *sarà la* FG *contenuta nella semiparabola la cercata lunghezza. Congiungasi* DC *e si prolunghi, siccome ancora la* FG, *in* H. BC *ad* FG *sta come* FG *ad* FH, *per lo lemma* 24 de motu aequabili *del Torricelli.*

Stimo di più facile e di più breve riuscita il dimostrare altrimenti questa proposizione che l' indovinare come proseguisce la sua dimostrazione il Sig. Viviani; che però diremo in questa maniera. Il momento della resistenza nella sezione AB del cilindro ABC, al momento della resistenza nella sezione EF del cilindro EFG, sta per la prop. 4 come il cubo AB al cubo EF; ma il momento del peso del primo al momento del peso del secondo cilindro essendo in ragione composta della duplicata di AB ad EF, e della duplicata di BC ad FG (per la prop. 23), che per la natura della parabola è la medesima colla semplice di BD a DF, cioè di AB ad EF, la quale aggiunta alla duplicata di esse linee, forma la triplicata delle medesime, è altresì come il cubo AB al cubo EF; dunque i momenti delle resistenze delle basi sono proporzionali a' momenti de' pesi de' cilindri; onde se il momento del peso del primo cilindro uguaglia quello della sua resistenza, ancora il momento del secondo cilindro uguaglierà il momento della resistenza sua. Il che ec.

Corollario. Lo stesso che si è detto de' cilindri, vale de' coni, conoidi paraboliche, emisferoidi ed altri solidi, il cui centro di gravità divida l'asse proporzionalmente.

Proposizione LXIX, Teorema XLV.

Se sarà come il quadrato della prima A (*Fig.* 61) *al quadrato della seconda* B, *così la terza* C *alla quarta* D; *e come il quadrato della terza* C *al quadrato della quarta* D, *così la quinta* E *alla sesta* F; *il biquadrato della prima* A *al biquadrato della seconda* B *sta come la quinta* E *alla sesta* F.

Si faccia, come la C *alla* D, *così* A *alla* G; *sarà dunque il quadrato* A *al quadrato* B *come la* A *alla* G; *e però le* A, B, G *sono tre continue proporzionali. Si trovino le altre due continue* H, I; *e perchè il biquadrato di* A *al biquadrato di* B *sta come la prima* A *alla quinta* I, *e la prima* A *alla quinta* I *sta come il quadrato della prima* A *al quadrato della terza* G *(che è media fra le* A *ed* I*), cioè come il quadrato della* C *al quadrato della* D *(essendosi fatto il lato* A *al lato* G, *come il lato* C *al lato* D*), cioè come la* E *alla* F, *per supposizione: adunque il biquadrato di* A *al biquadrato di* B *sta come la linea* E *alla linea* F. *Il che ec.*

Ovvero proponyasi così in questi termini:

Proposizione LXX, Teorema XLVI.

Se il quadrato della prima (*Fig.* 62) *al quadrato della seconda starà come la prima alla terza: e come il quadrato della prima al quadrato della terza, così la quarta alla quinta; sarà il biquadrato della prima al biquadrato della seconda come la quarta alla quinta.*

Poichè essendo il quadrato della prima al quadrato della seconda, come la prima alla terza, saranno la prima, la seconda e la terza continue proporzionali. Si prendano l'altre due continue A, B *nella medesima proporzione. Sarà il biquadrato della prima al biquadrato della seconda, come la prima alla* B; *cioè come il quadrato della prima al quadrato della terza (perchè la prima e la terza e la* B *sono continue proporzionali), cioè come la quarta alla quinta, per supposizione. Adunque ec.*

Proposizione LXXI, Teorema XLVII.

Se nella parabola CAS (*Fig.* 63), *il di cui asse è* CX, *sarà* CB *la tangente della cima, e la* BAV *parallela all' asse; e delle applicate* IN, NM *sia media proporzionale* NL; *siccome delle* OR, RQ *sia media* RP; *e similmente delle* SX, XV *sia media* XT, *e così sempre: i punti* L, P, A, T *saranno in una parabola biquadratica.*

Si applichi AZ *al punto* A, *la quale nel parallelogrammo* AC *sarà uguale alla retta* OR; *dunque, come* AZ *a* PR, *così* PR *ad* RQ; *e perciò sarà il quadrato della prima* AZ *al quadrato della seconda* PR *come la terza linea* AZ *alla quarta* RQ; *ma il quadrato della terza* AZ *al quadrato della quarta* QR *sta come la quinta linea* CZ *alla sesta* RC; *dunque, per la prop.* 69, *starà il biquadrato della prima* AZ *al biquadrato della seconda* PR *come la quinta* CZ *alla sesta* RC; *e ciò sempre dovunque sia condotta la* OR; *adunque la linea* CPA *è la parabola biquadratica. Il che ec.*

Si potea forse più speditamente dimostrare l'intento così. CZ a CR ha doppia proporzione di AZ a QR; ma AZ a QR di nuovo ha proporzione doppia di quella che ha AZ a PR; dunque CZ a CR ha proporzione quadrupla di AZ a PR; e per tanto ZC ad RC sta come la quarta potestà, cioè il biquadrato di AZ alla quarta potestà, cioè al biquadrato di PR; onde CPA è parabola biquadratica. Il che ec.

Proposizione LXXII, Teorema XLVIII.

I momenti de' coni e piramidi simili ABC, DEC (*Fig.* 64) *fuor del muro, resultanti da' pesi d' essi coni e dalle leve* BC, EC, *sono fra loro come i biquadrati delle lunghezze* BC, EC.

Trovate le CF, CG, CH *continue proporzionali dopo le* BC, EC: *il momento del cono* ABC *al momento del cono* DEC *averà la proporzione composta di quella del peso* ABC *assoluto al peso assoluto* DEC *(cioè del cono* ABC *al cono* DEC, *che è quanto dire del cubo* BC *al cubo* CE, *ovvero della prima* BC *alla quarta* CG*) e della leva* BC *alla leva* CE, *cioè della* CG *alla* CH. *Ma ancora la* BC *alla* CH *ha proporzione composta delle medesime* BC, CG, *e* CG, CH; *dunque il momento di* ABC *al momento* DEC *sta come la prima* BC *alla quinta* CH, *cioè come il biquadrato* BC *al biquadrato* CE. *Il che si dovea dimostrare.*

Corollario. *La scala de' momenti di questi coni o piramidi sta nelle linee* EM, BN *terminanti alla parabola* CMN *biquadratica, della quale sia la cima* C.

Chiamasi dal nostro Autore in questo luogo, ed in molti altri appresso, *Scala* di momenti, di pesi o di resistenze una figura piana che colle sue ordinate tra di loro parallele, e tirate perpendicolarmente ad una retta in ogni suo punto, dimostri colle dette ordinate la proporzione de' momenti o de' pesi o delle resistenze che in detti punti si trovano; come nel nostro proposito, essendo BN ad EM come il biquadrato BC al biquadrato CE, cioè come il momento del cono ABC al momento del cono DEC, dovunque sia tirata la ME parallela a BN, dicesi la figura BCMN (che è una parabola biquadratica) la scala de'momenti di questi coni.

Proposizione LXXIII, Teorema XLIX.

De' coni o piramidi simili fitti nel muro orizzontalmente uno solo è quello che gravato dal proprio peso appunto si spezza: ed ogni più corto riceve aggiunta di peso oltre al proprio; ogni più lungo è troppo grave.

Il momento della resistenza AB (*Fig.* 64) *al momento della resistenza* DE *sta come il cubo* AB *al cubo* DE *per la prop.* 4, *cioè come il cubo* BC *al cubo* EC, *o pure come la prima* BC *alla quarta* CG; *ma si è provato nell'antecedente, che il momento del peso* ABC *al momento del peso* DEC *sta come la prima* BC *alla quinta* CH; *adunque se il momento* ABC *pareggia la resistenza* AB, *il momento* DEG *non pareggia la resistenza* DE, *ma sarà tanto minore quanto la* CH, *misura di detto momento, è minore della* CG *misura della resistenza: o pure quanto il cono o piramide* DCE *è più corto dell'*ABC.

Proposizione LXXIV, Teorema L.

I momenti de' cunei BDI, EGI *fuori del muro, risultanti da' pesi assoluti di essi e dalle leve* DI, GI, *sono fra loro come i cubi delle lunghezze fuori del muro,* DI, GI.

Prendasi le IL, IM *continue proporzionali dopo le* DI, GI. *E perchè il momento del cuneo* BDI *al momento del cuneo* EGI *ha proporzione composta del peso assoluto* BDI *al peso assoluto* EGI (*cioè della base* CDI *alla base* HGI, *o pure del quadrato* DI *al quadrato* GI, *che è quanto dire della linea* DI *alla* LI) *e della leva* DI *alla* GI, *cioè della* LI *alla* IM; *e la* DI *alla* IM *ha pure la proporzione composta delle medesime* DI *ad* LI *ed* LI *ad* IM; *adunque il momento del cuneo* BDI *al momento del cuneo* EGI *sta come la* DI *alla* IM, *cioè come il cubo* DI *al cubo* IG, *i quali sono i cubi delle lunghezze loro. Il che ec.*

Corollario. *La scala de' momenti di questi cunei sta nelle linee* GP, DQ *terminate alla parabola cubica* IPQ, *la cui cima è in* I.

PROPOSIZIONE LXXV, TEOREMA LI.

Uno solo di questi cunei è quello in cui il momento del proprio ›so pareggi quello della resistenza: e degli altri i più corti ricercano al-o peso, ed i più lunghi sono troppo gravi.

Imperocchè il momento della resistenza BD (*Fig.* 65) *al momento della ›sistenza* EG, *per la prop.* 3, *sta come il quadrato* CD *al quadrato* HG. *oè come il quadrato* DI *al quadrato* GI, *che sono quadrati delle lunghezze, pure come la linea* DI *alla* LI; *ma si è provato nella precedente che momento del peso* BDI *al momento del peso* EGI *è come la linea* DI *lla* IM; *dunque se la* DI *sarà misura della resistenza di* BD, *ed anche isura del momento di* BDI, *la* LI *sarà misura della resistenza* EG, *e minore* MI *sarà misura del momento del peso* EGI; *sicchè per pareg-are la resistenza* EG *gli manca tanto momento quanto la* LM; *e però so solo ec. Il che si doveva dimostrare.*

Corollario I. Se il cuneo DBI è il massimo che possa reg-ersi col suo peso contro la resistenza della sua base, ogni altro più orto, come EGI, potrà oltre il proprio peso reggerne un altro K, il uale stia al peso di tutto il cuneo BDI come un terzo del rettangolo GI sta al quadrato DI. Imperocchè si è veduto nella proposizione che momento, il quale manca al momento del cuneo EGI per pareggiare resistenza della sua base EG, sta al momento del cuneo EGI come M ad MI; ovvero (per la proporzionalità delle linee) come DG a GI, ioè come il rettangolo DGI al quadrato GI; sia il momento suddetto he manca per pareggiare la resistenza EG quello che averebbe il peso pendente in I, il quale sarebbe uguale al momento del triplo di K osto nel centro di gravità del cuneo EGI, che dista dalla base, cioè al sostegno FG, per un terzo di GI (ciò che è noto accadere nel trian-olo della faccia del cuneo HGI), essendo così le distanze reciproche e' pesi; e però il momento del triplo di K posto nel centro di gravità el cuneo EGI al momento del peso di esso cuneo (il quale s' intende tresì applicato nel medesimo centro), o pure il triplo di K al peso el cuneo stesso, sta come il rettangolo DGI al quadrato IG; ma il peso el cuneo EGI al peso del cuneo BDI sta come il triangolo HGI al iangolo CDI, cioè come il quadrato GI al quadrato DI; dunque per ugualità sarà il triplo di K al peso del cuneo BDI come il rettan-olo DGI al quadrato DI: e conseguentemente il solo peso K (da ap-endersi in I per uguagliare col peso del cuneo EGI la resistenza della ua base) sta al peso del cuneo BDI (il quale col proprio peso uguagli la resistenza della sua base) come un terzo del rettangolo DGI al quadrato DI.

Corollario II. Onde i pesi che potranno aggiugnersi all' estremo di questi cunei minori del massimo BDI, sono tra loro come i rettangoli DGI fatti da' segmenti della lunghezza DI.

Corollario III. E conseguentemente tra' cunei minori quello è capace di reggere maggior peso di tutti, che è di lunghezza suddupla del massimo; perchè di tutti i rettangoli DGI fatti dalle parti della linea DI, il maggiore è quando il punto G cade nel mezzo appunto della DI.

Corollario IV. E perchè cadendo il punto G nel mezzo di DI, il rettangolo DGI (che è il quadrato della metà di DI) è un quarto del quadrato DI, un terzo del rettangolo DGI sarà allora un dodicesimo del quadrato DI; onde veniamo in cognizione che il maggior peso che reggere si possa da questi cunei attaccato al loro termine è la dodicesima parte del peso che aver potrebbe il cuneo, se fusse tanto lungo che col suo peso equilibrasse la resistenza della sua base.

Proposizione LXXVI, Teorema LII.

I momenti del conoide parabolico fitto nel muro, ed allungato ora in ABC *ed ora in* DEC (*Fig.* 66), *resultanti da' proprj pesi e dalle lunghezze* FC, OC, *sono tra loro come i cubi delle medesime lunghezze.*

Poichè il momento di BAC *al momento di* EDC *ha proporzione composta del peso assoluto* ABC *al peso assoluto* EDC, *cioè del conoide al conoide, o pure del quadrato dell' altezza* FC *al quadrato dell' altezza* CO, *cioè (prese le* CG, CH *continue proporzionali dopo le* FC, CO*) della linea* FC *alla terza* CG: *e della leva* FC *alla leva* OC, *cioè della* CG *alla* CH; *ma anche la* FC *alla* CH *ha proporzione composta delle medesime linee* FC, CG, *e* CG, CH; *dunque come* FC *a* CH, *cioè come il cubo* FC *al cubo* CO, *così il momento del conoide* ABC *al momento del conoide* DEC. *Il che si dovea dimostrare.*

Corollario. *La scala del momento di questi conoidi è parimente la parabola cubica* CPQ.

Assume l'Autore in questa dimostrazione come cosa nota, che il conoide ABC al conoide DCE stia come il quadrato FC al quadrato CO. Il che è chiaro per essere i cerchi AB, DE proporzionali a' quadrati de' raggi AF, DO, cioè (per la natura della parabola) all' altezze FC, CO, o pure all' ordinate in un triangolo fatto su la base AF coll' altezza FC; e però il conoide ed il detto triangolo sono grandezze proporzionalmente analoghe. Sicchè essendo i triangoli tagliati con linee parallele alla base, proporzionali a' quadrati dell'altezze, ancora nei conoidi parabolici, segati co' piani paralleli alla base, dee seguire il medesimo.

Proposizione LXXVII, Teorema LIII.

Uno solo è il conoide parabolico che pareggi col suo peso la propria resistenza.

Il momento della resistenza di AB *al momento della resistenza* DE *sta come il cubo* AB *al cubo di* DE, *per la prop.* 4.

Cioè presa CI media proporzionale fra le altezze FC, OC (le quali essendo proporzionali a' quadrati AB, DE, ed ancora a' quadrati FC, CI, danno AB a DE come FI a CI), sarà il momento della resistenza AB al momento della resistenza DE come il cubo FC al cubo CI; ma il momento del peso ABC al momento del peso DEC, sta come il cubo FC al cubo CO, per l'antecedente; dunque se il momento della resistenza AB viene uguagliato dal momento del peso ABC, il momento poi della resistenza DE non potrà pareggiarsi dal momento del peso DEC; ma rimarrà quello tanto superiore a questo, quanto il cubo IC supera il cubo OC, ovvero quanto il cubo AB supera il cubo DE; onde unico sarà quel conoide, il quale col proprio peso uguagli la sua resistenza.

Corollario. Quando il conoide ABC fusse precisamente abile col suo peso ad uguagliare il momento della resistenza AB, se la porzione della lunghezza OC sarà tale, che il cubo della intera FC sia quadruplo del cubo della OC, potrà il conoide DEC, oltre il suo peso, sostenere il massimo che sia possibile, essendo allora maggiore la differenza de' cubi IC, OC, che sia mai in altro caso possibile.

Proposizione LXXVIII, Quesito XXV.

Perchè un legno disteso orizzontalmente con maggiore facilità si pieghi che essendo inclinato: e qual proporzione si trovi in diverse inclinazioni.

Un legno inclinato AB (*Fig.* 67) *più difficilmente si piega e si rompe che quando è disteso orizzontalmente, in ragione di* AB *a* BC. *Non però qualsivoglia peso abile a piegare un legno, può ancora spezzarlo; imperocchè un legno torcendosi viene tirato con minor forza di quel che sia stando disteso orizzontalmente, per essere tirato con direzione ad angolo ottuso.*

Certamente se il legno AB disteso fusse orizzontalmente, tutta la sua lunghezza AB servirebbe di leva, che appoggiata a' termini A e B sarebbe forzata dalla potenza applicata nel mezzo F, secondo la direzione FD, che allora sarebbe perpendicolare all'orizzonte. Ma venendo lo stesso legno appoggiato col termine B al pavimento CB, e col termine A al muro CA, si scorcia la leva e diventa della sola grandezza CB, che è la distanza perpendicolarmente frapposta a questi termini d'appoggio; e per questa ragione ben dice il Sig. Viviani, che in questo sito più difficile sia il piegare il legno, appunto in proporzione di AB a BC, che sono le leve adoperate dalla potenza nell'uno e nell'altro caso. Ma circa allo spezzare il medesimo legno, parmi che oltre la considerazione della leva più corta, vi sia ancora maggior sezione, e conseguentemente maggiore resistenza da superare; perchè spingendo all'ingiù, se il legno disteso fusse orizzontalmente, si farebbe la rottura nella sezione DF perpendicolare alla lunghezza d'esso legno: ma essendo obliquo, e volendo pure spignere direttamente abbasso (purchè i termini A e B stessero fermi, sicchè una simil pressione non facesse smucciare il legno coll'estremo B per CB, e coll'estremo A per AC), ne seguirebbe lo spezzamento nella sezione FE perpendicolare all'orizzonte ed obliqua alla lunghezza di esso legno: la quale sezione è maggiore della prima in ragione di FE ad FD; onde per la proposiz. 3, cresce il momento della resistenza in proporzione del quadrato FE al quadrato ED, che per la similitudine de'triangoli DFE, CBA è la stessa colla ragione del quadrato AB al quadrato BC; sicchè aggiungendoci la difficoltà, che dipende dallo scorciamento della leva, la quale cresce di nuovo in ragione di AB a BC, pare che se ne dovrebbe inferire, che cresca la difficultà dello spezzamento in proporzione del cubo AB al cubo BC. Ma per illustrare meglio questo punto, si dovrebbe considerare la direzione d'ambi i sostegni B ed A, la quale non è la medesima, come quando disposti sono nella stessa linea orizzontale, e però ciò darebbe campo a molte particolari speculazioni, alle quali per ora non posso applicare, avendo altre occupazioni alla mano, per cui ne vengo distratto.

Proposizione LXXIX, Quesito XXVI.

Sia qualunque solido AB (*Fig.* 68), *il quale sostenuto in qualsivoglia punto* C, *interposto fra gli estremi* A, B, *resti equilibrato dal peso delle sue parti e de' pesi* E, F, *attaccati ad essi estremi: sicchè sia in procinto di rompersi sopra l'appoggio* C. *Si cerca, se dovendo il medesimo solido star fitto nel muro fino allo stesso punto* C, *di maniera che l'una o l'altra solamente delle sue parti, cioè* AC, *ovvero* CB, *rimanesse fuori pendente in aria, vi si ricerchi lo stesso o pur doppio peso di ciò che* *prima si aveva in* CAE *o in* CBF, *per fare che ne segua in tale stato lo strappamento?*

Pare a prima vista che doppio peso vi si ricerchi; imperocchè, mentre i pesi CAE, CBF *superano la resistenza della sezione in* C, *è necessario che l'uno e l'altro abbia uguale momento, cioè che si equilibrino d'intorno al punto* C *prima che ne segua la rottura; di maniera che il centro di gravità del solido e de' pesi attaccati si ritrovi nel sostegno* C; *perchè qualunque volta il detto centro fosse dall' una o dall' altra banda, come dentro la linea* CA *nel punto* D, *sarebbe impossibile che il solido si rompesse, mentre il centro di gravità di tutta la mole si potrebbe muovere abbasso; e però sarebbe costretto a discendere (per la prima supposizione) tirando allo ingiù il complesso del solido e de' pesi attaccativi tutto intero fino a tanto che non incontrasse ostacolo alcuno da cui venisse fermato. Se adunque il momento del peso* CAE *uguaglia il momento del peso* CBF, *ciò sarà lo stesso che dire, esservi d' uopo di due momenti uguali ciascuno al solo* CAE *o al solo* CBF, *per superare la resistenza della sezione del solido in* C. *Quando adunque la parte* CBF *sarà impegnata dentro il muro e la sola parte* CA *avanzerà fuori, la resistenza della sezione in* C *rimarrà la stessa di prima, e svanito essendo il momento del peso* CBF, *vi rimarrà solamente il momento del peso* CAE, *cioè la metà dei due momenti che già cospiravano a fare la detta rottura; e però sarà necessario raddoppiare il momento* CAE *per fare che segua lo strappamento; di maniera che, se il peso* E *era di* 100 *libbre, ed il peso della parte del solido* CA *facea forza nell' estremo* A *come per libbre* 20, *onde tutto il momento fusse di libbre* 120, *pare che si dovrebbero aggiungere in* A *altre* 120 *libbre per fare che il solido in* C *si rompesse.*

Ma considerando meglio la cosa, ciò assolutamente non può essere; anzi si dee concludere, che lo stesso peso appunto basti in questo caso a fare lo strappamento, servendo il muro stesso per quel contrappeso CBF *che manca dall' altra parte.*

L' apparente discorso addotto sul principio dal Sig. Viviani per concludere che si ricercasse doppio peso per istrappare dal muro una di quelle parti del solido, che prima si equilibrava coll' altra sopra un sostegno posto nel mezzo d' entrambe, siccome passò per la mente al nostro Autore nella sua giovinezza, e fu poscia da lui avvedutamente corretto; così non è da stupirsi che un altro Autore assai celebre in queste materie tacitamente supponesse ciò nella prop. 2 del lib. 2 *De resistentia solidorum*, come principio per sè noto; ma è ben maraviglia che nè meno in sua vecchiezza sapesse egli rinvenirsi dell' errore, anzi pretendesse con un simile paralogismo convincere me di grosso abbaglio commesso nel confutare la citata, con altre sue proposizioni. Veggasi il discorso di A. M. stampato in Lucca del 1714, alla pag. 47, ove supponendo che un peso posto in C (*Fig.* 69) si equilibri colla resistenza della base AE d' un prisma ACM fitto nel muro, ne raccoglie, che se il prisma staccato dal muro si ponesse in bilico sopra la linea FP posta nel mezzo del prisma, lo stesso peso rimanente in C averebbe oramai la metà sola del momento di prima (il che sin qui è verissimo), e che però uguaglierebbe *la metà della resistenza* della sezione NOPF (uguale all' altra ABED); onde supponendosi un altro peso attaccato al termine D, uguale a quello che era in C, si verrebbe ad equilibrare *l' altra metà della detta resistenza;* sicchè tra tutt' e due si equilibrerebbero colla medesima intera resistenza della sezione suddetta NOPF. Il che (con sua buona pace) non è vero altrimenti. Perchè l' altro peso attaccato in D, equilibrerà bensì il solido, sicchè non trabocchi dall' altra banda per l' azione del peso posto in C, ma non saranno già sufficienti tutti due que' pesi insieme ad equilibrare la resistenza OF, con mettere in procinto il solido di rompersi su l' appoggio PF. Essendo perciò necessario, che siccome il peso posto in C colla distanza CF ha solo la metà del momento che avea prima colla distanza CD per vincere dalla sua parte la resistenza della sezione; così nello stesso punto C, alla distanza CF, si ponga un peso doppio di prima (ed altrettanto poi dall' altra banda in D) perchè giunga ad avere ciascuno d' essi dalla sua parte un momento uguale alla resistenza da superarsi: nulla giovando che l' altro peso uguale al primo si ponga dall' altra parte in D, dove non è d' aiuto a tirare dalla banda di C, ma solo fa una parte di quell' azione che prima faceva il muro, quando vi era impegnato dentro il solido, come acutamente ha avvertito in questo luogo il Sig. Viviani. Perchè in somma (come dico nella parte terza della mia risposta apologetica, confutando il suddetto discorso cap. 5, n.° 6), l' effetto dello strappare un solido sempre ha da dipendere da due forze contrarie, delle quali l' una tiri per un verso, l' altra o tenghi forte dal canto suo, o tiri dalla banda opposta, sicchè non tutte le parti del solido si muovano verso le stesse bande, secondando l' impressione della forza attaccatavi.

Il che, a mio credere, dipende da questo, che la stessa coerenza delle parti del solido è cagionata da certe forze (qualunque elle sieno, o si riferiscano all' interna disposizione ed intralciamento delle parti della materia, quinci e quindi contigue alla sezione, o provengano dalla pressione del fluido ambiente, o derivino da qualsivoglia glutine interposto), le quali premono l'una contro dell' altra, spingendo questa parte contro di quella, e quella vicendevolmente contro di questa: appunto come due lottatori, affrontatisi con ugual forza, si urtano e si sostengono reciprocamente, mantenendosi uniti; onde per disgiungerli non basta che alquante forze si applichino per distaccare l' uno, se intanto altre forze uguali non accorrono a tener fermo l' altro o a ritirarlo indietro dalla lotta; altrimenti quello de' competitori, a cui niuna forza si applicasse, per tenerlo fermo o per rimuoverlo dal contrasto, seguitando ad urtare il compagno, si lascierebbe trasportare a seconda della piena di quelli che applicati fussero a ritirare l' altro dal duro cimento. E così è verissimo che il muro, in cui sta fitto un solido, equivale appunto ad un contrappeso che equilibrasse l' azione dello stesso solido o de' pesi attaccativi, se in vece d' essere impegnato immobilmente nel muro, fusse posto in bilico nella stessa sezione: essendo che esso muro caricando la porzione del solido, che tanto o quanto entra dentro di esso, la ferma e gl' impedisce di muoversi al muovimento dell' altra parte del solido che resta al di fuori; onde se l' azione di essa e de' pesi aggiuntivi prevale alla coerenza delle fibre che connettono una parte coll'altra, ne segue lo strappamento e la separazione di questa da quella.

Proposizione LXXX, Quesito XXVII.

Se il cilindro AB (*Fig.* 70) *fitto nel muro è bastante a spezzarsi in* B, *cioè a superare la resistenza* B *col proprio peso e colla leva* AB: *aggiungendo dall' altra parte altrettanto cilindro* BC, *si cerca se la medesima resistenza* B *venga violentata con doppia forza; e se per ispezzarsi col sostegno in mezzo, voglia essere la metà più sottile, o di lunghezza media proporzionale tra* AB *e* BD, *metà di* AB?

Secondo il Galileo (1) è manifesto che BC, ugualmente grosso ed ugualmente lungo di AB, tiene in equilibrio lo stesso AB, e tutte due insieme pareggiano la stessa resistenza della sezione B che veniva pareggiata dal solo AB fitto nel muro colla sua testata B; mentre dice espressamente: *Il cilindro che gravato dal proprio peso sarà ridotto alla massima lunghezza, oltre alla quale più non si sosterrebbe, o sia retto nel mezzo da un solo sostegno o da due nell' estremità, potrà essere lungo il doppio di quello che sarebbe fitto nel muro, cioè sostenuto in un sol termine.* Ed il dubbio del Sig. Viviani resta di già risoluto da lui medesimo nella proposizione antecedente, osservando che quando AB è fitto nel muro, lo stesso muro fa la forza dell' altro contrappeso BC, di momento pari a quello della porzione BA che sporge fuori del muro; onde

(1) Dialoghi delle Nuove Scienze, pag. 132.

nell' uno e nell' altro caso la resistenza B è violentata dalla medesima azione di due forze uguali e contrapposte; ed è giusto come se un filo si attaccasse coll' estremo suo ad un muro, e dall' altro capo si tirasse fino ad essere in procinto di romperlo; o pure da un capo e dall' altro si applicassero due forze opposte per istrapparlo, che sempre l' effetto dipenderebbe dalla stessa quantità di forze applicate, non giammai tutte da una banda, ma sempre parte da un capo, e parte dall' altro.

Circa poi il dover essere la lunghezza del cilindro posto in bilico tale, che ciascuna delle sue parti sia media proporzionale tra la AB e la BD, metà di essa, come accenna il nostro Autore; ciò si verifica quando debba il cilindro appoggiarsi a due sostegni posti negli estremi, come avvertì Monsù de la Hire nella prop. 126 delle sue Meccaniche; ma non già nel caso che reggere si debba sopra un sostegno posto nel mezzo; anzi nè meno quando si regga da due bande, qualora venga caricato ancor per di sopra, e fortemente impegnato il cilindro dall' una e dall' altra parte nel muro: nel qual caso è verissima la sentenza del Galileo di sopra accennata, conforme dissi nella mia risposta apologetica pag. 123.

Che se alcuno bramasse la dimostrazione di ciò che di sopra ho detto con Monsù de la Hire, acciocchè non nasca verun dubbio dalle opposizioni fattemi in contrario, quando nel luogo citato abbracciai quella dottrina, eccomi pronto a soddisfarlo.

Sostengasi il cilindro AC sopra il sostegno corrispondente al suo mezzo B, equilibrato, ed in procinto di rompersi nella sezione B: e sia la lunghezza EF d' un altro cilindro ugualmente grosso, appoggiato a due sostegni ne' termini E, F, media proporzionale fra tutta la AC e la metà sua AB (onde conseguentemente, dividendolo per mezzo in G, sarà la GE, ovvero la GF, media proporzionale tra la AB e la sua metà BD). Dico che questo con uguale momento, verso la resistenza della sezione di mezzo G, rimarrà precisamente sopra i detti sostegni appunto equilibrato.

Imperocchè essendo la metà del peso AC, cioè il peso di AB, applicato nel suo centro di gravità D, e l' altra metà BC nel suo centro H, per far forza sopra la resistenza della sezione B; e similmente reggendosi la metà del peso EF dal sostegno E, e l' altra metà dal sostegno F, colle distanze GE, GF medie proporzionali fra le lunghezze AB, BD; sarà AB ad EG, cioè la metà del peso AC alla metà del peso EF, come reciprocamente la distanza EG alla distanza DB, dalle quali dipendono; e però saranno uguali i loro momenti. Si dirà lo stesso dell' altre due metà d' ambi i pesi, applicate similmente a rompere le uguali resistenze B, G; adunque averà la stessa forza il cilindro AC sopra la resistenza B, che il cilindro EF sopra una pari resistenza G, quando sia EG media tra l' intera AC e la sua metà AB. Il che si dovea dimostrare.

Nè sarebbe ragionevole l' opporre, che la metà del peso EF, cioè EG, penda dal sostegno E con una distanza uguale alla metà di EG, dove sarebbe il centro di gravità del cilindro EG, e non da tutta la EG, come si è supposto nell' addotta dimostrazione; perchè tutto il peso del cilindro EF gravitando nel suo centro G, è manifesto, doversi immaginare ambidue le metà di esso ivi raccolte nel punto G, e non altrimenti distribuite, sicchè l' una graviti nel punto di mezzo fra G ed E, e l' altra nel punto di mezzo fra G ed F, come accaderebbe se fussero staccate e non connesse in G: che se la coerenza delle parti non le richiamasse tutte in un centro comune, ognuna dell' infinite parti che il cilindro compongono doverebbe esercitare la sua forza in un centro particolare e distinto, e non cospirerebbero tutte a maniera d' un solo peso, siccome fanno, avanti d' essere staccate l' una dall' altra.

Ma perchè la cosa è di grandissima importanza, nè manca chi ha preteso di oscurare la verità con apparenti ragioni, acutamente inventate per difendere il suo impegno, ed incaricare me di gravissimo sbaglio, non sarà se non bene lo scuoprire la fallacia di chi (Discorso di A. M. pag. 55) francamente asserisce che le due metà d' un cilindro o prisma appoggiato ne' suoi estremi *non hanno per leve favorevoli se non le metà* delle lunghezze che sono dal mezzo a ciascun termine del solido, ed aggiugne (pag. 56) che il peso di un cilindro allora solamente tutto si raccoglie ed esercita la sua energia sul proprio centro di gravità, *quando pende in aria liberamente senza esser retto da alcun sostegno;* ma quando è appoggiato ne' suoi estremi a due sostegni, *i quali vengono a scemarli la metà del suo peso, l' altra sua metà sola viene ad esercitare la sua forza nel centro di gravità.* Nella quale dottrina erronea molti sbagli si contengono, essendo cosa impossibile *che un peso penda in aria senza esser retto da alcun sostegno* (e però non farebbe mai forza un solido nel suo centro di gravità, se non in caso che miracolosamente pendesse in aria senza che alcuna cosa il reggesse), nè essendo vero che i sostegni *scemino la metà del peso d' un solido* che sia appoggiato, onde gli rimanga solamente *l' altra metà da esercitarsi nel centro di gravità*; imperocchè i due sostegni reggono tutto il peso, e da esso con vicendevole azione sono premuti, di maniera però che mezzo il peso si appoggi all'uno e mezzo all'altro, senza verun dispendio dell'azione della gravità da esercitarsi appunto nel mezzo, dove è il centro del solido, con tutto il suo momento, il quale non viene diminuito, ma bensì equilibrato con azione contraria da' sostegni; altrimenti ne seguirebbe, che siccome al parere di questo Autore un solido appoggiato a due sostegni pesa nel centro per la metà sola della sua gravità; appoggiandosi poi a 4 ovvero 6 sostegni, dovrebbe premere con un quarto o con un sesto solo della gravità sua; e sostenendosi sopra l'orlo d'un corpo stabile equivalente ad infiniti sostegni, non dovrebbe premere più per niente; e così un cavallo che si regge su quattro piedi, un palco eretto sopra sei pilastri, una cupola d'ogn'intorno appoggiata sul cornicione che la circonda, non dovrebbero aggravare nel centro loro, se non per una parte quarta, sesta o infinitamente piccola del loro gran peso. Il che se è assurdo, si concluda che i sostegni non iscemano adunque in conto alcuno la gravità de' solidi, nè impediscono che non l'esercitino tutta nel centro loro: come forse meglio potrà intendersi colla seguente costruzione.

S'intenda sospeso il cilindro DF (*Fig.* 71) con due fili DA, FB perpendicolari all'orizzonte, i quali passando per due troclee fisse per di sopra, sieno tirati da'due pesi I, K abili ad equilibrarsi col medesimo solido DF; sarà certamente ciascun d'essi pesi uguale al peso della metà del cilindro, e tutti e due insieme uguali al totale peso DF. E perchè in ogni equilibrio di forze contrapposte ed ugualmente distanti dal centro del moto, come accade in questo caso, mercè le suddette troclee, fra i pesi K ed I da una banda, ed il cilindro DF dall'altra, conviene che ugualmente prema dal suo canto la forza che tira da un canto, e l'altra che tira dall'altro lato: egli è pure evidente che il cilindro DF, con tutto che sia retto in ambi gli estremi, dovrà premere nel centro di gravità E con tutta la forza del suo peso, siccome li due contrappesi I, K con tutta l'energia del peso loro, uguale a quello del cilindro DF, premono altresì dal canto suo, ed è vanità l'immaginarsi che il peso DF per la metà sia sostenuto, e solo per l'altra metà graviti; ora lo stesso accade se rotti i fili DA, FB, o rimossi i contrappesi I, K, si lascia posare il cilindro DF sopra due sostegni sottoposti all'estremità: i quali sostegni lo spigneranno all'insù e lo reggeranno appunto come prima faceano i suddetti fili ed i contrappesi attaccativi; e senza impedire punto l'azione della totale gravità di esso cilindro, la quale si eserciterà come prima nel centro E con tutto il suo momento.

Del che per avere ancora più chiara idea, si consideri che la forza d' onde dipende la coerenza delle fibre d' un solido (come si è detto di sopra) dee essere secondo la direzione dell' asse del cilindro, che passa per tutti i centri di gravità delle sue sezioni: e che questa forza opera con due direzioni direttamente opposte, calcando una sezione contro l' altra contigua. Immaginandosi adunque la detta forza, che tiene unite le fibre del solido nella sezione E, rappresentarsi dalla linea DF, di cui la parte FE ci esprima l' azione che spinge da F verso E; e la parte DE ci figuri l' altra contrapposta azione, che ugualmente preme viceversa da D verso E, queste due forze essendo uguali e direttamente opposte, si equilibrano; sicchè in virtù di esse le parti del cilindro stanno unite, movendosi di conserva, quando da una sola forza, quale sarebbe la gravità, venissero tirate al basso per la direzione EG, la quale non si oppone a veruna delle dette direzioni FE, DE, ma è loro indifferente. Ma essendovi di più due forze che spingono al contrario di EG, come sono i contrappesi I, K, o in vece di essi i sostegni D, F, da' quali viene retto il cilindro, per ritrovare ciò che risultar debbe da queste azioni, si faccia, come la forza, che premendo da F verso E contribuisce alla resistenza del cilindro, sta alla forza del sostegno F, ovvero del contrappeso K, così EF ad FB; e compiendo il rettangolo EFBH, si averà nel diametro FH la forza composta da ambedue, come è notissimo a' meccanici, e da me fu dimostrato nell' Epistola *De momento gravium* pag. 13; e similmente dall'altra forza che concorre alla resistenza della sezione E per la direzione DE, e dalla forza del sostegno D o del contrappeso I nella direzione DA, si comporrà la forza DH che risulta da entrambe; e finalmente compiendo il parallelogrammo DHFG, si averà nel diametro GH la forza composta delle due FH, DH, cioè delle GD, GF; alla quale forza GH debbe essere uguale la forza del peso esercitato dal cilindro DF (o da un peso avventizio G sospeso in E, quando si astragga dal peso d' esso cilindro), mercecchè debbe contrastare alla detta forza, eludendone l' effetto coll' azione contraria nella direzione HG; e però il peso esercitato dal cilindro FD (o dal peso G surrogato in vece di esso) nel centro E starà alla forza esercitata da ciascuno di detti sostegni (come F, o dall' equivalente contrappeso K) come HG ad FB, cioè ad HE; e però la detta forza di peso esercitata in E sarà dupla della forza del contrappeso K o del sostegno F; sicchè essendo (come mostra la sperienza a chi non si appaga della ragione) il peso K una metà del peso totale del cilindro DF, dovrà esso cilindro esercitare nel centro E una forza uguale a tutto il suo peso: e similmente il peso G che (astraendo dalla gravità del cilindro) si dovesse a tale effetto in E surrogare, essere dovrebbe uguale a tutto il peso d'esso cilindro, come io avea detto, e non alla sola metà, come pretende il censore.

Una sola opposizione di qualche momento mi fu fatta da un chiaro geometra; ed è che se un cilindro AD (*Fig.* 72) è sostenuto ne' termini A, D, per impedire la gravitazione di esso nel centro C, basterebbe sottoporvi il sostegno C, il quale ivi si opporrebbe all'azione della gravità del cilindro esercitata in C; ma il sostegno C, dovendo reggere la metà della parte CD e la metà dell'altra parte CA, non dovrà sostenere se non la metà dell'intero cilindro AD; adunque pare che la pressione esercitata da esso cilindro nel centro C non possa essere se non uguale alla metà del peso AD.

A ciò risposi che primieramente il discorso proverebbe che in qualsivoglia punto B, fuori del centro C del cilindro, operi la gravità di esso colla metà sola della sua azione; perchè similmente collocando un sostegno B per sostenerne la forza, questo si troverebbe carico della metà di BD e della metà di BA, cioè della metà di tutta la AD; e però in ogni luogo il cilindro premerebbe colla metà del suo peso, quando presso a' sostegni non può avere azione così sensibile.

In secondo luogo conviene avvertire che quando si sottopone il sostegno C al mezzo del cilindro AD, ciascuno de' sostegni estremi A e D viene sollevato dal peso che prima sorreggeva, essendo che prima ognuno d'essi sosteneva la metà del cilindro AD, ed ora solamente ne reggono un quarto per uno: cioè al D tocca una metà del cilindro CD, ed all'A una metà dell'AC, gli altri due quarti rimanendo appoggiati al sostegno C; d'onde si deduce che il sostegno C non regge altrimenti tutta l'azione che il cilindro AD esercitava in C, ma la divide in due ugualmente; sicchè quindi innanzi tutta la parte AC graviti nel mezzo fra A e C, e tutto il resto graviti nel mezzo fra C e D, come se fussero due cilindri divisi; e per tanto ciò nulla serve per provare che in C, avanti che si ponesse il sostegno, gravitasse il cilindro colla metà del suo peso, piuttosto che col peso totale di sè stesso.

Proposizione LXXXI, Quesito XXVIII.

Sia il cilindro grave AE (*Fig.* 73) *sostenuto fuori del mezzo in* G. *Cercasi il peso che si dee attaccare in* E, *acciocchè la parte* BE *del cilindro faccia equilibrio coll'altra parte* AG.

Si faccia, come la leva BC *alla* BA, *ovvero come il peso* BE *al peso* BD, *così il peso* BD *ad un altro, dal quale si cavi il peso* BE; *e del-*

l' avanzo si prenda la metà F, *che questa sarà il peso, il quale attaccato in* E, *colla parte* BE *equilibrerà l' altra parte* BD.

Imperocchè tal momento ha il peso F attaccato in E, quanto averebbe il doppio di esso attaccato nel mezzo di GE (per essere così i pesi reciproci alle distanze), dove pure s' intende che faccia forza nel suo centro di gravità il peso della parte BE; siccome il peso dell' altra BD fa forza nel mezzo della DG; dunque, in caso d' equilibrio debb' essere come BC a BA, o come il peso BE al peso BD, così BD all' aggregato di BE e del doppio di quel peso che dee a tale effetto attaccarsi in E; e però il peso da attaccarsi in E è la metà di ciò che rimane, cavando dal detto peso quarto proporzionale, il peso BE, come dice il Sig. Viviani.

Proposizione LXXXII, Quesito XXIX.

Sia il cilindro grave AB (*Fig.* 74) *orizzontale sostenuto fuori del mezzo della sua lunghezza, come in* E; *è chiaro che la parte maggiore* AE *preponderera. Cercasi, per mantenerlo orizzontale, quanto peso si dovrà sospendere nell' estremità* B.

Sia BD *metà della lunghezza* BC, *e facciasi come* BE *ad* ED, *così il peso di tutto il cilindro* AB *al peso* F, *che questo sarà il cercato da sospendersi in* B.

Poichè di tutto il cilindro AB *il centro di gravità è nel mezzo, cioè in* D; *e del peso* F *il centro di gravità è sospeso in* B; *adunque il centro comune di gravità del cilindro e del peso* F *sarà in quel punto che divide la distanza de' centri in reciproca proporzione de' pesi. Ma si fece, come il cilindro* AB *al peso* F, *così* BE *ad* ED; *adunque in* E *sarà l' equilibrio. Il che ec.*

Questa è la stessa colla precedente, ma ho stimato bene di aggiungerla, per l' ingegnosa ed elegante maniera adoperata nel dimostrarla, con provare che così il centro comune di gravità del cilindro e del peso attaccato corrisponde al luogo del sostegno E; onde non potendo questo muoversi allo ingiù, è forza che il tutto stia fermo in equilibrio a tenore della terza supposizione.

Proposizione LXXXIII, Quesito XXX.

Per lo contrario, se un pe[illegible]sarà attaccato all' estremità d' un cilindro, come AB, *cercasi in qual punto della sua lunghezza si debba sottomettere un sostegno, in modo che, stando il cilindro orizzontale, si faccia l' equilibrio?*

Dividasi CB *per mezzo in* D, *e facciasi, come il peso del cilindro*

AB al peso F, così BE ad ED, che il punto E sarà il cercato; e si dimostrerà come sopra, perchè i detti pesi sono sospesi con i loro centri di gravità in distanze reciproche dal sostegno E; che però ec.

Corollario I. *Se dunque il peso F da appendersi all'estremità B, sarà dato uguale al peso del cilindro AB, si dovrà mettere il sostegno E in tal luogo, che la lunghezza CE sia tripla della BE; perchè divisa per mezzo CE in D, sarà allora la EB uguale alla ED; ma per la precedente proposizione, facendosi come BE ad ED, così il peso AB al peso F, questo è quello che debbe appendersi in B, acciocchè si equilibri col dato cilindro nel sostegno E: adunque il peso AB è uguale al peso F.*

Corollario II. *E se vorremo che il peso AB al peso F abbia una data proporzione di GB a BH, sarà necessario dividere la BD in modo che la EB alla ED abbia la proporzione di GB a BH; ed il punto E sarà il sostegno.*

Corollario III. *Ma se vorremo mettere il sostegno in luogo, che poi tanto pesi la parte del cilindro BE, quanto il solido F; dovrà dividersi la DB in modo, che il rettangolo di tutta la CB nella parte di mezzo DE sia uguale al quadrato BE; perchè allora sarà come DE ad EB, così il peso F al peso AB, ovvero così EB alla CB; ma come EB alla CB, così il peso di BE allo stesso peso AB; adunque tanto pesa F che BE.*

Corollario IV. *E se vorremo che il peso F pesi tanto, quanto la parte CE, si dovrà segare la DB in E in modo che il rettangolo di tutta la CB nella parte di mezzo DE sia uguale al rettangolo CEB; perchè allora sarà come CB a CE, così EB a DE; ma CB a CE sta come il peso AB al peso AE, ed EB a DE sta come lo stesso peso AB al peso F, quando si fa l'equilibrio; adunque i pesi AE ed F sono uguali.*

I due problemi supposti dal Sig. Viviani nel corollario 3 e 4 si sciolgono nella seguente maniera.

Data una retta CB (*Fig.* 78) divisa per mezzo o più generalmente divisa in qualsivoglia proporzione nel punto D: talmente di nuovo segarla in E, che il rettangolo di CB in DE uguagli il quadrato di EB.

Alla retta CB si applichi un rettangolo eccedente d'una figura quadrata ed uguale al dato CBD; e sia questo CIB; ed alla BI pongasi uguale la BE; poichè dunque il rettangolo CBD, cioè i due CBE e CB in DE, uguagliano il rettangolo CIB, cioè la somma del rettangolo CBI e del quadrato BI, ovvero i due CBE e quadrato BE; tolto di comune il rettangolo CBE, sarà CB in DE uguale al quadrato di EB; il che ec.

Ma se data la retta CB, divisa per mezzo, o in qualsivoglia ragione in D, si vorrà dividerla altrove in E in maniera che il rettangolo di CB in DE uguagli il rettangolo CEB;

Alla retta CB si ponga per diritto la CI uguale ad essa; ed alla retta IB si applichi un rettangolo uguale al dato CBD, mancante però d'una figura quadrata; e sia questo rettangolo IEB. Adunque il rettangolo CBD, cioè la somma de' rettangoli CBE e CB in DE, uguaglia il rettangolo IEB, che è quanto dire i due rettangoli IC in EB e CEB; tolgansi da questa e da quella parte i rettangoli CBE ed IC in EB, che sono uguali, rimmarrà CB in DE uguale al rettangolo CEB. Il che ec.

Proposizione LXXXIV, Teorema LIV.

La scala de' momenti di pesi uguali C, D (*Fig.* 76) *attaccati ad una libra sostenuta ne' suoi estremi* A, B, *sta nelle linee* EG, FH *della parabola* AHB *parallele al diametro, essendo la libra* AB *base di detta parabola.*

Imperocchè i detti momenti sono come i rettangoli AEB, AFB fatti dalle parti di essa libra, come dimostra il Galileo nella proposizione 13 (1). Ma a questi rettangoli sono proporzionali le linee GE, HF tirate nella parabola parallele al diametro; dunque ec.

Proposizione LXXXV, Teorema LV.

Le resistenze d'un cilindro (*Fig.* 77), *ne' punti* A, B, C, D, E, L *ec. sono come le linee* A1, B2, C3, D4, E5 *ec. terze proporzionali dopo l'applicate nella parabola e nel parallelogrammo circoscritto, equidistanti al diametro.*

Poichè la resistenza in A *alla resistenza in* C *sta come il rettangolo* GCF *al rettangolo* GAF, *secondo il Galileo, cioè come la linea* CH *alla* AI, *cioè come* CO *a* C3, *ovvero come* AI *a* C3; *dunque se la resistenza* A *si ponga essere la* AI, *la resistenza in* C *sarà la* C3; *e così dell'altre. Il che ec.*

E perchè la linea 1, 2, 3, 4 *non concorre mai alla retta* G8, *di qui è manifesto che le resistenze verso il punto* G *vanno crescendo sempre, facendosi maggiori di qualunque data forza, e nel punto* G *volervi forza infinita, perchè la linea* G8, *che è terza proporzionale dopo il punto* G *e la linea* GM, *è infinita.*

Nota, che la curva 1, 2, 3, 4 *è una iperbole seconda.*

Molte sono le curve che possono meritare il nome di *seconda iperbola;* però non avendo il Sig. Viviani dichiarato particolarmente il suo pensiero, non sarà superfluo l'esaminare in questo luogo come verificare si possa il suo detto, acciocchè alcuno ingannato non rimanga,

(1) Dialoghi delle Nuove Scienze, pag. 138.

pensando ch'egli intenda dell' *iperbola quadratica*, che più comunemente per *seconda iperbola* viene computata: quella cioè, in cui i quadrati delle ordinate ad un asintoto, sono reciprocamente come le porzioni d'esso asintoto tagliate dal centro: o pure di quella, in cui i quadrati dell' ordinate ad un diametro fossero come i parallelepipedi contenuti dal quadrato d'una parte, e dalla lunghezza dell' altra parte d'esso diametro, intercette fra detta ordinata ed i termini del traverso; o in somma d'altra curva che abbia più manifesta relazione ed analogia coll' iperbola ordinata, che non ha veramente la curva in questo luogo descritta.

Si osservi pertanto, che il profondo e celebratissimo matematico d'Inghilterra, il Cav. Isacco Newton, nel trattato che stampò delle linee del terz' ordine, acutamente notò potersi dividere le iperbole in più generi, secondo il numero degli asintoti che ad esse potevano convenire, dicendo: *Hyperbola primi generis duas habet asymptotos, ea secundi tres, ea tertii quatuor et non plures habere potest, et sic in reliquis.* Quindi si rifletta, che continuando la descrizione della curva proposta dal nostro Autore, con adattare la stessa costruzione alla parabola prolungata per di sotto, prendendo le *c*3, *c*3 da per tutto terze proporzionali alle *ch, co*; dal che si vede, che oltre la parte superiore 3, 1, 3 della curva che giace fra' due asintoti paralleli G8, F9, ne nascono due altre parti o gambe inferiori 3 3, 3 3, alle quali, oltre i suddetti due asintoti continuati, si aggiunge per terzo asintoto la GF prolungata; e però, secondo la distribuzione fatta dal suddetto Newton, si riconosce questa curva per un' *iperbola del secondo genere*; ed è appunto quella che da lui si descrive per la specie sessagesima, e si asserisce essere un *iperbolismo della iperbola*, che in ordine è il quarto: intendendo per iperbolismo la figura nata dall' applicare il rettangolo contenuto dall'ordinata di una sezione conica e di una data retta, alla proporzione comune tagliata nel diametro da uno de' suoi termini. Come nel nostro caso, essendo l' iperbole opposte E, A*e*, il cui asse traverso sia A, ed il secondo asse coniugato sia uguale a ciascuna delle rette AG, AF; e presa qualunque ordinata dell' iperbola DE, si faccia come AD a DE, così AI a D3 (e similmente nell' opposta sezione, come A*d* a *de*, così A a *d*3): la figura 1 3, coll'altre sue parti 3 3 quindi nate, chiamasi dal Newton *iperbolismo dell' iperbola*, ed è la sessagesima specie dell' iperbole del secondo genere.

Ora questa non essere altra che la curva sopra descritta dal Signor Viviani, si dimostra così. Essendo il quadrato AD al quadrato DE come il quadrato AI al quadrato D3, cioè al quadrato AC; ed il quadrato DE al rettangolo IDA essendo nell' iperbola come il quadrato del secondo diametro AG al quadrato di AI: sarà per l' ugualità perturbata, il quadrato AD al rettangolo IDA come il quadrato AG al quadrato AC; e per la conversione di ragione, il quadrato AD al rettangolo DAI (cioè la retta DA o pure 3 alla AI) sarà come il quadrato AG al rettangolo GCF, che nella parabola è appunto come la AI alla CH; onde la C3 è terza proporzionale dopo le due CH, AI, secondo la costruzione del Sig. Viviani; e pertanto la curva da lui qui descritta è la medesima con questa specie di seconda iperbola considerata dal Newton.

È manifesto che il lato retto dell' iperbole IE, A*e*, è lo stesso con quello della parabola GIF, cioè la terza proporzionale dopo le due IA ed AG.

Proposizione LXXXVI, Teorema LVI.

Sia il prisma triangolare ABN (*Fig.* 79), *di cui la faccia rettangola* AN *sia parallela all' orizzonte, e sia sostenuto sopra l' estremità* OA, CN; *e sia il peso* I *nel mezzo della leva* AC *che pareggi la resistenza della sezione di mezzo* BE; *e l' altro peso* L *fuori del mezzo, che pareggi la resistenza della sezione* FG. *Dico che tali pesi assoluti* I, L *hanno tra di loro la proporzione delle parti disuguali* CH, HA.

Poichè inteso in H *il peso* M *uguale ad* I, *essendo il momento del peso* L *uguale al momento della resistenza* FG, *ed il momento* I *pareggiando il momento della resistenza* BE, *sarà il momento di* L *al momento di* I *come il momento della resistenza* FG *al momento della resistenza* BE, *cioè, per la prop.* 3, *come il quadrato* FH *al quadrato* BD, *o pure come il quadrato* AH *al quadrato* AD, *cioè al rettangolo* ADC; *ma il momento* I *al momento* M, *per la prop.* 84, *sta come il rettangolo* ADC *al rettangolo* CHA; *dunque per l' ugual proporzione il momento di* L *al momento di* M, *cioè il peso assoluto di* L *al peso assoluto di* M, *ovvero al peso assoluto* I, *sta come il quadrato* AH *al rettangolo* CHA: *cioè come la linea* AH *alla* HC. *Il che si dovea dimostrare.*

Proposizione LXXXVII, Quesito XXXI.

Si cerca la scala che dimostri con quale proporzione vadano scemando dal mezzo D (*Fig.* 80) *i pesi assoluti che pareggiano le resistenze di varie sezioni nel suddetto prisma triangolare.*

Prolungata la BD, *si faccia ad esso uguale la* DQ, *e intorno al triangolo* ABC *facciasi il rettangolo* ASPC, *e con gli asintoti* PS, PC *pel punto* Q *descrivasi l' iperbola* QA, *che necessariamente passerà per* A *(es-*

sendo il rettangolo SD *uguale al* BC, *cioè al* DR, *ed aggiunto di comune* BC *riuscendo tutto lo* SC *uguale a tutto il* BR, *e però i punti* Q, A *essendo nella medesima iperbola, riguardante gli asintoti* SPR*); e similmente con gli asintoti* SA, SP *descrivasi per lo stesso punto* Q *l' iperbola* QC, *che pure passerà (per la stessa ragione) per* C. *Dico che l' applicate* DQ, HX, LV, EG *ec. sono le misure de' pesi assoluti* O, N, M *ec. che pareggiano i momenti delle sezioni* DB, HF, LI *ec. Imperocchè uguagliandosi i rettangoli, per esempio,* AP, XP: *tolto di comune* HP, *sarà il rettangolo* SH *uguale al rettangolo* HZ, *onde* AH *ad* HC *(cioè per il precedente, il peso* N *al peso* O*) sarà come* XH *ad* H$\mathscr{S}$, *cioè a* DB *o pure a* DQ; *onde in dette linee* XH, DQ *sta la proporzione de' pesi* N, O; *e però l' iperbola descritta è la scala che si cercava.*

Proposizione LXXXVIII, Teorema LVII.

Sia il prisma parabolico ABC *(Fig. 81), di cui la base rettangola* AG *sia parallela all' orizzonte e sia sostenuto nell' estremità* AC; *e sia inteso segato con due piani paralleli* BD, EF *retti alla base. Dico che i pesi assoluti* H, I, *che pareggiano i momenti delle resistenze* BD, EF, *sono tra loro come le medesime sezioni* BD, EF, *o come l' altezze* BL, EM *delle medesime sezioni.*

Poichè immaginato un peso N *uguale ad* H *ed appeso in* MF, *e presa la* MO *terza proporzionale delle* BL, EM; *essendo che il momento di* N *al momento di* H *sta come il rettangolo* CMA *al rettangolo* CLA, *cioè (per la prop. 84) come la linea* EM *alla* BL; *ed il momento di* H *al momento di* I *sta come il momento della resistenza* BD *al momento della resistenza* EF *(pareggiandole), cioè come il quadrato dell' altezza* BL *al quadrato dell' altezza* EM *(per la prop. 3), o pure come la prima* BL *alla terza* MO; *adunque per l' ugual proporzione, il momento di* N *al momento di* I *sta come la* EM *alla* MO, *cioè come la* BL *alla* EM; *ma il momento di* N *al momento* I *sta come il peso assoluto di* N *al peso assoluto di* I, *cioè come il peso assoluto di* H *al peso assoluto di* I; *adunque il peso assoluto di* H *al peso assoluto di* I *sta come* BL *ad* EM, *che sono l' altezze delle sezioni, o come la medesima sezione* BD *alla sezione* EF. *Il che ec.*

Coroll. *Quindi è chiaro, che la scala de' pesi che spezzano tal solido, sta nelle linee applicate parallele al diametro della stessa parabola* ABC.

Proposizione LXXXIX, Teorema LVIII.

Siano le due parabole ABD, CBD *(Fig. 82) sopra la stessa base* BD *e con gli assi uguali* AD, CD *posti in dirittura, e sia la superficie*

ABC *la faccia anteriore di un solido prismatico che abbia l' opposta faccia simile ed uguale alla stessa* ABC; *il qual solido sia posato sopra il sostegno* D *posto nel mezzo della linea* AC; *ed i pesi* E, F *nell' estremità* AC *attaccati sieno tra di loro uguali e pareggino la resistenza della sezione* BD. *Dico che se lo stesso solido fosse altrove appoggiato come in* G, *e che i pesi* I, L *posti nelle stesse estremità, e fra di loro equilibrati, pareggiassero la resistenza della sezione* GH, *sarebbe il peso* I *uguale al peso* E *ovvero all' altro* F.

Imperocchè pareggiandosi da' pesi I *ed* L *la resistenza della sezione* GH, *ed equilibrandosi nelle distanze* AG, GC, *sopra il sostegno* G, *secondo ciò che si è concluso nella prop.* 79, *lo stesso peso* I *pareggerebbe dal suo canto la resistenza della medesima sezione* GH, *quando la sola parte* HGA *sporgesse fuori del muro; ma il peso, da cui si pareggia in tale stato la resistenza della sezione* GH, *è il medesimo, ovvero è uguale a quello che pareggerebbe la resistenza dell' altra sezione* BD, *quando* BDA *sporgesse fuori del muro, per la famosa proposizione del Galileo circa il prisma parabolico: ed allora lo stesso peso* E *(per la proposizione* 79*), pareggerebbe la stessa resistenza* BD; *adunque il peso* I *è uguale al peso* E *ovvero al peso* F. *Il che ec.*

Proposizione XC, Teorema LIX.

Poste le medesime cose, si dimostrerà che l' aggregato de' pesi E, F, *i quali si equilibrano d' intorno al sostegno* D *colla resistenza* DB, *all' aggregato de' pesi* I, L, *i quali si equilibrano d' intorno ad un altro punto* G *colla resistenza* GH, *sta reciprocamente come la parte maggiore* GC *alla* DC, *che è la metà di tutta la* AC.

Imperocchè per l' equilibrio starà L ad I, come AG a GC; e componendo, L ed I insieme sta ad I come tutta la AC alla CG; ma I è uguale ad E, di cui il doppio sarebbe l' aggregato de' pesi E, F; dunque starà I al detto aggregato de' pesi E, F come DC ad AC; e per l' ugualità perturbata, sarà l' aggregato de' pesi I, L all' aggregato dei pesi E, F come DC a CG; onde convertendo, è manifesta la verità di quanto si era proposto. Il che ec.

Corollario. Se intenderemo lo stesso solido appoggiarsi a' due sostegni posti ne' termini A, C; è manifesto che il peso, il quale equilibrerebbe la resistenza BD, essendo appeso nel mezzo di AC in D, sarebbe uguale appunto a' due pesi E, F; ed il peso, che posto altrove come in G uguaglierebbe la resistenza GH, dovrebbe altresì pareggiare l' aggregato de' pesi I, L; per la qual cosa, il peso abile precisamente a rompere il detto solido in D, al peso che fusse sufficiente a romperlo in G, starà come CG a DC.

Proposizione XCI, Teorema LX.

Nel cuneo o prisma triangolare ABH (*Fig.* 83) *sostenuto in* AB *e segato per mezzo in* D, *ed altrove in* C; *il peso abile a spezzare in* C *al peso abile a spezzare in* D, *sta come la parte* BC *alla* CA.

Stendasi la sezione DG *in* E *fino che l' altezza* DE *sia uguale alla* CF. *Dunque il peso abile a spezzare la sezione* CF *a quello che è abile a spezzare l' ugual sezione* DE, *sta, secondo il Galileo, come il rettangolo* BDA *al rettangolo* BCA , *ed il peso abile a spezzare la sezione* DE *a quello che spezzerebbe la sezione* DG, *sta (per la prop.* 3*) come il quadrato* DE, *cioè il* CF, *al quadrato* BG; *ovvero come il quadrato* BC *al quadrato* BD; *cioè al rettangolo* BDA. *Dunque, per l' ugualità perturbata, il peso abile a spezzare la sezione* CF *a quello che è abile a spezzare la* DG, *sta come il quadrato* CB *al rettangolo* BCA, *cioè come la* BC *alla* CA. *Il che ec.*

Corollario. Il peso abile a spezzare in CF al peso abile a spezzare in ML sta come il rettangolo di BC in AM al rettangolo di AC in MB, ovvero è in ragione composta di BC ad AC e di AM ad MB; perchè il peso equivalente alla sezione CF a quello che equivale alla sezione ML, ha ragione composta dell' equivalente alla sezione FC all' equivalente alla DG, e di questo all' equivalente alla ML; ma la prima ragione è come di BC ad AC, e la seconda è come di AM ad MB per questa proposizione; dunque i pesi equivalenti alle sezioni CF, ML sono in ragione composta delle dette proporzioni; o pure sono come il rettangolo di BC in AM al rettangolo di AC in MB. Il che ec.

Proposizione XCII, Teorema LXI.

Nel cuneo parabolico IBA (*Fig.* 84), *il peso equivalente alla resistenza della sezione* CF *al peso equivalente alla resistenza della sezione* DG, *sta come il quadrato della media proporzionale* BH *tra* BC *e* BD *al rettangolo* BCA.

Si stenda DG in E, sicchè la sezione DE sia uguale e di pari altezza alla CF; dunque il peso equivalente alla sezione CF all' equivalente alla sezione DE sta reciprocamente come il rettangolo BDA al rettangolo BCA; ma il peso equivalente alla DE a quello che pareggerebbe la DG sta come il momento della resistenza DE a quello della GD, cioè, per la prop. 3, come il quadrato DE, ovvero CF, al quadrato DG, o pure come la CB alla BD, o come il rettangolo BCA al rettangolo di BD in CA; dunque per l'ugual proporzione il peso equivalente alla sezione CF all'equivalente alla DG, sta come il rettangolo BDA al rettangolo di BD in CA, cioè sta come DA a CA; e quando il punto D fusse nel mezzo della retta BA (come tacitamente qui suppone il Viviani, in coerenza di ciò che espressamente ha supposto nell'antecedente), sarà il primo peso al secondo come BD a CA o come CBD a BCA o come il quadrato della BH, media tra BC e BD, al detto rettangolo BCA; ma generalmente la proporzione del peso che rompe in C a quello che rompe in D, è come DA a CA, come si è mostrato; ed è per accidente che essendo il punto D nel mezzo si possa in vece della DA prendere la DB e cavarne la proporzione di sopra enunciata dal nostro Autore.

Proposizione XCIII, Quesito XXXII.

In questi solidi cuneiformi, ed in altri su questo andare, cercare le sezioni di minor resistenza, se ve ne sono; e quelle d'ugual resistenza, se in diversi punti vi si ritrovano.

Nel cuneo triangolare e nel parabolico di sopra considerati non vi è altrimenti sezione alcuna che dir si possa di minima resistenza: e nè meno due sezioni ugualmente resistenti assegnare si possono; essendo sempre le sezioni più vicine alla testata del cuneo di maggior resistenza che le più vicine al taglio del medesimo; ed il simile avviene in qualsivoglia sorte di cuneo che generato fusse da alcuna dell'infinite parabole o iperbole riferite al suo diametro; siccome ancora ne' cunei semicircolari o semiellittici, come con simile progresso si può dimostrare.

Proposizione XCIV, Teorema LXII.

Nell'emisfero o emisferoide ABC (*Fig.* 88) *che sia col piano orizzontale sostenuto nell'estremità* AC, *si dimostrerà che i pesi assoluti* H, I, *da' quali si pareggiano le resistenze delle sezioni* BD, EF *rette al piano* AC *e tra di loro parallele*, *sono come l'altezze delle simili sezioni* BL, EM.

Poichè, prese le MO, MG *continue proporzionali dopo le* BL, EM, *e considerato il peso* N *uguale ad* H *appeso in* M, *sarà il momento di* N *al momento di* H *come il rettangolo* CMA *al rettangolo* CLA, *cioè come il quadrato* EM *al quadrato* BL (*nel mezzo cerchio o mezza ellisse* ABC), *cioè come la linea* MO *alla* BL; *ed il momento di* H *al momento di* I *sta come la resistenza della sezione* BDL *alla resistenza della sezione* EFM (*pareggiandole per ipotesi*), *cioè come il cubo* BL *al cubo* EM (*per la* *prop. 4) o pure come la prima* BL *alla quarta* MG; *adunque per l' ugual proporzione il momento di* N *al momento di* I *sta come la* MO *alla* MG, *cioè come la* BL *alla* EM; *ma il momento di* N *al momento* I *sta come il peso assoluto di* N, *cioè come il peso assoluto* H *al peso assoluto* I; *adunque detti pesi sono come l' altezze delle sezioni corrispondenti. Il che ec.*

PROPOSIZIONE XCV, TEOREMA LXIII.

Nel prisma parabolico (*Fig.* 86) *sostenuto come si vede in* M, N, *pareggi il peso* E *il momento di resistenza della sezione* AB, *e sia qualunque altra sezione* CD. *Dico che un altro peso* F, *uguale all'* E, *pareggerà il momento di resistenza della sezione* CD; *cioè che detto prisma è da per tutto di eguale resistenza.*

Poichè il momento di E *al momento di* F *sta come il rettangolo* MIN *al rettangolo* MLN, *cioè come* GI *alla* HL (*mercè della parabola* MGHN), *o pure come i loro doppi* GB, HD; *cioè, per la prop.* 2, *come il momento delle resistenze nelle sezioni* AB, CD; *e permutando, il momento del peso* E *al momento della resistenza* AB *sta come il momento del peso* F *al momento della resistenza* CD; *ma il momento* E *pareggia la resistenza* AB, *adunque anche il momento* F *pareggia la resistenza* CD; *e però questo prisma è ugualmente resistente per tutto. Il che era da dimostrarsi.*

È chiaro dal contesto essere le figure MGN, MBN due parabole uguali fatte sopra la base comune MN e colle cime rivoltate alla banda opposta; e che però il cuneo parabolico, di cui parla il Galileo (1), mostrandolo ugualmente resistente quando si sporga fuori del muro a qualsivoglia lunghezza (quale sarebbe il solido IGHNPCAE, se il punto G fusse la cima della parabola MGN, ed il punto A dell' opposta QAP, e se collocato fusse col rettangolo EAGI orizzontale e coll' altro EINP stesse fitto nel muro verticale; e qual ancora sarebbe raddoppiandolo il solido MGNPAQ similmente posto col rettangolo QMNP nel muro, sicchè le rette QM, PN fussero orizzontali), è un solido d' uguale resistenza ancora essendo sostenuto da ambi gli estremi, purchè si ponga in sito convenevole, cioè facendo giacere la parabola MGN nel piano orizzontale, sostenuto negli estremi della base della parabola MN: o si pigli il solo QGNP (che è un duplicato cuneo parabolico), o si raddoppi questo di nuovo, come ha fatto il Sig. Viviani, per maggiore stabilità e vaghezza, nel solido prismatico GNBMQOPA; sicchè è verissimo ciò che asserì il Galileo (2), potersi ne' travamenti delle navi levare un

(1) Dialoghi delle Nuove Scienze, pag. 139.
(2) Op. cit., pag. 140.

terzo di peso a tutte le travi senza diminuirne la gagliardia; essendo il presente solido appunto due terzi del prisma rettangolo che gli fusse circoscritto, e di cui tutte le sezioni fussero uguali alla AB. Onde questa speculazione del Sig. Viviani serve appunto a confutare la calunnia opposta al Galileo, prima da Monsù Blondello in Francia e poi dal Signor Marchetti in Italia, spacciando ch' egli altamente s' ingannasse nel proporre che il suo solido parabolico fusse utile a praticarsi con risparmio di più di 33 per 100 senza dispendio di robustezza; il che, sebbene non si verifica ne' solidi parabolici disposti come nelle proposizioni 88, 90 e 92, esaminati a tal fine dal nostro Autore, basta che si dimostri vero nella presente situazione, che del pari è sufficiente a salvare il detto di quel grand' uomo: oltre di che altre maniere non mancano da difenderlo in questo proposito, come si può vedere nella mia risposta apologetica par. 1, cap. 7, n.° 6, pag. 131 e seguenti.

Proposizione XCVI, Teorema LXIV.

Negli emicilindri di base circolare o di base ellittica, come nelle figure si vede (*Fig.* 87), *sostenuti nell' estremità* M, N; *dico pure che se il peso* E *pareggia la resistenza* AB, *anche il peso* F, *uguale ad* E, *pareggerà la resistenza* CD.

Perchè il momento di E *al momento di* F *sta come il rettangolo* MIN *al rettangolo* MLN, *cioè come il quadrato* AG *al quadrato* CH (*per la natura del semicircolo o della semiellisse*), *cioè come il momento di resistenza della sezione* AB *al momento di resistenza della sezione* CD, *per la prop.* 3; *e permutando, il momento di* E *al momento di resistenza della sezione* AB *starà come il momento di* F *al momento della resistenza* CD; *dunque se i primi momenti si pareggiano, come vuole la supposizione, ancora i secondi saranno uguali, cioè il momento* F *pareggerà altresì la resistenza* CD. *Il che ec.*

Questi appunto sono i solidi d' uguale resistenza, trovati dal Blondello e dal Marchetti per surrogarsi al solido parabolico del Galileo, da essi creduto incapace di adattarsi a tale effetto; ma molto prima già inventati dal nostro Autore, oltre gli altri di simile proprietà.

Proposizione XCVII, Teorema LXV.

Ancora con un mezzo cerchio e con una semiellisse, ovvero con due semiellissi di uguale diametro orizzontale e di diverso diametro perpendicolare, si possono avere solidi ch' essendo sostenuti ne' loro termini, siano d' uguale resistenza in riguardo ad un dato peso collocato in qualsivoglia punto interposto fra i suoi sostegni.

Questa proposizione è solo brevissimamente accennata con un semplice sbozzo o piuttosto intrigo di linee, da cui nulla può ricavarsi; ma credo che il vero sentimento dell'Autore sia il seguente.

Intendasi sopra la retta orizzontale MN (*Fig.* 88) l'ellisse MAN, ed il semicircolo MBN; o pure le due ellissi diversamente alte MAN, MBN; e s'intendano alcuni prismi, o per parlare con maggiore proprietà, certe volte a mezza botte, fatte colla grossezza espressa dalle lunette MBNAM: sicchè la volta interiore abbia per centina la curva MBN, è la superiore si termini all'altra curva MAN. Dico esser queste volte solidi nel loro massiccio da per tutto d'uguale resistenza; perchè se il peso E fosse abile a sforzare la grossezza AB, ed il peso F uguale ad E tirasse perpendicolarmente l'altra grossezza CD; essendo tanto il quadrato AG al quadrato CH, quanto il quadrato BG al quadrato DH, nella proporzione del rettangolo NGN al rettangolo MHN, sarà AG ad HC come BG a DH; e permutando, AG a GB come CH a DH; e dividendo, AB a BG come CD a DH; e di nuovo permutando, AB a CD come BG a DH; ed il quadrato AB al quadrato CD (cioè per la prop. 3 il momento della resistenza AB al momento della resistenza CD) sarà come il quadrato BG al quadrato DH, ovvero come il rettangolo MGN al rettangolo MHN, cioè come il momento del peso E al momento dell'ugual peso F, secondo il Galileo; onde siccome il momento primo pareggia il terzo, così il secondo esser debbe uguale al quarto; cioè, se il momento di resistenza della grossezza AB è uguale al momento del peso E, altresì il momento di resistenza nella grossezza CD dee riuscire uguale al momento del peso F: e pertanto la volta da ambe le parti convessa e concava-ellittico o dall'una ellittico e dall'altra circolare (purchè abbiano lo stesso asse traverso le due curvature) sarà da per tutto di uguale resistenza, in riguardo al medesimo peso, dovunque le si posi sul dosso o venga sospeso da qualsivoglia punto della sua concavità. Il che ec.

Proposizione XCVIII, Teorema LXVI.

Se sarà la parabola ABCDE (*Fig.* 89), *la cui base* AE, *l'asse* CF, *e d'intorno ad essa il rettangolo* GE, *in cui applicandosi le rette* IL, MN, OP, *parallele a* CF, *si ritrovino tra* IL, LQ *due medie* LS, LR; *e tra* MN, NB *due medie proporzionali* NV, NT; *e tra* OP, PD *due medie* PZ, PX; *e così sempre; dico che i punti* ASVCZE *sono in una certa curva, la quale se si rivolterà d'intorno alla base* AE *descriverà un solido rotondo, che sarà da per tutto d'ugual resistenza, sostenendosi negli estremi* A, E.

Imperocchè il momento della resistenza nel cerchio descritto da CF *al momento della resistenza nel cerchio descritto da* VN, *sta come il cubo* CF *al cubo* VN *(per la quarta proposizione), cioè come il cubo* MN *al cubo* VN *o come la prima* MN *alla quarta delle proporzionali* NB, *cioè come* CF *ad* NB, *le quali nella parabola sono come il rettangolo* EFA *al rettangolo* ENA, *o come il momento di un dato peso, che posto in* F *bastasse a superare la resistenza di* CF, *al momento del medesimo peso posto in* N; *adunque il momento della resistenza* CF *al momento della resistenza* VN *è come il momento di un peso in* F *al momento dello stesso peso in* N; *e permutando, il momento della resistenza* CF *al momento del peso in* F *sta come il momento della resistenza* VN *al momento del medesimo peso in* N; *onde siccome il momento della resistenza* CF *sarebbe pareggiato da un tal peso posto in* F, *ancora il momento della resistenza* VN *sarebbe uguagliato dallo stesso peso in* N, *che è quanto dire che sarebbero uguali le resistenze del solido in qualsivoglia sezione* CF, VN. *Il che ec.*

La curva AVCZE, da cui nasce questo solido rotondo di uguale resistenza, si chiama una ellisse cubica per avere i cubi dell' ordinate CF, VN proporzionali a' rettangoli AFE, ANE fatti dalle parti del suo diametro AE.

Proposizione XCIX, Teorema LXVII.

La scala delle forze o pesi da appendersi in diversi luoghi d' una leva, ed equivalenti ad una data invariabile resistenza posta nella contralleva, sta nelle linee parallele alla perpendicolare tirata dal sostegno sopra la leva, e terminate da qualunque iperbola, di cui le asintote siano la detta leva e la perpendicolare.

Sia la leva AB (*Fig.* 90) *sostenuta in* C, *e nell' estremo della contralleva* CA *sia la resistenza* D, *che da qualsivogliano punti* F, B *ec. sia equilibrata dagli equivalenti pesi o forze* G, E; *e nell' angolo retto* BCH *sia descritta qualunque iperbola* LI, *di cui siano asintote le linee* CB, CH, *e dai punti* F, B *siano le* FI, BL *parallele all' asintoto medesimo* CH. *Dico che gli equivalenti* G, E *sono fra loro come l' intercette* FI, BL.

Poichè essendo le forze G *ed* E *equivalenti alla resistenza* D, *sarà* G *a* D *come la distanza* AC *alla* CF; *e* D *ad* E *come la* BC *alla* AC: *adunque, per l' ugualità perturbata, come* G *ad* E, *così* BC *a* CF, *ovvero* FI *a* BL, *per essere il rettangolo* CBL *uguale al* CFI, *per la proprietà dell' iperbola; se dunque* FI *rappresenta la misura dell' equivalente* G, *la* BL *rappresenta l' equivalente* E *e così tutte l' altre intercette; sicchè la scala di tali forze o pesi equivalenti sta nelle dette intercette ec.*

Proposizione C, Teorema LXVIII.

La scala de' pesi d' ugual momento al momento variabile d' uno stesso peso nella leva che successivamente muti centro o sostegno, stante la medesima distanza de' contrappesi, è nelle parallele condotte dentro l' angolo asintotale della iperbola (ma però terminate fra la curva ed una parallela all' asintoto).

Penda il peso I dal punto D della libra DC (*Fig.* 91), e con esso si equilibri il peso K, posto il sostegno in varj punti della detta libra come in E, *e*. Pongasi perpendicolare a DC la EG, ovvero *eg* proporzionale al peso K, essendo DH proporzionale al peso I; sarà dunque DE ad EC, come K ad I, cioè come GE a DH; e per tanto il rettangolo EDH sarà uguale al rettangolo CEG; ed aggiunto di comune FEC, sarà il rettangolo HDC uguale al GFB; e però i punti D, G saranno nell' iperbola DG, che riguarda gli asintoti HB, BC. E similmente, posto il sostegno *e* oltre il punto D, e fatta la stessa costruzione, saranno uguali i rettangoli *e*DH, C*eg*; i quali tolti di comune dallo stesso rettangolo C*of*, rimarrà HDC uguale al *gf*B; ed i punti D, *g* nella stessa iperbola fra l' angolo asintotale HBC; onde se DH rappresenta il peso I, le GE, *ge*, terminate fra l' iperbola e la DC parallela all' asintoto BH, rappresenteranno i contrappesi K equivalenti allo stesso I, posto che la libra DC sia sostenuta in qualsivoglia punto E ovvero *e*; che però la scala di cotesti pesi sta nelle parallele condotte dentro l' angolo asintotale, ma determinate dalla iperbola e dalla retta condotta parallela ad uno degli asintoti. Il che ec.

Proposizione CI, Teorema LXIX.

La scala de' momenti di tutte l' uguali linee AB, CD, EF (*Fig.* 92) *intercette da linee parallele, o pure di tutti i piani* AB, CD, EF, *in un parallelepipedo, prisma o cilindro ec., sta fra le linee* BC, DH, FI, *nell' angolo rettilineo* FLI *intercette.*

Questo è chiaro, perchè le grandezze AB, CD, EF essendo uguali, i momenti loro sono come le distanze dal sostegno LB, LD, LF: e però ancora sono proporzionali all' ordinate del triangolo BG, DH, FI. Il che si dovea dimostrare.

Corollario I. *Quindi ancora i momenti de' pesi o cilindri eguali* AB, CD (*Fig.* 93), *posti in varie lontananze e contrappesati dallo stesso invariabile momento del peso* O, *crescono come le parallele tirate sotto ad un angolo rettilineo.*

Corollario II. *Se la cassa* AB (*Fig.* 94) *sarà piena d' acqua, e s' in-*

tenderà muoversi il diaframma KB *sempre parallelo a sè stesso, si anderà abbassando l'acqua nel continuo slontanamento di esso diaframma; ed il momento del peso di tutta la detta acqua contro il momento dello stesso contrappeso* O *anderà crescendo come le linee parallele nel triangolo* BLG.

Perchè il peso dell'acqua sarà uguale, ed il suo momento sarà proporzionale alle distanze del suo centro di gravità dal sostegno L, ovvero come le loro duple, cioè come l'intere lunghezze LB, LD, o pure come l'ordinate BG, DH nel detto triangolo. Il che ec.

Proposizione CII. Teorema LXX.

I momenti delle linee DE, FG, LM *nel triangolo* ABC (*Fig.* 95) *crescono e scemano come le linee* EH, GI, MO *nella parabola quadratica* AIOC, *la cui base* AC; *o pure sono come i rettangoli* DEA, FGA, LMA *ec.*

Perchè il momento di DE al momento di FG (posto il sostegno in A) è in ragione composta della DE alla FG, che è quanto dire di EC a GC, e della distanza EA alla distanza AG; ma di queste proporzioni si compone ancora la ragione del rettangolo AEC al rettangolo AGC; dunque il momento DE al momento FG sta come il rettangolo AEC al rettangolo AGC, ovvero come le linee EH, GI condotte nella parabola parallele al diametro: ed essendo similmente la ragione dei rettangoli DEA, FGA composta delle distanze AE, AG e di quella delle grandezze ED, GF, come appunto la ragione de' momenti suddetti: è chiaro essere i detti momenti proporzionali ancora a que' rettangoli. Il che ec.

Corollario I. Se girando il triangolo BAC d'intorno il lato AB ne nascerà un cono, le superficie cilindriche descritte dalle linee DE, FG saranno altresì come i rettangoli DEA, FGA; e però riusciranno come i momenti delle suddette linee. Il che però è generale di tutte le figure ABC sostenute in A, convenendo a qualsivoglia specie di figura l'essere i momenti delle ordinate alla base AC proporzionali a' rettangoli di dette ordinate nelle distanze dal sostegno; e conseguentemente alle superficie cilindriche generate da esse ordinate nel solido rotondo che nasce rivolgendosi la figura d'intorno all'asse AB.

Corollario II. *Lo stesso segue ne' momenti de' piani o circoli* DE, FG *nel conoide parabolico quadratico* ABC (*Fig.* 96); *imperocchè questi piani crescono e scemano proporzionalmente alle linee del triangolo suddetto* ABC; *e però sono detti momenti misurati dalle rette* EH, GI *parallele al diametro della parabola fatta sopra la base* AC.

Corollario III. *Perchè poi la maggiore di tutte queste linee condotte nella parabola è il diametro che corrisponde al mezzo della lunghezza del* *triangolo o del conoide; quindi il massimo momento delle ordinate ne triangolo, o de' piani paralleli alla base di esso conoide, è nel mezzo di tutta la lunghezza* AC.

PROPOSIZIONE CIII, TEOREMA LXXI.

La scala de' momenti di tutte le linee sottotese ad un angolo rettilineo (posto il sostegno nel detto angolo) sono come le linee determinate dal trilineo parabolico.

Imperocchè i momenti delle linee CB, EF (*Fig.* 97) *sono come i quadrati delle distanze* BA, FA; *e però sono come le rette* BD, FG, *che ad esse corrispondono nel trilineo della parabola quadratica.*

Corollario. *Quindi i momenti de' rettangoli, de' prismi, de' cilindri, tirati fuori d'un muro, ed in somma di tutte le grandezze che sono crescenti a misura delle distanze, crescono come le linee intercette dal detto trilineo della quadratica parabola.*

PROPOSIZIONE CIV, TEOREMA LXXII.

I momenti delle grandezze, le quali crescono in ragione de' quadrati delle distanze, come sarebbero le linee intercette dal trilineo parabolico quadratico (*Fig.* 98) BC, DE, *ovvero i cerchi* NC, ME *del cono* MAE, *ovvero i piani di una piramide ec. sono come le linee* CF, EG *intercette dal trilineo parabolico cubico* EAG.

Perchè ne' momenti di tali grandezze, alla ragione di esse, la quale già si suppone duplicata di quella delle distanze, si aggiunge un'altra volta la ragione delle stesse distanze; onde si compone la ragione de' momenti BC, DE, ovvero NC, ME triplicata dalla ragione AC, AE, la quale è la stessa de' cubi AC, AE, cioè delle linee CF, EG nel trilineo della parabola cubica; onde è manifesto ciò che era proposto da dimostrarsi.

Corollario. Quindi i momenti de' triangoli simili e de' prismi triangolari e de' conoidi parabolici cavati fuori d'un muro, sono proporzionali alle linee del medesimo trilineo della cubica parabola; essendo queste grandezze che crescono come i quadrati delle loro distanze dal sostegno a cui si appoggiano, come nelle proposizioni 74 e 76 fu dimostrato.

PROPOSIZIONE CV, TEOREMA LXXIII.

I momenti delle grandezze crescenti in ragione de' cubi delle distanze, crescono come le linee intercette dal trilineo parabolico biquadratico.

La dimostrazione è simile alle precedenti: aggiungendosi sempre alla ragione delle grandezze quella delle distanze, per fare la ragione de' momenti; onde generalmente si può dire che se le grandezze crescono in qualche ragione moltiplicata di quella delle distanze, i momenti vengono ad augumentarsi in una ragione sempre un grado più alta; e però le grandezze essendo come i cubi, i momenti diventano come i biquadrati delle distanze.

Corollario I. *Quindi i momenti delle linee intercette nell' angolo cubico parabolico, crescono come le linee interposte al trilineo parabolico biquadratico.*

Corollario II. *I momenti de' trilinei della parabola quadratica, ovvero i momenti de' coni e piramidi simili, cavati fuori d' un muro, sono come le dette linee sottotese all' angolo, che fa la tangente della cima colla curva parabolica biquadratica (come nella prop. 72 si è veduto).*

Proposizione CVI, Teorema LXXIV.

I momenti dell' applicate DE, BC *nella parabola quadratica* ABD, (*Fig.* 99) *sono come i cubi delle medesime* DE, BC.

Imperocchè i detti momenti hanno ragione composta delle linee DE, BC *e delle distanze* EA, CA, *o pure (per la natura della parabola quadratica) de' quadrati* DE, BC. *Ma ancora il cubo* DE *al cubo* BC *ha la ragione composta di quella della linea* DE *alla* BC *e di quella del quadrato* DE *al quadrato* BC; *dunque il momento della linea* DE *al momento della* BC *è come il cubo* DE *al cubo* BC. *Il che si dovea dimostrare.*

Corollario I. *Perchè nella parabola quadratica il cubo* DE *al cubo* BC *sia come la superficie* DAE *alla superficie* BAC *(per la prop. 62) saranno i momenti delle dette ordinate proporzionali alle medesime superficie.*

Corollario II. *Che se* ABDE *sarà un conoide parabolico quadratico, i momenti de' cerchi* DE, BC *saranno come i quadrati delle distanze* EA, CA *ec.*

Corollario III. *E se fusse* ABDE *la parabola cubica, sarebbero i momenti delle linee* DE, BC *come il biquadrato* DE *al biquadrato* BC *ec.*

Corollario IV. In tutte quelle figure piane e solide, che dal Signor Viviani nella proposiz. 61 si appellano di proporzionale aumento, cioè che al rettangolo o cilindro o prisma circoscritto hanno sempre una istessa determinata ragione, sempre si verifica che i momenti dell' ordinate o de' piani paralleli alla base, stando la figura appoggiata al sostegno nella sua cima, sono come le stesse parti della figura, che dalla cima restano tagliate dalle ordinate medesime, o da' piani paralleli alla base. Imperocchè queste porzioni di figure, come quelle che sono proporzionali a' rettangoli, o cilindri o prismi circoscritti, sono in ragione composta di quella delle basi e delle altezze, che sono lontananze di dette basi dalla cima; ma ancora i momenti di esse basi, cioè delle rette, o piani paralleli, sono in ragione composta delle medesime; dunque sono proporzionali i momenti di esse alle figure medesime tagliate dalla sua cima.

Corollario V. In tutte le suddette figure, essendo l' ordinate o i piani paralleli proporzionali a qualsivoglia dignità delle distanze dalla cima; i momenti, che oltre la ragione delle grandezze importano un' altra volta le ragioni delle dette distanze, saranno proporzionali alle dignità di esse distanze di un grado superiori, cioè denominate da un numero maggior di una unità di quello da cui erano denominate le dignità delle distanze medesime, proporzionali alle ordinate, ovvero a' piani paralleli alla base nella figura che sia appoggiata nella stessa sua cima.

Proposizione CVII, Teorema LXXV.

I momenti di tutte le linee CD, EF *nella parabola quadratica* ABG (*Fig.* 100), *sostenuta su l' appoggio* A *corrispondente alla base* AB, *sono tra di loro come i rettangoli* CDA, EFA *ec.*

Già ho avvisato nel coroll. 1 della proposiz. 102, essere ciò generalmente vero in qualsivoglia genere di figura; onde non accade altra dimostrazione, bastando il discorso fatto in tale proposito nel luogo citato.

Corollario. *Perchè il massimo di tali rettangoli è* AHI, *dove la* AG *talmente resta divisa in* H, *che la* GA *sia sesquialtera di* AH; *dunque il massimo momento sarà quello dell' applicata* HI, *in distanza di due terzi dalla base* AB.

Che sia AHI (*Fig.* 101) il maggiore di tutti i rettangoli iscritti nella parabola, essendo AG sesquialtera di AH, si prova così: Condotta per I la tangente KIL, sarà HL dupla di HG; e però sarà la stessa HL uguale ad AH, che supponevasi parimente dupla di HG; dunque il rettangolo AHIM è adattato alla metà della linea AL, mancando della figura IHL simile ad NDL, per cui mancherebbe qualunque altro rettangolo ADN applicato altrove alla stessa linea; e però, secondo Euclide, sarà IHAM maggiore di qualunque ADN iscritto nello stesso triangolo KLA; ma ADN è maggiore di ADC iscritto nella parabola; dunque tanto più IHAM è maggiore di qualunque altro rettangolo ADC iscritto nella parabola colla larghezza AD minore o maggione di AH sopra determinata. Per tanto il detto triangolo è il massimo di tutti; il che ec.

PROPOSIZIONE CVIII, TEOREMA LXXVI.

I momenti de' piani CD, EF (*Fig.* 102) *paralleli alla base* AB *nel solido rotondo parabolico cubico* ABG, *sostenuto in* A, *sono come i parallelepipedi o prismi rettangoli, che abbiano per loro basi i quadrati* CD, EF, *e per altezze le distanze* AD, AF.

Ciò parimente si verifica in qualsivoglia solido rotondo o piramidale o prismatico o d'altra maniera, che abbia per sezioni tante figure simili proporzionali a' quadrati de' diametri o de' lati omologhi, come delle CD, EF (ed ancora quando non fussero figure simili prendendo quadrati uguali o proporzionali ad esse, e surrogandoli in vece de' quadrati CD, EF); alla proporzione de' quali aggiungendosi quella delle distanze AD, AF, si compone la ragione de' momenti di essi piani paralleli, uguale a quella de' parallelepipedi o prismi rettangoli. nella proposta del Viviani enunciati.

APPENDICE

Questo è quanto si è trovato esistente nel fascetto de' fogli raccolti dal Viviani per illustrare questa importante materia delle Resistenze, sigillato col sigillo del Sereniss. Sig. Cardinale Leopoldo di Toscana, e firmato di propria mano di S. A. Reverendissima fin sotto il dì 2 marzò 1667 ab Incarn., come raccontai nella mia risposta apologetica parte 1, pag. 88. Nell'ordinare la quale opera, se io abbia gran fatica durato, non accade che stia ad esagerarlo, che ben potrà il lettore da sè comprenderlo riflettendo che si trattava di dare forma di libro ad una materia del tutto indigesta ed abbandonata affatto dal proprio Autore, il quale disperando di potere aver ozio sufficiente a perfezionarla, soltanto a fine di autenticare la verità d'aver egli un tempo fa intrapresa cotal fatica, ne raccolse in fretta e senza scelta ed ordine veruno le cartucce, nelle quali si trovava d'avere disteso alcuna cosa a tal maniera attenente, e fecele dal suddetto principe sigillare.

Come che non erano le proposizioni disposte col metodo convenevole, io le ho ridotte a quello che ho creduto essere il migliore, e che rendeva le proposizioni più tra di loro connesse e dipendenti l'una dall'altra, con passare dalle cose più semplici alle più composte. Le proposizioni meccaniche attenenti a' momenti di varj pesi, disposti diversamente in varie libre, erano dall'autore distinte con nome di *Lemmi*; ma io, ad imitazione d'altri matematici, le ho ridotte in ordine di proposizioni; e solamente alcune proposte sono state da me chiamate *Quesiti*, perchè corrispondevano ad alcune proposte, nelle quali l'Autore non avea per anco determinata la sua sentenza, ma solo proponeva d'investigare ciò che si dovesse tenere; e l'altre indifferentemente le ho volute nominare *Teoremi*. In molte cose mi è convenuto farla più da indovino che da geometra, per essere solo toccate in iscorcio le proposte, e con maniera alquanto oscura, come accade nelle cose che notiamo per un semplice nostro ricordo, senza metterci in pena che possano essere intese da altri; nel che se non avrò sempre felicemente incontrato il vero sentimento dell'Autore, sarò degno di qualche compatimento. Io posso attestare con tutta sincerità d'avere sempre addotte fedelmente le sue parole, non alterandole giammai se non, molto di rado, in qualche minuzia, per rendere più chiaro e compiuto il senso della proposta: è ben vero che essendo alcune proposizioni distese in toscano ed altre in latino (anzi taluna mezza nell'uno e mezza nell'altro idioma) ho stimato bene il darle tutte con uniforme stile nella nostra favella distese, senza però mai dipartirmi dal sentimento dell'Autore e dal metodo di dimostrare da lui usato, come si può tuttavia riscontrare nell'originale: avendo ancora distinto il testo di lui da ciò che di mio vi ho aggiunto per illustrarlo; acciocchè niuno possa prendere sbaglio in attribuire a me le profonde speculazioni da esso ritrovate, o viceversa in ascrivere a lui que' difetti che per avventura mi saranno scorsi dalla penna. Se avesse potuto l'Autore medesimo perfezionare quest'opera, non vi ha dubbio che l'averemmo assai più compiuta e stesa a cose di maggiore rilievo, che non si è potuto fare dalla mia debolezza: e sopra tutto, alcune definizioni ed alcune proposizioni, le quali ora ci pajono superflue, o non attenenti alla materia delle resistenze, e sono come semi d'altre profonde ricerche, rimasi sterili e senza frutto, perchè abbandonati dalla cultura di chi li piantò, allora non ci comparirebbero tanto inutili ed inopportune al nostro proposito, ma fecondissime si troverebbero di nuove importantissime verità. Comunque sia, gradisca il lettore queste poche notizie ripescate, alla meglio che si è potuto, dall'oblivione in cui giaciute sarebbero, se l'attenta cura di chi presiede alla nuova edizione dell'opere del Galileo non rifletteva ad eseguire almeno in parte l'idea, che già ebbe il Sig. Viviani, d'arricchirle co' suoi pensieri a tal fine insieme raccolti.

E perchè nella mia risposta apologetica parte 1, cap. 7. n.° 2, oltre i solidi d'uguale resistenza ritrovati dal nostro Autore, nelle proposizioni 48, 53, 55, 57, 58, 59, 60, 63, 95, 96, 97, 98, ho dimostrato come ritrovare si possano infiniti solidi d'uguale resistenza, si nel caso che da una parte sola siano fitti nel muro, e si quando vengano retti in ambidue gli estremi: e tanto prescindendo dal proprio loro peso, quanto computandolo; ed ancora paragonando tra di loro, non già le parti di un medesimo solido, ma più e diversi solidi dello stesso nome (come fa il Viviani nelle proposiz. 67 e 68), stimo bene di soggiungere qui tradotti dal latino i problemi da me nel citato luogo spiegati, acciocchè servano di corteggio alle suddette proposizioni del nostro Autore, le quali in queste proposte si confermano e si ampliano a più universale applicazione, con gran vantaggio della pratica di cui in oggi si suole far tanto caso nelle ricerche della meccanica.

Tutto l'artifizio ivi esposto consiste nel considerare le due figure dalle quali può intendersi generato un solido: cioè quella che esprime il suo profilo e quella che gli serve di pianta; Come per cagione di esempio, nel cuneo parabolico IABN (*Fig.* 103) si vede che nasce dalla parabola verticale IFBA e dal rettangolo orizzontale BAK, moltiplicandosi le ordinate AI, CF della prima figura, che mostra il profilo del solido, coll'ordinate AK, RC della seconda, che gli serve di pianta, onde ne provengono i rettangoli IAKN, FCRM, che sono le varie sezioni del solido: ed essendo data o la verticale figura del profilo o l'orizzontale della pianta, si dimostra come geometricamente possa determinarsi l'altra in maniera tale, che da ambidue ne nasca un solido di uguale resistenza, secondo le condizioni che si ricercano; sicchè potendosi variare in infinito qualsivoglia delle due figure generatrici, a cui possiamo per avventura essere obbligati, o dalla materia stessa che ce la porga bell'e fatta, o dal luogo che non sia comodamente capace d'altra figura, o dall'arbitrio di chi voglia un solido di un tale determinato contorno, è manifesto che infiniti solidi d'uguale resistenza si potranno assegnare: per non dir nulla, che quanto qui si dice de' solidi, le di cui sezioni sono tanti rettangoli, agevolmente applicare si potrebbe a' corpi, le sezioni de' quali fossero tanti rettangoli o tante parabole di qualsivoglia grado, o tante ellissi, o insomma tali omogenee figure che più ci piacciano, purchè sieno proporzionali a' rettangoli circoscritti.

Problema I.

Data la figura orizzontale AFbB (*Fig.* 104) d'una trave che debba impegnarsi nel muro col suo termine A, ritrovare la figura verticale

AEGB da combinarsi coll' altra, perchè ne risulti un solido d' uguale resistenza, in riguardo al peso da attaccarsi al termine B di esso.

Condotta la linea BF, e tirando qualsivoglia ordinata DL all' asse AB che seghi FB in M, si faccia, come DL ad LM, così il quadrato di qualunque data linea AE al quadrato d' un' altra GL ordinata al medesimo asse nel punto L parallela ad AE. Dico che i punti E, G saranno nella nuova curva EGC, corrispondente all' effetto che si desidera. Imperocchè la ragione di AF ad LM (cioè della lunghezza AB ad LB) sarà composta delle ragioni di AF ad LD e di LD ad LM, cioè del quadrato AE al quadrato LG; per la qual cosa, se si compiranno i rettangoli FAE, DLG, e così gli altri in simigliante maniera ritrovati, fin tanto che se ne faccia un solido che abbia per base la data figura AF*b*B e per profilo verticale l' altra AEGCB ora determinata: questo sarà tale, che i momenti delle resistenze nelle sue varie sezioni (essendo in ragione composta delle basi AF, LD, e de' quadrati dell' altezze AE, LG) saranno proporzionali alle lunghezze tagliate dal suo termine B; cioè a' momenti di un medesimo peso ivi attaccato: e però sarà di uguale resistenza il solido o si appoggi nel taglio del muro sopra l' ordinata AF o sopra l' ordinata LD della data base orizzontale. Il che ec.

Corollario I. Se la base AF*b* (*Fig.* 105) sarà un rettangolo, cioè se l' ordinata AF sarà da per tutto uguale alla LD, sarà il quadrato EA al quadrato GL come FA ad LM; ovvero come AB a BL. E però la curva EGB sarà una parabola, il cui asse BA, ed il solido quindi prodotto è il cuneo o prisma parabolico già considerato dal Galileo.

Corollario II. Se FBA (*Fig.* 106) fusse un triangolo, sarebbe DL uguale ad LM; e però ancora il quadrato EA uguaglierebbe il quadrato LG: sicchè la faccia verticale sarebbe un rettangolo; ed il solido quindi nato diventerebbe il cuneo triangolare già ritrovato dal Sig. Viviani, proposiz. 48.

Corollario III. Ma quando FBA (*Fig.* 107) fosse una parabola cubica, sarebbe la ragione di FA a DL suttriplicata della ragione di AB a BL o di FA ad LM; onde quella di DL ad LM sarebbe duplicata di quella di FA a DL; ma la stessa, per costruzione, debb' essere duplicata di AE ad LG (dovendo corrispondere a' quadrati loro), adunque la ragione di AF a DL sarà la stessa con quella di AE ad LG; onde ancora la curva EGB sarà una parabola cubica; ed il solido fatto da' quadrati delle sue ordinate, o il conoide generato da cotal figura nel rivoltarsi d' intorno al suo asse, come composto di cerchi nati dall'applicate e proporzionali a' detti quadrati, sarà d'una uguale resistenza, come notò il Sig. Viviani alla prop. 53.

Corollario IV. Generalmente, se la data figura sarà qualunque dell'infinite parabole o iperbole, le di cui ordinate y si riferiscano a qualsivoglia potestà delle porzioni tagliate dall'asse x, secondo l'universale equazione $y = x^m$ (dinotando m qualunque esponente positivo o negativo, intiero o rotto); la natura dell'altra curva ricercata sarà tale che la sua ordinata z dovrà riferirsi alle potestà delle medesime x tagliate dalla cima dell'asse, l'esponente delle quali potestà sia la metà dell'eccesso di 1 sopra m; cioè, che la sua equazione sarà $z = x^{\frac{1-m}{2}}$. Di maniera che la curva cercata sarà parimente qualche specie di parabola, qualunque volta il detto esponente riesca positivo (cioè quando m è minore dell'unità, sicchè possa da essa sottrarsi); ma negli altri casi sarà qualche razza d'iperbola, rimanendo l'indice negativo (quando non rimanga nullo, il che darebbe l'ordinate tutte uguali, come nel caso del rettangolo ritrovato nel coroll. 2) col sottrarsi il numero maggiore m dalla detta unità: ciò che sempre accade quando la data curva è un trilineo parabolico, in cui le applicate si riferiscono alle porzioni della tangente verticale.

Corollario V. Se la data curva FDB fusse un quarto d'ellisse o di circolo, ne verrebbe la curva cercata EGB di tale natura, che la porzione dell'asse BL al doppio di BA sarebbe come il biquadrato dell'ordinata GL alla somma de' biquadrati d'ambidue le GL, EA.

Problema II.

Dato il profilo verticale della curva ECB (*Fig.* 104), ritrovare l'altra figura che aver debbe la base orizzontale per ottenere lo stesso effetto.

Si faccia qualunque triangolo BAF; indi, come il quadrato GL al quadrato EA, così stia la retta LM intercetta nel detto triangolo alla retta LD, che questa sarà una dell'ordinate alla curva che si cerca; e nella stessa maniera si troveranno tutte l'altre, come è chiaro per lo converso della precedente costruzione. O pure, congiunta la BE, che sega in H l'ordinata GL, si faccia, come il quadrato GL al rettangolo di AE in HL, così AF ad LD; e sarà similmente il punto D nella curva FDB ricercata; merceocchè questa costruzione confronta appunto con quella di sopra.

Corollario I. Quindi ancora si potrà dedurre la stessa costruzione de' solidi ritrovati dal Galileo e dal Viviani, secondo che vorrà supporsi la data figura verticale, o una parabola o un rettangolo o una parabola cubica, imperocchè l' altra figura orizzontale riuscirà respettivamente un rettangolo o un triangolo o una simile cubica parabola.

Corollario II. Che se la figura AEGB (*Fig.* 108) fusse un triangolo, l' altra FD*b* sarebbe una iperbola tra gli asintoti AB*b*; imperocchè essendo GL uguale ad HL, sarà il quadrato GL al quadrato AE come il quadrato LM al quadrato AF; e pertanto essendo nella stessa ragione LM ad LD, saranno LM, AF, LD continuamente proporzionali; cioè LD ad AF come AF ad LM o come AB a BL (o ancora come AE a GL); per la qual cosa il rettangolo DLB sarà uguale al rettangolo FAB, come richiede la natura dell' iperbola; ed oltre a ciò non solamente le sezioni del solido che ne risulta sarebbero d' uguale resistenza, ma sarebbero uguali di spazio per essere i rettangoli AEF, LGD tra di loro uguali.

Corollario III. Se la data curva è un quarto di cerchio o di ellisse, l' altra FD*b* (*Fig.* 109) diventa una iperbola toccata in F dalla retta FB, di cui un asintoto sarebbe la retta AB, l' altro sarebbe KI perpendicolare ad AB nella distanza AI uguale ad AB, sicchè il centro d' essa sarebbe oltre il punto A nella BA altrettanto prolungata.

Corollario IV. Se fusse la proposta curva EGB una iperbola (*Fig.* 110) con la cima in B e l' asse BA, ancora la curva FD*b* sarebbe iperbola, di cui un asintoto AB, l' altro IK, distante dal punto B per tutta la quantità del lato trasverso della detta iperbola EGB. Di maniera che il centro I di questa nuova curva FD*b* caderebbe nella cima dell' iperbola opposta alla data EGB.

Corollario V. Se finalmente la data curva EGB sarà qualunque dell' infinite parabole o iperbole riferite all' asintoto, ancora la curva che si cerca sarà iperbolica o parabolica, come nel simile corollario 4 della precedente si è veduto.

Problema III.

Data la figura orizzontale AF*b*B (*Fig.* 104) d' una trave da appoggiarsi a due sostegni ne' suoi termini AB: ritrovare la figura verticale AEGB, che combinata coll' altra faccia un solido ugualmente resistente da per tutto, dovunque si ponga un dato peso che lo aggravi ne' punti di mezzo a' suoi estremi.

Si faccia, come la DL a qualunque data AF, così il rettangolo ALB al quadrato LG. Sarà il punto G nella curva che si cerca, la quale soddisfarà al quesito. Imperocchè il prodotto degli estremi, cioè del quadrato LG nella DL (il quale prodotto è proporzionale al momento di resistenza nella sezione LDG, per essere in ragione composta del quadrato dell'altezza LG e della base LD) uguaglierà il prodotto dei mezzani, cioè della costante AF nel rettangolo ALB (il quale secondo il Galileo è proporzionale al momento d'un dato peso espresso per la costante AF, ed applicato nel punto L al vette AB); adunque il peso precisamente bastante a spezzare il solido in una di dette sezioni, è bastante altresì a romperlo in qualunque altra dovunque resti applicato; e non potendo vincere la resistenza d'una di tali sezioni, nè meno sarebbe abile a vincerne verun'altra. Il che ec.

Corollario I. Se la base AF*b*B sarà rettangola (*Fig.* 111) averà qualunque ordinata LD la stessa ragione alla costante AF; onde il rettangolo ALB al quadrato LG avrà altresì una medesima data ragione, e però la figura verticale AGB sarà un circolo o un'ellisse, sicchè quindi ne nascerà il prisma semicircolare o semiellittico trovato prima dal Viviani nella prop. 106 e poi dal Blondello e dal Marchetti e quindi da altri moderni osservato.

Corollario II. E se la data curva orizzontale fusse una parabola ADB (*Fig.* 112) descritta sopra la base AB, essendo l'applicate DL, parallele all'asse, proporzionali a'rettangoli ALB, sarà la ragione della DL alla costante AF uguale alla ragione del rettangolo ALB ad un costante quadrato GL; sicchè la figura verticale AECB sarà un rettangolo d'una data altezza; e però il solido quindi generato sarà il prisma parabolico dal Sig. Viviani nella prop. 95, e poscia dal Blondello e da altri moderni, avvertito.

Corollario III. Se ADB (*Fig.* 113) fusse una ellisse di tal natura che il cubo dell'ordinata DL fusse proporzionale al rettangolo delle parti del diametro ALB, o uguale al solido che avesse per base il detto rettangolo e per altezza la costante AF, come suo lato retto: allora sarebbe LD ad AF come il rettangolo ALB al quadrato LD; ma per costruzione è altresì il rettangolo ALB al quadrato LG nella stessa ragione di LD ad AF; dunque il quadrato LG sarebbe uguale ad LD; e però la curva verticale AGB sarebbe la stessa di specie e di numero colla data orizzontale ADB; onde il solido quindi nato averebbe nelle sue sezioni tanti quadrati dell'ordinate LD; e conseguentemente, girando la detta ellisse cubica ADB intorno l'asse AB, produrrebbe un solido rotondo, le cui sezioni essendo i cerchi fatti dall'applicate LD proporzionali a'suddetti quadrati, si averebbe una sferoide d'uguale resistenza, come osservò, prima d'ogn'altro, il Sig. Viviani alla proposizione 98.

Corollario IV. Se la data figura orizzontale fusse il triangolo AFB (*Fig.* 114), la verticale sarebbe una parabola A*b* descritta coll' asse AB. Imperocchè LD ad AF è come BL ad AB, ovvero come il rettangolo ALB al rettangolo LAB; e nella stessa ragione dovendo essere il rettangolo ALB al quadrato LG, sarà questo uguale al rettangolo LAB; di maniera che BA sarebbe il lato retto di questa parabola AG*b*. Onde si ha un'altra nuova specie di solido parabolico d' uguale resistenza, ancora quando è sostenuto da ambi gli estremi: e si potrebbe ancora utilmente adattare a maniera di cupola, retta sopra un pilastro di mezzo sottoposto al centro B, ed intorno in tutto il suo giro appoggiata ne' lati d' un poligono F*f*, che facessero il recinto d' un edifizio rotondo.

Corollario V. Generalmente, se la curva orizzontale sarà qualunque dell' infinite parabole o iperbole riferite all' asintoto AB, di maniera che l' ordinate di essa corrispondano alle potestà delle porzioni dell' asse, indicate dall' esponente *m*, sempre la verticale figura sarà una specie di ellisse, in cui i quadrati dell' ordinate sieno come il prodotto da un segmento del diametro nella potestà del residuo indicata dall' eccesso dell' unità sopra l' esponente *m*; cioè da $1-m$.

Problema IV.

Data la curva verticale AEGB (*Fig.* 104), ritrovare viceversa l' orizzontale AFDB atta al medesimo effetto.

Si faccia, come il quadrato dell' ordinata GL al rettangolo de' segmenti della base ALB, così una retta costante AF, scelta ad arbitrio, all' ordinata LD. Sarà il punto D nella curva che si cerca; come è manifesto per la costruzione della precedente.

Corollario I. Facil cosa è il dedurre ancora di qui gli stessi solidi d' eguale resistenza determinati dal Viviani e dagli altri e da noi nella precedente; perchè supponendo essere la curva verticale un semicircolo o semiellisse, si ha subito nell' orizzontale il rettangolo: e supponendo ivi il rettangolo, qui si ha la parabola ordinaria descritta sopra la base AB; e se ivi si ha l' ellisse cubica, qui nasce la stessa specie di figura; e se ivi si mette la parabola adiacente all' asse AB, qui nasce il triangolo ec.

Corollario II. Se la data EGB fusse un triangolo (*Fig.* 115), l' altra FAD*b* sarebbe una iperbola, il cui asintoto sarebbe la retta CB, ed essa curva passerebbe per lo punto A, ed il centro C sarebbe sopra il punto B d' un intervallo dato BC, quarto proporzionale dopo i quadrati AE, AB e la retta AF.

Corollario III. Ma essendo EGB qualunque dell' infinite parabole o iperbole, in cui le potestà dell' ordinate che hanno per esponente il numero m sieno proporzionali alle parti dell' asse tagliate dalla cima B, sarà la curva orizzontale ricercata una tale specie d' ellisse, le di cui ordinate sieno come i prodotti dall' una delle parti dell' asse nella potestà della rimanente, indicata dall' eccesso dell' unità sopra il duplo di m, cioè da $1-2m$.

PROBLEMA V.

Se ad una trave che sporga in fuori da una parete si dovesse soprapporre qualche solido prismatico o cilindrico, o vi si dovesse alzare sopra una parete d' uguale grossezza ed altezza da per tutto; ritrovare infinite figure, secondo le quali segando la detta trave, riesca in qualunque suo punto egualmente gagliarda e forte per reggere il peso soprapposto.

Si proponga ad arbitrio l' una o l' altra delle due figure (*Fig.* 104) FDB orizzontale, ovvero EGB verticale, che per trovare l' altra basta discorrere così: I momenti de' pesi delle grandezze prismatiche, corrispondenti alle lunghezze AB, LB, sono, per la prop. 3 del Galileo (o per la 20 del Viviani, o per lo corollario della prop. 103 del medesimo) come i quadrati di tali lunghezze. Bisogna dunque che ancora i momenti delle resistenze nelle varie sezioni d' un solido, i quali sono come il prodotto della base nel quadrato dell' altezza, siano proporzionali a' quadrati delle lunghezze. Si faccia pertanto, come il quadrato dell' ordinata verticale GL al quadrato della porzione dell' asse LB, così una retta costante AF ad LD: che questa sarà la corrispondente ordinata nella figura orizzontale. O pure viceversa, come LD ad AF così stia il quadrato di BL al quadrato di LG, che sarà questa l' ordinata nella figura verticale. Imperocchè il prodotto della base LD nel quadrato dell' altezza LG sarà, in vigore di questa costruzione, uguale al prodotto della costante AF nel quadrato di LB; e però sarà proporzionale al detto quadrato: onde essendo i momenti delle resistenze proporzionali a' momenti de' pesi sovrapposti; se tutto il peso non romperà tutto il solido nella sezione EAF impegnata nel muro, nè meno la porzione del peso corrispondente alla sola lunghezza LB sarà abile a romperlo nella sezione GLD; che però tutto il solido sarà in questo senso da per tutto ugualmente resistente. Il che ec.

Corollario I. Se AFDB sarà un rettangolo (*Fig.* 116), sarà AEGB un triangolo, onde ne nascerà il prisma triangolare, proposto già per tale effetto dal Sig. Leibnizio negli atti di Lipsia del 1684, e da Monsù

Varignon nelle Memorie dell'Accademia di Parigi del 1702 art. 17, essendo il quadrato ID uguale, o in una data ragione, al quadrato dell'arbitraria AF, e però ancora il quadrato BL riuscendo uguale, o in una costante ragione, al quadrato LG.

Corollario II. Ma se sarà AECB un rettangolo (*Fig.* 117), ne verrà AFDB un trilineo parabolico adiacente alla tangente verticale AB; e raddoppiando la figura AFDB d'intorno la retta BA, si averà un cuneo parabolico assai vago ed opportuno all'effetto bramato.

Corollario III. Se la figura orizzontale sarà un triangolo AFB (*Fig.* 118), la verticale sarà una parabola d'intorno l'asse AB, onde ne nasce il solido AFHB, quale si dimostra nella figura.

Corollario IV. Se la verticale sarà un quarto di cerchio o di ellisse EGB (*Fig.* 119), l'orizzontale BDF diventa una iperbola, il di cui asintoto NE, parallelo ad AB, ma distante da esso per un dato intervallo, uguale alla costante AF.

Corollario V. Se l'una e l'altra di queste figure sarà una parabola cubica del secondo ordine, in cui i cubi dell'ordinate corrispondano a' quadrati delle porzioni dell'asse, ancora l'altra sarà della stessa natura; di maniera che un solido fatto da' quadrati di cotale parabola, o piuttosto un solido rotondo fatto da' cerchi generati dall'ordinate nel rivolgersi la figura d'intorno al suo asse (tagliandolo per mezzo per ispianarne il dosso di sopra, ad effetto di adattarvi il peso da soprapporvi) sarà di uguale resistenza, come mostra la figura (*Fig.* 120).

Corollario VI. Generalmente, se la curva orizzontale sarà alcuna delle parabole o iperbole infinite, le cui ordinate siano come le potestà denominate da m appartenenti alle porzioni dell'asse, la curva verticale averà i quadrati dell'ordinate proporzionali alle potestà indicate dall'eccesso di 2 sopra m, cioè da $2-m$, e considerate nelle porzioni dell'asse.

Corollario VII. Ma quando la figura verticale fosse una di cotali curve paraboliche o iperboliche, in cui l'ordinate corrispondessero alle potestà dell'asse denominate da m; l'ordinate nella curva orizzontale corrisponderebbero alle potestà delle porzioni dell'asse, denominate dall'eccesso di 2 sopra il doppio di m, cioè da $2-2m$.

Problema VI.

Ritrovare infiniti solidi, i quali essendo in uno de' suoi termini impegnati nel muro, siano d'uguale resistenza in riguardo del proprio peso di essi.

Si prenda per curva verticale il trilineo parabolico che serve di compimento all' ordinaria parabola, cioè le di cui ordinate si applicano alla tangente della cima: e per la figura orizzontale si pigli un rettangolo o pure un triangolo, o ancora qualsivoglia dell' infinite parabole che abbiano la medesima cima, e le di cui ordinate siano come le potestà delle porzioni dell' asse denominate da qualunque numero m. Dico che il solido risultante dall' una e dall' altra delle dette figure sarà tale, che in riguardo al proprio suo peso, sarà da per tutto d' una eguale resistenza: di maniera che, se tutto non potrà rompersi nella sezione aderente al muro, nè meno veruna porzione, in vigore del proprio peso, potrà staccarsi da qualunque sezione parallela al muro, quando pure in essa fusse il solido sostenuto. Imperocchè cotali solidi sempre saranno al solido prismatico circoscritto nella stessa ragione (qualunque porzione d' essa voglia considerarsi), cioè in quella di 1 ad $m+3$; e la distanza del centro di gravità di questi solidi, e di ciascuna porzione loro dalla base, è sempre proporzionale alla lunghezza dell' asse in proporzione di $m+2$ a $2m+5$ (se non che nel caso del rettangolo orizzontale, essendo $m=0$, la ragione di 1 ad $m+3$ rimane solamente di 1 a 3, e quella di $m+2$ a $2m+5$ resta di 2 a 5). E per tanto il momento di qualunque porzione d' un tale solido sarà sempre come il prodotto $yzxx$ (esprimendo y l'altezza verticale della sezione, z la sua base, e x la porzione dell' asse); imperocchè il peso del solido è proporzionale al prisma circoscritto yzx, e la distanza del centro di gravità dal sostegno di nuovo è proporzionata ad x. Ma il momento della resistenza di qualsivoglia sezione è proporzionale al prodotto del quadrato dell' altezza nella sua base, cioè a yyz; ed è y proporzionale ad xx, per essere la verticale figura un trilineo parabolico, onde yyz è eguale a $yzxx$; adunque il momento del peso di qualunque porzione di cotal solido, stesa oltre la sua base, è proporzionale al momento di resistenza della base medesima; e però ugualmente da per tutto è gagliardo il solido in riguardo del proprio peso; il che ec.

Corollario I. Se la figura orizzontale sarà un rettangolo, ne verrà un cuneo parabolico, quale fu considerato nella proposiz. 55, proposto ancora dal Leibnizio e dal Varignon ne' luoghi citati.

Corollario II. Se l' esponente m è uguale a 2, la figura orizzontale riesce un altro uguale trilineo parabolico: sicchè il solido fatto dall' applicate di questo spazio; o però ancora la tromba parabolica, nata dal ravvolgimento dello stesso trilineo intorno la tangente verticale, di cui parlano i suddetti autori, e da noi fu trattato nella proposizione 87 del Sig. Viviani, sarà di uguale resistenza, essendo composta da'cerchi generati dall'applicate proporzionali a'detti quadrati.

Corollario III. In luogo dell'infinite parabole, si potrebbero a tale proposito adattare infinite iperbole, paragonando i solidi, che quindi nascono, a' prismi iscritti, in vece de' circoscritti; militando in questi ugualmente che in quelli la ragione medesima.

Corollario IV. Un altro prisma d'uguale resistenza, e d'una data altezza, si potrebbe assegnare, che avesse per base lo spazio logaritmico; imperocchè essendo gli spazj tra la curva logaritmica ed il suo asintoto interposti tra di loro come l'ordinate (per ciò che dimostrai negli Ugeniani cap. 3, n.° 7), ed essendo i centri di gravità d'essi spazj sempre distanti dalla base per lo stesso intervallo della suttangente (come ivi dimostrai cap. 11, n.° 1), i momenti de' pesi ne' prismi, eretti ad una data altezza sopra di essi spazj, e sostenuti sopra qualunque loro ordinata, saranno come le stesse ordinate; ma ancora i momenti delle resistenze nelle sezioni della medesima altezza sono come le basi (per la prop. 2), cioè come le dette ordinate; saranno adunque proporzionali i momenti de' pesi a' momenti delle resistenze; onde cotali prismi riusciranno d'uguale resistenza, come già si è avvertito dal Sig. Viviani.

Problema VII.

Ad una data lunghezza AL (*Fig.* 121) applicare infiniti solidi prismatici o cilindrici, i quali in riguardo allo stesso peso pendente da un termine di essi (quando nell'altro solamente siano sostenuti i solidi), o pure applicato nel mezzo della lunghezza loro (in caso che si appoggino a' sostegni posti in ambi gli estremi), abbiano una resistenza uguale a quella di un dato prisma o cilindro, la di cui lunghezza sia AE, l'altezza AF e la larghezza FG.

Si faccia, come AE ad AL, così FG ad FD; e per lo punto D, fra gli asintoti EAF, s'intenda descritta l'iperbola quadratica DC, in cui l'ordinate FD, BC siano reciprocamente come i quadrati delle BA, FA; di maniera che il prodotto del quadrato BA nell'altezza BC uguagli sempre lo stesso prodotto del quadrato AF nell'altezza FD. Dico che qualsivoglia prisma dell'altezza arbitraria BA, e della corrispondente lunghezza BC, colla data lunghezza AL, soddisfarà al quesito; imperocchè essendo come AE ad AL, cioè come il momento d'un peso pendente dalla lunghezza AE al momento dello stesso pendente dalla lunghezza AL, così FG ad FD: ovvero così il prodotto di FG nel quadrato AF, al prodotto di FD nel medesimo quadrato AF; cioè come il momento di resistenza nella sezione AFG risultante nel dato prisma al momento di resistenza nella sezione AFD; è manifesto che il momento di resistenza del dato prisma al momento di resistenza di un altro, la cui altezza AF, larghezza FD, lunghezza AL, sarà come il momento del peso pendente dal primo prisma al momento dello stesso pendente dal secondo; e per tanto la resistenza di questo sarà uguale alla resistenza di quello. Ma essendo uguali i prodotti di FG nel quadrato AF, e di CB nel quadrato AB, sarà lo stesso il momento di resistenza nella sezione del prisma contenuto dalle rette AL, BA, BC, che dell'altro compreso dalla stessa lunghezza AL, dall'altezza AF, e dalla larghezza FD; adunque qualsivoglia de' sopraddetti prismi sarà d'uguale resistenza col prisma proposto, e sarà applicato alla medesima data lunghezza AL; il che ec.

Problema VIII.

Ritrovare infiniti solidi prismatici d'una data lunghezza, i quali a riguardo del proprio peso sieno della medesima resistenza, o si reggano sopra un sostegno solo corrispondente ad uno de' suoi termini, o siano in ambi gli estremi sostenuti.

Si descriva con l'asse AB la parabola AH nell'antecedente figura 121. Dico, qualunque prisma della lunghezza IB e dell'altezza BA, colla data larghezza, soddisfare al quesito. Imperocchè essendo AB ad AF (ovvero multiplicando l'una e l'altra per BAF, il prodotto del quadrato AB in AF al prodotto del quadrato AF in AB) come il quadrato BI al quadrato FH.: sarà il prodotto de'quadrati AF, BI, e della retta AB, e però il quadrato AB al quadrato di AF (cioè, per la comune larghezza de' prismi, il momento di resistenza nella sezione dell'altezza AB al momento di quella che avesse per altezza AF, per la proposizione 3 del Viviani) come il prodotto del quadrato della lunghezza IB nell'altezza AB, al prodotto del quadrato della lunghezza HF nell'altezza AF, cioè (per la medesima larghezza di ciascun prisma) come il momento del peso del prisma, a cui nella lunghezza IB serva di altezza la AB, al momento del peso d'un prisma, la cui lunghezza fosse HF e l'altezza AF, in pari larghezza d'ambidue; onde nell'uno e nell'altro sarà la stessa resistenza in riguardo del proprio peso; il che ec.

Corollario. Quindi l'ungula solida parabolica tagliata dal cilindro eretto sopra la parabola AIB (*Fig.* 122), raddoppiata all'altra parte dell'asse AB col piano PGA, che passando per la cima A della parabola fosse inclinato a qualsivoglia angolo colla base, sarebbe un solido in qualunque sua parte ugualmente resistente in riguardo del proprio suo peso: o fosse sostenuto sopra la linea AB, o fosse retto da sostegni sottoposti d'intorno al suo perimetro IHA*bi*. Imperocchè dividendo il diametro AB in quante si voglia parti, e per ogni punto della divisione alzando tanti piani eretti alla base sopra tutte l'ordinate della parabola; ne risulterebbero altrettanti prismi iscritti a quest'ungola, tutti (per le cose ora dimostrate) d'eguale resistenza in riguardo al proprio peso; i quali prismi esaurirebbero tutta la solidità della detta ungula (accrescendo in infinito il numero d'essi e scemandone in infinito altresì la larghezza), onde lo stesso effetto produrrebbe la medesima ungula intera, in cui verrebbero a terminare: e sarebbe cotesto solido ungulare uguale a 3 quinti dell'intiero prisma ugualmente alto, eretto sopra la parabola stessa, per le cose da me dimostrate nello scolio della prop. 28 de' problemi Viviani.

Si potrebbero qui aggiungere due altri problemi della stessa natura de' precedenti, assai eleganti ed adattati ad illustrare viepiù questa stessa materia delle Resistenze, proposti già nel tomo 18 del giornale Veneto art. 4. Ma potendosi agevolmente ivi vedere la soluzione data ad essi da me e dal Sig. Giulio Fagnani, stimo bene di porre una volta termine alla fatica mia, ed al tedio de' lettori, dando a questa operetta il bramato fine.

NOTE
DEL PADRE GUIDO GRANDI
AL TRATTATO DI GALILEO
DEL
MOTO NATURALMENTE ACCELERATO
COMPRESO
NELLA TERZA GIORNATA.

1. Il principale fondamento, sopra di cui ha stabilita il Galileo la sua nuova scienza del moto accelerato de' gravi cadenti, è l' ipotesi, che un grave partendosi dalla quiete si vada acquistando appoco appoco la velocità: dimanierachè in ogni minima particella uguale di tempo si vada sopraggiugnendo un grado eguale di celerità; e però cresca nel mobile la velocità medesima in quella proporzione appunto in cui cresce il tempo dal principio del moto.

2. Questa supposizione non solamente è la più naturale ed assai conforme alla ragione ed alle sperienze, come accenna il nostro Autore, ma resta altresì confermata dall' universale consentimento dei filosofi e matematici moderni, che l' hanno generalmente abbracciata per vera: purchè però si prescinda, come espressamente avvertì lo stesso Galileo, dalla resistenza del mezzo in cui si fa il moto; e purchè si supponga in oltre, come fa tacitamente il medesimo Autore, che la gravità sia una forza invariabile, e come suol dirsi, *costante*; onde in ogni particella uguale di tempo, essendo similmente applicata al mobile, debba in esso imprimere un eguale grado di velocità, e spingerlo abbasso col medesimo inalterato vigore: non essendovi ragione alcuna perchè aver possa diversa azione in un momento più che in un altro.

3. Ma ne' tempi susseguenti all' età del Galileo si cominciò a dubitare che la gravità d' un medesimo corpo non variasse al mutarsi del luogo, e non crescesse o scemasse di energia, secondo le varie distanze dal centro comune a cui tendono i gravi, corrispondendo alle

dette lontananze con qualche legge di proporzione determinata dall'Autore della natura; il che se fusse, gli accrescimenti della velocità acquistati dal mobile in qualsivoglia menoma particella uguale di tempo non sarebbero più fra di loro uguali, ma piuttosto proporzionali alle varie forze della gravità, che nel suo avvicinamento al centro comune, alterando il proprio vigore, doverebbe cagionare tanto maggiore o minore effetto, quanto maggiore o minore fusse l'energia da essa acquistata nel progresso del moto. Così, perchè la forza della calamita vicina è maggiore della più lontana, se un ago in una certa distanza dal polo di quella comincia a risentire l'azione da cui viene spinto a congiungersi col detto polo, la velocità, che gli viene impressa in un secondo di tempo dal principio del moto, non sarà uguale a quella che gli si aggiunge in ciascuno de' susseguenti secondi; ma tanto maggiore diventerà sempre l'augumento della velocità corrispondente alle particelle uguali di tempo impiegato nel moto, quanto è maggiore la forza della calamita già vicina dell'energia che aveva in maggiore lontananza.

4. È vero che nelle distanze dal centro della Terra, nelle quali possiamo sperimentare i movimenti de' gravi, non può sensibilmente variarsi la forza della gravità, perchè quantunque in rigore dovesse alterarsi la sua energia a misura che scemano o crescono le distanze dal centro, secondo qualsivoglia proporzione semplice o multiplicata delle medesime distanze, prese direttamente o reciprocamente; ad ogni modo è sì grande il semidiametro della Terra, che si calcola maggiore di 3647 miglia fiorentine, secondo le moderne più esatte osservazioni, che aggiungendogli ancora l'altezza d'un miglio o due, non si fa una distanza sensibilmente maggiore che possa per questo conto alterare l'effetto della gravità, sicchè con tutta ragione si può supporre che sia una forza costante, almeno per quanto appartiene a que' moti che appresso di noi sulla superficie della Terra veggiamo farsi in linea retta.

5. Ma perchè non mancano autori di gran nome, che poco soddisfacendosi dell'ipotesi del Galileo, hanno creduto che ancora per li movimenti fatti qui su gli occhi nostri, nello scendere i gravi per poche braccia, l'accelerazione de' gravi camminasse con diversa proporzione: e perchè la dottrina del moto accelerato potrebbe stendersi a distanze maggiori dal centro del moto, nelle quali avesse luogo la variazione della forza della gravità immaginata da' matematici e filosofi moderni, specialmente nel calcolo de' moti celesti, nella spiegazione de' quali suppongono tutti i pianeti essere gravi verso del Sole; ed

ancora finalmente, perchè quando pure in ogni moto rettilineo dovesse computarsi la gravità per una forza costante ed invariabile; è certo però che ne' moti curvilinei ancora, fatti appresso alla superficie della nostra Terra, si varia in ogni punto la forza della gravità, a misura che si varia l'inclinazione della curva descritta dal mobile col piano orizzontale o col perpendicolo; di maniera che resta moderata di mano in mano l'energia della gravità, per sè stessa invariabile, essendo in parte sostenuto il grave cadente da ciò che l'obbliga di andare per linea curva; e però si verifica in tal caso l'ipotesi della gravità sempre variata in diversi punti dello spazio da scorrersi, secondo varie proporzioni che possono nascere dalla varia natura delle curve descritte da esso mobile; perciò non sarà inutile di esaminare l'altre ipotesi della gravità in diverse proporzioni variabile, determinando ciò che debba nel moto accelerato accadere di particolare per tal riguardo: il che renderà questa scienza più generale e più adatta al gusto di chiunque dell'altre supposizioni voglia prevalersi nel sistema della gravità, credendo che con altre leggi sia regolata dall'Autore della natura quella cagione, qualunque siasi, che spinge le cose gravi verso il centro della Terra o verso qualunque altro punto, a cui possano avere tendenza.

6. E primieramente dichiarerò certi termini, de' quali mi voglio servire quindi innanzi, secondo l'uso che di già hanno appresso a' moderni matematici, che di simiglianti materie trattarono: benchè per ischivare ogni pericolo di confusione mi convenga distinguerli con qualche particolare aggiunto nella maniera che segue.

Definizioni.

7. S'interseghino le rette PS, GM (*Fig.* 123) perpendicolarmente in A; ed esprimano le porzioni AS della prima l'estensione dello spazio scorso dal mobile partitosi dalla quiete in A; e le porzioni AM della seconda rappresentino l'estensione del tempo impiegato in un tal moto dalla sua origine in A. Negl'infiniti punti della retta AS sieno applicate le rette SF rappresentanti le forze, colle quali viene spinto il mobile in ciascun punto dello spazio; e le rette SV esprimenti il grado di velocità che ivi si trova d'avere acquistato il mobile scendendo per lo spazio AS; e le rette ST, che denotano l'estensione del tempo impiegato in un tale moto; e le S*t* proporzionali agl'incrementi momentanei del tempo, ne' quali si promuove il mobile per le particelle elementari dello spazio; sieno ancora le MF, applicate a ciascun punto M della retta AM, uguali alle corrispondenti SF, e le MV pari-

mente uguali alle corrispondenti SV, di maniera che espongano quelle la forza e queste la velocità con cui il mobile è spinto ne' momenti M del tempo. Allora si dirà la superficie AGFS *Scala delle forze;* l'altra AVS *Scala delle velocità;* l'altra ATS *Scala de' tempi intieri;* ma la figura PAMF dirassi *Piano delle forze;* e l'altra AVM *Piano delle velocità;* dimanierachè, occorrendo di applicare allo spazio qualche misura del moto, sempre la figura che ne risulta dirassi *Scala,* ed applicandola al tempo dovrà dirsi *Piano* di quella tale misura; ad imitazione de' *Piani delle velocità,* adoperati prima d'ogni altro dal celebre Gio. Alfonso Borelli *De vi percussionis,* cap. 20, e delle *Scale de' momenti* usate dal famoso P. Cavalieri *nell' esercitat. quinta Geometr.*, e poscia dal Viviani nel suo libro *Della Resistenza de' Corpi solidi* alle prop. 74, 76, 84 ec., e ad imitazione loro applicate a varie funzioni del moto dal Signor Ermanno nella sua *Foronomia*, come egli stesso se ne protesta nella Prefazione verso il fine.

8. Posto ciò, si osservi di più, che le regole dimostrate dal Galileo per que' moti che sono uniformi ed equabili, nel decorso dei quali si mantiene una stessa invariabile velocità, possono convenire ancora alle porzioni infinitamente piccole de' moti accelerati o ritardati; perchè sebbene ancora in esse realmente si aumenta o si diminuisce la velocità, tuttavolta questo accrescimento o decremento di velocità essendo tanto minore quanto che corrisponde ad una particella più piccola di tempo, se questa si piglia infinitamente piccola, ancora l'accrescimento o decremento suddetto di velocità sarà infinitamente piccolo, cioè minore di qualunque menomo grado assegnabile di celerità: e però l'aggiunta o il defalco di esso da quell'intera velocità, di cui è affetto il mobile nel principio d'una tale minima particella di tempo, è come un nulla in paragone della medesima intera, essendo infinitamente più piccolo di essa, e però non ne altera la grandezza *per la prop.* 3 *del mio Tratt. degl' Infiniti;* onde è come se in tutto quel tratto infinitamente piccolo di tempo si fusse mantenuta esattamente la medesima velocità, senza punto alterarsi.

9. Per la qual cosa, siccome ne' moti equabili gli spazj fatti nello stesso tempo sono proporzionali alle velocità; e quelli che sono scorsi con pari velocità sono proporzionali a' tempi; ed in somma generalmente sono in ragione composta de' tempi e delle velocità; e risultano eguali spazj se le velocità sono reciproche de' tempi, e la ragione delle velocità si compone della diretta degli spazj e della reciproca de' tempi; siccome viceversa la ragione de' tempi si compone della diretta degli spazj e della reciproca delle velocità, come ha dimostrato il Galileo:

così lo stesso affermar si puote nelle porzioni infinitamente piccole dei movimenti varj, perchè essendo fatte in tempo momentaneo, si ha da considerare la velocità per quel solo tratto di tempo infinitamente piccolo, come perseverante nello stesso grado senza alterarsi.

10. Mi servirò ancora nelle seguenti proposizioni de' principj del metodo degl' infinitamente piccoli, applicandoli però geometricamente e senza intrigo di calcoli, avendo io già dimostrato rigorosamente nel mio *Trattato degl' Infiniti, alla prop.* 5, *ne' corollarii ad essa soggiunti*, tutto il fondamento con cui si piglia la porzione infinitamente piccola d' una curva per la tangente di essa, intercetta fra due ordinate infinitamente prossime: siccome la serie di tutti i rettangoli iscritti o circoscritti ad uno spazio curvilineo (quando sieno d' altezza infinitamente piccola e conseguentemente in infinito multiplicati) per l' area medesima curvilinea in cui vanno a terminare: e simili altre supposizioni, che facilmente si dimostrano ancora col ridurre all' assurdo, secondo il metodo degli antichi, come avvisai *nel luogo citato verso il fine*, e che però senza scrupolo si possono francamente abbracciare.

11. Ciò posto si dimostreranno le seguenti proposizioni generalissime.

Proposizione I.

Scorrendosi da un mobile lo spazio AS (*Fig.* 124) col piano della velocità AMV, e da un altro mobile o dal medesimo facendosi lo spazio BC col piano della velocità BNO, saranno i detti spazj come i piani stessi che loro corrispondono.

Dividasi lo spazio AS in un infinito numero di minime particelle uguali SD, DE, EF ec., ed in altrettante CG, GH, HI ec. sia similmente diviso lo spazio BC; e ne' piani delle velocità distinguansi le infinitamente piccole porzioni di tempo KM, LK, PL ec. nelle quali sono passati gli spazj DS, ED, FE ec. siccome altresì le porzioni di tempo QN, RQ, TR ec. corrispondenti agli spazietti GC, HG, IH ec. e si ordinino l' applicate K*d*, L*e*, P*f* ec., e le Q*g*, R*h*, T*i* ec. rappresentanti le velocità che rispettivamente hanno i mobili nello scorrere gli spazj suddetti nelle particelle di tempo sopra determinate. Essendo adunque gli spazj DS, GC in ragione composta de' tempi KM, QN e delle velocità K*d*, Q*g*, saranno essi spazj DS, GC come i rettangoli *d*KM, *g*QN, o come l' aree *d*KMV, *g*QNO; e similmente, per essere gli spazj FE, ED, DS come l' aree *f*PL*e*, *e*LK*d*, *d*KMV, saranno queste fra di loro uguali, per essere quelli supposti uguali fra loro; e per la stessa ragione saranno fra di loro uguali l' aree *i*TR*h*, *h*RQ*g*, *g*QNO, come pure uguali si sono supposti gli spazj TR, RQ, QN; e però quanto multiplice è lo spazio AS dello DS, tanto sarà multiplice l'area AMV*a* della *d*KMV, e l'area BNO*b* della *g*QNO, come altresì lo spazio BC dello GC; e però se DS a GC sta come *d*KMV a *g*QNO, presi gli ugualmente multiplici degli antecedenti e de' conseguenti, sarà ancora lo spazio AS allo BC come il piano di velocità AMV*a* al piano di velocità BNO*b*. Il che era da dimostrarsi.

Corollario I. Quindi è che gli spazj scorsi dalla quiete nel moto accelerato definito dal Galileo, crescono come i quadrati de'tempi; perchè allora (*Fig.* 125) essendo le velocità NO, MV come i tempi AN, AM, ne'quali sono fatti gli spazj AC, AS; sarà il piano di velocità AMV un triangolo, ed il piano ANO un altro triangolo simile; e però quello a questo è come il quadrato del tempo AM al quadrato dell'AN; ma come i detti piani, così gli spazj scorsi AS, AC; dunque detti spazj sono come i quadrati de' tempi.

Corollario II. Facendosi con moto vario lo spazio S (*Fig.* 126) nel tempo AM, secondo il piano della velocità AMV*a*; se nello stesso tempo AM colla massima velocità MV si scorrerà equabilmente lo spazio C, sarà S a C come il piano della velocità AMV*a* al rettangolo AMVH circoscrittogli, perchè questo sarà il piano di velocità del moto equabile fatto per lo spazio C nel tempo AM colla stessa velocità MV.

Corollario. III. Onde è manifesto che lo spazio fatto equabilmente coll' ultimo grado della velocità acquistatosi da un grave che cada dalla quiete, secondo l' ipotesi del Galileo, in altrettanto tempo di quello in cui cadde, è duplo dello spazio fatto cadendo, per essere il piano della velocità di questo un triangolo AMV, e di quel moto equabile un rettangolo AMVH d' uguale base ed altezza.

Proposizione II.

Se un mobile (*Fig.* 127) nel tempo AM movendosi spinto dall forze espresse dal piano delle forze APFM si acquista la velocità V e movendosi nel tempo BN spinto dalle forze rappresentate dal pia di forze BHGN si acquista la velocità C, sarà V a C come il pia primo al secondo.

Sia XO una parte infinitesima della velocità V, che deno l'accrescimento di velocità sopraggiunto al mobile in una simile in tesima parte KM del tempo AM; sia altresì YS una simil parte nitesima della velocità C, cioè l'incremento di velocità acquistato dal mobile nella parte infinitesima QN del tempo BN. Essendo gli effetti proporzionali alle loro cagioni, sarà XO a YS in ragione composta della forza TK alla forza DQ, dalle quali dipendono gl'incrementi di velocità XO, YS, e del tempo KM, in cui sta quella applicata al mobile, al tempo QN, in cui questa altresì s'applica a spingere il suo mobile, dovendo crescere per questi due capi l'accrescimento della velocità, cioè in ragione della forza, se in tempi eguali applicata, ed in ragione de' tempi, se la stessa forza dura più o meno a spingere il mobile; sarà dunque XO a YS come il rettangolo TKM al rettangolo DQN o come l'area TKME all'area DQNG; e presi gli ugualmente moltiplici degli antecedenti e de' conseguenti, sarà l'intera velocità V all'intera velocità C come il piano delle forze APFM al piano delle forze BHGN. Il che ec.

Corollario. Supponendosi col Galileo la forza della gravità sempre la medesima, saranno i piani delle forze APFM, BHGN due rettangoli ugualmente alti proporzionali alle basi, cioè a' tempi AM, BN; e però con quella ipotesi è connessa necessariamente la supposizione dell'essere le velocità V, C proporzionali a' tempi AM, BN: e viceversa questa supposizione importa quella, non potendo essere le velocità come i tempi, se la gravità non si suppone una forza costante.

Proposizione III.

La scala delle forze AGFS (*Fig.* 128) sta all'altra scala AGHN come il quadrato della velocità SC al quadrato della corrispondente velocità NV.

Si tirino le tangenti CK, VL a' punti C, V della scala delle velocità; e le CE, VI perpendicolari alla curva; e si suppongano le particelle BS, DN dello spazio fatte in parti eguali ed infinitamente piccole di tempo, tirando le BP, DM applicate alla scala delle velocità infinitamente prossime all'altre SC, NV, e siano PQ, MR parallele all'asse; e si denoteranno per le differenze QC, RV gli augumenti di velocità sopraggiunti al mobile dalle forze FS, HN in tempi eguali ed infinitamente piccoli; onde saranno proporzionali i detti augumenti alle medesime forze; ma gli spazj BS, DN fatti in tempi uguali sono come le velocità SC, NV; perchè dunque FS ad HN sta come QC ad RV, cioè in ragione composta di QC a QP, di QP ad MR, e di MR ad RV; delle quali ragioni la prima per la similitudine de' triangoli PQC, CSE sta come ES ad SC, la seconda è la stessa di BS a DN, cioè, come si è detto, di SC ad NV, e l'altra, per la similitudine dei triangoli MRV, VNI, è come di NV ad NI; dunque FS ad HN ha ragione composta di ES ad SC, di SC ad NV, e di NV ad NI; cioè sta come la sunnormale ES alla sunnormale NI: che se fusse FS uguale ad SE, sarebbe ancora HN uguale ad NI, e l'area AGFS, fatta dalle sunnormali della figura ACS, sarebbe la metà del quadrato SC, e l'area AGHN similmente la metà del quadrato NV, come ho dimostrato *nel coroll. 6 della proposiz. 1 della seconda appendice al libro delle mie Quadrature.* Essendo adunque le dette FS, HN, se non eguali, almeno proporzionali alle dette SE, NI, è manifesto, essere le scale delle forze AGFS, AGHN proporzionali a' quadrati delle corrispondenti velocità SC, NR. Il che ec.

Corollario I. Si noti essersi dimostrato che le forze SF, HN sono sempre come le sunnormali SE, NI della scala delle velocità.

Corollario II. Se la forza è costante, come si suppone dal Galileo la gravità, sarà la linea GFH una retta parallela ad AN, e la scala delle forze diventando un rettangolo, sarà AGFS ad AGHN come lo spazio AS allo spazio AN; onde AS ad AN sarà come il quadrato della velocità SC al quadrato della velocità NV, e la scala della velocità in detta ipotesi è una parabola; ciò che altronde è noto, per essere allora le velocità come i tempi, e gli spazj come i quadrati de' tempi, e conseguentemente proporzionali ancora a' quadrati delle velocità.

Corollario III. Viceversa, essendo la scala delle velocità una parabola, le cui sunnormali SE, NI sono sempre uguali alla metà del lato retto, ne segue che le forze SF, NH, come proporzionali alle dette SE, NI, sono sempre da per tutto uguali.

Corollario IV. Quando si supponessero le forze AG, SF (*Fig.* 129) proporzionali a' viaggi da farsi verso un certo termine T, cioè come le AT, ST, sarebbe l'area AGT, cioè la scala delle forze, un triangolo; e la scala delle velocità sarebbe un quarto di cerchio o di ellisse ACVT, il cui centro è nel termine T; perchè le sunnormali nel cerchio sono le medesime distanze dal centro T, e nell'ellisse riescono ad esse proporzionali, come ancora si suppongono essere le forze AG, SF; e però in tale ipotesi le velocità sono come l'ordinate SC d'un cerchio o d'una ellisse; dove ancora si verifica, essere l'arec AGFS della scala delle forze proporzionali a' quadrati delle velocità SC; perchè il trapezio AGFS è la differenza de' due triangoli simili AGT, SFT, proporzionale alla differenza de' quadrati AT, ST; a cui, per le cose coniche, è proporzionale nell' ellisse, ed uguale nel cerchio, il quadrato dell' ordinata SC.

Corollario V. Ma se le forze fussero in reciproca ragione delle distanze, la scala di esse forze sarebbe l'iperbola d'Apollonio GFX (*Fig.* 130) fra gli asintoti AT, TX, perchè in essa si verifica essere AG ad SF, come reciprocamente ST ad AT, per l'ugualità de' rettangoli FST, GAT iscritti allo spazio asintotico. Ed allora la scala delle velocità ACV sarebbe una logistica o logaritmica del secondo grado, in cui i quadrati delle ordinate SC, NV sarebbero come la ragione di AT ad ST alla ragione di AT ad NT; dimanierachè in questa ipotesi le velocità SC, NV sarebbero in sudduplicata ragione de' logaritmi delle distanze ST, NT: come si raccoglie dal *coroll.* 3 *e* 4 *e dallo scolio della prop.* 10 *del mio libro degl' Infiniti;* essendosi ivi provato che le sunnormali di questa sorta di logistica uguagliano le ordinate allo spazio asintotico dell' iperbola che qui rappresentano le forze; e che lo spazio suddetto asintotico dell' iperbola, come AGFS, è la metà del quadrato dell' ordinata corrispondente SC.

Corollario VI. Quando poi le forze fussero reciproche de' quadrati delle distanze, sarebbe la scala AGFH (*Fig.* 131) un' iperbola quadratica fra gli stessi asintoti; e la scala delle velocità ACV sarebbe quella curva che io descrivo nel mio libro *delle Quadrature* alla prop. 4 nata da' seni versi, che da me suole chiamarsi la *Versiera*, in latino però *Versoria:* dimanierachè le velocità SC, NV sarebbero in ragione composta della sudduplicata degli spazj scorsi AS, AN direttamente, e della sudduplicata degli spazj che restano fino al termine T, cioè di NT, ST reciprocamente.

12. Il che però non si potendo dimostrare dalle cose da me nel luogo citato circa le proprietà di questa curva proposte; stimo bene, attesa l'utilità che può ricavarsi in meccanica da questa curva, il darne ora questa facile descrizione, ricavandone ciò che fa al nostro proposito. Sia dunque il mezzo cerchio ADBT, e nel punto estremo A del diametro lo tocchi la retta AE, a cui dall' altro termine del diametro T si conducano le rette TK, TE, seganti la periferia in D, B, ed ordinate le DS, BN nel semicircolo, si compiscano i rettangoli KASC, EANV. La curva che passa pe' punti A, C, V così determinati è la nostra *Versiera*, ed è evidente essere i quadrati SC, NV eguali a' qua-

drati AK, AE; ma il quadrato AK al quadrato AE ha ragione composta del quadrato AK al quadrato AT, e di questo al quadrato AE delle quali ragioni la prima è quella del quadrato SD al quadrato ST, ovvero della retta AS alla ST; la seconda è quella del quadrato TN al quadrato NB, ovvero della TN alla AN; pertanto sarà il quadrato AK ovvero SC al quadrato AE ovvero NV, in ragione composta di AS ad ST e di NT ad AN, cioè come il rettangolo di AS in NT a quello di ST in AN, che è quanto dire in ragione composta degli spazj scorsi AS, AN direttamente, e degli spazj che rimangono a scorrersi NT, ST reciprocamente, come di sopra enunciammo.

13. Ma altresì lo spazio AGFS dell'iperbola quadratica allo spazio AGHN della medesima (essendo questi le differenze dello spazio asintotico infinitamente lungo, che sarebbe sopra l'ordinata AG, dallo spazio che sarebbe sopra l'ordinata FS, e da quello che sopra l'ordinata HN si stenderebbe, prolungando in infinito l'iperbola e l'asintoto TA sopra A: i quali spazj asintotici sono rispettivamente uguali a' rettangoli GAT, FST, *per lo cap.* 11 *degli Ugeniani*) essendo come l'eccesso del rettangolo FST sopra il rettangolo GAT all'eccesso del rettangolo HNT sopra il medesimo rettangolo GAT, è in ragione composta delle medesime AS ad AN, ed NT ad ST: perchè descritta per G tra gli stessi asintoti l'iperbola d'Apollonio GRL, onde il rettangolo GAS riesca lo stesso col rettangolo RST, ovvero LNT, i detti eccessi saranno come i rettangoli di FR in ST e di HL in NT, o pure (giacchè FS a GA sta come il quadrato AT al quadrato ST, cioè come il quadrato SR al quadrato GA, onde sono continuamente proporzionali FS, RS, GA, e però FS ad RS è come RS a GA, o come AT ad ST, e dividendo, FR ad RS come AS ad ST, ed il rettangolo di FR in ST uguaglia quello di RS in SA, siccome per la stessa ragione il rettangolo di HL in NT uguaglia quello di LN in NA) come il rettangolo RSA al rettangolo LNA; che è in ragione composta di SA ad NA e di RS ad LN, che è come di NT ad ST; dunque l'area della scala delle forze AGFS all'area della scala AGHN, è come il quadrato dell'ordinata nella versiera SC al quadrato della NV; e però la detta versiera ACV è la scala delle velocità, come si dovea dimostrare.

14. Questa è l'ipotesi più comunemente abbracciata da' matematici moderni circa la forza della gravità che spigne i corpi superiori alla superficie della terra verso il suo centro, o ancora ciascun pianeta primario verso il Sole, e ciascuno de' secondarj pianeti verso il suo primario, come può vedersi appresso il Newton *nelle proposizioni* 71, 75, 76 *del lib.* 1 *de' suoi Principj Matematici della Filosofia, e nella pro-*

posizione 8 *del lib.* 3.° appresso David Gregorio *nella sua Astronomia, prop.* 28, 29, 42, 45, appresso il Leibnitzio *negli Atti di Lipsia di febbrajo del* 1689, appresso Cristiano Ugenio *nel discorso della Cagione della Gravità pag.* 160, ed altri autori: ed è ciò coerente alle osservazioni de' moti de' pianeti ed alla celebre regola di Keplero in essi osservata, cioè che i quadrati de' tempi loro periodici siano come i cubi delle distanze dal centro intorno a cui girano; ciò che non si verifica se non nell' ipotesi che la forza da cui sono continuamente distornati dal moto rettilineo per la tangente della curva che descrivono, e rispinti verso il centro de' loro moti, con ritenerli perpetuamente nella stessa curva, sia come una gravità che riguardi il detto centro, e che vada scemando o crescendo in ragione reciproca de' quadrati delle distanze.

15. Quanto alla supposizione che la gravità sia direttamente come le distanze del centro, della quale ipotesi ho parlato *nel corollario* 4, essa viene abbracciata dallo stesso Newton per que' corpi che discendono dalla superficie della Terra allo ingiù, come asserisce *nel luogo citato alla prop.* 73 *del lib.* 1, *e nella prop.* 9 *del lib.* 3; ma prima era stato ciò asserito generalmente dal Viviani *ne' suoi scritti di Meccanica* già sigillati del 1667 ab Incarn. addì 2 marzo per mano del Serenissimo Principe Leopoldo; e fu ancora creduto, almeno circa la gravità dell' acqua, dal Borelli *nel libro de' Momenti della Gravità* (stampato del 1670) *alla prop.* 164, e da Monsù Fermat la stessa ipotesi fu sostenuta fin del 1636, come dalle sue lettere stampate *nell' Opere postume* di esso nel 1679 apparisce, nelle quali si vede la lunga contesa che ebbe sopra di ciò con Monsù di Roberval; ed a' nostri tempi fu la stessa supposizione illustrata dal P. Tommaso Ceva della Compagnia di Gesù ne' suoi libri *De natura Gravium*, e poscia confermata dal P. Girolamo Saccherio della stessa Compagnia nella sua *Neostatica:* a' quali autori si potrebbe aggiugnere il P. de' Chales della medesima Compagnia, in quanto che nella sua *Statica*, l. 2 pr. 10, 14, 15, pretende che meglio si esprimano gli accrescimenti degli spazj e delle velocità nel moto accelerato de' gravi, se in un cerchio concentrico alla terra, e che passi per l' origine del moto, si rappresenti la velocità co' seni retti, e lo spazio scorso co' seni versi, ed il tempo cogli archi corrispondenti; il che accade appunto nell' ipotesi suddetta *del coroll.* 4, come in parte da esso si raccoglie ed in parte si cava da ciò che diremo più sotto *nel coroll.* 2 *della prop. seguente*, circa la rappresentazione de' tempi del moto fatto in tale supposizione, come ancora fu dimostrato dal Newton *luogo cit., lib.* 1, *prop.* 38, benchè certamente il P. de' Chales

a ciò non attendesse, onde si va raggirando vanamente per trovare qualche ragione fisica, per cui si potesse inorpellare quel suo sistema da lui creduto più conforme alla sperienza della semplice supposizione del Galileo, osando perfino di ricercarne i fondamenti nell'ipotesi Copernicana, giacchè nella comune della Terra stabile egli non li scorgeva.

16. Nè sarà fuori di proposito l'arrecare qui la dimostrazione che s'immaginò il Viviani essere atta a persuadere la variazione della gravità in ragione delle distanze dal centro, tal quale egli la distese negli accennati suoi scritti, in questi termini, pochissimo differenti da quelli che usò il Fermat in persuadere la medesima cosa.

Supposizione I. *Pongasi che la forza, che fa un grave per scendere, venga fatta dal suo centro di gravità, il quale se fusse unito col centro della Terra, più non si moverebbe, e per conseguenza nè anco il grave.*

Supposizione II. *E che tanto è l'impeto o momento che ha il grave per andare al centro, quanta forza ci vuole per ritenerlo: e questa è la misura della gravità assoluta.*

Teorema. *Il peso d'un grave posto in diverse lontananze dal centro della terra, scema colla medesima proporzione che scemano le medesime distanze. Siano due gravi* (*Fig.* 132), *de' quali i centri di gravità* A, B *siano congiunti colla linea* AB, *e di essi come d'un solo grave il centro comune sia* C, *quale considero unito col centro della Terra. È manifesto, per la prima supposizione, che tal grave starà così, nè più si muoverà; e se così sta, adunque i momenti che hanno i due gravi* A, B *per scendere in* C *sono fra loro uguali; e per la seconda supposizione, le forze per ritenerli in* A *e* B, *acciò non vadano verso* C, *sono uguali alli detti momenti, cioè uguali fra loro; e se tali forze sono uguali e dette forze sono le misure de' pesi assoluti, tanto peserà il grave* A *in* A *quanto il* B *in* B; *ma* A *in* B *pesa più di* B *in* B *secondo che* (A è maggiore di B ovvero) BC *è maggiore di* CA; dunque A in B pesa più dello stesso A in A in proporzione delle distanze BC, AC. *Il che ec.*

17. Ma il Torricelli in certa sua Scrittura da lui mandata al Signor Michel'Angelo Ricci celebre matematico, che fu poi degnissimo Cardinale di Santa Chiesa, è di parere che la forza della gravità corrisponda piuttosto reciprocamente alle dette distanze dal centro comune de' gravi, come nell'ipotesi *del coroll.* 5, ed il progresso del suo raziocinio era tale:

Sia il triangolo ABC (*Fig.* 133), *e divisa la sua base* AC *nel mezzo in* D, *si tirino dal punto* D *le perpendicolari a' lati del triangolo prolungati dove bisogna, e siano* DE, DF. *Dico che il lato* AB *al lato* BC *è reciprocamente come la perpendicolare* DE *alla perpendicolare* DF. *Si tiri la* BD; *e perchè i triangoli* ABD, BDC *hanno l' istesso vertice* B *e l' istessa altezza, sono in proporzione delle basi* AD, DC, *cioè uguali*; *e similmente presi i loro doppj, sarà il rettangolo sotto l' altezza* DF *e la base* AB *uguale al rettangolo sotto l' altezza* DE *e la base* BC ; *e però reciprocamente* AB *alla* BC *come* DE *a* DF. *Il che ec. Ora posto che* B *figuri il centro della Terra ed* AC *una libra di braccia uguali, con due pesi uguali nell' estremità* A, C, *i cui momenti, o gravità, sono misurati dalle perpendicolari* DF, DE, *siccome dichiara Gio. Batista de' Benedetti* nel suo libro delle Speculazioni Matematiche *cap.* 3 *ovvero* 4, *ne segue che il momento del peso* C *sia reciprocamente come la distanza de' pesi dal centro della Terra ; e di qui abbiamo, non solamente che il peso più vicino al centro, mentre è più vicino, pesa più del meno vicino, ma sappiamo ancora in qual proporzione pesa più.*

18. Collo stesso progresso si proverebbe che due pesi uguali A, C in disuguali distanze AD, DC d' una libra AC collocati, pesassero in ragione composta della diritta di AD a DC e della reciproca delle distanze CB, AB dal termine B, ove le direzioni loro convengono ; perchè AD a DC essendo come il triangolo ADB al BDC, cioè in ragione composta di AB a BC e di DF a DE, ne segue che DF a DE, cioè il momento di A a quello di C, sia in ragione composta di AD a DC e di CB ad AB; onde in maniere infinite si potrebbe dimostrare che variasse l' impeto o l' energia de' gravi assolutamente uguali in diverse distanze dal centro della Terra, se questo raziocinio potesse applicarsi a' gravi liberi e sciolti, come vale ne' gravi connessi insieme in una libra pendente da un determinato punto preso come centro del moto. Però non ho voluto tacere questa ipotesi, vedendola abbracciata per i pesi che sono sulla superficie della Terra dal Newton, lib. 3, prop. 20, e dal Gregori *Astron. Phys.*, prop. 52. Passiamo a dimostrare altre proposizioni.

Proposizione IV.

19. Se la figura AZLMT (*Fig.* 134) averà l'ordinate LH, MT reciproche delle velocità TV, HC espresse dall' applicate nella scala delle velocità ACVT, sarà la figura AZMT la scala de' tempi elementari; e starà l' area AZMT a qualsivoglia sua porzione AZLH, come il tempo intero che s'impiega nello spazio AT al tempo impiegato nello spazio AH.

Imperocchè, poste due porzioni IH, ET infinitamente piccole dello spazio, e fra di loro uguali, sarà il tempo per ET al tempo per IH come reciprocamente HC a TV, *per le cose dette al numero* 9, cioè come TM ad HL; dunque se TM esprime il tempo dello spazio elementare ET, dovrà HL esprimere il tempo dello spazio altresì elementare IH, e però la figura AZMT è la scala de' tempi elementari. E perchè TM ad HL sta ancora come il rettangolo MTEX all' altro egualmente alto LHIY; dunque il tempo per lo spazietto ET al tempo per l'altro IH sta sempre come l'area elementare MTEX all'area elementare LHIY, e così sempre; e però il tempo per tutto lo spazio AT al tempo per tutta la AH sta come l'area ATMZ all'area AHLZ *per la prop. 4 del 5.° degli Elem.*, essendo gli antecedenti ugualmente moltiplici della prima e della terza grandezza, ed altresì i conseguenti ugualmente moltiplici della seconda e della quarta, mentre il tempo per AT distinguendosi in infinite particelle uguali al tempo elementare per ET, l'area ATMZ si dividerebbe in altrettanti spazietti uguali ad MTEX (prendendo l'altezze non già tra di loro uguali, ma reciproche all'ordinate TM); e similmente il tempo per AH dividendosi in infinite particelle uguali al tempo elementare per IH, nell'area ALHZ si distinguerebbero altrettanti spazietti uguali ad LHIY; onde è manifesto ciò che si voleva dimostrare.

Corollario I. Se la scala delle velocità è una parabola ACVT, come nell'ipotesi della gravità costante, sarà la sua reciproca MYZAT, cioè la scala de' tempi elementari, un'iperbola quadratica, in cui il quadrato MT al quadrato HL sta come AH ad AT, che è la ragione del quadrato CH al quadrato VT; ed è l'area MYZAT dupla del rettangolo MTA, siccome l'area LYZAH è dupla del rettangolo LHA *per le cose dimostrate da me negli Ugeniani*, cap. 8 n.° 11; dunque il tempo intero per AT all'intero tempo per AH è come il rettangolo MTA al rettangolo LHA, cioè in ragione composta di MT ad LH (cioè di HC a TV) e di TA ad AH (che è la medesima con quella del quadrato TV al quadrato HC); le quali due ragioni fanno quella di TV ad HC; e però in tale ipotesi la scala de' tempi interi è la stessa parabola che serve di scala alle velocità: come appunto esser debbe, crescendo allora la velocità come il tempo.

Corollario II. Ma essendo (*Fig.* 135), come nell'ipotesi delle forze proporzionali alle distanze dal termine T, la scala delle velocità un quarto di cerchio, *per lo coroll. 4 della proposiz. antecedente*, la sua figura reciproca, cioè la scala de' tempi elementari, sarà, *per lo coroll. 5 dell' appendice prima delle mie Quadrature*, la stessa coll' area ZATM, dimostrata, *ivi nel coroll.* 3, essere dupla dello stesso quadrante ACVT, siccome ogni sua parte ZAHL dupla del settore corrispondente ACT; onde si ha, che il tempo per l' intera AT al tempo per qualsivoglia sua parte AH sta come il quadrante AVT al settore ACT, ovvero come l' arco AV all' arco AC; dimanierachè in questa ipotesi essendo gli spazj AH, AE come i seni versi, le velocità sono come i seni retti HC, EN, le forze come i seni di complemento HT, ET, ed i tempi come gli archi AC, AN.

Corollario III. Onde la scala de' tempi in questa ipotesi è la figura de' seni AQP (*Fig.* 136), le di cui ordinate HQ uguagliano l'arco AC dell' iscritto quadrante: siccome ancora il piano delle velocità è la stessa figura presa per un altro verso, cioè computando il principio del tempo dal punto P, mentre ad ogni sua porzione PC uguale all'arco del quadrante VC corrisponde l' ordinata RQ, uguale al seno SC, che rappresenta la velocità del mobile discendente lungo il raggio VT per lo seno verso VS; della quale figura de' seni si veggano le cose da me dimostrate negli *Ugeniani* cap. 13, n.° 4, *ed altrove*, le quali confrontano con ciò che de' piani della velocità si è generalmente di sopra dimostrato.

Corollario IV. Ma se le forze fussero reciprocamente proporzionali alle distanze dal termine T, essendo la scala delle velocità una logistica del secondo grado ACN (*Fig.* 137), come *nel corollario* 5 *della proposiz. precedente* si è dimostrato, sarebbe il tempo per AH al tempo per AE, come l' area ACMT all' area ANVT: perchè la suttangente di questa curva presa nell' asintoto TV è reciproca dell' ordinate, come dimostrai *nel coroll.* 2 *della proposiz.* 10 *degl' Infiniti*; onde la figura reciproca alla scala delle velocità sarebbe correlativa ad essa; e però eguale alle dette porzioni ACMT, ANVT, per le cose da me dimostrate nel cap. 7 *degli Ugeniani* al num. 2.

Corollario V. Che se si suppongano le forze proporzionali reciprocamente ai quadrati delle distanze dal detto termine T (*Fig.* 138), di manierachè la scala delle velocità sia la versiera ACNV, *per lo coroll.* 6 *della preced. prop.*, essendo in essa l' ordinata EN nella distanza TE dal termine T, reciproca dell'ordinata HC in pari distanza HA dalla cima A (per essere sempre il rettangolo di tali ordinate uguale al quadrato del diametro AT, stante la descrizione addotta *di sopra al num.* 12 giuntavi la *prop.* 53 *del lib.* 3 *de' Conici d'Apollonio*), sarà il tempo per AT al tempo per AH come l'area ACVT all'area TENV tagliata dal termine T all'intervallo ET uguale ad AH : cioè, *per la prop.* 4 *delle mie Quadrature e suoi corollarj*, come il quadruplo del semicircolo genitore AMT al quadruplo del segmento misto AOT, compreso dal diametro AT, dall'arco AO, e dalla corda OT dell'arco residuo OMT, che (supposto il centro in S, e condotto il raggio SO) viene ad essere il quadruplo del settore AOS e del triangolo SOT.

Corollario VI. Onde perchè il rettangolo del diametro AT (*Fig.* 139) nella semiperiferia AOT uguaglia il quadruplo del mezzo cerchio AOMT; ed il rettangolo dello stesso diametro nell'arco AO è quadruplo del settore AOS, siccome il rettangolo del diametro medesimo AT nell'altezza del seno OH è quadruplo del triangolo SOT, sarà il tempo per AT al tempo per AH, come la semiperiferia AMT alla somma dell'arco AO e del seno OH; cioè fatta la cicloide AQKT, in cui la base TK pareggia la semiperiferia AMT , e qualunque ordinata HQ è la somma del seno HO, e della OQ uguale all'arco AO, sarà questa la scala de' tempi interi; dimanierachè rappresentando TK il tempo per la AT, esprimerà qualunque ordinata HQ il tempo per la AH. Ed è questa una nuova fisica proprietà della cicloide, non ancora, che io sappia, da altri scoperta, fra tant' altri bellissimi usi che ne hanno ritrovato i moderni geometri.

Corollario VII. Se le velocità crescessero come gli spazj scorsi, dimanierachè la scala delle velocità (*Fig.* 140) fusse un triangolo AVT (la quale ipotesi è riferita e confutata dal Galileo, ed indarno presa da altri a ristabilirsi, contro de'quali è da vedersi la dottissima lettera di Monsù Fermat al Gassendo *nell'opere di questo, tomo* 6, *e nelle opere postume di quello*, pag. 201), nel qual caso ancora le sunnormali HS, EI, e conseguentemente, *per lo coroll.* 1 *della proposiz.* 3, le forze motrici, mercè della similitudine de' triangoli HCS, ENI, sono come le velocità HC, EN, o come gli spazj scorsi AH, AE; in tale ipotesi, dico, la scala de' tempi elementari sarebbe l' iperbola Apolloniana VDBZ tra gli asintoti AT, AZ, essendo le ordinate di questa HB, ED reciproche agli spazj scorsi AE, AH, e conseguentemente reciproche alle velocità EN, HC; onde un infinito tempo si richiederebbe a passare qualunque minima porzione di spazio AH, partendosi dalla quiete in A, per essere il tempo d' un tale movimento come l'area asintotica

AHBZ, che è d'estensione assolutamente infinita *per ciò che ho dimostrato nel* cap. 8 *degli Ugeniani* n.° 11 *ed altrove*; dal che apparisce la impossibilità di tale ipotesi.

20. Da quanto si è detto sinora, e da ciò che dirassi in appresso, manifestamente si scorge non essere altrimenti così sterili ed inutili, come a prima faccia appariscono, e da molti si spacciano, le geometriche speculazioni intorno alle linee curve, potendo ciascheduna avere grand'uso nelle più profonde ricerche della fisica e della meccanica: come qui si è veduta venire in campo l'iperbola quadratica, la linea de' seni, la logistica del secondo grado e la versiera (oltre la cicloide già da gran tempo benemerita de' misterj più astrusi della natura) a dimostrare le passioni del moto in varie ipotesi e le circostanze che possono accompagnarlo: nè mi sarebbe stato così facile il rinvenire tante belle verità sopra dimostrate circa le proporzioni colle quali si aumenta la velocità di tali movimenti, e come cresca lo spazio in corrispondenza del tempo secondo le varie forze che spingono il mobile, se non avessi avute in contanti le proprietà delle curve suddette, già da me altrove dimostrate, quando a tutt'altro pensava che all'uso a cui presentemente doveva applicarle: siccome non credo che Apollonio prevedesse mai quanto dovessero un giorno essere utili per la meccanica, per l'ottica e per l'astronomia, le tante proprietà da lui speculate in astratto circa le sezioni coniche.

21. Ma proseguiamo le nostre ricerche.

Proposizione V.

Sia AHTS (*Fig.* 141) la scala de' tempi intieri del moto per AS dalla quiete in A; ed in qualunque suo punto H sia toccata dalla retta HB: dico che lo spazio fatto col moto accelerato da A in E, secondo la predetta scala, è allo spazio che si sarebbe fatto equabilmente nello stesso tempo, se da principio durata fusse la stessa velocità che ha il mobile in E, come AE alla suttangente EB.

Imperocchè sia il piano di velocità di un tale moto la figura AC VM, e sia MA segata dalla tangente HB in I, sarà l'area AVM all'area ACN come lo spazio MT allo spazio NH *per la prop.* 1; ed essendo HI tangente della curva AHT, sarà *per lo cap.* 13 *de' nostri Ugeniani al num.* 2, il rettangolo CNI uguale all'area ACN; e però il rettangolo CNI al rettangolo CNA, ovvero IN ad NA, o pure IH ad HB, cioè AE ad EB, sarà come l'area ACN al rettangolo ad essa circonscritto CNA, o pure, *per lo coroll.* 2 *della prop.* 1, come lo spazio fatto col moto accelerato allo spazio che si farebbe nello stesso tempo con moto equabile coll' ultimo grado NC della velocità in esso acquistata. Il che si dovea dimostrare.

Corollario I. Nell' ipotesi del Galileo della gravità costante, la scala de' tempi intieri AHTS è una parabola, di cui la suttangente BE è dupla dell'AE; onde lo spazio fatto con moto accelerato è la metà di quello che si farebbe equabilmente in altrettanto tempo coll' ultimo grado della velocità acquistata.

Corollario II. Nell' ipotesi delle forze proporzionali alle distanze dal centro o dal termine del moto, essendo, *per lo coroll.* 3 *della proposizione precedente*, la scala de' tempi interi la figura de' seni o sia l' ungula cilindrica espansa AQPT (*Fig.* 142), sarà sempre lo spazio scorso dalla quiete con moto accelerato a quello che si sarebbe scorso equabilmente in egual tempo coll'ultimo grado di velocità, come il seno verso alla quarta proporzionale dopo il raggio, il seno retto e l' arco corrispondente; imperocchè tirata la tangente BQZ, si è dimostrato, *nel cap.* 13 *degli Ugeniani al num.* 4, che posta RZ eguale alla tangente CX dell' arco circolare nel punto corrispondente C, congiunta la ZQ è tangente di questa figura; sarà dunque come CX ad HT (cioè come il raggio TC al seno retto HC) così RZ ad RQ, o pure HQ (cioè l'arco AC) ad HB; ma come AH (che è il seno verso) ad HB, così lo spazio del moto accelerato allo spazio del moto equabile; dunque ec.

Corollario III. E perchè la tangente dell' infimo punto P di questa figura taglia dall' asse TA la suttangente uguale al quarto di circonferenza ACV (per essere allora il raggio uguale al seno TV del quadrante), sarà lo spazio fatto acceleratamente a quello che in ugual tempo si sarebbe fatto con moto equabile, ritenuto l' ultimo grado di velocità, come il raggio ad un quarto di periferia o come il quadrato iscritto nel cerchio al medesimo cerchio: onde nel tempo della caduta per AT, avrebbe il mobile scorso equabilmente l' arco ACV coll' ultima velocità TV.

Corollario IV. Ma supposte le forze proporzionali reciprocamente a' quadrati delle distanze dal centro, essendo la scala de' tempi intieri, *per lo coroll.* 6 *della prop.* 4, la cicloide AQKT (*Fig.* 139), in cui la tangente QB è parallela alla corda dell' arco AO, come dimostrai *nel cap.* 8 *degli Ugeniani n.°* 7, e però AH ad HB è come il seno retto HO alla somma di detto seno e dell' arco, cioè ad HQ; altresì lo spazio fatto acceleratamente, a quello che si farebbe in altrettanto tempo coll'ultima velocità equabilmente ritenuta, è come il seno retto di quell'arco, di cui lo spazio passato è seno verso nel semicircolo che ha per diametro la distanza dell'origine del moto dal centro de' gravi, all'aggregato del seno retto e dell'arco.

22. Per mostrare ora come queste varie ipotesi di gravità possono avere luogo ancora nella supposizione che fa il Galileo dell'assoluta gravità costante e delle direzioni de' gravi tra di loro parallele, per l'immensa lontananza del centro in cui convengono, basta supporre che un mobile si muova in una linea curva, perchè secondo che in varj suoi punti è diversamente inclinata dell'orizzonte, si raffrena e modifica talmente, che equivale ad una gravità variabile; onde si può dimostrare la seguente

Proposizione VI.

Se un mobile (*Fig.* 143) scorre per la curva ABDC eretta all'orizzonte EF, supposta l'assoluta gravità costante e le direzioni parallele, sarà sempre la forza relativa, da cui è spinto il mobile nel punto B, alla forza che lo spinge nel punto D, come il seno dell'angolo EBI fatto dalla BE tangente dal primo punto coll'orizzonte BI, al seno dell'angolo FDK fatto dalla FD tangente del secondo punto coll'orizzontale DK.

Imperocchè convengano le dette tangenti in G; dunque, *come si dimostra nella Meccanica*, il momento di uno stesso grave posto sul piano GE al momento del medesimo posto sul piano GF, sta reciprocamente come GF a GE; cioè, *per le cose trigonometriche*, come il seno dell'angolo GEF, o del suo supplemento EBI, al seno dell'angolo GFE o dell'alterno FDK; ma questi momenti d'uno stesso mobile in diversi piani sono appunto le forze relative che lo spingono abbasso; ed il mobile collocato nel punto B della curva ABDC è come se fusse nel piano EGB che la tocca in B: siccome lo stesso collocato in D ha tale forza da scendere come se fusse nel piano tangente DF; dunque la forza in B alla forza in D sta come il seno dell'angolo EBI al seno dell'angolo FDK. Il che ec.

Corollario I. Sopra l'asse NC della curva ABDC descrivendo un semicircolo NMC, e tirando le corde CM, CL parallele rispettivamente alle tangenti BE, DF, sarà la forza in B alla forza in D, come MC ad LC; essendo queste i seni degli angoli MNC, LNC (posta NC per seno totale) uguali a' suddetti EBI, FDK, come è facile a dimostrarsi.

Corollario II. Se un pendolo NB (*Fig.* 144) descrive l'arco circolare BDC, le forze in qualunque punto B, D saranno come i seni BI, DK, che appunto uguagliano le corde CM, CL parallele alle tangenti BE, DF.

Corollario III. Onde alzandosi perpendicolarmente sull'arco BDC qualunque seno BI, DK, la figura de' seni che quindi ne nasce sarà la scala delle forze del pendolo, che descrive il suddetto arco circolare BDC.

Corollario IV. Ma descrivendosi da un pendolo l'arco cicloidale BDC (*Fig.* 145) come negli oriuoli di Cristiano Ugenio, le forze in B e D saranno come gli spazj BC, DC da scorrersi fino al termine infimo C; imperocchè dove l'ordinate BI, DK segano il semicircolo genitore in M, L, congiunte le corde CM, CL, sono appunto parallele alle tangenti BE, DF, *come nel cap. 8 degli Ugeniani num. 7 ho dimostrato*, e gli archi cicloidali BC, DC sono dupli delle corrispondenti corde MC, LC, *per le cose dette nell' Epistola Geometrica soggiunta agli Ugeniani num.* 17: dunque essendo, *pel coroll. 1 di questa*, la forza in B alla forza in D come la corda MC alla LC, sarà ancora come l'arco BC all'arco DC.

Corollario V. Sicchè alzandosi sull'arco BDC disteso in linea retta una linea in B uguale alla medesima BC, ed in D applicandosi una eguale alla DC e così sempre, il triangolo che ne risulta è la scala delle forze nel moto del pendolo cicloidale; onde tutto ciò che si è detto, *nel coroll. 4 della prop.* 3, *nel coroll.* 2 *e* 3 *della prop.* 4 *e* 5, delle gravità proporzionali alle distanze dal termine del moto, si può adattare alle vibrazioni cicloidali d'un pendolo.

23. Lascio molte altre particolarità che si potrebbero quindi dedurre; e solamente in confermazione dell'ipotesi del Galileo, che i gradi di velocità acquistati da un grave cadente per qualunque linea dalla medesima altezza siano uguali (il che nella prima edizione fu da lui assunto come postulato, indi ne diede la dimostrazione che fu comunicata dal Sig. Viviani a Monsù di Monconys l'anno 1646, come *nei Viaggi di questo*, part. 1, pag. 131, e da lui inserita *ivi* pag. 169, e poi stampata nell'edizione di Bologna dell'Opere del Galileo, criticata però, non si sa per qual ragione, e giudicata poco ferma da Cristiano Ugenio nel suo *Oriuolo oscillatorio*), vengo a dimostrare che in qualunque supposizione di forze sempre la stessa velocità è acquistata da un grave, per qualunque linea si muova, quando si è accostato egualmente al centro della Terra.

PROPOSIZIONE VII.

Cada un grave A (*Fig.* 146) o per la retta AC o per la curva ALM, ed abbia acquistato per la retta nel punto S la velocità SV, e per la curva nel punto M ugualmente alto, cioè in pari distanza dal centro C, la velocità MD; dico, essere sempre SV, MD uguali, qualunque suppongasi la scala delle forze AGHOS.

Siano tirati concentrici al centro C li due archi circolari infinitamente prossimi EL, SM segato in N dal ramo CL. Le forze assolute AG, EH, SO, che spingono il mobile per la retta AC, si attemperano dalla curva ALM, che in parte regge il mobile (o perchè sia un sodo piano curvilineo, sopra di cui scorra il mobile, o per essere il mobile medesimo sostenuto da un filo, obbligato col suo termine a descrivere detta linea, o per l'impeto trasversale impresso al mobile, da cui ha tal forza centrifuga che lo trattiene per quella via curva, raffrenando l'azione della gravità): siano adunque le forze rispettive che rimangono vive al mobile nella curva le AF, LI, MK, che s' intendano perpendicolarmente erette alla curva ALM, per avere nella superficie AFIKM la scala delle forze che spingono il mobile per detta curva. È certo, per le cose meccaniche, essere la forza HE, da cui assolutamente è spinto il mobile per la EC, ovvero LC perpendicolare all' orizzonte, alla forza LI, da cui viene spinto secondo l' inclinazione della curva LM, come reciprocamente LM ad LN ovvero ES; per la qual cosa il rettangolo ILM sarà uguale al rettangolo HES; e ciò sempre; dunque la scala delle forze assolute AGHOS uguaglia la scala delle forze rispettive FAMK; ma la prima scala alla seconda è come il quadrato della velocità SV, acquistata per lo spazio AS, al quadrato della velocità MD acquistata per lo spazio della curva AM, per la prop. 3; adunque SV è uguale ad MD; il che si dovea dimostrare.

Corollario I. Se l' ordinate PE, VS della scala della velocità del moto rettilineo AS, si applicano perpendicolarmente in LB, MD, nei punti L, M ugualmente alti dal centro C nella curva ALM, si ha la scala della velocità ABDM, che serve al moto per detta curva.

Corollario II. Venendo spinto un mobile per la curva LM con una velocità PE, quale si sarebbe acquistato cadendo dall' altezza AE, giunto che sia il mobile a qualunque punto M della curva, averà una velocità pari alla VS, che si sarebbe il mobile acquistato proseguendo il viaggio direttamente da E in S, o da L in N, ad un punto egualmente distante dal centro C.

Corollario III. Similmente essendo un mobile spinto allo insù per la curva ML colla velocità MD uguale a quella che si sarebbe acquistato il mobile cadendo dall' altezza AS, s' anderà diminuendo nel moto in maniera che in L sarà uguale a quella che si sarebbe acquistato dalla sola altezza AE, e finalmente si annullerà giunto che sia il mobile in A, cioè a quell' altezza, da cui cadendo si averebbe acquistato la primitiva velocità impressagli; imperocchè le forze SO, HE, GA nel moto rettilineo all' insù, e le forze MK, LI, AF nella salita curvilinea, imprimono al mobile gli stessi gradi di velocità contrarj alla sua direzione, e però ne' punti egualmente alti la velocità impressa al mobile dal proiciente verrà diminuita con eguali decrementi, che sono appunto gli stessi accrescimenti di velocità, che averebbe il mobile dalle medesime forze quando scendesse all' ingiù.

Corollario IV. Se il centro C de' gravi è in una immensa lontananza, le rette AC, LC diventano parallele, e gli archi EL, SM si stendono in rette orizzontali, come qui sulla superficie della Terra sogliono considerarsi; e però i gravi per qualunque piano o per qualsivoglia curva cadano da uno stesso punto sublime sul medesimo orizzonte, vi acquistano lo stesso grado di velocità che guadagnerebbero cadendo perpendicolarmente dalla medesima altezza: e questo grado di velocità quando si dirigesse nel mobile allo insù, potrebbe ricondurlo alla medesima altezza da cui è disceso.

24. Qui però è da avvertirsi, che sebbene ciò si verifica del moto per un solo piano, o per una continua curva, o per una porzione di curva congiunta alla sua tangente o ad altra curva che la tocchi, non così accade già passando il mobile per più piani variamente inclinati o per più curve che si seghino, o per una curva ed una retta che la tagli in qualunque maniera: come avvertì il Sig. Varignon *nelle Memorie dell' Accademia Regia di Parigi de' 22 novembre* 1704. Il che si farà manifesto dalla seguente

Proposizione VIII.

Scenda un grave dalla quiete pel piano AC (*Fig.* 147): indi si rivolga sul piano CG. Dico che in esso non vi entrerà colla velocità acquistata per la caduta AC, o per l' egualmente alta AE, ma con tal parte sola di essa, a cui stia la medesima come il seno totale AC alla CB (determinata dal riscontro della perpendicolare AB sopra la GC continuata) seno di complemento dell' angolo ACB, con cui sono vicendevolmente inclinati i detti piani.

Si compisca il rettangolo ADCB. È certo appresso i meccanici, che il moto per AC si può intendere composto delli due collaterali per AD e per AB; dimanierachè, esprimendosi per AC la velocità acquistata per la caduta AC, equivalerà questa alla velocità AB per la direzione AB ed alla velocità AD ovvero BC per la direzione AD, o per la sua parallela BCG; ma passando il mobile sul piano CG, che lo sorregge secondo la perpendicolare BA, viene ad elidere l'effetto della velocità AB, impiegandola tutta in premere il detto piano CG; dunque gli rimane impressa solamente, e spedita ad esercitarsi per la direzione CG, la velocità AD ovvero BC, con cui comincerà a scendere lungo il piano CG, accelerandosi poi come richiede la natura di questo moto ed acquistando i gradi conseguenti a quello che abbiamo detto rimanergli impresso all'entrare che fa sul nuovo piano. Dunque il grado di velocità acquistato nel fine del piano AC, sta a quello che gli resta impresso nel passaggio al piano contiguo CG, come AC a CB, cioè come il seno totale al seno di complemento dell'angolo ACB contenuto da ambi i piani. Il che ec.

Corollario I. Quanto più ottuso è l'angolo ACG contenuto dai piani AC, CG, e conseguentemente quanto più acuto è l'altro ACB, tanto maggiore sarà la velocità BC che rimane al mobile sul nuovo piano, e più si accosterà ad uguagliare la velocità AC che aveva nel fine del primo piano; onde perchè nella continuazione d'una curva, o nel passaggio da una curva alla retta o ad altra curva sua tangente, o viceversa rivoltandosi il mobile dalla tangente alla curva, l'angolo ACG si fa ottusissimo, e l'altro ACB è infinitamente piccolo per essere minore di qualunque angolo acuto rettilineo, *per la 16 del 3.° degli Elementi*, ne segue che in questi casi non si diminuisce la velocità conceputa, passando il mobile per tali confini, ma se la mantiene intera, anzi l'accelera, come cadendo nel perpendicolo o per un piano continuato, sicchè ne' punti egualmente alti dall'orizzonte ha la stessa velocità.

Corollario II. Tirando dal punto B la BH perpendicolare sopra il primo piano AC, il mobile sceso per li due piani AC, CG fino all'orizzonte GF, in vece di avere la velocità che si sarebbe acquistato cadendo per la perpendicolare AF o per lo piano continuato ACI, si troverà d'avere solamente quella che è dovuta alla discesa HI, imperocchè essendo BC media proporzionale fra la CA e la CH, sarà la velocità per la CA a quella per CH come CA a CB; ma ancora la velocità guadagnata per la scesa AC a quella che resta al mobile nell'ingresso del piano CG sta nella stessa proporzione di CA alla CB; dunque la velocità che resta al mobile nel principio del piano CG, uguaglia quella che averebbe dopo la discesa CH; ed in ciascun punto della CG e della CI, ugualmente alto dall'orizzonte GF, ugualmente si accresce; dunque la velocità acquistata in G per li due piani congiunti AC, CG, uguaglia quella che averebbe cadendo dall'altezza HI e non dalla AI o dalla AF. Il che ec.

Corollario III. Dovendo un mobile dopo la scesa del piano AC (*Fig.* 148) rivolgere il moto pel piano orizzontale CG, anderà per esso equabilmente, ma con tale velocità che stia all'acquistata nel punto C del piano AC, come BC, seno dell'angolo CAB che misura l'inclinazione di detto piano col perpendicolo, al seno totale AC, come convince la stessa dimostrazione addotta per la proposizione principale.

Corollario IV. E però cadendo perpendicolarmente sull'orizzonte per la AB, si smorzerà il suo moto (quando non ribalzi allo insù per forza elastica) annullandosi coll'angolo CAB il seno BC, e conseguentemente riducendosi in nulla quella velocità che gli dovrebbe rimanere da esercitarsi nel piano orizzontale, che totalmente sostiene l'impressione del mobile: tanto più, che facendo la perpendicolare AB angolo retto con qualunque linea tirata per lo stesso punto B nell'orizzonte, non vi sarebbe maggior ragione che andasse più per l'una che per l'altra.

25. Tutto quello però che dice il Galileo del moto per l'orizzonte preceduto da una caduta per la perpendicolare o per un piano inclinato, e quanto asserisce del passaggio da un piano ad un altro, deve intendersi non assolutamente, ma *ex hypothesi* che ritenesse il mobile nell'orizzonte o nel nuovo piano inclinato tutta quella velocità che si era acquistata colla caduta; e facendo conto della diminuzione di velocità, che secondo le cose sopra dimostrate debbe seguire, si dirà, per esempio, che cadendo un mobile dal piano AC, e volgendosi per l'orizzonte CG, in tempo eguale a quello della caduta, farà per l'orizzonte uno spazio CG duplo non già di AC, ma della sola CB, che misura la velocità di cui resta affetto; di più, che stando CG dupla di CB, si farà in minor tempo il viaggio per le due AC, CG, che per qualunque altra parte minore, o per qualsivoglia maggior porzione di detto piano colla stessa orizzontale; e così discorrendo d'altre riflessioni che si potrebbero fare.

26. Tra queste però non parmi dovere omettere che, per la proposizione 36 del Galileo, in cui dimostra farsi in minor tempo la discesa d'un grave per due corde iscritte nel quadrante d'un cerchio che per una sola, ed anco in più breve tempo passarsi tre corde che due sole sottendenti lo stesso arco sotteso da quelle, e così di mano in mano, benchè in astratto si verifichi, fatta quell'ipotesi matematica del conservarsi nell'ingresso del susseguente piano la velocità acquistata nel fine dell'antecedente, non così però riesce vera in concreto, perchè di fatto fisicamente quella velocità si varia e si diminuisce nella proporzione sopra dimostrata, il che trattiene il mobile più lungo tempo ne' susseguenti piani, onde assolutamente ricerca per lo più maggior tempo nell'andare da un termine all'altro per più linee rette inflesse a varj angoli, che per una sola retta stesa fra i medesimi estremi; in conseguenza di che, ancora quello che asserisce lo stesso Galileo nella scrittura del fiume Bisenzio, che più speditamente scorra l'acqua andando per più rivolte, che per un diritto canale, dee limitarsi a più condizioni e circostanze, non verificandosi tanto generalmente quanto pare che suonino l'espressioni del nostro Autore.

27. Molto meno si verifica (data ancora la sua ipotesi, che la velocità non dovesse nel passaggio da un piano all'altro scemare) che la via da spedirsi in un tempo brevissimo da un punto all'altro sia la circonferenza di un cerchio; nè l'argomento del Galileo conclude altro se non che il viaggio per l'arco del cerchio sia fatto in tempo più breve che per la somma de' lati d'un poligono iscrittovi, stante la solita sua supposizione; e collo stesso metodo averebbe potuto provare, essere più breve il tempo per un arco di parabola o d'iperbola descritta per gli stessi termini, in paragone de' lati che alla medesima curva fussero iscritti. Ma questo non è un essere assolutamente speditissimo il viaggio da un punto all'altro, in relazione di qualsivoglia via rettilinea o curvilinea che scegliere si potesse; per la qual cosa fu sommamente da commendarsi il problema proposto da Giovanni Bernulli celebre matematico del secolo scorso, e da lui, siccome ancora separatamente dal Sig. Leibnizio, felicemente sciolto negli Atti di Lipsia del 1696, dimostrando nella maniera loro, che la curva cicloidale è quella per cui in brevissimo tempo si porterebbe un grave da un punto ad un altro più basso, non posto nella stessa linea perpendicolare all'orizzonte; il che ancora da noi, senza intrigo di calcoli, sarà geometricamente dimostrato, dopo di avere sopita certa difficultà, che ora mi sovviene potersi opporre al corollario primo della precedente proposizione.

28. Si è detto ivi, che se la scesa del grave si faccia per una curva continuata ACG (*Fig.* 149), o per due curve, le quali in C si tocchino, o per una retta e una curva congiunte insieme nell' angolo del contatto ACB, che è infinitamente piccolo, non debba succedere veruna diminuzione di velocità, quale si dimostra succedere nel passaggio da un piano all' altro inclinati a qualsivoglia angolo rettilineo. A ciò potrebbe taluno replicare, che dall' essere minore il decremento della velocità, secondo che l' angolo ACB è acuto, ne segue bensì l' essere infinitamente piccolo, e per conseguenza insensibile, e da non considerarsi un tale decrescimento nel passaggio da BC in in CG, mercè l' infinita piccolezza dell' angolo del contatto ACB; ma ciò non serve a provare che in tutta la scesa per una curva continua non patiscano sensibile alterazione que' gradi di velocità, che ne' punti egualmente alti del perpendicolo si dovevano acquistare dal mobile; imperocchè variandosi in ciascuno degl' infiniti punti d' una curva la sua pendenza, benchè in ciascuno la diminuzione di velocità sia infinitamente piccola, in capo a un tratto sensibile di essa curva si saranno fatte infinite diminuzioni minime di velocità, che ne renderanno il defalco notabile: essendo manifesto che una parte infinitesima, infinite volte moltiplicata, diventa una grandezza finita e comparabile coll' altre ordinarie.

29. La risposta alla quale istanza dipende dal dimostrare, che la diminuzione di velocità cagionata per l' angolo del contatto ACB non solo è infinitamente piccola, ma è infinite volte infinitamente piccola, cioè un infinitesimo del secondo ordine, e non del primo, ed appartiene al genere delle seconde differenze, non delle prime. Tirisi dal punto A, quanto si voglia prossimo al punto del contatto C, la solita perpendicolare AB sopra la GC, e sopra la sua tangente prolungata verso B per la piccola porzione CB, e dal centro C descritto l' archetto BH, che è la perpendicolare dal punto B in H, o almeno vi passa sopra, sicchè la AH, differenza del seno totale AC dal seno di complemento CB dell' angolo ACB, è uguale, o è piuttosto minore del seno verso del medesimo angolo. Essendo dunque, *per la proposiz.* 8 *del* 6.° *degli Elem.*, CA ad AB come AB ad AH seno verso dell'angolo ACB: e per la piccolezza infinita del detto angolo minore d' ogni acuto rettilineo, essendo il suo seno retto AB infinitamente piccolo, il seno verso AH sarà poi infinitamente più piccolo del medesimo seno retto AB; e però sarà un infinitesimo del secondo genere in riguardo di AC, il quale multiplicato infinite volte non giunge a fare una finita grandezza, ma solamente un infinitamente piccolo del ge-

nere di AB; che però la differenza AH della velocità acquistata AC da quella BC, che gli resta viva nell'ingresso che fa il mobile sul piano CG, è infinite volte infinitamente piccola rispetto alla velocità finita da esercitarsi, e di sì poco la diminuisce, che tali decrementi, moltiplicati ancora infinitamente in ciascun punto della curva, non giungono ad aggregare un decremento sensibile di velocità; onde sebbene non è da ammettersi in pratica ciò che, nel suddetto discorso sopra Bisenzio, asserisce il Galileo circa le svolte de' fiumi, che passando l'acqua da un canale in un altro meno inclinato, non debba raffrenarsi la velocità conceputa, quando si tratti di canali inclinati a qualche angolo rettilineo e sensibile: è però vero in tutto rigore l'asserto del medesimo Galileo trattandosi d'un fondo curvilineo, ed è molto giudizioso l'avvertimento che ivi dà di compartire la pendenza de' fiumi secondo una curva concava più inclinata sull'orizzonte verso il suo termine, che nelle parti superiori, anzi che verso il fine diventerebbe quasi orizzontale: come in fatti suol praticare la natura nel condurre l'acque al loro termine; ed a tal effetto sarebbe molto a proposito la curva della cicloide, come già prima d'ogni altro avvisai *nelle mie Riflessioni sulla controversia del Molino dell' Era* al num. 6: nè credo che sia diversa da un'intera cicloide la figura che il Signor Domenico Corradi, matematico del Serenissimo di Modena, disse, *in una sua scrittura sopra il Reno inserita nella Visita di Monsig. Illustriss. Riviera* a carte 173 e seguenti, conveniente alle botti sotterranee, perchè siano premute col minimo carico dell'acque che debbono scorrere per esse botti; mercechè vi si fermerà sopra l'acqua il minor tempo che sia possibile, facendo per la cicloide il viaggio più speditamente che per altra curva, che abbia i medesimi termini; come, ben ricordevole della promessa fatta di sopra, or ora mi accingo a dimostrare.

30. Conviene però premettere a modo di lemma la soluzione del seguente problema, il quale in parte fu già dimostrato dal Signor Cristiano Ugenio nel suo trattato del Lume, servendosene a dimostrare la ragione delle refrazioni della luce qualora passa da un mezzo in un altro di densità diversa, come sarebbe dall'aria nel cristallo o dal vetro nell'acqua ec.; ma qui da me viene steso questo problema all'attraversamento di più e diversi mezzi, come appresso vedremo.

Proposizione IX.

Debba un mobile portarsi da A in B (*Fig.* 150) più speditamente che sia possibile, andando dal punto A verso la linea CG colla velocità FC, e nello spazio interposto fra le due parallele CG, DH colla velocità Z, e nello spazio intercetto fra le parallele DH, EX colla velocità Y, e quindi fino in B colla velocità BX, si cerca per quale strada doverà andare.

Si dispongano le rette AC, CD, DE, EB, talmente che i seni de' loro angoli colle perpendicolari tirate sopra le date parallele, quali sono ACF, CDG, DEH, EBX, siano per ordine come le velocità FC, Z, Y, BX. Dico che per la strada ACDEB verrà il mobile da A in B in minor tempo che per qualsivoglia altra strada AIKLB, ritenute ne' siti suddetti le stesse velocità.

Si conduca IM perpendicolare sopra AC, KN sopra CD, LO sopra DE, e fatti gli angoli retti BET, EDR, DCP, si tirino IP parallela a CD, KR a DO, ed LT ad EB. Essendo adunque l'angolo CIM uguale ad ACF, ed ICP a CDG, e questo a DKN, e KDR a DEH, il quale uguaglia ELO, siccome LET ad EBX (mentre ciascuno degli angoli che si paragonano compisce con un medesimo angolo la quantità d'un retto, come è manifesto a chi attentamente considera nella figura la sua costruzione), sarà la velocità FC alla Z, come MC ad IP, che sono i seni degli angoli CIM, ICP; e però si farà nello stesso tempo MC colla velocità FC, ed IP colla velocità Z. Similmente, e per la medesima ragione, si farà nello stesso tempo ND colla velocità Z, e KR colla velocità Y; ed altresì OE colla velocità Y si spedirà nello stesso tempo che LT colla velocità BX; ma AI è maggiore di AM, IQ maggiore di IP, e QK maggiore di CN, siccome KS è maggiore di KR, ed SL di DO, ed LV di LT, e VB di EB; dunque si farà in più lungo tempo la strada AIKLB, che l'altra ACDEB colle prescritte velocità. Il che ec.

Si avverta, che sebbene in vigore della costruzione pare che si dimostri più breve il tempo per la via ACDEB solo in paragone di un' altra AIKLB, che più si accosti alla perpendicolare tirata dal primo punto A sulla retta CG: ad ogni modo convince ancora in paragone d'altra via che si descrivesse al di là di AC, scostandosi più da detta perpendicolare, attendendo, che se è più breve il tempo del viaggio da A in B per la strada ACDEB che per la AIKB, sarà viceversa, ritornando indietro da B verso A, più breve il tempo del viaggio BEDCA che dell' altro BLKIA, la strada del quale si scosta più dell' altra dalla perpendicolare tirata da B sopra EX; onde resta la proposizione generalmente dimostrata.

Corollario I. Quindi è manifesto che la via da spedirsi in più breve tempo andando da un punto a un altro, non è la retta, se non quando si ha da mantenere in tutto il viaggio la medesima velocità; onde se si hanno da attraversare diversi mezzi, che diversamente resistano al moto; come dovendo attraversare varj campi, altri nudi, altri vestiti d'erbe, altri imbarazzati da spighe, e passare varie strade ingombrate da un flusso e riflusso di popolo, non sarebbe buon consiglio l'andare verso il termine destinato per via retta: ma sarà meglio fare tali gomiti e svolte che i seni degli angoli delle loro inclinazioni siano come le facilità che si hanno ad attraversare que' varj mezzi; come pratica ancora la natura nelle rifrazioni. Come se un oggetto posto in A doverà mandare un raggio che lo renda visibile all'occhio posto in B, per varj mezzi AG, CH, DX, EB, tutti diafani, ma di varia rarità, sicchè abbia in essi più facile il passaggio di mano in mano nella stessa misura in cui crescono i seni degli angoli ACF, CDG, DEH, EBX, di fatto la via del raggio trasmesso sarà il flessilineo ACDEB, e non una retta immediatamente tirata dal punto A al punto B.

Corollario II. Cadendo ancora un grave dalla quiete, se non discende per una linea perpendicolare all'orizzonte, non verrà in un tempo brevissimo da un punto all'altro, cadendo per una linea retta, anzi nè meno per più rette inclinate a varj angoli, ma dee scendere per una curva, in cui i seni dell'inclinazioni, che hanno varie parti di essa curva col perpendicolo, siano come le velocità concepute nel cadere sino a' punti di quella curva.

Proposizione X.

Scendendo un mobile per l'arco d'una cicloide ABC (*Fig.* 148), anderà dal punto A al punto C, o a qualsivoglia degl' intermedj B, D, in minor tempo che se vi andasse per qualunque altra strada.

Imperocchè, come si è detto *nel coroll.* 4, *prop.* 6, le tangenti BE, DF sono parallele alle corde corrispondenti nel cerchio genitore MC, LC; e però sono inclinate le porzioni di questa curva col perpendicolo, nel punto B all'angolo MCN; e nel punto D all'angolo LCN; ma le velocità ne' punti, B, D, dopo la caduta dal punto A, sono le stesse che ne' punti I, K dopo la caduta dal punto N, *per la prop.* 7, cioè in suddupla ragione delle scorse altezze NI, NK, come sopra col Galileo si è dimostrato; che è quanto dire come le rette MN, LN, che sono appunto i seni de' suddetti angoli MCN, LCN. Dunque, *per l'ultimo corollario della precedente,* la via della cicloidale ABDC si fa in un brevissimo tempo dal punto A all'estremo C o a qualsivoglia degl' intermedj B, D. Il che era da dimostrarsi.

Corollario I. Ancora da B in C caderebbe il grave in un brevissimo tempo per l'arco BC, quando si supponesse nel punto B già affetto di quella velocità che può acquistarsi cadendo per l'altezza AB ovvero NI; ma se cominciasse a cadere dalla quiete in B, non basterebbe, per andare verso C in un brevissimo tempo, il mandarlo per l'arco BC, ma bisognerebbe descrivere tale cicloide, che principiando per B passasse per C; il che come si faccia, viene insegnato dal Signor Giovanni Bernulli *negli Atti di Lipsia del* 1698, descrivendo qualsivoglia cicloide su la base BI, principiante dal punto B, e segandola con una retta che congiungesse i punti BC: perchè allora, come l'intercetta dal perimetro di detta cicloide sta alla BC, così il diametro del cerchio suo genitore starebbe al diametro del cerchio generante la cicloide ricercata, che principiando da B passerebbe per C.

Corollario II. A volere che la scesa da A in C (*Fig.* 151) si facesse in un brevissimo tempo, come conghietturava il Galileo, per l'arco del quadrante circolare ABDC, bisognerebbe che le altezze FB, ED, che sono i seni degli angoli BHF, DHE, cioè delli GBF, EDB fatti dalla curva col perpendicolo, fussero come le velocità concepute nel cadere dalle medesime altezze; e conseguentemente, *per la prop.* 7, converrebbe che un grave cadendo dall'altezze HI, HK avesse le velocità proporzionali agli spazj scorsi; il che dallo stesso Galileo si reputa impossibile, e da noi si è dimostrato, *nel coroll.* 7 *della prop.* 4, che a principiare il moto in tale ipotesi vi si richiederebbe un tempo infinito.

31. Prima di tralasciare la contemplazione della cicloide, stimo ben fatto in questo luogo dimostrare come le vibrazioni de' pendoli fatte in archi cicloidali maggiori o minori, sono veramente equidiuturne: ciò che non accade alle vibrazioni circolari, se non fatte in archi minimi, in quanto esse poco si scostano dall'arco della cicloide, di cui quel cerchio è combaciante, o come dicono, *osculatore*. Sia pertanto

PROPOSIZIONE XI.

Quando le forze in A e in B (*Fig.* 152) sono proporzionali agli spazj AT, BT da scorrersi sino al termine del moto T, essi spazj da un mobile, che si parte dalla quiete in A ovvero in B, si passeranno in tempi uguali.

Descritto un quadrante di cerchio ACZT, che sarebbe la scala delle velocità del moto per AT, *per lo coroll. 4 della prop.* 3, si descriva l'altro quadrante concentrico BDX, che sarà altresì la scala delle velocità del moto per BT; perchè tirato il raggio TDC infinitamente prossimo all'altro TBA, e tirati i seni DG, SC, saranno gli spazj AS, BG infinitamente piccioli e proporzionali alle forze AT, BT, ovvero TS, TG; onde essendo le medesime sunnormali alle figure ACZ, BDX, ne segue che ancora BD, XT è la scala delle velocità del moto per BT *(per lo coroll. 1 della prop. 3)*, e però che ancora le velocità SC, DG sono come gli spazj AS, BG, i quali però saranno passati in egual tempo *per le cose dette al numero* 9. Così qualunque parte proporzionale di AT sarà scorsa in egual tempo che una simil parte proporzionale similmente posta in BT, partendosi il mobile dalla quiete in B; e pertanto in egual tempo si passeranno le AT, BT. Il che ec.

Altrimenti. Essendo le sunnormali de' quadranti ACZ, BDX proporzionali alle forze, saranno essi le scale di velocità d'ambi i moti per AT e per BT rispettivamente; sicchè rappresentando TZ la velocità acquistata nel fine del viaggio AT, si esprimerà dalla TX la velocità acquistata nella discesa BT; e perchè, *per lo coroll.* 3 *della prop.* 5, il viaggio AT, fatto in questa ipotesi acceleratamente dalla quiete, sta allo spazio che si farebbe nello stesso tempo della caduta equabilmente coll'ultimo grado di velocità TZ, come il raggio ad un quarto di periferia circolare; dunque nel tempo della caduta AT si farebbe equabilmente colla velocità TZ l'arco del quadrante ACZ; similmente nel tempo della caduta BT si passerebbe equabilmente colla velocità TX il quadrante BDX; ma essendo gli spazj ACZ, BDX proporzionali alle velocità TZ, TX, si farebbe l'uno e l'altro spazio equabilmente in tempo uguale; dunque altresì uguale è il tempo della caduta AT a quello della caduta BT. Il che ec.

Corollario I. Quindi si ha che in detta ipotesi il tempo con cui un projetto tirato dal punto A colla velocità TZ, che pareggiasse la sua gravità in A, e con direzione perpendicolare al raggio TA descriverebbe l'intera circonferenza, è quadruplo del tempo che s'impiegherebbe discendendo per lo raggio AT; ed uguaglia il tempo di qualsivoglia altra rivoluzione che farebbe un altro mobile spinto dal punto B perpendicolarmente al raggio BT, con velocità abile a pareggiare ed equilibrare la gravità in B, quale sarebbe la velocità TX: imperocchè sebbene, come dimostra Cristiano Ugenio *nel teorema* 5 *De vi centrifuga*, nell'ipotesi della gravità costante, il mobile cadendo dalla metà del semidiametro acquista una velocità, con cui girando circolarmente ha la forza centrifuga uguale alla gravità; nella ipotesi però della forza centripeta proporzionale alle distanze dal centro, solamente cadendo dall' altezza del semidiametro acquisterebbe la velocità equivalente alla gravità sua.

Corollario II. Nella suddetta ipotesi qualunque grave, da qualsivoglia distanza partendosi, giugnerebbe nello stesso tempo al centro della Terra; compensandosi la somma lontananza con una somma velocità, e la minima distanza con una incredibile tardità; come, nella comune ipotesi della gravità costante e delle direzioni sue parallele, accade che i gravi scendono nello stesso tempo per qualunque corda grande o piccola inclinata all' infimo punto d' un mezzo cerchio.

Corollario III. Anzi essendo il centro della Terra C (*Fig.* 153) ed un piano inclinato AB, sopra di cui sia CB perpendicolare, in egual tempo scenderà un grave per tutta la AC che per la AB fino al suo infimo punto B; e nello stesso tempo si farebbe la AB dalla quiete in A, che la FB dalla quiete in F: perchè, tirate due rette CF, CG infinitamente prossime, e dal centro C descritti gli archi FE, GHD, sarà HF ad FG come FB ad FC, per esser simili i triangoli rettangoli FHG, FCB; ma la forza nel piano FG alla forza nella FH, o nella ED, sta come FB ad FC ovvero a CE; e ciò sempre accade; dunque se le forze ne' punti E, D della verticale AC sono come le distanze EC, DC, le forze ne' punti F, G del piano inclinato sono come le FB, GB; onde in egual tempo dalla quiete si faranno EC, FB, DC, GB; e qualunque parte della AC si farà in egual tempo che una parte simile della AB; dimanierachè, tirata IG parallela a CB, si faranno altresì in egual tempo le AI, AG, appunto come dimostra il Galileo dover succedere nella comune ipotesi della gravità, e supposte le direzioni dei gravi parallele, che il diametro d' un semicircolo verticale e qualunque sua corda (come AI, AG) si scorrono in tempo eguale.

Proposizione XII.

Nella stessa comune ipotesi della gravità costante, e supposte le direzioni de' gravi parallele, movendosi un grave per la cicloide ABDC, farà nello stesso tempo tutta la curva ABDC, principiando dalla quiete in A, che qualsivoglia sua porzione BDC, principiando dalla quiete in B.

Perchè essendo le tangenti della cicloide ne' punti A, B, D parallele ad NC, MC, LC corde del semicircolo, come nel cap. 8 *degli Ugeniani* n.° 7 ho dimostrato, sarà la forza della gravità relativa nei punti A, B, D, come le stesse NC, MC, LC (a cagione dell'essere NC ad MC, per esempio, come la stessa MC a CI, cioè come la forza nel perpendicolo NC alla forza sul piano inclinato MC): ma la curva ABC è dupla di NC, e la BC dupla di MC, e la DC dupla di LC, *per le cose dette nella Epistola Geometrica soggiunta agli Ugeniani* n.° 17, dunque le forze in A, B, D sono per ordine come gli spazj curvilinei ABC, BC, DC da scorrersi fino al termine C infimo della cicloide; onde i detti spazj, *per la prop. antecedente*, si passeranno in tempo eguale. Il che era da dimostrarsi.

Corollario. Perchè dunque Cristiano Ugenio dimostra che nello svolgersi la cicloide descrive una curva simile ed eguale a sè stessa, posta inversamente; se il supremo capo del filo, a cui è sospeso un pendolo, sarà ristretto fra due cicloidi che obblighino il suo termine inferiore a descrivere le vibrazioni per arco cicloidale, saranno queste equidiuturne, tanto facendosi per un arco maggiore, che per un altro minore; laddove il pendolo ordinario, che descrive l'arco circolare, solamente facendo vibrazioni minime, le farà in tempo sensibilmente eguale, in quanto quegli archi imitano la curvatura d'una cicloide descritta sull'asse sudduplo della lunghezza di esso pendolo, che è il raggio del cerchio, da cui è combaciata la medesima cicloide; o pure in quanto quegli archi minimi si possono prendere per le corde iscrittevi dall'infimo punto del cerchio, per le quali corde già dimostrò il Galileo farsi la discesa de' gravi nel medesimo tempo.

32. Voleva qui dire qualche cosa della celebre ed ingegnosa opposizione fatta dal P. Gio. Francesco Vanni alla Proposizione Meccanica del Galileo, da lui supposta in questo Trattato, e da noi altresì ne' precedenti paragrafi accennata, che il momento della gravità in un piano inclinato stia al momento nel perpendicolo, come reciprocamente il perpendicolo alla lunghezza di esso piano. Ma essendo stato questo Autore da tant'altri valentuomini confutato (sebbene da taluno con mezzi poco sussistenti, e con erronei principj fecondi d'altri assurdi gravissimi), non stimo opportuno il diffondermi sopra di ciò, rimettendomi alla mia *Epistola Matematica de Momento Gravium ec.*, dove la proposizione del Galileo è fondatamente dimostrata, e confutato il Porzio ed il Giordano, autori che vanamente hanno preteso di riformarla in maniere diverse da quella che propose già il P. Vanni, perchè la via della verità essendo una sola, chi la smarrisce una volta e l'ab-

bandona, si trova disperso in mill' altre strade fallaci che conducono all' errore, e tra queste non sa discernere quale sia quella cui debba attenersi; onde perde il tempo e la fatica, vagando inutilmente senza sapere dove possa sicuramente far capo.

33. Similmente tralascio di rispondere ad alcuni che pare vogliano redarguire d' incoerenzà nelle sue opinioni il Galileo, perchè supponga qui la forza della gravità costante, il che è incompossibile coll' ipotesi pitagorica del moto della Terra, di cui si mostrò il nostro Autore così appassionato partigiano; imperocchè, come mostrano il Sig. Varignon *nelle Memorie dell'Accademia Regia del* 1707, ed il Sig. Ermanno *negli Atti di Lipsia* 1707, la diurna vertigine deve imprimere tali forze centrifughe in varie altezze di valore diverso, che attemperino diversamente e raffrenino dove più dove meno lo sforzo della gravità, onde se questa era costante, supposta la quiete del globo terraqueo, deve riuscire poi variabile, facendola girare d' intorno al proprio asse. Ma, come gli stessi autori confessano, nelle distanze, in cui si può da noi sperimentare l' azione della gravità, rispetto alla gran distanza dal centro della Terra, non può esservi gran differenza di forza centrifuga, e però cessa ogni cagione di sospettare che si renda disuguale l' azione della gravità, perchè rimarrà da per tutto egualmente diminuita, onde resterà di costante ed invariabile quantità. Oltredichè se si volesse che in tutto rigore rimanesse l' azione della gravità costante, benchè defalcata dalla varia impressione della forza centrifuga che può avere in varie distanze, basta supporre che la detta forza della gravità fusse primitivamente varia in quella proporzione ed a quella misura che bisogna per fare che, detrattane la contraria azione della forza centrifuga, il resto rimanga della medesima quantità.

34. Prima di dar fine a queste note mi pare d' aggiungere un'altra proposizione, benchè attenente piuttosto al moto de' projetti, la quale servirà per illustrare ed amplificare la proposizione 7 del dialogo quarto, rendendone l' uso più generale, con molto vantaggio della pratica, a cui può in infiniti casi servire.

Proposizione XIII.

Dovendosi mandare un projetto dal luogo A nel sito G (*Fig.* 154), benchè non posto nel medesimo orizzonte, ma sopra o sotto di esso, con tale velocità, quale si acquisterebbe un grave cadendo dalla sublimità SA: si cerca la direzione del tiro.

Congiunta AG, e prolungata la verticale SA al di sotto verso F, si faccia sopra la SA una porzione di cerchio capace dell'angolo GAF, e posta AH uguale ad un quarto della AG, si alzi la verticale HM. Se questa non concorre colla porzione circolare AMS, non sarà sufficiente la data velocità a condurre il projetto da A in G, ma vi vorrà velocità maggiore: ma se concorre con essa in uno o due punti M, *m*, si congiunga AM; questa sarà la direzione, con cui facendo il tiro, anderà il projetto a ferire nel destinato scopo G.

Perchè divisa AG (*Fig.* 155) per mezzo in I, e per M condotta NMC parallela ad AG, e tirata la verticale IC che concorre colla direzione AM in K, e congiunta CHB, che sarà parallela ad AM (perchè essendo AH uguale ad HI, sarà AM uguale ad MK, e KC a CI, cioè ad MH, a cui è ancora parallela, e però MK, CH sono parallele), tirisi ancora alla stessa direzione AM parallela GF, e finalmente congiungasi SM; sarà dunque l'angolo SMA nella porzione uguale all'angolo GAF, ovvero MNA; dunque essendo ancora l'angolo MAN comune, saranno simili i triangoli SMA, NMA; e però la proporzione di SA ad AM sarà la medesima che di AM ad AN ovvero ad AB, che gli è uguale, siccome NM uguaglia la MC; onde il rettangolo SAB uguaglierà il quadrato della AM o pure della BH; e presi i quadrupli, sarà il rettangolo di AB nella quadrupla di SA, uguale al quadrato della BC; dunque il punto C è una parabola descritta colla direzione AM, e colla data velocità prodotta dalla caduta della sublimità SA, che è sempre la quarta parte del lato retto appartenente al diametro AB; ma essendo GA quadrupla di AH, ancora GF è quadrupla di BH, di cui è dupla la BC; onde il quadrato FG è quadruplo del quadrato BC, come FA è quadrupla di AB; dunque ancora il punto G è nella stessa parabola descritta come sopra per li punti A, C; e però fatto il tiro colla data velocità secondo la direzione AM, anderà il projetto a batter nel punto G. Il che ec.

Corollario I. È manifesto che la NC è tangente della parabola, essendo AB uguale ad AN.

Corollario II. Se la retta HM sega l'arco AMS in due punti M, *m*, si potrà fare il tiro per qualunque delle due parabole ACG, ACG, l'una superiore, l'altra inferiore, essendo l'angolo GAM (fatto dalla tangente e dalla segante) uguale all'angolo ASM (nella porzione alterna) ovvero all'angolo SA*m* (che corrisponde all'arco S*m* uguale ad AM); onde ambe le direzioni AM, A*m* sono egualmente inclinate, quella col piano AG, questa colla verticale AS.

Corollario III. Ma se HM (*Fig.* 156) tocca nel punto M l' arco AMS, che sarà il suo punto di mezzo, sarà possibile una sola parabola, e questa manderà il tiro sul piano AG più lontano che sia possibile: perchè l' ordinata MN riesce la massima di tutte, e di questa è quadrupla la AG: dimanierachè il più ampio tiro che possa farsi sul piano AG è quello, in cui la direzione AM sega per mezzo l' angolo SAG, contenuto dal detto piano e dalla verticale; e quanto più una direzione si accosterà al punto di mezzo dell' arco AMS, manderà più lungi il projetto, che quando più se ne dilungherà. Appunto come riesce tirando sul piano orizzontale (che fa angolo retto colla verticale), che inclinando la direzione alla metà di detto angolo, cioè a 45 gradi, si manda il tiro più lontano che sia possibile.

Corollario IV. Viceversa, per mandare un projetto dal punto A allo scopo G posto sul piano AG, volendo impiegarvi la minima quantità possibile di forza o di polvere o di velocità, basta fare il tiro colla direzione che seghi per mezzo l' angolo contenuto dal detto piano e dalla verticale, cercando susseguentemente quale quantità di impeto gli convenga.

E tanto basti di aver detto per illustrare queste dottrine, avendomi impedito di stendere moltissime altre speculazioni, che aveva in pronto in questo proposito, l' essere occupato in affari di tutt' altra ispezione, che dagli studj di questa sorta continuamente distratto mi tengono.

APPENDICE

35. In conseguenza di quanto si è di sopra dimostrato nel corollario 3 della proposizione 8, si può risolvere il problema seguente.

Proposizione XIV.

Scenda un grave pel piano AD (*Fig.* 157), e quindi si volga per l' orizzontale DB verso B. Si cerca qual proporzione abbia il moto per le due AD, DB, in qualsivoglia posizione della AD, al tempo per la sola AB.

Divisa per mezzo la perpendicolare AE in F, e l'orizzontale EB in R, si tirino FCP, RCQ parallele alle EB, EA; e per B, fra gli asintoti GP, CR, sia descritta l' iperbola di Apollonio BH, con cui concorra la AD continuata in H. Dico che il tempo per le due AD, DB al tempo per la sola AB starà come AH ad AB.

Imperocchè, posto che il tempo per AB sia espresso dalla AB, il tempo per AD sarà misurato dalla AD; e questo stesso servirebbe a scorrere nell'orizzonte con moto equabile il duplo di AD, se dovesse mantenersi in esso la velocità AD conceputa nel fine di detto piano; ma restandogli viva (*per lo corollario* 3 *della proposizione* 8) la sola velocità ED, passerà con essa il mobile nell'orizzonte il duplo di essa ED nel medesimo tempo AD, e tirata HS perpendicolare a DB, passerà nel tempo DH, colla detta velocità ED, il duplo della DS, cioè la DB: perchè tirata HG parallela a BE, che sega la CR in K, e congiunta la BH, che concorre colle AQ, FC, AE, QR in N, M, I, L, sarà ON dupla di PM cioè di KH (per essere BM uguale ad HI secondo Apollonio, e conseguentemente PM uguale a KH), e la AO è dupla di AQ o di GK: dunque tutta la AN è dupla della GH; e però NL è divisa per mezzo in H; onde H è il centro del semicircolo descritto sul diametro NL, che passerebbe per l'angolo retto NAL; sicchè HA uguaglia HN, e però ancora HB uguaglia HD, onde la HS essendo perpendicolare alla base del triangolo isoscele DHB, taglierà essa base BD per mezzo in S; dunque essendo il tempo per DB misurato dalla DH, sarà il tempo per le due AD, DB misurato dall'intera AH, mentre il tempo per la sola AB si esprimeva dalla medesima AB; sta dunque il tempo per AD, DB al tempo per AB, come AH ad AB. Il che ec.

Corollario I. Se col centro A e col raggio AB si descrivesse un arco di cerchio che tagliasse l'iperbola in H, congiunta AH segante l'orizzontale EB in D, sarebbe il tempo per le due AD, DB uguale al tempo per la sola AB, riuscendo allora AH uguale alla AB.

Corollario II. Ma se il cerchio descritto col raggio AB toccasse l'iperbola in B, sarebbe AB la minima linea, che condurre si potesse dal punto A al perimetro della iperbola, cioè appunto il suo asse; ed il tempo per AB sarebbe minore che il tempo per qualunque inclinata AD coll'orizzontale DB; siccome se AH fusse la minima linea che si potesse condurre dal punto A sul perimetro dell'iperbola (come può accadere quando l'orizzontale EB non passa pel vertice principale o termine dell'asse della sezione), allora il tempo più breve per andare da A in B sarebbe quando il mobile vi arrivasse per le due AD, DB.

36. Il modo poi da determinare questa minima AH dipende da un problema solido, sciolto dal Sig. Viviani, *de Maximis et Minimis*, libro 2 proposizione 22, *nell' ultimo caso*, e da me si scioglie nella seguente maniera.

Proposizione XV.

Se dal punto A al punto B (*Fig.* 158) debba portarsi un grave in brevissimo tempo, parte per una inclinata AD, parte per l'orizzontale DB: trovare il sito di quella inclinata.

Se fusse il perpendicolo AE uguale all'orizzontale EB, la stessa AB si farebbe in brevissimo tempo, nè accaderebbe cercare altra inclinata AD, che coll'orizzontale DB si potesse in minor tempo passare: come *per la costruzione precedente*, *e per lo coroll. 2 di essa si* fa manifesto.

Molto meno si potrebbe trovare il minimo tempo per una inclinata e per l'orizzontale, se fusse AE maggiore di EB.

Sia dunque AE minore di EB, e pongasi ED la prima di due medie proporzionali fra le stesse AE, EB, e congiungasi AD. Sarà il viaggio per AD e per DB fatto in brevissimo tempo. Perchè supposta essere BH l'iperbola descritta secondo la costruzione della precedente, con cui concorra la retta AD in H, e tirata la sua tangente QHV, che convenga cogli asintoti in V, Q, e tirata HT parallela a CQ, cioè perpendicolare all'altro asintoto CV, segato dalla AD in X; già BE è dupla di BR *(per la costruzione della precedente)* e BD dupla di BS *(come ivi pure si è dimostrato)*, dunque la residua DE è dupla della rimanente RS; ma ancora DE è dupla di FX; questa dunque uguaglia la RS, ovvero la CT; sicchè XT uguaglierà la FC, cioè la metà di BE, come la TV uguaglia la CT, ovvero la RS, cioè la metà di DE; però XT a TV sta come BE ad ED, ovvero come il quadrato ED al quadrato EA (per essere ED la prima delle due medie tra BE, EA), o per la similitudine de' triangoli, come il quadrato XT al quadrato TH; onde XT, TH, TV sono continuamente proporzionali; e però l'angolo AHV è retto: sicchè AH è la minima di quelle, che dal punto A si possono condurre sulla tangente QV, e sulla curva iperbolica BH; onde, *per l'antecedente*, essendo AH misura del tempo per le AD, DB, sarà il tempo per esse il minimo; ciò che dovevasi dimostrare.

QUINTO LIBRO DI EUCLIDE

OVVERO

SCIENZA UNIVERSALE DELLE PROPORZIONI

SPIEGATA DA GALILEO NELLA V.ª GIORNATA,

CON NUOVO ORDINE DISTESA

DA

VINCENZO VIVIANI.

PROEMIO DELL' AUTORE.

(Dalla Ediz. originale del 1674).

Questa volta, fuor dell' usato stile degli scrittori, io m' era persuaso di passarmela senza Proemio, col supposto che il detto ed avvertito da me sparsamente in quest' Opera potesse dispensarmi dal darvene innanzi più distinta notizia, la quale ho poi per convenevole riconosciuta e per necessaria.

Sono già scorsi venticinque anni che dal Serenissimo e Reverendissimo Signor Principe Cardinal Leopoldo de' Medici, io fui onorato d' una Scrittura intitolata *Principio della quinta Giornata del Galileo*, presentatagli poco prima da Evangelista Torricelli, l' uno e l' altro a bastanza celebri al mondo per la sublimità delle loro altissime speculazioni. Di questa, ch' era di mano di esso Torricelli (con tutto che del suo contenuto io avessi anticipata notizia), così imperfetta com' era, quale quì vedrete (1), con permissione dell'Altezza Sua, io mi presi copia.

(1) Come abbiamo avvertito nella prefazione del tomo precedente, la quinta Giornata dei *Dialoghi delle Nuove Scienze* fu pubblicata la prima volta dal Viviani insieme a questo suo trattato dalle *Proporzioni*, che ne è una copiosa illustrazione. (*Gli Editori*).

Conteneva dimostrazioni del Galileo delle difinizioni quinta e settima del quinto libro d'Euclide, siccome de'conversi loro, spettanti tutte alle grandezze tanto proporzionali che non proporzionali; colle quali dimostrazioni pretese il Galileo d'aver rimosse le difficultà che incontrar sogliono i principianti in dover ammetter per difinizioni quelle, che piuttosto paiono teoremi da dimostrarsi. E perchè in tale Scrittura vien detto che, posti simili fondamenti, si sarebbe potuto poi compendiare in parte e riordinare tutto il quinto libro d'Euclide, ritrovandomi alcuni anni sono per grave indisposizione della mia testa affatto inabile a più ardue contemplazioni, mi posi a riformare e a distendere, su le medesime dimostrazioni del Galileo, questa *Scienza Universale delle Proporzioni*, alla qual'Opera, divertitone allora da altro affare, per appagare il desiderio di un Cavaliere mio amorevol Signore, e della Geometria non men che della ingenuità innamorato, ho dato ora fine, Dio lodato, con miglior ordine e modo che ho saputo. Nè di questo io mi son contentato, che ho voluto ancora pubblicarla sotto i benigni auspicj di S. A. R. (a cui per ogni conto io doveva indirizzarla) sì per assicurare al mio Galileo le sue proprie dimostrazioni, che con qualche pericolo erano andate in volta già son molti anni, sì per farle comuni a voi bramosi d'incamminarvi senz'intoppo per la via elementare d'una scienza così importante quale è questa delle Proporzioni; la quale, per mio avviso, ha tanta parte nell'invenzioni matematiche, quanta per avventura, in virtù di suo proprio rivolgimento e col maschil vigore di sua calorifica luce, se ne abbia il Sole, anima del suo nobil sistema, nell'universalità delle cose ch'ei con mirabili e incognite proporzioni va in esso perpetuamente operando.

Quello poi ch'io mi senta della validità della presente maniera del Galileo, in comparazione delle tenute da altri autori, i quali per altre vie han tentato, e con somma lode, di render più chiara questa scienza, io veramente, essendo i paragoni mai sempre odiosi, non ardirei pronunziare; oltre che tutto ciò ch'io adducessi a favor di questa, chi non ne facesse riscontro potrebbe forse pigliarlo come da discepolo appassionato verso il maestro. Non posso già contenermi di commendare quello di plausibile che ha in sè questo modo, e forse più di qualch'altro, che è l'applicar le sue dimostrazioni con assoluta considerazione a qualunque genere di grandezze, come fa Euclide, ed il confarsi quasi in tutto con esso, senza introdurre novità maggiore che nelle difinizioni, e nel far teoremi dimostrati quelli, che, come principj noti, vengono supposti da Euclide stesso e dagli altri geometri suoi seguaci: il che poi è quel solo che in tale scienza pareva da desiderarsi, sfuggendosi nel rimanente la confusione per chi va studiando gli altri autori, i quali, e nel citare e nel dimostrare, all'ordine del quinto libro si riferiscono. Che se qui m'è occorso variarlo in parte, o per comodità di provar le cose avvenire, o per facilitare o per abbreviar il Trattato, vi ho anche riparato col porre in nota ed ancora in piè di ciascuna proposizione il numero al quale corrispondono quelle del medesimo Euclide. E per dare a ciascuno il dover suo, vi ho notato in oltre di chi sia il modo, col quale io ne ho distesa la prova.

Ho scritto nella lingua della mia nobil patria, prima per conformarmi al disteso della predetta quinta Giornata, e poi per non lasciar dal canto mio d'andar addomesticando alla toscana favella anche i termini meno usati della geometria, seguendo in ciò il medesimo Galileo e gli scrittori d'altre nazioni, che in oggi, nelle materie eziandio scientifiche, si vagliono quasi tutti della propria lingua materna.

Forse alcuno vi sarà che m'attribuirà a soverchia ambizione il palesarmi in fronte di quest'Opera per ultimo discepolo del Galileo; ma però molti più saranno quei che me n'invidieranno. Il fatto si è che, per mia gran ventura, io son l'ultimo suo discepolo, perchè egli mi fu continuo maestro per gli ultimi tre anni di sua vita; e di quanti ci trovammo presenti all'ultimo suo respiro (che oltre a due sacerdoti, v'intervennero il Torricelli, il Dottor Vincenzio Galilei, suo figlinolo, e gli altri di sua casa), io solo (benchè l'ultimo nell'essermene approfittato) sono a tutti sopravvissuto, e quasi anche rimasto l'ultimo di quanti più intimamente lo praticarono. E però, come tale, colla pubblicazione de' presenti suoi scritti intendo per ora far noto al mondo, che (quantunque non sia possibile offerire non solo a Dio o a' genitori, ma neppure al maestro, retribuzione ch'equivaglia al prezzo de' ricevuti beneficj), io non trascuro occasione di soddisfare in parte al debito di ben grato discepolo col dar luce e vita a' preziosi e venerabili avanzi di non più vulgate speculazioni del gran Galileo mio reverito maestro, siccome io non tralascierò mai di onorare l'incontrastabil fama di cotant' uomo, anche per mezzi in ogni conto eccedenti le deboli forze mie, col tentare in varie guise d'alleggerirmi dal peso immenso degli obblighi da me dovuti ai dotti, prudenti ed amorevoli insegnamenti di quel sapientissimo Vecchio, le di cui ammirabili scoperte e ne' cieli e nella natura serviranno di chiara ed infallibile scorta a tutta la saggia posterità.

Gradisca intanto quella grand' anima al cuor mio sempre venerabile questo pubblico monumento del mio non mai morto amore: e voi, novelli geometri, gradite l' ardente zelo che ho di assiduamente giovarvi, mentre io ripigliando i miei propri studj m' ingegnerò, mercè la Bontà Divina, di farvi vedere un giorno che io non passo mia vita del tutto in ozio, e che regnano in me sentimenti di gratitudine verso chiunque s' è compiaciuto di più che generosamente beneficarmi.

DIFINIZIONI.

I.

Grandezze omogenee *s' intendon quelle che son tra loro d' un medesimo genere.*

Cioè quelle, alle quali si conviene una stessa difinizion generale della lor quantità o estensione.

Per esempio (tra le quantità così continue come disgiunte) tutte le linee in generale, siccome tutte le superficie, tutti i corpi, tutte le velocità, tutti i momenti, tutte le forze assolute, tutti i tempi, tutti i numeri ec. son grandezze omogenee, perchè sotto la general difinizione della linea cadono tutte le linee, tanto la retta che la curva o che la mista, ancorchè poste in un medesimo o in diversi piani; e sotto la difinizione generale della superficie cadono tanto la superficie piana che la concava o che la mista ec.; e così intendasi d'ogn' altro genere di grandezze.

II (1).

Tra due grandezze omogenee e terminate disuguali, la maggiore si dice multiplice *della minore quando la minore presa più volte pareggia e misura appunto la maggiore.*

III (2).

Parte o summultiplice *cioè sottomultiplice, si dice la minore di due grandezze omogenee, terminate e disuguali, che multiplicata più volte misura appunto la maggiore.*

Questa, con voce forse troppo generale, da Euclide si chiama parte, ma però meglio da altri è detta parte aliquota, a differenza dell' altra detta parte aliquanta, la quale è quella grandezza minore, che replicata non misura precisamente la maggiore, e che negli Elementi dei numeri è da Euclide chiamata *parti.*

IV (3).

Le grandezze di qualunque genere diconsi egualmente multiplici *delle loro omogenee, quando quelle contengan queste egual numero di volte.*

(1) Difiniz. 2 del V.° libro d'Euclide. (2) Difiniz. 1 di detto lib.
(3) Dal P. Clavio.

V (1).

Proporzione, *detta in latino indifferentemente con le voci e* Proportio *e* Ratio (*che forse più propriamente sarebbe detta* Relatio), *è quella scambievole relazione o ragione che hanno insieme due grandezze omogenee terminate, per quanto s' appartiene alla lor quantità, o continua o disgiunta.*

E le grandezze, o le quantità, fra le quali si fa tal paragone, si dicono i termini della proporzione.

Cioè proporzione altro non è che quell' unica convenienza, ovvero quell' unico riguardo o paragone o rispetto o relazione determinata e particolare che ha una quantità terminata verso un' altra a sè omogenea e terminata, in quanto quella è uguale o per quanto ell' è maggiore o minor di questa. Poichè non si dà proporzione o relazione tra due grandezze omogenee, se non tra quelle che multiplicate possono avanzarsi, le quali poi sono solamente le grandezze omogenee terminate. Siccome non si può far paragone tra due grandezze omogenee infinite, nè similmente tra una finita ed un' altra di quantità realmente infinita.

VI (2).

Proporzioni simili *fra le quantità* (*che anco si dicono indifferentemente* proporzioni uguali, *e* proporzioni medesime), *cioè fra la prima e la seconda, e fra la terza e la quarta, indendansi allora quando la prima grandezza essendo, per esempio, uguale o multiplice o summultiplice della seconda, anco la terza sia eguale, o altrettante volte multiplice o summultiplice della quarta. Ed anco quando la prima contenendo la seconda più volte, e di più qualche parte aliquota di essa seconda, anco la terza contenga la quarta altrettante volte con altra simil parte aliquota di essa quarta. Siccome quando la prima essendo contenuta più volte dalla seconda con qualche avanzo, anco la terza dalla quarta sia contenuta altrettante volte e con altro simil avanzo. Cioè finalmente quando la prima non sia niente maggiore nè minor del bisogno, per avere alla seconda rispetto o relazione simile a quella che ha la terza verso la quarta. Che è il medesimo che dire: Quando la differenza tra la prima e la seconda sarà simile alla differenza che è tra la terza e la quarta, allora queste due relazioni, o rispetti o proporzioni dicansi proporzioni simili, o medesime o uguali come più aggrada. E questa maniera di spiegare le pro-*

(1) Difiniz. 3 e 4 del V lib. d'Euclide più largamente spiegate.

(2) Difiniz. 5, come sopra, altrimenti spiegata col Galileo.

porzioni simili tanto s' adatta alle quantità continue che alle disgiunte, le quali son quelle che si possono esprimere co' numeri.

VII (1).

Grandezze o quantità proporzionali, *dicansi i termini delle proporzioni simili.*

Cioè quando la proporzione, che è tra la prima e la seconda grandezza, sarà simile alla proporzione che è tra la terza e la quarta nel modo sopra dichiarato, allora questi termini primo e secondo, terzo e quarto dicansi *grandezze proporzionali.*

VIII (2).

Di due proporzioni, quella della prima grandezza verso la seconda dicasi proporzione maggiore *di quella della terza verso la quarta: cioè dicasi la prima alla seconda aver maggior proporzione che la terza alla quarta, quando la prima sarà alquanto maggior del bisogno, acciocchè la proporzione d' essa prima verso la seconda sia simile alla proporzione della terza verso la quarta.*

IX (3).

Analogia, *altrimenti detta* proporzionalità, *è la simiglianza di più proporzioni tra grandezze proporzionali e omogenee, o pur anco di generi differenti.*

Come, per esempio, se la proporzione o il rispetto che è fra due linee sarà simile al rispetto che è fra due altre linee, o al rispetto fra due superficie o fra due corpi o fra due numeri ec., questa tal simiglianza di rispetti o di proporzioni, dicasi *analogia* o *proporzionalità.*

E notisi che l' analogia o proporzionalità non può consistere in meno che in tre termini di grandezze, ma però omogenee; come sarebbe ne' termini di tre linee, di tre corpi, di tre velocità, di tre numeri ec., quando cioè il primo termine al secondo ha proporzione simile a quella che ha il secondo al terzo.

X.

Analogia o proporzionalità continua *si chiama quando nella comparazione di tre o di quattro o di più termini di grandezze omogenee e proporzionali, que' di mezzo si prendono due volte, servendo ciascuno*

(1) Difiniz. 6 del V d' Euclide.

(2) Difiniz. 7 di detto libro, spiegata altrimenti col Galileo.

(3) Difiniz. 8 e 9 di detto lib., più largamente spiegata.

prima di termine conseguente di una proporzione e poi di termine antecedente dell'altra simil proporzione che le succede: cioè, quando il primo termine al secondo sta come il secondo al terzo e come il terzo al quarto, e così continuando fino all'ultimo termine, chiamandosi tutti quantità continue proporzionali.

XI.

Analogia o proporzionalità discontinua o disgiunta *si chiama quando fra due o tre o quattro o più coppie di proporzioni simili tra quantità omogenee, o pure anco tra grandezze a due a due di generi differenti, i termini de' simili rispetti si paragonano a coppia a coppia talmente che niuno mai de' termini conseguenti d' una proporzione serva d' antecedente all' altra simile che le consegue.*

Che sarà, quando il primo termine al secondo starà come il terzo al quarto, e come il quinto al sesto, e così sempre ec.

Le due seguenti difinizioni, perchè son poste da Euclide nel suo quinto libro, benchè non abbiano uso prima che nel sesto, essendo bisognose di qualche dichiarazione, si porranno qui non ostante.

XII (1).

Nell' analogia o proporzionalità continua, la prima quantità all' ultima si dice aver proporzione tante volte multiplicata della proporzione della prima grandezza alla seconda, quant' è il numero delle proporzioni che cadono fra' termini estremi.

E così, essendo tre grandezze continue proporzionali, la prima alla terza si dirà aver duplicata proporzione di quella che ha la prima verso la seconda: E di quattro quantità continue proporzionali, la prima alla quarta si dirà aver proporzione triplicata pur della prima proporzione tra la prima e la seconda, e similmente la prima alla quinta proporzione quadruplicata della medesima prima proporzione, e così sempre; Che altro non vuol dire, se non che tra la proporzione della prima alla terza cadono due proporzioni della prima alla seconda; e tra la proporzione della prima alla quarta ne cadon tre; similmente tra quelle della prima alla quinta cadon quattro proporzioni, e sempre di quelle della prima alla seconda, perchè tutte l' altre si danno simili a questa.

(1) Difiniz. 10 e 11 del V libro d'Eucl. più chiaramente spiegate.

XIII (1).

Grandezze omologhe *ovvero* corrispondenti *s'intendono, nelle proporzioni simili, i termini antecedenti fra loro ed i conseguenti fra loro.*

Cioè, se la proporzione della grandezza A verso *b* sarà simile alla proporzione della grandezza C verso *d*, i termini antecedenti A, C, siccome i conseguenti *b*, *d*, si dicono omologhi fra loro, cioè che l'antecedente A della prima proporzione corrisponde all'antecedente C della seconda, e che il conseguente *b* della prima corrisponde nell'ordine al conseguente *d* della medesima seconda proporzione.

A *b*

C *d*

Il rimanente delle difinizioni premesse da Euclide nel quinto libro si porranno in questo dov'esse avranno uso, in quella guisa che fece l'ammirabil geometra Evangelista Torricelli nel suo *Trattato delle Proporzioni* (com'apparisce dalle copie che egli medesimo ne diede fuori), e com'anco fece dipoi il Dottore Gio. Alfonso Borelli insigne filosofo e celebratissimo matematico dello Studio Pisano, nel dottissimo ed utilissimo suo *Compendio degli Elementi d'Euclide.*

XIV.

Quando saranno due o tre o quattro o più proporzioni in continui termini omogenei, per esempio, negli A, b, C, d, *la proporzione che è tra il primo termine* A *e l'ultimo* d, *si dirà proporzione composta di tutte queste date proporzioni, cioè della proporzione che è tra* A *e* b, *di quella che è tra* b *e* C, *e di quella che è tra* C *e* d.

Che altro non vuol dire se non che tra la proporzione della prima A alla quarta d vi mediano quelle tre altre proporzioni uniche e determinate, per mezzo delle quali si forma per necessità quella tal determinata proporzione fra l'estreme A, *d.*

Questa difinizione non è in Euclide, ma è ben usata così da esso nel sesto libro ed altrove, siccome da tutti gli altri geometri e matematici; e l'ho posta qui perchè m'occorre valermene qualche volta in questo Trattato. Se altri ne desidera più diffusa dichiarazione, la troverà verso il fine del Dialogo del Galileo.

XV.

Quando si dirà o si proporrà di provare ch'una proporzione ignota fra due grandezze omogenee è composta di due altre o di tre o di più

(1) Difiniz. 12 del V d'Euclide, più largamente spiegata.

note proporzioni, che sieno date in termini dello stesso o pur di differenti generi, altro non si dovrà intendere, nè altro si vorrà provare se non che ridotte le note proporzioni in quali si sieno termini omogenei continuati (se però in tali non fossero date prima), la proporzione ignota è la medesima o simile alla proporzione che è tra il primo e l' ultimo dei medesimi presi termini continuati. E questo è uno de' mezzi, per cui le ignote proporzioni rendonsi note.

Questa difinizione similmente non si trova in Euclide: ma perchè in tal significato egli ed ogni altro sempre se n' è valso, e l'esperienza mi ha dimostrato che molti de' principianti sogliono incontrar difficultà in concepirla, non riuscirà loro infruttuoso l' addurre in questo luogo alcune proposizioni delle più elementari attenenti a' piani, a' solidi, alle velocitadi e a' momenti, che son dimostrate per tal via da varj geometri e meccanici, affinchè, allora quando col proseguir gli studj v' arriveranno, sovvenga loro d' osservare in esse come in effetto tal difinizione vien praticata quivi precisamente nel modo che sopra s' è avvertito.

E le conclusioni sopraccennate sono le seguenti.

I.

« *Æquiangula parallelogramma inter se rationem habent eam, quae » ex rationibus laterum componitur; Nempe ex ratione unius lateris » primi parallelogrammi ad unum latus secundi, et ex ratione reliqui la» teris primi ad reliquum secundi* (1) ».

II.

« *Triangula et parallelogramma inter se proportionem habent com» positam ex proportione basium et ex proportione altitudinum* (2) ».

III.

« *Cylindri et coni proportionem abent compositam ex proportione » basium et ex proportione altitudinum* (3).

IV.

« *Si duo mobilia ferantur motu aequabili, inaequali tamen veloci» tate, spatia temporibus aequalibus ab ipsis peracta habebunt rationem » compositam ex ratione velocitatum et ex ratione temporum* (4) ».

(1) Questo teorema è d'Euclide la proposiz. 23 del VI libro.

(2) Questo teorema è del Comandino, aggiunto alla prop. 23 del VI lib.

(3) Questo è pure del Comandino la proposiz. 8 delle sue Aggiunte nel Comento del Trattato d'Archimede *delle Conoidi e delle Sferoidi.*

(4) Questo teorema è del Galileo la proposiz. 4 del *Moto equabile.*

V.

« *Quorumcumque gravium a quibuslibet distantiis suspensorum*
» *momenta sunt in ratione composita ex ratione distantiarum et ex ra-*
» *tione gracilatum* ».

Questo teorema fu dimostrato dall'acutissimo matematico il Padre Buonaventura Cavalieri, e da lui stampato nell'anno 1647 alla proposizione 6 della sua quinta *Esercitazione geometrica;* benchè di tal conclusione si fosse prima servito un tal Giovanni Antonio Rocca, insigne geometra e discepolo di detto Padre, in un suo proprio lemma meccanico, il quale fu poi riferito dal Torricelli in piè della proposizione 18 delle sue *Quadrature della Parabola,* con protestarsi quivi da uomo ingenuo, e avanti e dopo, che tal lemma non era suo ma di esso Rocca. Lo riferì ancora il detto P. Cavalieri nella sua terza esercitazione a facc. 231. Ma però questa medesima conclusione, o teorema quinto, molto prima era noto al nostro Galileo, come apparisce da quel suo teorema meccanico nel *Trattato delle Resistenze*, premesso come lemma al problema che propone:

« *Dato il peso massimo retto dal mezzo d'un cilindro o prisma* ,
» *dove la resistenza è minima, e dato un peso maggiore di quello*, *tro-*
» *vare nel detto cilindro il punto*, *nel quale il dato peso maggiore sia*
» *retto come peso massimo* ».

Dove manifestamente si riconosce tal quinta conclusione ed ancora il mezzo per dimostrarla: oltrechè appresso ogni geometra è ormai regola trita, universale e sicura (quando ella venga intesa colle debite circonstanze) che

Ratio homogenearum magnitudinum ab homogeneis magnitudinibus numero aequalibus productarum componitur ex rationibus, quae sunt inter homonimas magnitudines producentes.

E chi si prenderà cura d'esaminare ciascuno degli addotti esempj, ed ogni altro simile, troverà che tutti vengono compresi dal suddetto general teorema, il quale (se questo ne fusse il luogo) potrebbe anco facilmente dimostrarsi. Ma tanto basti avere avvertito intorno al modo di considerare le proporzioni ignote, quando si vuol provare ch' elleno sien composte d' altre note proporzioni.

DELLA DIVISIONE DELLE PROPORZIONI.

Affinchè nel presente Trattato delle Proporzioni si abbiano di queste le notizie più principali, con la maggior brevità che possibil sia spiegherò qui il significato d'alcuni altri nomi soliti usarsi dagli autori nel maneggio delle medesime proporzioni.

Sopra, al numero 5, assai chiaramente fu difinito ciò che assolutamente intender si debba per proporzione tra due grandezze omogenee sì nella quantità continua come nella disgiunta.

Ma qui notisi prima che delle quantità o grandezze, altre son fra loro commensurabili, altre incommensurabili.

I. ***Quantità fra loro commensurabili son quelle che son multiplici d'un' altra, o che hanno di comune una medesima parte aliquota, cioè che precisamente misura l'una e l'altra secondo qualche numero.***

Per esempio. Una linea di 25 palmi e una di 10 diconsi grandezze o quantità fra loro commensurabili, perchè ciascuna di loro è multiplice di una di 5 palmi, cioè l' una è l'altra è misurata da questa di 5, che è parte aliquota di ciascuna di loro, entrando il 5 appunto 5 volte nel 25 e due volte appunto nel 10. E tal linea di 5 palmi si dice la comune misura di quelle di 25 e di 10. Siccome è commensurabile una linea di palmi 27 con una di 12, perchè esse hanno per comune misura una lor parte aliquota, che è di tre palmi, la quale misura quelle secondo i numeri 9 e 3. E diconsi ancora commensurabili fra di loro quando la comune misura di esse entra qualche numero di volte nella maggiore ed una sol volta nella minore; come sono la linea di 10 palmi e quella di uno, le quali son misurate da un'altra linea d'un palmo. Sicchè i numeri sono quantità fra loro commensurabili, perchè almeno l'unità gli misura tutti. E però

Quantità commensurabili fra loro son quelle grandezze omogenee che si possono esprimere co' numeri.

II. ***Quantità incommensurabili fra loro quelle s'intendono fra le quali non si dà mai parte aliquota comune, cioè che le misuri amendue.***

Quali per esempio sono, di qualunque quadrato, il diametro e il lato, fra le quali linee (come prova Euclide nell'ultima del suo X libro) non si può mai trovarne una terza o assegnar una parte loro, benchè minima, che sia aliquota d'amendue, la quale cioè misurando l'una secondo qualche numero, misuri anco l'altra secondo altro numero per appunto; e per tanto

Incommensurabili fra loro sono quelle grandezze omogenee che non si possono esprimere o rappresentare insieme co' numeri.

Ora, trattandosi in genere delle proporzioni fra due grandezze iogenee, altra si dice proporzione razionale, altra irrazionale.

III. *Proporzion razionale è quel rispetto o relazione che è fra due ndezze commensurabili tra loro, cioè quella proporzione che si può ri- rre fra due numeri, come di 10 a 8, di 20 a 3, di 7 a 12, di 30 a 10, 15 a 1 ec.*

IV. *Proporzione irrazionale è quella relazione che è tra due grandezze commensurabili, cioè quella la quale con due numeri esprimere non si può.*

E per tanto fra le quantità disgiunte, cioè fra' numeri, si dà so- nente la proporzione razionale; ma fra le quantità continue si dà la razionale e l' irrazionale.

In oltre, generalmente, così la proporzione razionale come l'irra- nale si divide in proporzione d' ugualità ed in proporzione d' inu- alità o di disugualità.

V. *Proporzione d' ugualità è quel paragone che si fa tra due gran- ze uguali fra di loro.*

VI. *Proporzione di disugualità è il paragone fra due grandezze dis- uali.*

Questa pur si divide in due altre, cioè in proporzione di mag- r disugualità, e in proporzione di minor disugualità.

VII. *La prima, quando la proporzione, che si considera, è della ndezza maggiore verso la minore.*

VIII. *La seconda, quand' ella è della minore verso la maggiore.*

Ma tralasciando le proporzioni irrazionali, che son riserbate al cimo libro, e considerando solamente le razionali, è da sapersi che elle di maggior disugualità si distinguono in 5 generi, de' quali i mi tre sono semplici e i rimanenti composti.

Il primo genere è quello della proporzione detta multiplice. Il condo della superparticolare. Il terzo della superparziente. Il quarto la multiplice superparticolare. Ed il quinto della multiplice super- ziente.

In altrettanti, anzi ne' medesimi generi si divide la proporzione ionale di minor disugualità, mentre però s' aggiunga a' lor nomi la e *sotto*, dicendo summultiplice, sussuperparticolare, sussuperparzien- summultiplice sussuperparticolare, e summultiplice sussuperparziente.

IX. *Tra' generi semplici, la proporzion razionale di maggiore dis- ualità, detta multiplice, è quando un numero maggiore contien più te un minore, ed il minore misura appunto il maggiore. E così il 12 4 ha proporzione multiplice, perchè il 12 contiene 3 volte il 4, ed il nisura il 12. E similmente le proporzioni di 15 a 3, di 18 a 6, di 30* *a 5 ec. si chiamano multiplici, e quella del 12 al 4 dicesi tripla, del 15 al 3 quintupla, del 18 al 6 tripla, del 30 al 5 sestupla ec. La proporzione poi razionale di minor disugualità, cioè del minore al maggiore, si chiama summultiplice, e quella del 3 al 12 si dice suqquadrupla, del 3 al 15 suqquintupla, del 6 al 18 suttripla ec.*

X. *La proporzione razionale di maggior disugualità, detta superparticolare, è quando il maggior numero contiene una sol volta il minore, e di più una parte aliquota di esso minore; come il 6 al 4 dicesi aver proporzione superparticolare contenendo il 6 una volta il 4, ed avanzandone 2, che è parte aliquota di 4, e tal proporzione di 6 a 4 dicesi sesquialtera, che vuol dire che il 6 contiene il 4 una volta e mezzo; e l'8 al 6 ha proporzione sesquiterza, cioè l'8 contiene il 6 una volta e un terzo; ed il 10 all'8 ha proporzione sesquiquarta, contenendo il 10 l'8 una volta e un quarto, e così degli altri. La proporzione poi razionale di minor disugualità si dice sussuperparticolare, chiamandosi quella di 4 a 6 sussesquialtera, di 6 a 8 sussesquiterza, di 8 a 10 sussesquiquarta ec.*

XI. *La proporzione razionale di maggior disugualità, detta superparziente, è quando il maggior numero contiene una sol volta il minore e di più avanza parti del minore, cioè una parte non aliquota; e così il 5 a 3 ha proporzione superparziente, contenendosi dal 5 il 3 una sol volta e avanzandogli 2 che è parti del 3, e questa proporzione si chiama superbiparziente terza; quella di 20 a 11 supernonaparziente undecima; di 11 a 7 superquartaparziente settima; di 13 a 8 superquintaparziente ottava, e così dell'altre di questo genere ec. All'incontro il minor numero al maggiore, si dice aver proporzione sussuperparziente, e così quella di 3 a 5 chiamasi sussuperbiparziente terza; di 11 a 20 sussupernonaparziente undecima ec., e così d'ogn'altra simile ec.*

XII. *Tra' generi composti la proporzione razionale di maggior disugualità, detta multiplice superparticolare, è quando il maggior numero contien più volte il minore e gli avanza una parte aliquota dello stesso minore. Ond'è che il 20 al 6 si dice aver proporzione multiplice superparticolare, contenendo il 20 tre volte il 6 ed avanzandogli 2, che è parte aliquota di 6, e questa si nomina triplasesquiterza, che vuol dire che il 20 contiene il 6 tre volte e un terzo; il 18 all'8 l'ha duplasesquiquarta; il 22 al 4 l'ha quintuplasesquialtera; il 10 al 4 duplasesquialtera; il 17 all'8 duplasesquiottava ec. Per lo contrario la proporzione del minore al maggiore di questi termini è detta sussuperparticolare, denominando le sopraddette proporzioni coll'aggiunta della proposizione sotto.*

XIII. *Finalmente la proporzione razionale di maggior disugualità,* *detta multiplice superparziente, è quando il maggior numero contiene più volte il minore e gli avanza parti dello stesso minore, cioè parte non aliquota. E per tanto 11 a 3 ha proporzion multiplice superparziente, contenendo l'11 il 3 tre volte e avanzandogli 2 che è parti di 3; e questa dicesi tripla superbiparziente terza; quella di 16 a 6 dupla superquartaparziente sesta; di 8 a 3 dupla superbiparziente terza ec. Queste proporzioni poi, quando sono del minor termine al maggiore, si denominano con l'aggiunta del* sotto, *come s'è detto dell'altra.*

DELL'ANALOGIE O PROPORZIONALITÀ PRINCIPALI.

Tre, appresso gli antichi scrittori, sono l'analogie o le proporzionalità più principalmente considerate, cioè l'*arimmetica*, la *geometrica* (le quali si suddividono in continue ed in disgiunte), e la *musica* ovvero l'*armonica*.

I. *La Proporzionalità Arimmetica continua è quando tre o più grandezze omogenee differiscono tra di loro per uguali differenze: cioè quando (essendo tre) la differenza tra la prima e la seconda sia uguale alla differenza tra la seconda e la terza (e questa più frequentemente si chiama* medietà aritmetica*), o pure quando (essendo più di tre) la differenza tra la prima e la seconda sia uguale alla differenza che è tra la seconda e la terza, e che è tra la terza e la quarta, e tra la quarta e la quinta ec.*

Discontinua o disgiunta, quando, essendo più coppie di grandezze a due a due omogenee, la differenza tra il primo e il secondo è eguale alla differenza tra il terzo e il quarto, ed a quella tra il quinto e il sesto.

II. *La Proporzionalità Geometrica continua è quando tre o più grandezze omogenee differiscono tra di loro con differenze proporzionali all'intere grandezze; cioè quando (essendo tre) la differenza tra la prima e la seconda, alla differenza tra la seconda e la terza, stia come la prima grandezza alla seconda o come la seconda alla terza. E questa per lo più dicesi* medietà geometrica. *O quando (essendo più di tre) la prima alla seconda stia come la seconda alla terza, e come la terza alla quarta.*

Discontinua o disgiunta, quando, essendo più coppie di grandezze a due a due omogenee, la proporzione del primo al secondo sia simile a quella del terzo al quarto, e del quinto al sesto ec.

III. *La Proporzionalità Musica, ovvero* medietà armonica, *è quando di tre grandezze continuamente disuguali, la differenza tra la prima e la seconda, alla differenza tra la seconda e la terza, stia come la prima grandezza alla terza, o quando le differenze tra le grandezze sieno proporzionali all'estreme.*

Ma, per difinire in breve le suddette tre medietà fra tre grandezze omogenee continuamente disuguali, si dirà che

1. Medietà arimmetica *è quando la differenza tra la prima e la seconda, alla differenza tra la seconda e la terza, sta come la prima grandezza alla prima.*

2. Medietà geometrica, *quando la prima differenza alla seconda sta come la prima grandezza alla seconda.*

3. Medietà armonica, *quando la prima differenza alla seconda sta come la prima grandezza alla terza.*

ASSIOMI OVVERO COMUNI NOTIZIE.

I (1).

Se quattro grandezze saranno proporzionali, cioè che, in senso della sesta difinizione di questo trattato, la prima alla seconda abbia la medesima proporzione che la terza alla quarta; anco qualunque multiplice della prima alla seconda avrà la stessa proporzione che l'egualmente multiplice della terza alla quarta. Cioè 3, 4, 7, 10 ec. delle prime alla seconda staranno come 3, 4, 7, 10 ec. delle terze alla quarta.

II (2).

Similmente se la prima alla seconda starà come la terza alla quarta, anco la prima a qualunque multiplice della seconda starà come la terza all'egualmente multiplice della quarta. Cioè la prima a 4, 9, 20 ec. delle seconde starà come la terza a 4, 9, 20 ec. delle quarte.

III (3).

Le grandezze omogenee uguali ad un'altra qualunque terza, hanno la medesima proporzione;

Siccome la medesima terza grandezza all'uguali ha la medesima proporzione.

IV (4).

Le grandezze omogenee disuguali ad un' altra qualunque terza omogenea non hanno la medesima relazione o proporzione, ma diversa.

E la proporzione della maggior grandezza alla terza, in vigor del-

(1) Assioma supposto dal Galileo. (2) Supposto dal Galileo.

(3) Supposto ancora dal Torricelli nel suo libro *delle Proporzioni*. Ed è la proposizione 7 del V d'Euclide.

(4) Supposto dal Galileo ed ancora dal Torricelli nel detto suo libro. Ed è la prima parte della proposiz. 8 del V d'Euclide.

l' ottava difinizione, si dirà maggiore della proporzione della minor grandezza alla medesima terza.

V (1).

Se una di due proporzioni simili, cioè uguali, è uguale o maggiore o minore d' una terza proporzione, l' altra ancora sarà uguale o maggiore o minore della medesima terza proporzione. E pel contrario

Se una proporzione sarà uguale o maggiore o minore d'una di due proporzioni simili, la medesima sarà ancora uguale o maggiore o minore della rimanente proporzione.

Il presente assioma corrisponde a quella comune notizia, la quale è, che se una di due grandezze uguali è uguale o maggiore o minore d' una terza, ancora l'altra sarà uguale o maggiore o minore della medesima terza. Ed all 'incontro,

Se una medesima terza sarà uguale o maggiore o minore d' una di due altre, sarà anche uguale o maggiore o minore della rimanente.

VI (2).

Quelle proporzioni che sono simili ad una medesima proporzione, son anco simili fra di loro ; ed all' incontro

Quelle proporzioni alle quali è simile una medesima proporzione, sono simili fra di loro.

Questo corrisponde all' assioma che quelle grandezze che sono uguali ad una medesima son anco uguali fra loro.

E quelle alle quali una medesima grandezza è uguale, pur fra loro sono uguali.

VII (3).

Quelle grandezze che ad una medesima grandezza hanno la medesima proporzione, sono fra loro uguali. E pel contrario

Quelle grandezze alle quali una medesima grandezza ha la medesima proporzione, similmente sono uguali fra loro.

VIII.

Se la minore di due proporzioni disuguali sarà maggiore d'una terza proporzione, la maggiore di esse due proporzioni sarà molto maggiore della medesima terza proporzione.

(1) Questo è in parte la proposiz. 13 del V d' Euclide.

(2) Assioma supposto ancora dal Torricelli in detto suo libro delle *Proporzioni*, ed è la proposiz. 11 del V d' Euclide.

(3) Assioma supposto ancora dal Torricelli nel detto suo libro, ed è la proposiz. 9 del V d' Euclide.

Corrisponde questo a quella notizia comune, che se la minore di due grandezze disuguali sarà maggiore d'una terza grandezza, la maggior di esse due sarà molto maggiore della medesima terza.

IX.

Quelle proporzioni che son composte delle medesime o d'ugual numero di proporzioni simili, ciascuna a ciascuna son le medesime, cioè simili fra di loro.

DOMANDA.

Concedasi che, date due grandezze omogenee terminate, qual proporzione ha la prima grandezza alla seconda, tale possa averla la seconda ad una terza a quelle omogenea. O pure che tale possa concepirsi averla una terza di qualunque genere ad un' altra quarta a sè omogenea.

Come, per esempio, che qual proporzione ha una superficie ad una superficie, o un corpo ad un corpo, o una forza ad una forza, o un tempo ad un tempo ec., tal possa immaginarsi che l' abbia quella seconda superficie ad una terza, o una terza superficie ad una quarta, o pure qualunque retta linea terminata ad un' altra ec.

Ciò è stato ammesso e continuamente praticato da Euclide, da Archimede e da altri matematici d' ogni secolo, anzi dal nostro medesimo Galileo ne' suoi *Dialoghi delle due Nuove Scienze*, come cose per lor medesime chiare e facili da concedersi.

AVVERTIMENTI.

Qui è da notarsi che questa scienza elementare delle proporzioni s'adatta indifferentemente, comunque occorra, alle grandezze commensurabili fra loro, ed all' incommensurabili, che son quelle che poco avanti si difinirono.

In oltre che, nelle figure del presente Trattato, tutte le grandezze omogenee che si vedono espresse in linee o in superficie o in corpi, ciascuno può figurarsele rappresentar quali si sieno altre grandezze o quantità omogenee a beneplacito, come sarebbero di velocità, di tempi, di forze ec. comunque ne venga il bisogno; essendochè (come si vedrà) niuna delle conclusioni qui dimostrate si ristringa più ad un genere di grandezze che ad un altro; che però questa viene intitolata: *Scienza universale delle Proporzioni.*

SCIENZA UNIVERSALE DELLE PROPORZIONI

Proposizione I (1).

Se saranno quattro grandezze a due a due omogenee e fra loro proporzionali, e si prendano l' ugualmente multiplici della prima e della terza secondo qualsisia numero, e l' ugualmente multiplici della seconda e della quarta, pur secondo qualunque numero, anco tali multiplici saranno fra loro proporzionali.

Sieno date quattro grandezze proporzionali A, B, C, D (*Fig.* 159) di qualunque genere (purchè a due a due sien tra loro omogenee) cioè la prima A alla seconda B abbia proporzione simile a quella della terza C alla quarta D, secondo la dichiarata sesta difinizione (2), e si prendano le E, F ugualmente (3) multiplici della prima e della terza A, C, e le G, H ugualmente multiplici della seconda e della quarta B, D, sempre secondo qualunque numero di multiplicità; dico che ancora queste multiplici sono proporzionali; cioè che la multiplice E della prima alla multiplice G della seconda ha proporzione simile a quella della multiplice F della terza alla multiplice H della quarta.

Imperciocchè essendo, per supposizione, come A a B così C a D, sarà ancora come E, multiplice di A, a B, così (4) F, ugualmente multiplice di C, a D. Similmente, perchè ora s'è provato che siccome sta E a B, così sta F a D, starà ancora come E a G multiplice di B, così (5) F ad H ugualmente multiplice di D. Che è quello che si propose di dimostrare.

E così vien provata dal Galileo la 4 prop. del V.° d'Euclide.

Corollario.

Di qui è che essendosi dimostrato che le proporzioni delle grandezze E, F (ugualmente multiplici della prima e della terza A, C) alle G, H (ugualmente multiplici della seconda e della quarta B, D) sono simili fra di loro, è segno che se la multiplice E è uguale alla G, anco la multiplice F sarà (6) uguale alla H, e se ell'è maggiore, maggiore, e se ell'è minore, minore.

(1) Proposiz. 4 del V degli Elementi dimostrata col Galileo.
(2) Di questo trattato. (3) Difiniz. 4.
(4) Assioma 1. (5) Assioma 2.
(6) Difiniz. 6 di questo.

Onde ne segue, che mentre sieno quattro grandezze a due a due omogenee e proporzionali, sempre l'ugualmente multiplici dell'antecedenti prima e terza s'accordano con l'ugualmente multiplici delle conseguenti seconda e quarta, in pareggiare o in avanzare o in mancare.

E così vien dimostrato dal Galileo il converso della 5 difinizione del V.° d'Euclide.

PROPOSIZIONE II (1).

Se grandezze omogenee quante si vogliano saranno egualmente multiplici d'altrettante, ciascuna di ciascuna, quante volte è multiplice una di una, altrettante ancora saranno multiplici tutte insieme di tutte insieme.

Sieno quante si vogliano grandezze omogenee AB, CD ec. (*Fig.* 160) ugualmente multiplici d'altrettante E, F ec., ciascuna di ciascuna, cioè sia la AB multiplice di E, e la CD ugualmente multiplice di F ec. Dico che quante volte è multiplice una di una, cioè la AB della E, altrettante è multiplice il composto delle AB, CD del composto delle E, F.

Poichè essendo AB multiplice di E, come la CD è multiplice di F, quante parti sono in AB uguali ad E, altrettante saranno in CD uguali ad F: e però divise le AB, CD nelle parti uguali alle loro summultiplici, cioè nelle parti AG, GB, e nelle CH, HD, sarà il numero in AB uguale (2) al numero in CD. E perchè AG è uguale ad E, e CH ad F, ancora le AG, CH prese insieme saranno uguali alle E, F insieme prese. E per la medesima ragione essendo CB uguale ad E ed HD ad F, ancora le CB, HD insieme prese saranno uguali alle predette E, F insieme prese.

Quante dunque sono nella AB le parti uguali alla E o nella CD l'uguali alla F, altrettante sono nell'insieme prese AB, CD l'uguali alle prese insieme E, F. Onde quante volte è multiplice la AB della E, o la CD della F, altrettante è multiplice la somma delle AB, CD della somma delle E, F. Ed in simil maniera si continuerebbe la dimostrazione, quando, oltre alle AB, CD, fossero date altre simili quantità multiplici d'altrettante secondo il numero della data multiplicità. Se dunque quante si vogliano grandezze omogenee saranno ugualmente multiplici d'altrettante ec. Il che si dovea dimostrare.

E questa è la prova d'Euclide della prima propos. del V.° libro.

(1) Proposiz. 1 del V degli Elementi dimostrata con Euclide.
(2) Difiniz 4.°

PROPOSIZIONE III (1).

Date quattro grandezze a due a due omogenee, ma non proporzionali, e talmente che la prima alla seconda abbia maggior proporzione che la terza alla quarta; È possibile prender in qualche modo l'egualmente multiplici della prima e della terza, e della seconda e della quarta, sicchè la multiplice della prima superi quella della seconda, ma la multiplice della terza non superi quella della quarta, anzi le sia minore.

Pongansi le date quattro grandezze non proporzionali essere (*Fig.* 161) le AB, C, d'un medesimo qualunque genere, e le D, E, similmente d'uno stesso qualunque genere; e sia la prima AB alquanto maggior di quello ch'ella dovrebbe essere per aver alla seconda C proporzione simile a quella che ha la terza D alla quarta E. Dico esservi modo di prender in certa particolar maniera l'ugualmente multiplici della prima e della terza, ed altre ugualmente multiplici della seconda e della quarta, sicchè quella della prima sia maggior di quella della seconda, ma quella della terza non sia altrimenti maggiore di quella della quarta, anzi le sia minore.

Per ottener ciò, s'intenda esser levato dalla prima quantità AB quell'eccesso che la fa esser maggior di quello ch'esser dovrebbe per avere a C la medesima proporzione che ha D ad E, e tale eccesso sia FB; resteranno pertanto quattro grandezze proporzionali, cioè la rimanente AF alla C avrà simil proporzione che ha la D alla E.

In oltre si prendano delle parti BF, FA l'ugualmente multiplici IH, HL, con tali condizioni però che la IH sia assolutamente maggior della seconda grandezza C e che la HL sia non minore, cioè a dire o uguale o maggiore della stessa C. (Il che potersi fare è manifesto, per essere i lor summultiplici BF, FA quantità dello stesso genere e terminate; e perciò, quando col preso numero d'ugual multiplicità delle BF, FA, mentre la multiplice HI è maggiore di C, la multiplice HL non fosse uguale o maggiore della medesima C, ma rimanesse ancor minore, certo è che tanto si potrebbe crescere il numero di multiplicità, che la detta HL arrivasse ad esser non minor della C, ed allora tanto più la IH sarebbe maggiore della stessa C, come ci fa di bisogno). Pongasi dunque che in queste ugualmente multiplici IH, HL si sieno adempite le suddette condizioni pretese; e quante volte esse sono multiplici delle parti loro BF, FA, altrettante volte appunto s'intenda presa la grandezza M multiplice della terza grandezza D.

(1) Converso della 7 difiniz. del V degli Elementi, dimostrato col Galileo, ma alquanto variato nella costruzione.

Ed essendosi presa KL non minore di C, si multiplichi C tanto che basti a superare HL, e sia tal multiplice la PN, cioè prossimamente maggiore dell'HL, sicchè levandone una sola parte PQ delle uguali alla C, resti QN uguale o minore di HL, ovvero HL uguale o maggiore di QN.

Per ultimo, quante volte la NP si è presa multiplice della seconda C, altrettante si ponga la O multiplice della quarta E.

Ora essendosi presa IH assolutamente maggiore della C, ovvero della PQ, e la HL fatta uguale o maggiore della QN, sarà tutta insieme la IL assolutamente maggiore di tutta la PN. Il che si abbia a memoria.

E perchè le quattro grandezze AF, C, D, E si ridussero proporzionali, e della prima AF e della terza D si presero le HL, M ugualmente multiplici; e della seconda C e della quarta E, le ugualmente multiplici PN, O, la multiplice M s'accorderà con la O, come (1) la HL con la PN; ma la HL è minore della PN (perchè si prese PN multiplice di C, e prossimamente maggiore di HL), adunque anco la M sarà minore della O. Fin ora dunque si è provato che IL è maggiore assolutamente di PN, e che M è minore di O.

Finalmente essendo IH multiplice di BF come è HL di FA, e come M di D, sarà il composto IL multiplice del composto BA come (2) HL di FA; ovvero come M di D: sicchè IL ed M sono ugualmente multiplici delle grandezze date prima e terza AB, D, ed anco PN ed O sono ugualmente multiplici dell'altre date seconda e quarta C, E. Ma poco sopra dimostrammo IL maggiore della PN, e dipoi concludemmo la M esser minore della O: adunque si è fatto vedere che quando la prima grandezza AB è maggiore del bisogno per avere alla seconda C proporzione simile a quella della terza D alla quarta E, si può pigliare in qualche maniera l'ugualmente multiplici IL ed M delle AB, D, prima e terza; e l'ugualmente multiplici PN ed O delle C, E, seconda e quarta, che la multiplice della prima superi la multiplice della seconda, ma la multiplice della terza non superi la multiplice della quarta; poichè si è qui dimostrato che IL supera N, ma che non già M supera O, anzi che è minore. Il che si propose per possibile a farsi.

E in tal maniera vien dimostrato dal Galileo il converso della settima difinizione del V.° di Euclide.

Ma affinchè nella passata proposizione si dimostrasse con ogni

(1) Coroll. della prop. 1 di questo. (2) Prop. 2 di questo.

maggiore evidenza la possibilità di prender l' ugualmente multiplici della prima e della terza grandezza, e quelle della seconda e della quarta nella maniera proposta dal Galileo, e che avesse luogo ed uso la comandata construzione di prendere la NP multiplice della seconda C, in modo che sempre ella fosse prossimamente maggiore della HL (la quale fu presa tanto multiplice dell' avanzo AF, quanto IH dell' eccesso FB), stimai ben fatto variare alquanto la construzione (*Fig.* 162) da quella che nel Dialogo del Galileo si vede distesa. Imperciocchè, se dopo aver presa la IH multiplice dell' eccesso BF talmente che ella superi C, ne accadesse, come in effetto accader può, che HL, presa altrettanto multiplice di FA, fosse non ostante minore di C, allora la minima multiplice di C, che è la dupla, anzi ogni grandezza uguale a C, supererebbe HL, nè perciò vi sarebbe modo di pigliare la NP multiplice di C prossimamente maggiore di HL, dalla quale (tolta poi una parte PQ uguale a C) rimanesse QN uguale o minore di HL. Perchè nel caso che la multiplice NP fusse dupla di C, tolta una parte PQ, vi resterebbe QN, che è uguale a C, ancor maggiore di HL: e nel caso che NP fusse uguale a C, toltane una parte, non vi rimarrebbe cosa alcuna; che però dopo aver presa la IH multiplice di BF e maggiore di C, non sempre si potrebbe continuare la dimostrazione con dire IH è maggiore di C, ovvero di PQ, ed HL è maggior di QN, adunque tutta IL è maggiore di tutta PN; perchè talvolta potrebbe anche essere il composto IL uguale al composto PN, e talvolta minore, come apparisce nell' esempio di questa figura.

A voler dunque concludere, com' è il bisogno, che tutta IL sia maggior di tutta PN, è necessario che non solo IH multiplice di BF sia presa maggior di C, ovvero di PQ, ma ancora che HL sia maggiore o uguale, cioè non minore di C, perchè così essendo si potrà anco prendere NP multiplice di C, e prossimamente maggiore di HL, e col finire la comandata construzione, dimostrar poi quivi la proposta che s' è veduta.

Proposizione IV (1).

Se, di quattro grandezze date a due a due omogenee, l' ugualmente multiplici dell' antecedenti prima e terza, prese secondo qualunque numero, s' accorderanno sempre nel pareggiare o mancare ovvero eccedere, l' ugualmente multiplici rispettivamente delle conseguenti seconda e quarta,

(1) Difiniz. 5 del V degli Elementi, cioè converso del Corollario della Proposiz. prima di questo, dimostrato dal Galileo.

prese similmente secondo qualunque numero, tali grandezze saranno fra loro proporzionali.

Sieno le date grandezze A prima e B seconda d'un medesimo qualunque genere, e C terza, e D quarta, pur tra loro d'uno stesso qualunque genere, e delle A, C s'intendano prese l'ugualmente multiplici secondo qualsisia numero, e delle B, D ancora l'ugualmente multiplici secondo qualunque numero. Dico che se la multiplice della grandezza A è sempre concorde colla multiplice della B, come la multiplice della C colla multiplice della D, nel pareggiare o nel mancare ovvero nell'eccedere; tali grandezze son tra loro proporzionali, cioè che A a B sta come C a D.

Imperciocchè, se è possibile, sieno non proporzionali. Adunque una dell'antecedenti sarà maggiore di quel che ella dovrebbe per avere alla sua conseguente proporzione simile a quella dell'altra antecedente alla sua conseguente.

Sia per esempio l'antecedente A maggior del bisogno (*Fig.* 163): adunque si potranno pigliare dell'antecedenti A, C l'ugualmente multiplici in una tal maniera, ed anco delle conseguenti B, D nel modo insegnato (1), che il multiplice di A sia maggior del multiplice di B, ma il multiplice di C non sia maggiore, anzi minore del multiplice di D; ma questo è totalmente contro il supposto, che è che tali multiplici sieno sempre concordi ec. Adunque A non è maggior del bisogno; nè anco C per le stesse ragioni. Onde A a B sta come C a D, cioè queste date grandezze son tra loro proporzionali. Il che bisognava dimostrare.

Ed in tal maniera vien provata dal Galileo come teorema la difinizione 5 del V.° d'Euclide stimata fin'ora non avere in sè l'evidenza degli altri principj geometrici: onde per l'uso della difinizione suddetta in alcune proporzioni, sì di questo libro, come del sesto, dell'undecimo e del duodecimo, ed in altre ancora d'Archimede, di Pappo e di tutti gli altri geometri (che per dimostrare la proporzionalità fra quattro grandezze si vagliono dell'egualmente multiplici) non dovranno gli studiosi incontrar per l'avvenire alcuna difficultà.

Proposizione V (2).

Se, di quattro grandezze date a due a due omogenee, prese l'ugualmente multiplici dell'antecedenti prima e terza secondo qualche numero,

(1) Proposizione 3.

(2) Difiniz. 7 del V degli Elementi, cioè converso della 3 Proposiz. di questo, dimostrato col Galileo.

e prese in qualche maniera l' ugualmente multiplici delle conseguenti seconda e quarta, il multiplice della prima avanzerà il multiplice della seconda, ma quel della terza non avanzerà quel della quarta; le date quattro grandezze non saranno proporzionali, ma in senso dell' ottava difinizione di questo, la prima alla seconda avrà maggior proporzione che la terza alla quarta.

Sieno le quattro grandezze date (*Fig.* 164) A prima e B seconda d' uno stesso qualunque genere, CD terza, ed E quarta pur di un qualunque medesimo genere; e suppongasi che prese in qualche maniera le G, HI ugualmente multiplici dell'antecedenti A, CD, e le L, M ugualmente multiplici delle conseguenti B, E, si trovi che la G multiplice di A sia maggior della L multiplice di B, ma che la HL multiplice di CD non sia maggior della M multiplice di E. Dico che le A, B, CD, E non sono proporzionali, ma che A a B ha proporzione maggiore di CD ad E, cioè che, in senso dell' ottava difinizione, A è maggiore di quello che ella dovrebb' essere per avere alla B la medesima proporzione che ha la CD alla E.

Se è possibile, non sia A maggior del dovere: adunque o ella sarà precisamente proporzionale o minore del giusto per esser proporzionale. Quanto al primo, se ella fusse precisamente aggiustata e proporzionale con la B, come è la CD con la E, sempre l' ugualmente multiplici della prima e della terza sarebbero concordi (1) nel pareggiare o nel mancare, ovvero nell' eccedere l' ugualmente multiplici della seconda e della quarta. Ma esse non son concordi, conforme a che si è suppósto, adunque queste date grandezze non son proporzionali.

Sia ora la A minor del giusto, se possibile è, per avere alla B la medesima proporzione che la CD alla E. Se questo è, dunque segno è che la terza CD è maggior del giusto per avere alla quarta D simil proporzione della prima A alla seconda B.

S' intenda per tanto levato dalla terza CD l' eccesso DF, che la fa essere maggior del giusto, talmente che la rimanente CF resti appunto proporzionale alla E come è la A alla B: e dalla HI si prenda la HN multiplice della parte CF quanto tutta la HI è multiplice di tutta la CD, ovvero quanta è la G multiplice della A; ma già sono le LM ugualmente multiplici delle B, E, e la CF alla E si dice stare come la A alla B; adunque la HN multiplice di CF s' accorderà con la M multiplice di E, come la G multiplice di A con la L multiplice di B; ma G, per supposizione, supera L, adunque anco HN supera M, e

(1) Corollario della prima preposiz.

la HI supera HN (perchè CD summultiplice di HI è maggiore di CF summultiplice di HN); adunque tanto più HI supera M; il che è contro il supposto, che fu che G superasse L, ed HI non superasse M. Non è dunque A minore del giusto per avere A a B la proporzione che ha CD ad E; e sopra si dimostrò ancora essa A non esser proporzionale con la B, come è la CD con la E: adunque A necessariamente è maggiore del giusto, cioè, in senso della settima difinizione di questo, A a B ha maggior proporzione di CD ad E. Se adunque di quattro quantità date ec. Il che si dovea dimostrare.

Ed in tal guisa riman provata dal Galileo, come teorema, la difinizione 7 del V.° d'Euclide, e rimossa la difficultà che arrecava l'uso di essa nella proposizione ottava del medesimo libro.

Proposizione VI (1).

Una medesima grandezza alla minore di due altre omogenee disuguali, ha maggior proporzione che alla maggiore.

Sieno due grandezze omogenee disuguali (*Fig.* 165) A maggiore B minore, e qualunque terza pur ad esse omogenea C. Dico che la C alla B ha maggior proporzione che alla A.

Intendasi altra D uguale alla C.

Avrà dunque A a D la medesima (2) proporzione che A a C.

E perchè A è data maggiore di B, ed è C una terza grandezza ad esse omogenea, avrà A a C ovvero a D maggior (3) proporzione che B alla stessa C: e però delle A, B, come prima e terza, si potranno pigliar l'ugualmente multiplici E, G, e delle D, C, come seconda e quarta, l'ugualmente multiplici F, H, talmente che (4) la multiplice E superi la F, ma la G non superi la H, anzi le sia minore. Sia dunque ciò fatto. E perchè E supera F, e G è minor di H, sarà H maggior di G, ed F minor di E. Sicchè considerate ora C come prima grandezza, B come seconda, D come terza ed A come quarta, essendosi prese le H, F ugualmente multiplici della prima e della terza C, D, e le G, E ugualmente multiplici della seconda e della quarta B, A, e provato che H multiplice della prima C supera G multiplice della seconda B, ma che F multiplice della terza D è minore di E multiplice della quarta A, avrà la prima C alla seconda B maggior (5) proporzione che la terza D alla quarta A; ma C e D sono uguali per costruzione, adun-

(1) Seconda parte della prop. 8 del V degli Elementi da me dimostrata.
(2) Assioma 3. (3) Assioma 4 e 5. (4) Proposiz. 3.
(5) Proposiz. 5.

le la sola terza grandezza C alla minore B ha maggior proporzione le alla A. Il che si dovea dimostrare.

E questa è la seconda parte dell'ottava proposiz. del V.° d'Euclide i me dimostrata.

Proposizione VII (1).

Di due grandezze che hanno proporzione ad una terza, quella che i maggior proporzione è maggiore; e quella alla quale la terza ha aggior proporzione, è minore.

Abbia la grandezza A alla C (*Fig.* 166) maggior proporzione che B alla C. Dico che A è maggiore di B.

Imperciocchè se A non è maggiore di B sarà uguale o minore. 'ella fusse uguale, avrebbe (2) la A alla C la medesima proporzione le la B alla medesima C, ma essa l'ha maggiore per il supposto, lunque non è A uguale a B.

Se fosse minore A di B, avrebbe (3) A a C minor proporzione le B a C; ma l'ha maggiore, per il supposto, adunque A non è minor di B: e si è provato non essere uguale, onde ell'è maggior di B er necessità.

Abbia in oltre C a B maggior proporzione che ad A. Dico che B minore di A.

Imperciocchè se B non fosse minore di A, o sarebbe uguale o laggiore. Se uguale, avrebbe (4) C a B la medesima proporzione ella stessa C ad A, ma l'ha maggiore per il dato, dunque non è B guale ad A.

Se fosse B maggiore di A, avrebbe (5) C a B minor proporzione le ad A; ma l'ha maggiore per il supposto, non è dunque B maggior i A; non è anco uguale ad A, come poco sopra si è dimostrato, e erò B è necessariamente minore di A. Il che bisognava provare.

E questa è la dimostrazione d'Euclide della proposiz. 10 del V.

Proposizione VIII (6).

Se tra le grandezze omogenee, quante si vogliano antecedenti sanno proporzionali ad altrettante conseguenti, ciascuna di ciascuna; come è una dell'antecedenti alla sua conseguente, così saranno tutte l'anecedenti insieme a tutte insieme le loro conseguenti.

(1) Proposiz. 10 degli Elementi dimostrata con Euclide, ed è il converso ell'8 difinizione e della 6 proposizione di questo.

(2) Assioma 3. (3) Ass. 4. (4) Ass. 3. (5) Prop. 6.

(6) Proposiz. 12 del V degli Elementi dimostrata con Euclide.

Sieno (*Fig.* 167) tra le grandezze omogenee quante si vogliano antecedenti A, B, C, con altrettante conseguenti D, E, F, e ciascuna di ciascuna sia nella medesima proporzione, cioè stia A a D come B ad E, e come C ad F. Dico che la proporzione di una ad una, per esempio di A a D, è simile alla proporzione di tutte insieme le A, B, C a tutte insieme le D, E, F.

Prendansi le G, H, I ugualmente multiplici quanto si vuole delle A, B, C, e le K, L, M in qualunque modo pur ugualmente multiplici delle D, E, F.

Perchè dunque A a B sta come B ad E, e delle A, B sono le G, H ugualmente multiplici, siccome delle D, E sono ugualmente multiplici le K, L, si accorderà (1) la G con la K, come la H con la L, in avanzare o in mancare o in pareggiarsi. Per le medesime ragioni sarà concorde N con L come I con M, e pertanto s' accorderanno tutte insieme con tutte insieme, come una con una, cioè se G è uguale a K, ancora le G, H, I insieme prese saranno uguali alle K, L. M insieme prese, e se G è maggior di K, anco l' insieme G, H, I sarà maggiore dell' insieme K, L, M, e se è minore, minore. Ma essendo G multiplice di A come H di B, e come I di C; la sola G (2) sarà multiplice della sola A, come la somma G, H, I della somma A, B, C; e per la stessa ragione la K sarà multiplice della D, come la somma K, L, M della somma D, E, F: ed ora s' è provato che G multiplice di A s' accorda con K multiplice di D in quel modo che la somma G, H, I, multiplice della somma A, B, C, s' accorda con la somma K, L, M, multiplice della somma D, E, F; adunque la grandezza A alla D sta (3) come la somma A, B, C alla somma D, E, F. Onde se grandezze omogenee quante si vogliano saranno proporzionali ad altrettante, la proporzione che è tra una delle antecedenti alla sua conseguente sarà simile alla proporzione che è tra tutte le antecedenti insieme a tutte insieme le conseguenti. Il che ec.

E questa è la dimostrazione d' Euclide della prop. 12 del V.

Proposizione IX (4).

Le grandezze omogenee hanno tra loro la medesima proporzione delle loro ugualmente multiplici: cioè le parti stanno fra loro come le ugualmente multiplici.

(1) Corollario della prima prop. (2) Prop. 2. (3) Prop. 4.
(4) Prop. 15 del V degli Elementi, dimostrata con Euclide.

Delle grandezze omogenee A, B (*Fig.* 168), sia la DC multiplice ella A, come la FE della B. Dico che DC ad FE sta come A a B.

Imperciocchè essendo DC multiplice di A come FE di B, dividendo le DC, FE nelle parti uguali alle A, B, tante parti saranno nella C uguali ad A, quante nella FE uguali a B. Sieno per tanto le parti i DC le DI, IG, GC, ed in FE sieno le FL, LH, HE. Essendo dunque ciascuna delle DI, IG, GC uguali ad A, saranno quelle uguali tra oro siccome tutte le FL, LH , HE tra loro uguali: e però come DI d FL, così (1) sarà IG ad LH, e così GC ad HE; e come una dell'anecedenti ad una delle conseguenti, così (2) tutte a tutte. Onde come I ad FL, ovvero come A a B, così starà DC multiplice di A ad FE gualmente multiplice di B. Adunque le grandezze omogenee summuliplici sono nella medesima proporzione delle loro ugualmente multilici. Il che si dovea dimostrare.

E questa è la prova d' Euclide della prop. 15 del V. degli Elementi, la quale fors' anco si poteva senza scrupolo riporre fra gli asiomi, essendo per sè stesso manifesto, che qual proporzione o rispetto relazione ha la prima di due grandezze omogenee verso la seconda, ale l' hanno due delle prime verso due delle seconde, e tale tre verso re, e venti verso venti ec.

Proposizione X (3).

Se di quattro grandezze omogenee, la prima alla seconda avrà la medesima proporzione che la terza alla quarta, e sia la prima maggiore della terza, anco la seconda sarà maggior della quarta, e se è uguale, uguale, e se è minore, minore.

Sieno (*Fig.* 169) quattro grandezze omogenee A, B, C, D, e la rima A alla seconda B stia come la terza C alla quarta D, e sia la rima A maggiore della terza C. Dico che anco la seconda B è maggiore della quarta D; e che se è uguale, uguale; e se è minore, minore.

Poichè, se A sarà maggior di C, avrà A a B maggior (4) proporzione che la C alla medesima B; ma come l'A alla B così fu data C a D, adunque anco C a D ha maggior (5) proporzione della medesima C alla B, e però D è minore (6) di B, cioè B maggiore di D.

Ma se A sarà uguale a C, avrà l'A alla B la medesima (7) proporzione della C alla stessa B; ma come A a B così sta C a D, pel

(1) Assioma 3. (2) Prop. 8.
(3) Prop. 14 del V degli Elem. dimostrata con Euclide. (4) Ass. 4.
(5) Ass. 5. (6) Prop. 7. (7) Ass. 3.

supposto, adunque anco C a D ha la medesima (1) proporzione della stessa C alla B: onde la D è uguale (2) alla B, cioè la B alla D.

Se finalmente A sarà minore di C, avrà l'A alla B minor (3) proporzione della C alla medesima B: ma come A a B, così fu posta essere C a D, adunque anco C a D ha minor proporzione (4) della stessa C alla B, sicchè D è maggior (5) di B, cioè la B minore della D. Se dunque di quattro grandezze omogenee la prima alla seconda ec. Il che si dovea dimostrare.

E questa è la prova d'Euclide della prop. 14 del V. libro.

Proposizione XI (6).

Se quattro grandezze a due a due omogenee saranno proporzionali, ancora convertendole *saranno proporzionali.*

Sia (*Fig.* 170) come A a B d'un medesimo qualunque genere, così C a D pur di un solo qualunque genere. Dico che anco B ad A sta come D a C.

E questo modo d'argomentare dicesi *convertendo.*

Essendosi dimostrato (7) che di queste quattro grandezze proporzionali A, B, C, D, sempre quali si sieno ugualmente multiplici della prima e della terza A, C s'accordano con quali si sieno ugualmente multiplici della seconda e della quarta B, D, in avanzare o in mancare o in pareggiarsi; è manifesto che queste medesime multiplici prese conversamente si accordano ancor sempre in mancare o in avanzare o in pareggiarsi. E però considerando le quantità B, D come prima e terza, e le A, C come seconda e quarta, essendochè sempre l'ugualmente multiplici di quelle s'accordan con l'ugualmente multiplici di queste, avrà la prima B alla seconda A la medesima (8) proporzione che la terza D alla quarta C. Laonde se quattro grandezze a due a due omogenee son proporzionali, prese al contrario, ovvero *convertendo*, saranno ancora proporzionali. Il che bisognava dimostrare.

E questa è la prova d'Euclide del coroll. della prop. 10 del V.

Proposizione XII (9).

Se quattro grandezze omogenee saranno proporzionali, ancora permutandole *saranno proporzionali.*

Sieno (*Fig.* 171) le date quattro grandezze omogenee proporzio-

(1) Ass. 5. (2) Ass. 3. (3) Ass. 4. (4) Ass. 5. (5) Prop. 6.

(6) Corollario della 4 prop. del V degli Elem. dimostrato con Euclide.

(7) Corollario della prima prop. (8) Prop. 4.

(9) Proposiz. 16 del V degli Elementi dimostrata con Euclide.

nali A, B, C, D, cioè stia l'antecedente A al suo conseguente B come l'antecedente C al suo conseguente D. Dico che ancora l'antecedente A all'antecedente C sta come il conseguente B al conseguente D.

E questo modo d'argomentare dicasi: *permutando*.

Prendansi delle A, B l'ugualmente multiplici E, F, secondo qualunque numero; siccome delle C, D l'ugualmente multiplici G, H, pur secondo qualunque numero.

Starà dunque come la multiplice E all'ugualmente multiplice F, così (1) la parte A alla parte B; ma anco C a D s'è posto esser come A a B, adunque E ad F sta (2) come C a D; ma anco la multiplice G alla H sta (3) come C a D, adunque E ad F sta similmente come (4) G ad H. Onde se la prima E fosse uguale alla terza G, anco la seconda F sarebbe (5) uguale alla quarta H, se maggiore, maggiore, e se minore, minore. Sicchè le E, F convengono con le G, H in avanzare o in mancare o in pareggiarsi: ma quelle son ugualmente multiplici delle A, B, e queste delle C, D; adunque A a C sta (6) come B a D. E però se quattro grandezze omogenee son fra loro proporzionali, ancora *permutandole* sono proporzionali.

E questa è la dimostrazione d'Euclide della prop. 16 del V lib.

ALTRIMENTI SENZA L'UGUALMENTE MULTIPLICI.

Poste le medesime cose. La proporzione di A a C (7) è composta della proporzione di A a B e della proporzione di B a C; ma come A a B, così si è dato stare C a D, adunque la proporzione di A a C è composta di quella di C a D e di quella di B a C; ma anco la proporzione di B a D è composta delle medesime proporzioni di C a D e di B a C; adunque le proporzioni di A a C e di B a D, essendo composte di due simili proporzioni, sono simili (8) fra di loro. Il che ec.

Proposizione XIII (9).

Se quattro grandezze a due a due omogenee saranno composte proporzionali, e dividendole *saranno proporzionali.*

Sieno due grandezze omogenee e composte insieme AB, BC, ed altre due pur omogenee e composte insieme DE, EF, e sien tra loro proporzionali, cioè come AB a BC, così DE ad EF. Dico che, *dividendole*, anco AC a CB sta come DF ad FE.

(1) Proposiz. 9. (2) Assioma 5. (3) Proposiz. 9. (4) Assioma. (5) Proposiz. 10. (6) Proposiz. 4. (7) Difiniz. 14. (8) Assioma 9.
(9) Proposiz. 17 del V degli Elementi dimostrata con Euclide.

E questo modo d'argomentare dicasi: *dividendo*, o *per la divisione della proporzione*.

Prendansi (*Fig.* 172) delle AC, CB e delle DF, FE, le GH, HI e le LM, MN ugualmente multiplici secondo un medesimo qualunque numero; ed in oltre delle CB, FE si prendano l'ugualmente multiplici IO, NP, pur secondo uno stesso qualunque numero.

Perchè dunque l'HI è multiplice di CB, come l'MN di FE, il numero delle CB nella HI sarà uguale al numero della FE nella MN. Similmente, perchè IO è multiplice di CB come NP di FE, il numero delle medesime CB nella IO sarà uguale al numero delle FE nella NP. Se dunque il numero in HI è uguale al numero in MN, ed il numero in IO al numero in NP, tutto il numero delle CB in HO sarà uguale a tutto il numero dell'FE in MP. Onde le HO, MP sono ugualmente multiplici delle CB, FE.

E perchè GH è multiplice di AC come HI di CB, sarà il composto GI multiplice del composto AB, come (1) una di una, cioè come GH di AC, ovvero come LM di DF, cioè come MN di FE, ovvero come il composto LN del composto DE. Ma sta come la prima AB alla seconda BC, così la terza DE alla quarta EF, e della prima e della terza si son provate ugualmente multiplici le GI, LN; e della seconda e della quarta si provaron di sopra ugualmente multiplici le HO, MP; adunque l'ugualmente multiplici della prima e della terza saranno concordi (2) con l'ugualmente multiplici della seconda e della quarta; cioè se CI è uguale ad HO, anco LN sarà uguale ad MP; e se è maggiore, maggiore, e se è minore, minore. Onde tolte le parti comuni HI, MN, anco il residuo GH s'accorderà col residuo IO, come il residuo LM col residuo NP, in pareggiarsi o in avanzare o in mancare. E però considerata AC come prima grandezza, CB come seconda, BF come terza ed FE come quarta, essendosi prese le GH, LM ugualmente multiplici della prima e della terza, e le IO, NP ugualmente multiplici della seconda e della quarta, e dimostrato che quella della prima concorda con quella della seconda, come quella della terza con quella della quarta, starà (3) la prima alla seconda come la terza alla quarta, cioè la AC alla CB come la DF all'FE. E però quando le grandezze sono poste come proporzionali, *dividendole* son ancora proporzionali. Il che ec.

E questa è la dimostrazione d'Euclide della proposizione 17 del V libro.

(1) Prop. 8. (2) Coroll. della prima. (3) Prop. 4.

Corollario (1).

Essendosi dimostrato qui in primo luogo che quando la HI è multiplice della CB come la MN dell'FE, e che quando la IO è multiplice della stessa CB come la NP della medesima FE, il composto HO è multiplice della detta CB, come il composto MP della stessa FE, si cava che quando la prima è multiplice della seconda, come la terza della quarta e la quinta della seconda, come la sesta della quarta, anco il composto della prima e quinta è multiplice della seconda, come il composto della terza e sesta è multiplice della quarta. Il che ec.

E questa è la dimostrazione della prop. 2 del V d'Euclide da me dedotta.

Aggiunta I (2).

Dal dimostrato fin qui facilmente si deduce che quando AB a BC (*Fig.* 173) sta come DE ad EF, anco BC a CA sta come EF ad FD.

E questo modo d'argomentare dicasi: *per divisione conversa di proporzione.*

Perchè essendo AB a BC come DE ad EF, dividendo (3) starà AC a CB come DF ad FE, e convertendo (4) BC a CA starà come EF ad FD. Il che ec.

Aggiunta II (5).

Si cava in oltre, che quando BC a BA sta come EF ad ED, anco BC a CA sta come EF ad FD.

E questo modo d'argomentare dicasi: *per divisione contraria di proporzione.*

Perchè essendo BC a BA come EF ad ED, convertendo (6) AB a BC starà come DE ad EF, e dividendo (7) AC a CB come DF ad FE; e di nuovo convertendo (8) BC a CA starà come EF ad FD. Il che ec.

Proposizione XIV (9).

Se quattro grandezze a due a due omogenee saranno divise proporzionali, e componendole saranno proporzionali.

(1) Proposiz. 2 del V degli Elementi dedotta da me.

(2) Scolio del Clavio alla prop. 17 del V degli Elem. (3) Prop. 13.

(4) Proposiz. 11. (5) Scolio del Clavio alla detta prop. 17 del V.

(6) Proposiz. 11. (7) Proposiz. 13. (8) Proposiz. 11.

(9) Proposiz. 18 del V degli Elementi dimostrata da me senza la proposizione 10 di questo, della quale si serve Euclide.

Sieno (*Fig.* 174) due grandezze omogenee AB, BC insieme congiunte, ed altre due similmente omogenee unite insieme DE, EF, e tra loro sieno proporzionali, cioè stia come AB a BC così DE ad EF. Dico che componendole, come AC a CB così sta ancora DF ad FE.

E questo modo d' argomentare dicasi: *componendo.*

Imperciocchè, stia come AC a CB così qualche altra GF all' FE, che necessariamente GF sarà maggior di FE, essendochè anco AC è maggiore di CB.

Perchè dunque si dice, come AC a CB così stare GF ad FE, dividendole, starà come AB a BC (1) GE ad EF; ma come AB a BC così sta ancora DE ad EF per la supposizione, adunque GE ad EF starà (2) come DE alla medesima EF, sicchè le GE, DE sono (3) tra loro uguali; onde aggiunta loro di comune la EF ne verrà la GF uguale alla DF; ma come AC a CB, così si pose stare a GF, FE, adunque anco AC a CB sta come DF (che è uguale a GF) ad FE. Sicchè se le grandezze divise sono proporzionali, e *composte* ancora sono proporzionali. Il che ec.

E così vien da me dimostrata la prop. 18 del V d' Euclide.

Aggiunta I (4).

Qui può dedursi, che quando AB a BC sta come DE ad EF divisamente prese, anco CA ad AB sta come FD a DE.

E questo modo d' argomentare dicasi: *per composizione conversa di proporzione.*

Perchè essendo AB a BC come DE ad EF, convertendo (5) anco CB a BA starà come FE ad ED, e componendo (6) CA ad AB starà come FD a DE. Il che ec.

Aggiunta II (7).

Similmente si ha che quando AB a BC divisamente sta come DE ad EF, ancora AB ad AC sta come DE a DF.

E questo modo d' argomentare dicasi: *per composizione contraria di proporzione.*

Perchè essendo AB a BC, come DE ad EF; convertendo (8), BC a BA starà come EF ad ED, e componendo (9), CA ad AB starà come

(1) Proposiz. 13. (2) Assioma 6. (3) Assioma 7.

(4) Scolio del Clavio alla proposiz. 18 del V degli Elementi.

(5) Proposiz. 11. (6) Proposiz. 14.

(7) Scolio del Clavio alla detta proposiz. 18 del V degli Elementi.

(8) Proposiz. 11. (9) Proposiz. 14.

FD a DE, e di nuovo convertendo (1), AB ad AC starà come DE a DF. Il che ec.

Proposizione XV (2).

Se quattro grandezze a due a due omogenee son composte proporzionali, e per la conversione della proporzione saranno proporzionali.

Sieno (*Fig.* 175) due grandezze composte AB, BC proporzionali a due altre composte DE, EF. Dico che anco BA ad AC sta come ED a DF.

E questo modo d'argomentare dicasi: *per conversione della proporzione.*

Perchè essendo per supposizione AB a BC come DE ad EF, dividendo (3) anco AC a CB starà come DF ad FE, e convertendo (4) BC a CA come EF ad FD, e componendo (5) BA ad AC come ED a DF. Onde quando le grandezze son composte proporzionali, anco *per conversione della proporzione* son fra loro proporzionali. Il che ec.

E così vien dimostrato dal Clavio il corollario della proposiz. 19 del V d'Euclide.

Proposizione XVI (6).

Se nelle grandezze omogenee sarà come tutta a tutta, così la parte levata dall'una alla parte levata dall'altra, la rimanente alla rimanente starà come tutta a tutta, o come la levata alla levata.

Sia (*Fig.* 176) come tutta la grandezza AB a tutta la CD del medesimo genere, così la parte levata BE alla parte levata DF. Dico che la rimanente AE alla rimanente CF sta pure come tutta la AB a tutta la CD, o come la parte BE alla parte DF.

Imperciocchè essendo, per supposizione, come AB a CD così BE a DF, sarà permutando (7) AB a BE come CD a DF, e dividendo (8) AE ad EB come CF ad FD, e di nuovo permutando (9) la rimanente AE alla rimanente CF starà come la parte levata EB alla parte levata FD, ovvero come tutta la AB a tutta la CD.

Se dunque starà come tutta a tutta, così la parte levata alla parte levata, anco la rimanente alla rimanente starà come tutta a tutta, o come la parte levata alla levata. Il che si doveva dimostrare.

(1) Proposiz. 11.
(2) Coroll. della prop. 19 del V degli Elementi dimostrato col Clavio.
(3) Proposiz. 13. (4) Proposiz. 11. (5) Proposiz. 14
(6) Proposiz. 19. del V degli Elementi dimostrata con Euclide.
(7) Proposiz. 12. (8) Proposiz. 13. (9) Proposiz. 12.

E quest'è la dimostrazione d'Euclide della proposizione 19 del V libro.

PROPOSIZIONE XVII (1).

Se saranno tre grandezze omogenee ed altrettante pur tra loro omogenee, e le coppie corrispondenti di ciascun ordine sieno proporzionali, e sia la prima di un ordine maggiore della sua terza, sarà anco la prima dell' altro ordine maggior della sua terza; e se è uguale, uguale; e se è minore, minore.

Sieno tre grandezze A, B, C (*Fig.* 177) omogenee di un ordine, ed altrettante D, E, F omogenee di un altro, e stia come la prima A alla seconda B, così la prima D alla seconda E, e come la seconda B alla terza C, così la seconda E alla terza F, e sia in primo luogo A maggior di C. Dico che ancora D è maggior di F.

Imperciocchè, essendo la prima A posta maggiore della terza C, la proporzione di A a B si dirà (2) maggiore della proporzione di C a B: ma la proporzione di D ad E è data simile a quella di A a B, adunque anco D ad E ha (3) maggiore proporzione di C a B. E perchè B a C sta come E ad F, o convertendo sta C a B come (4) F ad E, essendo provata la proporzione di D ad E maggiore di quella di C a B, sarà la medesima proporzione di D ad E maggiore (5) ancora di quella di F ad E; e però sarà (6) la prima D maggiore della terza F.

Ma se la prima A si porrà uguale alla terza C, dico pure che la prima D è uguale alla terza F.

Perchè essendo A uguale a C, la proporzione di A a B sarà (7) come quella di C a B; ma come A a B così D ad E, per supposizione, dunque anco D ad E sta (8) come C a B. E perchè come B a C così fu data E ad F, e convertendo sta (9) come C a B così F ad E, starà ancora D ad E come (10) F ad E, e però anco D sarà uguale ad F.

Se finalmente la prima A si porrà minore della sua terza C, dico che anco la prima D è minore della sua terza F.

Imperciocchè essendo dato B a C come E ad F, ed A a B come D ad E, e convertendo (11) ancora C a B starà come F ad E, e B ad A come E a D; ma perchè A si pone minore di C, sarà C maggiore di A: onde per la prima parte di questa dimostrazione es-

(1) Prop. 20 del V degli Elem. dimostrata con Eucl. (2) Assioma 4.
(3) Assioma 5. (4) Proposiz. 11. (5) Assioma 5.
(6) Proposiz. 7. (7) Assioma 3. (8) Assioma 5.
(9) Proposiz. 11. (10) Assioma 5. (11) Proposiz. 11.

sendo la prima C maggiore della terza A, sarà ancora la prima F maggiore della terza D; cioè convertendo, essendo A minore di C, sarà anco D minor di F. Il che ec.

E questa è la dimostrazione d'Euclide della proposizione 20 del V libro.

Proposizione XVIII (1).

Se saranno quante si vogliano grandezze omogenee ed altrettante pur omogenee, e le coppie ordinatamente corrispondenti di ciascun ordine sieno tra loro nella medesima proporzione, ancora per l'ugualità ordinata *saranno proporzionali. Cioè la prima del primo ordine all' ultima starà come la prima del secondo all' ultima.*

Di due ordini dati d'uguale numero di grandezze omogenee (*Fig.* 178) sia l'uno A, B, C, D, e l'altro E, F, G, H, e sia la coppia A, B, proporzionale alla E, F; la B, C alla F, G; e la C, D alla G, H. Dico che la prima grandezza A all' ultima D sta come la prima E all' ultima H.

E questo modo d'argomentare dicasi: *per l'ugualità in proporzione ordinata.*

Si considerino prima le tre prime grandezze A, B, C del primo ordine, e le tre prime E, F, G del secondo: e delle due omologhe A, E s' intendano prese qualunque ugualmente multiplici L, M; siccome dell' omologhe BF qualunque ugualmente multiplici N, O; ed anco delle C, G quali si sieno ugualmente multiplici P, Q.

E perchè la grandezza A alla B si pone stare come E ad F, e delle A, E sono ugualmente multiplici le L, M, e delle B, F ugualmente multiplici le N, O, starà (2) ancora L ad N come M ad O. E per la medesima ragione N a P starà come O a Q. Sono dunque tre grandezze L, N, P d'un ordine, e tre M, O, Q d'un altro, e da coppia a coppia si son provate proporzionali; però se la prima L supera la terza P, anco la quarta M supererà (3) la sesta Q, e se sarà uguale, uguale, e se minore, minore; ma le L, M son prese ugualmente multiplici delle A, E come prima e terza; e le P, Q delle C, G come seconda e quarta; e s'è ora provato che la multiplice L della prima s'accorda con la multiplice P della seconda, come la M della terza con la Q della quarta in avanzare o in mancare o in pareggiarsi: adunque starà la prima alla seconda, come (4) la terza alla quarta, cioè la A alla C come la E alla G.

(1) Proposiz. 22 del V degli Elementi dimostrata con Euclide.

(2) Proposiz. 1. (3) Proposiz. 17. (4) Proposiz. 4.

Considerando poi le tre A, C, D, e le tre E, G, H. Essendosi ora provato che A a C sta come E a G, e stando, per supposizione, C a D come G ad H; nel modo che s'è dimostrato delle tre A, B, C e delle tre E, F, G, che la prima all'ultima sta come la prima all'ultima, nel medesimo si proverà delle tre A, C, D, e delle tre E, G, H, che A a D sta come E ad H. E se rimanessero altre date grandezze in questi ordini, si continuerebbe la dimostrazione nel modo stesso. E però quando in due ordini d'ugual numero di grandezze omogenee le coppie corrispondenti sono proporzionali, la prima grandezza all'ultima del primo ordine sta *per l'ugualità in proporzione ordinata* come la prima all'ultima del secondo ordine. Il che si doveva dimostrare.

E quest'è la dimostrazione d'Euclide della proposizione 22 del V libro.

ALTRIMENTI SENZA L'UGUALMENTE MULTIPLICI.

Date le medesime cose. La proporzione della prima A all'ultima D è (1) composta di tutte le proporzioni di mezzo di A a B, di B a C, di C a D. Similmente la proporzione della prima E all'ultima H è composta di tutte le proporzioni di mezzo tra E ed F, tra F e G e tra G ed H; ma nel primo ordine le proporzioni componenti sono le medesime, cioè simili alle proporzioni componenti nel secondo, ciascuna a ciascuna ordinatamente, adunque anco le proporzioni composte di esse saranno (2) simili fra di loro, cioè la prima A all'ultima D starà come la prima E all'ultima H.

PROPOSIZIONE XIX (3).

Se saranno tre grandezze tra loro omogenee, ed altrettante pur tra loro omogenee, e le coppie di ciascun ordine sieno proporzionali, ma prese con ordine perturbato: ancora per l'ugualità perturbata *saranno proporzionali.*

Sieno tre grandezze omogenee A, B, C (*Fig.* 179) ed altrettante tra loro omogenee D, E, F, che a due a due sieno nella medesima proporzione, ma con ordine perturbato, cioè A a B stia come E ad F, e B a C come D ad E. Dico che ancora A a C sta come D ad F.

(1) Proposiz. 14. (2) Assioma 5.

(3) Proposizione 23 del V degli Elementi dimostrata senza le multiplici e senza la proposiz. 21 d'Euclide, secondo la proposiz. 11 del *Trattato delle Proporzioni* del Torricelli.

E questo modo d'argomentare dicasi: *per l'ugualità in proporzione perturbata.*

Immaginiamoci esser come B a C ovvero come D ad E (che per supposizione ha la medesima proporzione di B a C), così (1) F ad un'altra grandezza I.

Saranno dunque le quattro grandezze D, E, F, I, proporzionali.

E perchè sta come A a B, così E ad F, per supposizione, e come B a C, così F ad I, per construzione, sarà per l'ugualità (2) in proporzione ordinata, A a C come E ad I. Ma per essere le D, E e le F, I quattro grandezze proporzionali, starà permutando (3) D ad F come E ad I; ma ancora A a C s'è provato stare come E ad I; adunque la proporzione di A a C è la medesima (4) che di D ad F, convertendo l'una e l'altra con la proporzione di E ad I. E però se saranno tre grandezze omogenee, ed altrettante ec. Il che si doveva dimostrare.

E così dal Torricelli vien dimostrata la proposizione 23 del V di Euclide.

ALTRIMENTI SENZA LA CONSTRUZIONE.

La proporzione di A a C si compone (5) della proporzione di A a B, ovvero di E ad F, e di B a C, ovvero di D ad E; ma anco la proporzione di D ad F si compone delle medesime proporzioni di E ad F, e di D ad E, adunque la proporzione di A a C è (6) simile alla proporzione di D ad F, essendo l'una e l'altra composta delle medesime proporzioni.

COROLLARIO.

Dall'essersi dimostrato che A a C sta come D ad F, si deduce che se saranno tre grandezze omogenee ed altrettante pur omogenee che a due sien proporzionali con proporzione perturbata, e che, per l'ugualità, sia la prima maggiore della terza nel suo ordine, anco la quarta sarà maggiore della sesta nel suo; e se uguale, uguale; e se minore, minore. Poichè proprietà delle proporzionali è, fra l'altre, di accordarsi fra loro i termini omologhi ad essere uguali, o maggiori, o minori.

E così vien provata da me la proposiz. 21 del V d'Euclide.

(1) Per la domanda di questo. (2) Prop. 18. (3) Prop. 12.
(4) Assioma 6. (5) Prop. 14. (6) Assioma 9.

Proposizione XX (1).

Se in due ordini omogenei di grandezze, la prima alla seconda nel prim' ordine avrà la medesima proporzione che la terza alla quarta nel secondo, e la quinta alla seconda nel primo la medesima che la sesta alla quarta nel secondo, ancora il composto della prima e quinta alla seconda del primo avrà la medesima proporzione che il composto della terza e sesta alla quarta del secondo.

Sia (*Fig.* 180) nel prim' ordine di grandezze omogenee la prima AB alla seconda C come nel secondo di omogenee la terza DE alla quarta F, e la quinta BG alla seconda C come la sesta EH alla quarta F. Dico che il composto della prima e quinta AB, BC alla seconda C sta come il composto della terza e sesta DE, EH alla quarta F.

Imperciocchè essendo BG a C come EH ad F, sarà convertendo (2) C a BG come F ad EH. E perchè AB a C sta come DE ad F per la supposizione, e C a BG sta come F ad EH per il dimostrato, sarà per l' ugualità (3) in proporzione ordinata AB a BG come DE a EH, e componendo (4) AG a GB come DH ad HE, e sta GB a C come HE ad F per la supposizione; adunque di nuovo per l' ugualità (5) AG a C starà come DH ad F. Se dunque la prima alla seconda ha la medesima proporzione ec. Il che si dovea dimostrare.

E questa è la dimostrazione d' Euclide della proposizione 24 del V libro.

Proposizione XXI (6).

Se quattro grandezze omogenee son proporzionali, la massima e la minima di esse prese insieme son maggiori delle due rimanenti insieme.

Sieno le quattro grandezze omogenee AB, CD, E, F (*Fig.* 181) e stia come AB a CD così E ad F, e sia la AB la massima tra esse ed F la minima. Dico che la somma delle AB, F è maggior della somma delle CD, E.

Taglisi dalla AB la grandezza AG uguale ad E e dalla CD la CH uguale ad F.

Sarà dunque la AG alla CH come E ad F, ovvero come AB a

(1) Proposiz. 24 del V degli Elementi dimostrata con Euclide.

(2) Prop. 11. (3) Prop. 18. (4) Prop. 14. (5) Prop. 18.

(6) Prop. 25 del V degli Elementi dimostrata con Euclide.

CD per la supposizione. Perchè dunque tutta la AB a tutta la CD sta come la parte levata AG alla levata CH, sarà ancora (1) tutta la AB a tutta la CD come la rimanente GB alla rimanente HD. Ma tutta la AB è maggiore di tutta la CD (per essersi posta AB la massima) adunque la rimanente GB sarà maggior della rimanente HD. E perchè AG ed E sono uguali, aggiungendo loro le uguali F, CH, cioè la F alla AG, e la CH alla E, ne verranno le AG ed F insieme uguali alle E e CH insieme. Onde aggiunto alla prima somma la maggiore GB, ed alla seconda somma la minore HD, ne verranno le AB ed F insieme maggiori delle CD ed E insieme, cioè la massima con la minima maggiore delle due rimanenti insieme. Se dunque saranno quattro grandezze proporzionali ec. Il che si dovea dimostrare.

E questa è la dimostrazione d'Euclide della proposizione 25 del V libro.

AVVERTIMENTO.

Fin qui si son posti tutti i teoremi del quinto libro datici da Euclide, eccettuatine il terzo, il quinto e il sesto intorno alle ugualmente multiplici, i quali per esser lemmi d'altri qui diversamente provati e non aver uso altrove, ci è parso ben di tralasciare come inutili. Ma perchè alcuni degl'interpreti d'Euclide conobbero che per l'intelligenza d'Archimede, d'Apollonio e d'altri gravi autori classici era necessaria la cognizione ancora d'altre proposizioni supposte da essi, come se note fossero per mezzo degli Elementi, e queste per la maggior parte furono poi dimostrate da Pappo Alessandrino ed altre dal Campano; perciò i medesimi interpreti le aggregarono al numero di quelle del V.° libro. Di qui è che noi ancora (affinchè per la scienza più elementare delle proporzioni non s'abbia da ricorrere ad altro autore) non mancheremo di aggiugnerle, dimostrandole come fanno essi Pappo e Campano, ma con l'ordine tenuto dal Padre Clavio, diligentissimo e dottissimo commentatore di tutti gli Elementi d'Euclide.

(1) Proposizione 16.

Proposizione XXII (1).

Se la prima alla seconda avrà maggiore proporzione che la terza alla quarta; convertendo, la seconda alla prima avrà minor proporzione che la quarta alla terza.

Abbia la grandezza A alla B (*Fig.* 182) maggior proporzione della C alla D. Dico che, convertendo, la B alla A ha minor proporzione che la D alla C.

Intendasi che altra grandezza E alla B stia (2) come la C alla D: sarà dunque la proporzione di A a B maggiore ancora della proporzione di E a B. E però sarà (3) la A maggiore di E. Onde B ad A avrà minore (4) proporzione di B ad E. Ma come B ad E, così sta convertendo D a C (perchè come C a D, così sta per per construzione E a B), adunque ancor la proporzione di B ad A è (5) minore che la proporzione di D a C. E però quando la prima alla seconda ec. Il che si doveva dimostrare.

Proposizione XXIII (6).

Se la prima alla seconda avrà maggior proporzione che la terza alla quarta; permutando, la prima ancora alla terza avrà maggiore proporzione che la seconda alla quarta.

Abbia nella figura suddetta A a B maggior proporzione che C a D. Dico che, permutando, ancora A a C ha maggior proporzione di B a D.

Imperciocchè s' intenda che un' altra E a B stia (7) come C a D. Sarà dunque la proporzione di A a B maggiore ancora della proporzione di E a B, e però sarà A maggiore (8) di E, ed A a C avrà maggior (9) proporzione che E a C. E perchè sta, permutando, E a C come B a D (essendosi posto che E a B stia come C a D), sarà dunque ancora la proporzione di A a C maggiore (10) che di B a D. Il che ec.

(1) Proposizione 7 del VII di Pappo.
(2) Per la domanda di questo Trattato.
(3) Proposizione 7. (4) Proposizione 6.
(5) Assioma 5. (6) Proposizione 5 del VII di Pappo.
(7) Per la domanda di questo Trattato.
(8) Proposizione 7. (9) Assioma 4.
(10) Assioma 5.

Proposizione XXIV (1).

Se, dividendo, la prima alla seconda avrà maggior proporzione che la terza alla quarta, e componendo, anco la prima con la seconda alla seconda avrà maggiore proporzione che la terza con la quarta alla quarta.

Sia la proporzione di AB a BC (*Fig.* 183) maggiore della proporzione di DE ad EF. Dico che, componendo, anco la proporzione di AC a CB è maggiore della proporzione di DF ad FE.

Intendasi che un'altra GB alla BC stia (2) come DE ad EF. Sarà dunque la proporzione di AB a BC maggiore similmente (3) della proporzione di GB a BC, e però (4) sarà AB maggiore di GB; sicchè aggiunta a queste la comune BC, ne verrà AB maggiore di GC: onde AC a CB avrà maggiore (5) proporzione che GC alla medesima CB: ma, componendo, GC a CB sta come DF ad FE, perchè si pose, dividendo, GB a BC come DE a EF; adunque anco la proporzione di AC a CB (6) sarà maggiore della proporzione di DF ad FE. E però se, dividendo, la prima alla seconda avrà maggior proporzione che la terza alla quarta, e componendo ec. Il che si propose di dimostrare.

Proposizione XXV (7).

Se, componendo, la prima con la seconda alla seconda avrà maggior proporzione che la terza con la quarta alla quarta, e dividendo, avrà ancora la prima alla seconda maggior proporzione che la terza alla quarta.

Abbia, nella passata figura, AC a CB maggior proporzione di DF ad FE. Dico che ancora, dividendo, AB a BC ha maggior proporzione di DE ad EF.

Intendasi che altra GC a CB stia (8) come DF ad FE: ancora AC a CB avrà (9) maggior proporzione di GC a CB; e però sarà AC maggiore (10) di GC, e toltane di comune la BC resterà la AB maggiore di GB, e però AB a BC avrà (11) maggior proporzione che GB a BC:

(1) Proposiz. 3 del VII di Pappo.
(2) Per domanda di questo Trattato.
(3) Assioma 5. (4) Proposiz. 7.
(5) Assioma 4. (6) Assioma 5.
(7) Prop. aggiunta e dimostrata dal Comandino dopo la prop. 5 del VII di Pappo.
(8) Domanda di questo Trattato. (9) Assioma 5.
(10) Proposiz. 7. (11) Assioma 4.

ma, dividendo, come GB a BC così DE ad EF (perchè si pose GC a CB come DF ad FE), adunque anco la proporzione di AB a BC è maggior (1) della proporzione di DE ad EF. E però se, componendo, la prima con la seconda alla seconda avrà maggior proporzione che la terza con la quarta alla quarta, e ancora dividendo ec. Il che fu proposto di dimostrare.

Proposizione XXVI (2).

Se, componendo, la prima con la seconda alla seconda avrà maggior proporzione che la terza con la quarta alla quarta, per la conversione della proporzione, la prima con la seconda alla prima avrà minor proporzione che la terza con la quarta alla terza.

Sia (*Fig.* 183) la proporzione di AC a CB maggiore della proporzione di DF ad FE. Dico che, per la conversion della proporzione, CA ad AB ha minore proporzione che FD a DE.

Perchè avendo AC a CB minore proporzione di DF ad FE, e dividendo, AB a BC avrà (3) maggior proporzione di DE ad EF, e però convertendo CB a BA avrà minore (4) proporzione di FE ad ED: perlochè, componendo, CA ad AB avrà minore (5) proporzione che FD a DE. Il che ec.

Proposizione XXVII (6).

Se la prima alla terza ha maggior proporzione che la seconda alla quarta, avrà ancora la prima alla terza maggior proporzione che la prima con la seconda alla terza con la quarta.

Abbia AB a DE (*Fig.* 184) maggior proporzione che BC ad EF. Dico che ancora AB a DE ha maggior proporzione che AC a DF.

Sia come AB a DE così (7) BC ad un' altra EG. E perchè s'è posto AB a DE aver maggior proporzione di BC ad EF, anco BC ad EG (che sta come AB a DE) avrà (8) maggior proporzione che la medesima BC all' EF. Onde EG sarà minore (9) di EF. Perchè dunque AB a DE sta come BC ad EG, starà AC a DG come (10) AB a DE.

(1) Assioma 5.
(2) Proposiz. 6 del VII di Pappo.
(3) Proposiz. 25.
(4) Proposiz. 22.
(5) Proposiz. 24.
(6) Proposiz. 8 del VII di Pappo.
(7) Domanda di questo.
(8) Assioma 5.
(9) Proposiz. 7.
(10) Proposiz. 8.

Ma AC ha maggior (1) proporzione a DG che a DF (perchè DG è minore di DF), adunque anco AB a DE l'avrà maggiore (2) che AC a DF. Il che ec.

Proposizione XXVIII (3).

Se tutta a tutta ha maggior proporzione che la parte levata alla parte levata, e la rimanente alla rimanente avrà maggior proporzione che tutta a tutta.

Sia (*Fig.* 176) la proporzione di tutta la AB a tutta la CD maggiore della proporzione della parte levata AE alla parte levata CF. Dico che anco la proporzione della rimanente EB alla rimanente FD è maggiore della proporzione di tutta la AB a tutta la CD.

Essendo la proporzione di AB a CD maggiore che di AE a CF, sarà ancora, permutando, la proporzione di AB ad AE maggiore (4) che di CD a CF: e per la conversione della proporzione, AB a BE avrà minore (5) proporzione che CD a DF; e permutando, AB a CD avrà similmente minore (6) proporzione che EB ad FD; cioè la rimanente EB alla rimanente FD avrà maggior proporzione che tutta la AB a tutta la CD. Il che ec.

Proposizione XXIX (7).

Se saranno tre grandezze omogenee ed altrettante pur omogenee, e la proporzione della prima delle prime alla seconda sia maggior della proporzione della prima delle seconde alla seconda, e la proporzione della seconda delle prime alla terza sia pur maggiore della proporzione della seconda delle seconde alla terza: ancora per l'ugualità in tal proporzione ordinata avrà la prima delle prime alla terza maggior proporzione che la prima delle seconde alla terza.

Sieno (*Fig.* 185) tre grandezze omogenee A, B, C, ed altrettante omogenee D, E, F, e la proporzione di A a B sia maggiore della proporzione di D ad E; siccome la proporzione di B a C sia maggiore della proporzione di E ad F. Dico che per l'ugualità ancora A a C ha maggior proporzione di D ad F.

(1) Proposiz. 6. (2) Assioma 5.

(3) Proposiz. 9 del VII di Pappo. (4) Proposiz. 23.

(5) Proposiz. 26. (6) Proposiz. 23.

(7) Proposiz 31 del V tra le aggiunte dal Campano nella traduzione di Euclide.

Intendasi che G a C stia come (1) E ad F. Sarà dunque la proporzione di B a C, che era maggiore che di E ad F, maggiore (2) ancora che di G a C. Onde B sarà maggiore (3) di G, e però A a G avrà maggior (4) proporzione che a B: ma la proporzione di A a B si è posta maggiore che di D ad E, adunque la proporzione di A a G tanto più sarà (5) maggiore che quella di D ad E.

Intendasi di nuovo che H a G stia come (6) D ad E. Avrà per tanto A a G maggiore (7) proporzione che H a G, e però sarà (8) A maggior di H; sicchè A a C avrà maggiore (9) proporzione che H alla stessa C: ma come H a C così è per l'ugualità (10) D ad F (perchè si fece D ad E come H a G, ed E ad F come G a C), adunque anco A a C l'avrà (11) maggiore che D ad F. Il che, ec.

Proposizione XXX (12).

Se saranno tre grandezze omogenee, ed altrettante pur omogenee, e la prima alla seconda nel primo ordine abbia maggior proporzione che la seconda alla terza nel secondo, e la seconda alla terza nel primo abbia maggior proporzione che la prima alla seconda nel secondo; ancora per l'ugualità in tal proporzione perturbata avrà la prima alla terza nel primo ordine maggior proporzione che la prima alla terza nel secondo.

Sieno (*Fig.* 185) tre grandezze omogenee A, B, C, ed altre pure omogenee D, E, F; e nel prim' ordine abbia A a B maggior proporzione di E ad F nel secondo; e B a C nel primo abbia maggior proporzione che D ad E nel secondo. Dico che anco per l'ugualità A a C nel primo ha maggior proporzione che D ad F nel secondo.

Intendasi che G a C stia come (13) D ad E: sarà dunque la proporzione di B a C, che è data maggiore della proporzione di D ad E, maggiore (14) ancora della proporzione di G a C: onde B sarà maggior (15) di G; e però A a G avrà maggior (16) proporzione che la me-

(1) Per la domanda di questo.
(2) Assioma 5. (3) Proposiz. 7.
(4) Assioma 4. (5) Assioma 8.
(6) Per la domanda di questo.
(7) Assioma 5. (8) Proposiz. 7.
(9) Assioma 4. (10) Proposiz. 18.
(11) Assioma 5.
(12) Prop. 32 del V tra le aggiunte dal Campano nella sua traduz. d'Eucl.
(13) Domanda di questo. (14) Assioma 5.
(15) Proposiz. 7. (16) Assioma 4.

desima A a B; ma la proporzione di A a B è posta maggiore che di E ad F, adunque la proporzione di A a G è molto maggiore (1) che di E ad F.

Intendasi in oltre che H a G stia come (2) E ad F. Sarà dunque la proporzione di A a G maggiore (3) che di H alla medesima G. Onde A sarà maggiore (4) di H, e però A a C avrà maggior (5) proporzione che H alla medesima C: ma come H a C così sta per l'ugualità (6) D ad F (perchè si fece D ad E come G a C, ed E ad F come H a G), adunque anco la proporzione di A a C è maggiore (7) che quella di D ad F. Il che ec.

Proposizione XXXI (8).

Se saranno due ordini d'egual numero di grandezze e tutte omogenee, e la prima del primo ordine alla prima del secondo abbia maggior proporzione della seconda del primo alla seconda del secondo, e questa proporzione sia maggiore della proporzione della terza del primo alla terza del secondo, e così sempre finchè vi sieno grandezze; tutte insieme l'antecedenti a tutte insieme le conseguenti avranno maggior proporzione di tutte l'antecedenti, senza la prima, a tutte le conseguenti, senza la prima; ma però minor proporzione che la prima alla prima e maggior che l'ultima all'ultima.

Sieno (*Fig.* 186) prima nel primo ordine tre grandezze A, B, C, e nel secondo altrettante D, E, F, e tutte omogenee, e la proporzione di A a D sia maggior della proporzione di B ad E, e questa maggiore che di C ad F. Dico che la proporzione della somma A, B, C alla somma D, E, F è maggiore che della somma B, C alla somma E, F; ma ben minore che della prima grandezza A alla prima D; e finalmente maggiore che dell'ultima C all'ultima F.

Imperciocchè avendo A a D maggior proporzione di B ad E, permutando (9) avrà maggior proporzione A a B che D ad E, e componendo (10) A con B a B maggior che D con E ad E; e di nuovo permutando (11) A con B a D con E maggior proporzione che B ad E. Perchè dunque tutta la A, B a tutta la D, E ha maggior proporzione che la parte B alla parte E, avrà ancora la rimanente A alla rimanente D maggior (12) proporzione di tutta la A, B a tutta la D, E.

(1) Ass. 5. (2) Domanda di questo. (3) Ass. 5.
(4) Prop. 7. (5) Ass. 4. (6) Prop. 19. (7) Ass. 5.
(8) Prop. 34 del V, aggiunta dal Campano nella sua traduzione d'Euclide, e dimostrata col P. Clavio.
(9) Prop. 23. (10) Prop. 24. (11) Prop. 23. (12) Prop. 28.

Nello stesso modo appunto si proverà che la sola B alla sola E ha maggior proporzione delle due B, C, insieme, alle due insieme E, F; adunque la sola prima A alla sola prima D avrà molto (1) maggior proporzione che la somma B, C alla E, F, e permutando, avrà maggior (2) proporzione A a B, C, che D ad E, F, e componendo, maggior (3) proporzione la somma A, B, C alle B, C, che la somma D, E, F, alle E, F; e finalmente permutando, maggior (4) proporzione avrà la somma A, B, C alla somma D, E, F, della somma B, C alla somma E, F. Il che in primo luogo si doveva dimostrare.

Avendo per tanto tutta la A, B, C a tutta la D, E, F maggior proporzione della parte levata B, C alla levata E, F, avrà la rimanente A alla rimanente D maggior (5) proporzione che tutta l'A, B, C a tutta la D, E, F, che è la seconda proposta.

E perchè B ad E ha maggior proporzione che C ad F, e permutando, B a C l'avrà maggiore (6) di E ad F, e componendo, la B C a C maggiore (7) che la E, F ad F, e di nuovo permutando, la B, C alla E, F maggiore (8) che la C alla F: ma la proporzione di A, B, C alla D, E, F si è provata maggiore che di B, C ad E, F; adunque sarà molto (9) maggiore la proporzione di A, B, C a D, E, F, che di C ad F. Il che era l'ultimo da provarsi.

Sieno ora in ciascuno ordine quattro grandezze A, B, C, G, e D E, F, H, e sieno date con la medesima condizione delle tre, sicchè ancora C ad F abbia maggior proporzione di G ad H. Dico pure seguirne le stesse cose.

Perchè, come si provò nelle tre, avrà B ad E maggior proporzione della somma B, C, G alla somma E, F, H, e però molto (10) maggiore A a D che B, C, G ad E, F, H; e permutando, maggiore (11) proporzione A a B, C, G, che D ad E, F, H, e componendo, maggiore (12) A, B, C, G a B, C, G, che D, E, F, H ad E, F, H; e permutando, maggior (13) proporzione A, B, C, G a D, E, F, H, che B, C, G ad E, F, H.

Essendo dunque la proporzione di tutta A, B, C, G a tutta D, E, F, H maggiore della levata B, C, G alla levata E, F, H, la rimanente A alla rimanente D avrà maggior (14) proporzione che tutta A, B, C, G a tutta D, E, F, H.

(1) Ass. 8. (2) Prop. 23. (3) Prop. 24.
(4) Prop. 23. (5) Prop. 28. (6) Prop. 23.
(7) Prop. 24. (8) Prop. 23. (9) Ass. 8.
(10) Ass. 8. (11) Prop. 23. (12) Prop. 14.
(13) Prop. 23. (14) Prop. 18.

E finalmente, come si dimostrò nelle tre, ha maggior proporzione la somma B, C, G alla E, F, H, di G ad H, ed è la proporzione di A, B, C, G a D, E, F, H maggiore che di B, C, G ad E, F, H, come si provò poco sopra; adunque la somma A, B, C, G alla somma D, E, F, H ha molto maggior (1) proporzione che l'ultima G all'ultima H. Il che ec.

Con simile artifizio si concluderà seguirne le stesse cose in cinque grandezze per mezzo delle prime quattro, ed in sei per mezzo delle prime cinque, come appunto s'è provato in quattro per via delle prime tre. E però è manifesto tutto ciò che si propose di dimostrare.

(1) Assioma 8.

COMPONIMENTI MINORI

E

FRAMMENTI DIVERSI IN MATERIE SCIENTIFICHE

DI

GALILEO GALILEI.

LA BILANCETTA,

NELLA QUALE, AD IMITAZIONE D'ARCHIMEDE NEL PROBLEMA DELLA CORONA, S'INSEGNA A TROVARE LA PROPORZIONE DEL MISTO DI DUE METALLI, E LA FABBRICA DELLO STRUMENTO.

AVVERTIMENTO

Fino dai primi anni, nei quali Galileo dette opera agli studj della geometria, preso in considerazione il problema della Corona di Jerone, e datosi ad investigare il modo col quale già Archimede lo risolvesse, immaginò la sua Bilancetta, mercè della quale si ottiene sicura conoscenza della gravità in ispecie delle diverse materie, e della lega e mestura de' metalli. L'uso di questo ingegnosissimo strumento non fu fatto pubblico dal suo Autore per mezzo delle stampe, ma bensì mostrato e spiegato a' suoi scolari ed amici, finchè, lui morto, venne dato in luce nella prima edizione delle opere fatte in Bologna, aggiuntevi alcune osservazioni di Gioan Battista Mantovani. L'edizione di Firenze vi aggiunse due scritture del Castelli e del Viviani; il primo de' quali, dopo aver proposto l'investigazione della mescolanza dei metalli per mezzo di alcuni pesi che notino nella bilancia ogni minima differenza, mostra con modo nuovo, ed anche più curioso, come conseguir si possa lo stesso effetto colla stadera ordinaria col romano, notando coll' aiuto di esso ogni piccolissima differenza, che fra i due metalli insieme mescolati e confusi si ritrovi.

Queste sono le scritture che qui da noi ora si riproducono, migliorando notabilmente il testo di quella di Galileo mercè l'autografo esistente fra i MSS. Palatini (Par. II, Tomo 16), il quale ci ha dato modo di correggere errori ed ommissioni manifeste, che deturpano tutte le precedenti edizioni.

Sì come è assai noto a chi di leggere gli antichi scrittori cura si prende, avere Archimede trovato il furto dell'orefice nella corona di Jerone, così parmi esser stato sinora ignoto il modo che sì grand' uomo usar dovesse in tale ritrovamento; attesochè il credere che procedesse, come da taluni è scritto, col mettere tal corona dentro l' acqua, avendovi prima posto altrettanto di oro purissimo e di argento separati; e che dalle differenze del far più o meno ricrescere o traboccare l' acqua, venisse in cognizione della mistione dell' oro coll' argento, di che tal corona era composta; par cosa (per così dirla) molto grossa e lontana dall' esquisitezza, e vie più parrà a quelli che le sottilissime invenzioni di sì divino uomo tra le memorie di lui avranno lette ed intese, dalle quali pur troppo chiaramente si comprende quanto tutti gli altri ingegni a quello di Archimede siano inferiori, e quanta poca speranza possa restare a qualsisia di mai poter ritrovare cose a quelle di esso simiglianti; ben crederò io che spargendosi la fama dell' aver Archimede ritrovato tal furto col mezzo dell' acqua, fosse poi da qualche scrittore di quei tempi lasciata memoria di tal fatto, e che il medesimo, per aggiungere qualche cosa a quel poco che per fama avea inteso, dicesse Archimede essersi servito dell' acqua nel modo che poi è stato dall' universale creduto. Ma il conoscer io che tal modo è in tutto fallace e privo di quell' esattezza che si richiede nelle cose matematiche, mi ha più volte fatto pensare in qual maniera col mezzo dell'acqua si potesse squisitamente ritrovare la mistione di due metalli; e finalmente dopo aver con diligenza riveduto quello che Archimede dimostra ne' suoi libri delle cose che stanno nell'acqua, e in quelli delle cose che pesano ugualmente, mi è venuto in mente un modo che esquisitissimamente risolve il nostro quesito; il qual modo crederò io esser l'istesso che usasse Archimede, attesochè, oltre all'esser esattissimo, dipende ancora da dimostrazioni ritrovate dal medesimo Archimede.

Il modo è col mezzo di una Bilancia, la cui fabbrica e uso qui appresso sarà posto, dopo che si sarà dichiarato quanto a tale intelligenza è necessario. Devesi dunque prima sapere che i corpi solidi, che nell'acqua vanno al fondo, pesano meno nell'acqua che nell'aria tanto quanto è nell'aria la gravità di tant'acqua in mole, quanto è esso solido; il che da Archimede è stato dimostrato: ma perchè la sua dimostrazione è assai mediata, per non aver a proceder troppo in lungo, lasciandola da parte, con altri mezzi la dichiarerò. Consideriamo dunque che mettendo, per esempio, nell'acqua una palla di oro, se tal palla fusse di acqua, non peserebbe nulla, perchè l'acqua nell'acqua non si muove insù o in giù; resta dunque che tal palla di oro pesi nell'acqua solamente quel tanto, in che la gravità dell'oro supera la gravità dell'acqua; e il simile si deve intendere degli altri metalli; e perchè i metalli sono diversi tra di loro in gravità, secondo diverse proporzioni scemerà la lor gravità nell'acqua. Come, per esempio, poniamo che l'oro pesi venti volte più dell'acqua; è manifesto dalle cose dette che l'oro peserà meno nell'acqua che nell'aria la vigesima parte di tutta la sua gravità. Supponiamo ora che l'argento, per esser men grave dell'oro, pesi dodici volte più che l'acqua; questo pesato nell'acqua scemerà in gravezza la duodecima parte di tutta la sua gravezza. Adunque meno scema nell'acqua la gravità dell'oro che quella dell'argento: attesochè quella scema per un ventesimo e questa per un dodicesimo. Se dunque in una bilancia esquisita noi appenderemo un metallo dall'un braccio, e dall' altro un contrappeso che pesi egualmente col detto metallo in aria, se poi tufferemo il metallo nell' acqua, lasciando il contrappeso in aria, acciò detto contrappeso equivaglia al metallo, bisognerà ritirarlo verso il perpendicolo; come per esempio: Sia la Bilancia AB (*Fig.* 187), il cui perpendicolo C, e una massa di qualche metallo sia appesa in B, contrappesata dal peso D; mettendo il peso B nell' acqua, il peso D in aria peserebbe più; però, acciò che pesasse egualmente, bisognerebbe ritirarlo verso il perpendicolo C, come, verbi grazia, in E; e quante volte la distanza CA conterrà l'AE, tante volte il metallo peserà più che l' acqua. Poniamo dunque che il peso in B sia oro, e che pesato nell' acqua torni il contrappeso D in E, e poi facendo il medesimo dell' argento finissimo, che il suo contrappeso, quando si peserà poi nell'acqua, torni in F, il qual punto sarà più vicino al punto C, sì come l' esperienza ne mostra, per essere l' argento men grave dell' oro, e la differenza che è dalla distanza AF alla distanza AG sarà la medesima che la differenza tra la gravità dell'oro e quella dell' argento. Ma se noi avremo un misto di argento e oro, è chiaro che per participare d' argento peserà meno che l' oro puro, e per participar di oro peserà più che il puro argento; e però pesato in aria, e volendo che il medesimo contrappeso lo contrappesi quando tal misto sarà tuffato nell' acqua, sarà di mestiere ritirar detto contrappeso più verso il perpendicolo C che non è il punto E, il quale è il termine dell' oro, e medesimamente più lontano dal C che non è l' F, il quale è il termine dell' argento puro; però cascherà tra i termini EF, e dalla proporzione nella quale verrà divisa la distanza EF, s' averà esquisitamente la proporzione dei due metalli che tal misto compongono. Come per esempio intendiamo che il misto di oro e d' argento sia in B, contrappesato in aria da D, il qual contrappeso, quando il misto sia posto nell' acqua, ritorni in G; dico ora che l'oro e l' argento che compongono tal misto sono tra di loro nella medesima proporzione che le distanze FG, GE. Ma è da avvertire che la distanza GF terminata nel segno dell' argento ci denoterà la quantità dell' oro, e la distanza GE terminata nel segno dell'oro ci dimostrerà la quantità dell'argento, di maniera che se FG tornerà doppia di GE, quel tal misto sarà di due parti di oro e una di argento; e col medesimo ordine procedendo nell'esame di altri misti, si troverà esquisitamente la quantità dei semplici metalli.

Per fabbricar dunque la Bilancia, piglisi un regolo lungo almeno due braccia, e quanto più sarà lungo più sarà esatto l'istrumento, e dividasi nel mezzo, dove si ponga il perpendicolo; poi si aggiustino le braccia che stiano in equilibrio coll'assottigliar quello che pesasse più, e sopra una delle braccia si notino i termini dove ritornano i contrappesi de' metalli semplici quando saranno pesati nell'acqua; avvertendo di pesar i metalli più puri che si trovino. Fatto che sarà questo, resta a ritrovar modo col quale si possa con facilità avere la proporzione, secondo la quale le distanze tra' termini de' metalli puri verranno divise da' segni de' misti, il che, al mio giudizio, si conseguirà in questo modo.

Sopra i termini dei metalli semplici avvolgasi un filo di acciajo sottilissimo, e intorno agl'intervalli che tra i termini rimangono avvolgasi un filo d'ottone pur sottilissimo, e verranno tali distanze divise in molte particelle uguali; come, per esempio, sopra i termini EF avvolgo due fili solo d'acciajo (e questo per distinguerli dall'ottone), e poi vo riempiendo tutto lo spazio tra EF con l'avvolgervi un filo sottilissimo di ottone, il quale dividerà lo spazio EF in molte particelle uguali. Poi quand'io vorrò sapere la proporzione che è fra FG e GE, conterò i fili FG e li fili GE, e trovando li fili FG esser, per esempio, 40, e li GE 21, dirò nel misto essere parti 40 di oro e 21 di argento. Ma qui è d'avvertire che nasce una difficoltà nel contare, perocchè per essere quei fili sottilissimi, come si richiede all'esquisitezza, non è possibile colla vista numerarli, perocchè tra sì piccioli spazj si abbaglia l'occhio. Adunque per numerarli con facilità piglisi uno stiletto acutissimo, come un ago dentro ad un manico, ovvero un coltellino sottilissimo, col quale si vada adagio adagio discorrendo sopra detti fili, che così parte mediante l'udito, parte mediante il ritrovare la mano ad ogni filo l'impedimento, verranno detti fili numerati, dal numero de' quali, come ho detto di sopra, si averà l'esquisita quantità de' metalli semplici, de' quali il metallo misto è composto; avvertendo però che i semplici risponderanno contrariamente alle distanze; come, per esempio, in un misto di oro e di argento i fili che saranno verso il termine dell' argento ci daranno la quantità dell' oro, e quelli che saranno verso il termine dell' oro ci mostreranno la quantità dell' argento: ed il medesimo intendasi degli altri misti.

ANNOTAZIONI
DI DOMENICO MANTOVANI
SOPRA LA BILANCETTA DI GALILEO.

Prima, pare a me si sia levato in parte la difficoltà del numerare li fili, avvolgendone dieci di acciaro e poi dieci voltate di ottone, le quali essendo divise a dieci a dieci, resta solo da numerare quella decima parte, nella quale casca il termine del metallo misto. Che sebbene il Sig. Galileo, che è autore di questa invenzione, fa menzione di due fili, uno di acciaro, l'altro di ottone, non dice però che se ne debba mettere dieci dell'uno e dieci dell'altro, ciò forse sarà avvenuto per causa di chi l'ha copiato, se bene la copia che mi è pervenuta nelle mani, era di mano sua.

Secondo, si suppone in questo problema che il composto di due metalli conservi l'istessa proporzione in grandezza nel composto che prima avevano li due metalli semplici che lo compongono. Dico si suppone che li metalli semplici mantengano e conservino nel composto (dopo averli incorporati e uniti insieme) l'istessa proporzione in grandezza che avevano li semplici disuniti, il che non niego, nè confesso particolarmente nel caso del Sig. Galileo dell'unione dell'oro coll'argento; ma volendo unire, per esempio, libbre 101 di rame con libbre 21 di stagno per farne libbre 120 di metallo per le campane (ne lascio andare due libbre, che presuppongo che cali nella fusione), credo che le libbre 120 del composto avranno minor grandezza che le libbre 100 di puro rame insieme colle libbre 20 di puro stagno disunito, cioè avanti che fossero incorporati e fusi insieme, e che il composto sia più grave in ispecie del rame assoluto e dello stagno assoluto; e nel caso del Signor Galileo il composto di oro e argento si suppone essere più leggiero in ispecie dell'oro puro, ma più grave in ispecie del puro argento; della qual cosa sarebbe facile farne qualche simile esperienza, fondendo insieme, verbi grazia, libbre 10 di piombo con libbre 5 di stagno, e osservare se le libbre 15, o quanto si fosse la quantità del composto, dia la differenza tra il peso in acqua al peso in aria a proporzione che prima davano le libbre 15 delli due metalli disuniti: non dico la medesima differenza, perchè suppongo che caleranno nel fonderli insieme e che il composto sarà meno di libbre 15: però dico a proporzione.

Terzo, si suppone anco che si debbano pigliare li metalli semplici, cioè l'oro e l'argento, ciascuno dell'istesso peso che il misto, benchè non lo dica; il che si conosce dal segnare che fa nella bilancia solo fra li termini dell'oro e dell'argento, il che apporta la gran facilità del solvere il problema col semplice numerare li fili.

Si potria pigliare l'oro puro e l'argento puro dell'istesso peso fra essi, ma diverso però dal peso del composto, cioè o più o meno gravi del composto, e mentre fra loro fossero di ugual peso, mostreriano la proporzione in grandezza dell'oro all'argento, con questa differenza però, che li più gravi mostreranno detta proporzione più esatta che li piccioli e men gravi; ma non essendo li metalli semplici e puri del medesimo peso che il composto, converrà, saputa la proporzione in grandezza dell'oro all'argento, trovare per numeri proporzionatamente la quantità precisa di ciascuno delli due componenti il misto.

Si potria anco adoprare la quantità de' metalli semplici conforme la necessità e comodità che li trovassimo, benchè di pesi differenti e fra loro e col misto, pure che ciascuno sia puro nel suo genere; ma converrebbe poi trovare per numeri la proporzione in grandezza delli due semplici di peso uguali (il che si fa subito pigliandoli di peso uguali, come si è detto), e poi secondo questa proporzione trovare, mediante il peso e mediante la grandezza del misto, la quantità distinta di ciascuno delli due semplici componenti, di ciascuno de' quali casi si potria darne l'esempio. Ma finalmente, se l'oro puro e l'argento puro e il misto fossero di uguale grandezza, sariano di peso disuguali e non occorrerebbe pesarli in acqua, perchè essendo di grandezza uguali, anco le differenze delli loro pesi in aria e in acqua sariano uguali, perchè la differenza del peso in aria al peso in acqua di qualsivoglia corpo è sempre uguale al peso di tanta acqua quanto è grande il medesimo corpo, per la quinta proposizione Archimedea *De his, quae vehuntur in aqua*.

E finalmente li metalli semplici e puri potriano avere la medesima proporzione in gravità reciproca, o scambievolmente, che hanno li loro corpi in grandezza, nel qual caso tanto la grandezza trovata col mezzo del peso in acqua o in qualsivoglia modo, quanto il lor peso in aria, mostreranno la proporzione delle loro gravità in ispecie, come fra li loro pesi in acqua, quanto li loro pesi in aria sono uguali, ma però contrariamente presi; cioè tal proporzione sarà della gravità in ispecie dell'oro alla gravità in ispecie dell'argento, quale è della grandezza dell'argento alla grandezza dell'oro, cioè come è la differenza del peso in acqua al peso in aria dell'argento alla differenza del peso in acqua al peso in aria dell'oro.

Con questa medesima Bilancia si può facilmente misurare la grandezza di qualunque corpo in qualsivoglia modo irregolare nel seguente modo, cioè:

Si averà preparato un corpo solido di materia più grave in ispecie dell'acqua, come verbi grazia di piombo, ovvero, se fosse di legno o altra materia più leggiera in ispecie dell'acqua, si faccia più grave, mettendovi dentro piombo, o altro, che lo tiri al fondo dell'acqua; e sia alcuna misura nota, colla quale si voglia misurare il solido irregolare, come, verbi grazia, il palmo romano, o il piede geometrico, o qualunque altra misura cognita, o parte di essa, cioè mezzo piede o un quarto di piede, o simile parte nota; poi si pesi in aria, e sia che pesi, verbi grazia, libbre 10, la medesima misura si pesi in acqua, e sia che pesi libbre 8: si sottrae libbre 8, peso in acqua, da libbre 10, peso in aria, e resta libbre 2 per il peso di un corpo d'acqua eguale in grandezza alla misura nota. Ora volendo misurare una statua di marmo, si pesa in aria e poi in acqua la medesima, e si sottrae il peso in acqua dal peso in aria, e il resto sarà il peso di tant'acqua eguale in grandezza alla statua, la quale divisa per la differenza del peso in acqua al peso in aria della misura nota, il continente darà quante volte la statua contenga la detta misura nota; verbi grazia, se la statua in aria pesa libbre 100 e in acqua libbre 80, sottratto libbre 80 da libbre 100 resta libbre 20 per lo peso di tanta acqua in grandezza quanto è la statua. Ma perchè la differenza del peso in acqua al peso in aria, eguale in grandezza alla misura nota, fu supposta libbre 2, si dividono le libbre 18 per le libbre 2, e ne viene 9 per lo numero delle volte che la statua proposta contiene la misura nota. Il medesimo modo si osserva volendo misurare una statua o altra cosa di qualunque metallo; solo si avvertisca di chiudere tutti li buchi, che l'acqua non entri nel corpo della statua: ma chi volesse solo il corpo solido del metallo di detta statua, bisognerà aprire li buchi, e con sfiatatori fare che si empisse di acqua tutto il vano della statua. E se la statua fosse di materia più leggiera in ispecie dell'acqua, come, verbi grazia, di cera, bisogna congiungere colla statua alcun contrappeso che la tiri al fondo dell'acqua, poi misurare il contrappeso, come di sopra, e sottrarre la sua misura dal composto, e resterà la misura della statua di cera. E finalmente per servirsi della suddetta bilancia, in vece di cercare il numero delle libbre delle differenze delli pesi in acqua e in aria della misura nota e delli solidi da misurare, conteremo li fili del braccio della bilancia, li quali essendo minutissimi daranno la misura esattissima.

OSSERVAZIONI

DEL P. BENEDETTO CASTELLI

INTORNO

LA BILANCETTA DI GALILEO.

Per fare la bilancia, la quale pesa la quantità dell'oro che sta in un misto, senza sentir la porzione dell'argento che vi è mescolata, o piccola o grande che sia, faccio così:

Piglio la bilancia ordinaria AB (*Fig.* 188), le cui braccia AC, CB sieno eguali, e le lance D ed E sieno non solo eguali, ma dell'istessa materia.

È chiaro che questa bilancia starà equilibrata, o sieno le lance ambedue in aria o ambedue in acqua. Pongo poi in E una quantità d'oro nota, v. g. un'oncia, e pongo in D un'altra oncia d'argento puro. È certo che in aria si farà pur l'equilibrio, ma abbassandosi ambedue le lance in acqua, finchè sieno sommersi i due metalli, è manifesto che preponderera l'oro, *et deorsum feretur tanta vi, quanta est gravitas aquae magnitudinem habentis aequalem differentiae magnitudinum metallorum* ec. ma non importa capir questo per intender la bilancia ec. Piglio un pezzetto di piombo o altra materia grave, e ne aggiungo alla parte dell'argento tanta che si faccia l'equilibrio tra quelle due once, una d'oro e l'altra d'argento tuffate nell'acqua; fatto questo, quel tal pezzetto di piombo, che sia F, sarà l'indice d'un'oncia d'oro e servirà per tutte le bilance del mondo. Bisogna poi farne degli altri eguali ad esso, come anco de' moltiplici, ed in particolare dei duodecupli per aver gl'indici delle libbre. Si può anco partire uno di essi in 24 parti, ed avremo gl'indici degli scrupoli, e dividendo un indice d'uno scrupolo in altre 24 parti, avremo gl'indici de' grani, conforme alla divisione solita dell'once ec.

Operazione.

Si propone un misto composto d'oro e d'argento. Io lo pongo in bilancia, e dall'altra parte pongo altrettanto argento di peso, e fo l'equilibrio in aria. Demergo poi le lance in acqua, e trovo che per far l'equilibrio bisogna aggiugnere all'argento quattro e un terzo di quei piombetti uguali alla F, ed io asserisco essere in quel misto once 4 e un terzo d'oro puro.

Quanta sia la proporzione dell' argento non si può sapere con questo strumento, ma mentre si è fatta nota la porzione dell' oro, si trova subito colla bilancia solita quanto sia l' argento ec. La ragione di questo consiste, perchè sebbene da una parte ponghiamo un misto, nondimeno è lo stesso come se da quella parte fusse posto quell' oro puro che sta nel misto. Chi non vede che quell' argento che sta nel misto, sia quanto si voglia, contrasta con altrettanto argento dell' altra parte? però quanto ad essi non produrranno variazione alcuna, nè in aria nè in acqua. Ma quello che vi è d' oro, sebbene è occulto, in ogni modo contrasta con altrettanto argento di peso dall' altra parte, e questi fanno la variazione nel passar dall' aria all' acqua; la qual variazione misurata dai nostri pesetti fa la spia alla quantità dell' oro che sta occulto nel misto.

In altro modo.

L' istesso che facciamo collo strumento come bilancia con i pesetti di piombo, si può anco fare come stadera col romano corrente, e sarà forse più curioso.

Sia la figura come sta colle lance A, B uguali (*Fig.* 189) e dell' istessa materia, e colle braccia CD, DE uguali, ma che il DC sia slungato fino in F col romano G poco lontano dal punto C; sia fatto questo strumento in tal modo che, stando come sta dipinto, stia equilibrato in aria (ciò si farà col far più grosso il braccio DE e l' altro DF sempre più sottile).

Ciò fatto, pongasi un' oncia d' oro in B ed una d' argento in A, l' instrumento starà pure equilibrato nell' aria, ma sommerse le lance, bisognerà tirare il romano dal punto G al punto H. Facciasi l' istessa operazione con once due, quattro, dieci ec. e bisognerà ritirare il romano due, quattro e dieci volte più verso F, ed avremo sul manico GF notati gl' intervalli o punti, che saranno gl' indici d' once due, quattro, dieci ec.

L' operazione e la ragione è l' istessa che la precedente. Si pone il misto in B, ed altrettanto argento puro in A. Si sommergono in acqua ambedue le lance e si prova quanto debba ritirarsi il romano verso il punto F per far l' equilibrio in acqua. Allora numerando gl' intervalli che sono tra il punto G ed il romano ritirato, altrettante once d' oro saranno nel misto, quanti per appunto saranno gl' intervalli ec.

OSSERVAZIONI

DI VINCENZO VIVIANI

INTORNO

LA BILANCETTA DI GALILEO.

Nella libra CF (*Fig.* 190) sostenuta in E siano B, A nell' estreità C, F, che si equilibrino in aria, ed il peso in A sia, verbigrazia, o. È manifesto che demerso l' oro A in acqua scemerà di peso, e r equilibrarlo bisognerà ritirare il contrappeso B verso il sostegno, r esempio, in D. Dico in primo luogo, che il peso assoluto dell' oro aria al peso assoluto del medesimo in acqua, sta come la distanza : alla DE; poichè il peso assoluto dell' oro in aria al peso assoluto l contrappeso in C sta come CE ad EF, ed il peso assoluto del conppeso in C ovvero in D al peso assoluto dell' oro in acqua sta come : ad ED. *Quod erat* ec.

Di qui è chiaro, *per conversionem rationis*, che il peso assoluto ll' oro in aria alla differenza sopra il peso assoluto in acqua, sta come distanza CE alla differenza di essa sopra DE, cioè alla CD. E tutto si verifica in qualsivoglia peso e di qualsivoglia materia ec.

Ma perchè per Archimede e pel Galileo la differenza del peso di alunque mole pesata in aria, sopra il peso della medesima pesata in qua, è per appunto quanto è il peso assoluto d' altrettanta mole di qua pesata in aria, ne segue che il peso assoluto dell' oro A in aria peso assoluto di altrettanta mole d' acqua, sarà come la distanza CE a CD; ma i pesi assoluti di moli uguali e di diverse materie omonee, pesati nel medesimo mezzo, sono fra loro come le gravità in ecie di dette moli, cioè il peso assoluto dell' oro A in aria al peso soluto d' egual mole d' acqua sta come la gravità in ispecie dell' oro a gravità in ispecie dell'acqua; però la gravità in ispecie dell'oro a ella dell' acqua starà come CE a CD.

Corollario I.

Di qui si cava il modo di venire in cognizione della proporzione la gravità in ispecie d' un metallo o d' altra materia colla gravità in ecie dell' acqua o d' altro liquore men grave in ispecie di detta maia, il che si conseguisce pesando la medesima mole, v. g. A (apa però sempre nel punto F) prima in aria contrappesata da B in e poi in acqua o altro liquore contrappesata dal medesimo B in D, che dalla proporzione delle distanze CE, CD si cava la proporzione della gravità in ispecie della materia della mole A e dell'acqua, o altro liquore.

Corollario II.

Si cava ancora di qui la maniera di poter sapere la quantità in ispecie di diversi liquori separatamente, con immergere il peso A (*Fig.* **191**) di materia più grave in ispecie di ciascuno di essi, ora nell'uno, ora nell'altro liquore, che dall'omologa proporzione dei ritiramenti si verrà in cognizione della gravità in ispecie di detti liquori. Per esempio, immergendo il peso A in acqua si ritiri il contrappeso in G, ed immerso nell'olio si ritiri in D: dico che la gravità in ispecie dell'acqua a quella dell'olio sta come la GC alla CD. Poichè, pel dimostrato, la gravità in ispecie dell'acqua alla gravità in ispecie dell'oro A sta come GC a CE, e la gravità in ispecie dell'oro A alla gravità in ispecie dell'olio sta come EC a CD; adunque *ex aequo* la gravità in ispecie dell'acqua alla gravità in ispecie dell'olio starà come GC a CD, *quod erat* ec.

Nota che la gravità in specie dell'argento vivo non la potrai sapere con altro che per mezzo dell'oro, che solo tra i metalli è di lui più grave.

Immaginiamoci adesso che invece d'una mole d'oro sia appeso in F una mole d'argento, e che in aria qualche contrappeso B in C la sostenga in equilibrio; è chiaro che immergendo la mole d'argento A in acqua, scemerà di peso, e che il contrappeso B in C preponderà, onde sarà necessario, come seguì nell'oro, l'avvicinarlo al sostegno E, e sia per esempio in G. Proverò che questo contrappeso dell'argento sarà più vicino al sostegno di quello dell'oro, cioè che CG è maggiore di CD. Poichè la gravità in specie dell'oro alla gravità in specie dell'acqua sta come EC a CD, e la gravità in specie dell'acqua alla gravità in specie dell'argento sta come GC ad EC, adunque *ex aequo*, per la proporzione perturbata, la gravità in specie dell'oro alla gravità in specie dell'argento sta come GC a CD; ma l'oro è più grave in specie dell'argento (come si suppone per noto, stante l'esperienza), adunque GC è maggiore di CD, *quod* ec.

E così quanto men grave in specie sarà la materia, tanto maggiore sarà il ritiramento del contrappeso. Per venir dunque in cognizione della gravità in specie di due metalli, pesandoli come sopra, e in aria e in acqua, la reciproca proporzione de' ritiramenti de' contrappesi darà la proporzione delle gravità in specie di detti metalli, cioè per esempio tanto l'oro sarà più grave in specie dell'argento, quanto il ritiramento CG dell'argento è maggiore del ritiramento CD dell'oro; e così dell'altre materie più gravi in specie dell'acqua.

Aggiustata adunque così la libra per ogni metallo, o altra materia, passeremo adesso all'investigazione della proporzione di due pesi assoluti che compongono un misto di due delle pesate materie più gravi in specie dell'acqua, delle quali se ne sia trovato separatamente coll'artifizio suddetto la proporzione delle loro gravità in specie; e sia per esempio un misto d'oro ed argento, come A (*Fig.* 192) appeso pure nella medesima libra in F, e contrappesato in aria medesimamente da un contrappeso come B nell'estremità C. È manifesto che se detta mole A fusse tutta oro, tuffata poi in acqua, sempre il contrappeso si ritirerà in D, luogo trovato pel ritiramento del contrappeso dell'oro, e se la medesima mole fusse tutta d'argento, sempre tuffato in acqua, il contrappeso si doverà ritirare in G, luogo trovato pel ritiramento del contrappeso dell'argento. Ma essendo un composto che pesa meno d'altrettanto oro, perchè vi è una parte d'argento, cioè essendo men grave in specie dell'oro, il ritiramento sarà maggiore di CD; ed essendo anche un composto che pesa più d'altrettanto argento, perchè vi è una parte d'oro, cioè essendo più grave in specie dell'argento, il ritiramento sarà minore di CG, onde il punto del ritiramento del contrappeso caderà tra D e G: sia dunque il punto H. Dico che dalla proporzione della parte GH, che è verso il ritiramento dell'argento, alla parte DH, che è verso il ritiramento dell'oro, si averà la proporzione del peso assoluto dell'oro, che è nel misto, al peso assoluto dell'argento del medesimo misto. Poichè immaginiamoci che la parte dell'oro in tal misto sia I, e quella dell'argento L, e che nel contrappeso B la parte M sia contrappeso dell'oro I, e la parte N contrappeso dell'argento L, intendendo in aria l'uno e l'altro, sicchè il peso assoluto dell'oro del misto al peso assoluto dell'argento starà come il contrappeso M al contrappeso N (essendo appesi dalle medesime distanze CE, EF tanto i pesi M, I, quanto N, L, che tra loro sempre si equilibrano). È chiaro che immergendo nell'acqua il misto A preponderera il contrappeso B, e che ponendo M contrappeso dell'oro in D, ed N contrappeso dell'argento in G, tornerà l'equilibrio, essendo che ciascuno da sè di detti contrappesi posti in detti luoghi hanno facultà d'equilibrare dette parti d'oro e d'argento immerse in acqua, perchè così si suppose aggiustata la libra. Levisi dunque il contrappeso B dal punto C, e ponghansi le parti M, N ne' punti D, G, tenendo sempre il misto in acqua, e' si farà l'equilibrio; ma pel supposto si fa ancora l'equilibrio ponendo il contrappeso B in H; adunque i pesi M, N posti in D, G hanno il medesimo momento che il peso B posto in H; ma il peso B in H è eguale ai pesi M, N posti in D, G; adunque il punto H è il centro di gravità de' pesi M, N posti in D, G; e però come GH ad HD, così il peso M al peso N reciprocamente, cioè così il peso assoluto dell'oro I al peso assoluto dell'argento L, *quod erat* ec.

Ma tanto si è che il peso A sia composto dell'oro I ed argento L separamente, quanto che sia l'oro mescolato per infusione coll'argento, *poichè non si altera nè il peso assoluto, nè la mole, e per conseguenza nè meno la gravità in specie;* per questo sarà il modo di venire in cognizione della proporzione del peso assoluto di due metalli, che compongano un misto, quando siano note le gravità in ispecie de' medesimi, ritrovate come sopra nella medesima libra ec.

Da questa bilancia si deduce facilissimo il modo di venire in cognizione della gravità in ispecie di tutti i liquidi, perchè pesando un'istessa mole di metallo o d'altro, che discenda in ciascuno di essi ec.

Tutte le sopraddette cose s'otterranno con ogni bilancia ordinaria, purchè esattissima, e che si muova da parte minutissima di grano, con valersi di pesi egualissimi invece del braccio diviso in parti minutamente, con lasciare i pesi sempre negli estremi, tanto il peso da pesarsi in aria ed in acqua, che i contrappesi ec.

DI UN PARERE

SOPRA UNA MACCHINA COL PENDOLO PER ALZARE ACQUA

PROPOSTA

DA UN INGEGNERE SICILIANO AL G. D. FERDINANDO II.

FRAMMENTO I.

Io non posso negare ch'io non restassi ammirato e confuso quando, alla presenza del Sereniss. Gran Duca e degli altri principi e signori, mi faceste vedere il modello della macchina da voi, in vero, con sottilissima invenzione immaginata e fabbricata, per uso di superare con piccola forza grandissime resistenze, e la quale allora era applicata a tirar su colla tromba con pochissima fatica quella medesima quantità di acqua, che senza l'aiuto della vostra invenzione molto maggior fatica ne richiedeva; e quello, dal che nacque la somma ammirazione, fu il vedere servirvi voi di un mezzo, che mi pare che a giudizio di ognuno dovesse non agevolare l'opera, ma grandemente difficultarla. Attesochè quella forza che non è potente ad alzar cento libbre di peso, chi crederebbe che aggiugnendovene, oltre alle cento, mille appresso, le alzasse tutte? e quello che accresce lo stupore, che le mille aggiunte fusser quelle che avvalorassero la debil forza del movente. Lo vidi, ed io stesso tentai con una semplice e poco pesante leva zancata di alzare il peso, credo di 40 libbre, con una limitata forza la quale non fu bastante per l'effetto. Voi dipoi ingraviste la detta leva con più di 200 libbre di piombo, e tornando a far prova di alzare quelle prime 40 libbre coll'istessa forza, si vedeva alzar queste e le 200 appresso dall'istessa leva, la quale stando pendente a perpendicolo nello spignerla fa il suo moto all'insù: sicchè, e lo replico coll'istessa ammirazione, quel peso di 40 libbre, il quale una tal forza non poteva alzare con una tal leva non più grave di due libbre, la medesima forza francamente l'alza adoperando l'istessa leva fatta grave di 200 libbre.

E perchè io già gran tempo fa mi era formato un concetto, e per molte e molte esperienze confermatolo, che la natura non potesse esser superata e defraudata dall'arte, nel veder sì fatta maraviglia restai ammirato e confuso, e non potendo quietar la mente nè deviarla dal meditare sopra questo caso, ho fatto un cumulo di varj pensieri, e risoluto di distenderli in carta e comunicarveli, acciocchè, quando si veda in pratica e nella macchina grande la riuscita della vostra vera acutissima invenzione, io possa da voi essere scusato, e per voi scusato appresso gli altri, che le difficultà che promuoverò non sono del tutto fuor di ragione, e se non concludenti, almeno in parte verosimili. E talvolta, quando nel discorso che son per fare fusse cosa che muovesse dubbio circa i vostri supposti e fondamenti, possiate coll'acutezza del vostro ingegno usarvi gli opportuni rimedj: perchè da persona di onore vi affermo, e ne chiamo Dio in testimonio, che io assai più desidero la riuscita di questa invenzione, e che tale strumento sia sopra tutti gli altri avvantaggiato, che l'opposito; ancorchè io mi sia lasciato intender in genere, tutte le macchine esser dell'istesso valore quanto all'effetto da farsi formalmente, tuttavolta che si rimuovessero gl'impedimenti che si possono attribuire alla materia; dal che ne seguita, che le macchine quanto più saranno semplici, tanto meno saranno sottoposte agl'impedimenti, ed in conseguenza di maggiore operazione.

Quando io dico che la natura non permette di esser superata nè defraudata dall'arte, intendo (stando nella materia che si tratta) che avendomi essa natura conceduto, v. g., 10 gradi di forza, che è quanto a dire virtù di pareggiare 10 gradi di resistenza, ella mi nega e non mi permette per artifizio veruno il superarne nessuna che sia più di 10 gradi. E di più soggiungo, che ella mi vieta l'applicare tutta la mia forza di 10 gradi, in superare o muovere una resistenza che sia solamente 4 o 6 gradi, o in altro modo minore di 10. E chi direbbe che mentre con tutta la mia forza io strappo una cordicella, io tutta la medesima forza adoprassi o potessi adoprare in rompere un debole spaghetto? o se con tutta la mia forza io alzo un peso di 100 libbre, la medesima io usassi in alzarne uno di 10?

Questo mio primo detto, cioè che per artifizio nessuno sia possibile che forza nessuna superi o muova resistenza alcuna maggiore di lei, pare che abbia molte e molte esperienze in contrario, nelle quali vediamo non senza maraviglia con piccolissima forza muovere ed alzare gravissimi pesi. Consideriamo la stadera, dove apertamente si vede il romano che, non pesando più di 10 libbre, contrappesa ed alza una balla che ne peserà più di 1000. Guardiamo l'argano: non si vede egli colla forza di un uomo tirare in alto una pietra di 3000 libbre? E non è questo un superare coll'arte un' immensa resistenza con piccolissima forza? Bene: ma io, Signor mio, da queste medesime esperienze argomenterò tutto l'opposito; e mi maraviglierò come quella balla di 1000 libbre non possa alzare il romano, che non resiste salvo che con 10, e che le 3000 della gran pietra non isforzino l'uomo, la cui forza è eguale appena al momento di 100 libbre. Da questi due strumenti dunque non si può cavare con più vera conseguenza che l'arte guadagni 100 o 300 per uno, di quello che ella scapiti e perda a 100 o 300 doppi. Dalle quali due egualmente concludenti conseguenze tra di loro contrarie, la vera conclusione da tirarsene è che l'arte, per quanto appartiene al far forza, non guadagna nulla sopra la resistenza della natura. E quella stima che resta negli uomini proviene dal comodo e dall' utilità che caviamo, attesochè mille volte il giorno ci serviamo del romano per alzare e pesar balle, e dell' uomo per tirare in alto gravissimi sassi, e raro o non mai delle balle per alzare i romani e de' sassi per respignere indietro gli uomini.

Ora è bene che consideriamo in che consista l'aggiustamento fra l'arte e la natura; calcolo e ragione che è assai facile e chiara, mentre che tutto si ragguaglia colla velocità e tardità di moto, o vogliamo dire tardità e lunghezza di tempo.

È vero che un solo uomo, la cui forza ha momento per 100 libbre, alzerà e strascicherà per terra una colonna di 10,000 libbre di peso; ma se noi avvertiremo quanto sia il viaggio che fa l'uomo, e quanto quello che fa la colonna, troveremo che quando questa si sarà mossa un braccio, il motore ne averà camminate 100, che è quanto a dire che il motore si è mosso 100 volte più veloce della colonna. Dove si vede che, ragguagliando le partite, quando quel sasso si fosse diviso in cento parti eguali, ciascuna sarebbe stata 100 libbre, e però equivalente alla forza del motore, il quale in cento viaggi di un braccio l'uno avrebbe traportati i cento pezzi del sasso in distanza di un braccio, muovendosi con quella medesima velocità, cioè dentro al medesimo tempo. Il vantaggio dunque dell'argano non è che e' ci diminuisca la fatica o il tempo, ma che la colonna si conduca intera e non in pezzi, i quali poi non si possono rattaccare ed unire in un solo, conforme al nostro bisogno: dove si vede che se il peso da condursi fosse di un vaso d'acqua di 100 barili, poco o niun comodo mi apporterebbe il condurre coll'argano tutta la gran botte piena in un sol viaggio colla forza di un uomo, o condurla col medesimo uomo in altrettanto tempo a barile per barile in cento viaggi, avvegnachè l'acqua si rattacca insieme e torna in una sola massa come prima.

Due altri modi, in apparenza diversi dal sopra detto, par che l'arte abbia ritrovati per poter pure con pochissima forza superare resistenze grandissime. L'uno è l'urto o vogliam dire il colpo o la percossa, alla quale par quasi che non sia resistenza che non ceda. L'altro è il fare una, dirò così, conserva e cumulo di forze aggregate insieme, il che si fa quando imprimendo io la mia forza, che ponghiamo che sia di 10 gradi, in un mobile che me la conservi, torno ad imprimergliene altrettanta, sicchè congiunta co' primi 10 gradi, in quello che la conserva se ne trovano 20; e continuando d'imprimerne di volta in volta altri 10 e 10 si rauneranno nella conserva 100, 200 e 1000 gradi di virtù potente a superare resistenze grandissime, contro le quali di niuno effetto era la mia pura virtù di 10 gradi.

Per una tal conserva di forza accomodato esemplo ce ne dà il gravissimo pendolo da voi medesimo adattato alla leva, il quale ricevendo impulsi dalla debolissima forza, facendo di quelli conserva, ne fa un cumulo, e per così dire un capitale tanto grande che soprabbondantemente ne può andar poi distribuendo ed applicando a superar resistenze, quali la prima forza non bastava a gran segno di muovere. Esempio della virtù e possanza degli urti ne abbiamo in quelle viti, colle quali si soppressano le rasce o si stringono le gabbie dell' ulive per trarne l' olio ; le quali viti sul principio, mentre la resistenza non è molta, si volgono con una piccola stanga, ma finalmente, crescendo nello strignere la resistenza, conviene moltiplicare gli uomini, ed usare una stanga maggiore, colla quale spingendo pure si gira la vite, sicchè in ultimo, non bastando più il semplice impulso, si ritira indietro la grande e grave stanga, con la quale, con replicati urti, si arriva a cacciar la vite con que' tre o quattro uomini, dove collo spignere senza urtare non la caccerebbero sei o sette.

Sopra queste due esperienze mi pare che con grande accortezza e con sottil ragione si appoggi il fondamento della vostra macchina, dove si vede il gravissimo pendolo, quasi abbondante conserva di forze, poterne andar dispensando continuamente quella parte e quantità che è necessaria per superare la resistenza del peso che si deve alzare, e di più servendosi del secondo benefizio degli urti, dopo essersi ritirato indietro, tornare a guisa di gagliardo ariete a raddoppiare la percossa e l' impeto.

Tutto questo mi par che sia con tanta industria e con tanta sottigliezza d' ingegno compartito, che quando ben l' effetto non rispondesse puntualmente all' aspettazione, io ad ogni modo anteporrei questa a molte altre invenzioni. E perchè io estremamente desidero che l' effetto risponda all' opinione, ho risoluto andar toccando que' dubbj ch' io non so risolvere, e che mi par che possano arrecare qualche intoppo all' opera, acciocchè voi (quello che non so far io) me li rimoviate, e se ne avessero bisogno, vi arrechiate opportuno rimedio.

Riducendo la vostra macchina artifiziosa al più semplice disegno ch'io possa per più chiara esplicazione del mio concetto, figuro questa DAE (*Fig.* 193) esser una leva zancata sospesa nel punto A; dove intorno ad un asse, o vogliamo dire un perno, ella sia convertibile, sicchè spingendo l'asta maggiore AD verso AF, la zanca AE venga a urtare col termine E in un rampino G, dal quale penda il peso P da esser alzato: il qual peso pongo, per esempio, esser 100 libbre. Suppongo poi l'asta AD essere, v. g., lunga 5 volte più della zanca AE, e la forza che dee muovere pongo minore assai della resistenza del grave P. Sia pertanto equivalente al momento di 5 libbre, sicchè applicata nel termine D, spignendo verso F, non potrebbe col punto E alzar peso se non minore di 25 libbre, e però sarebbe impotentissima ad alzar il grave P, supposto esser libbre 100.

A questa impotenza voi soccorrete col sommamente ingravire il braccio della leva AD, convertendolo in un pendolo grave di 400 libbre di peso, o di più ancora, se più ve ne bisogneranno. Apparecchiate queste cose, voi senza errore discorrete, ed in atto pratico osservate, che essendo costituito simil pendolo a piombo secondo il perpendicolo AD, e sostenuto in A con un bilico esquisito, non è forza così piccola, che spignendolo verso la parte F (tolto via il rampino e il il peso P) non lo rimuova qualche poco dal punto D. E però applicandovi la supposta forza di 5 gradi si muoverà alquanto verso F, e lasciato in libertà ritornerà per sè stesso verso D; oltre al quale passerà poco meno d'altrettanto verso B, quanto per l'impulso datogli era pur ora andato verso F. E perchè tal impeto non si è perduto, se coll'istessa virtù di cinque gradi se gli aggiugnerà il secondo impulso, già ne averà 10, e più oltre trapasserà verso F, ed insomma aggiugnendo impulso sopra impulso 4, 6, 10 e 20 volte, verremo ad imprimer nel pendolo impeto tale, che ampliando le sue vibrazioni nello scender dal termine B per l'arco BD sarà bastante a sollevare sè stesso, cioè 400 libbre di peso, per altrettanto spazio sino in F, e tutta questa virtù e impulso è frutto della piccolina forza de' 5 gradi; i quali è manifesto che, continuando gl' impulsi, gliela potrebbero accrescere ancora o almeno perpetuare. Aggiunghiamo adesso il rampino G col peso P di libbre 100; non è da dubitare che scendendo il pendolo AB per l'arco BD, ed incontrando nel punto D, dove l' impeto suo è massimo e il moto è il velocissimo, colla zanca AE il rampino G, gli darà d' urto con tal forza, che ben per grande spazio solleverà il peso P delle 100 libbre, e ritornando poi indietro verso B, io a tempo colla replica e giunta de' miei 5 gradi andrò mantenendo in vigore il pendolo, e continuando l' opera.

Ora, se il discorso vostro fondamentale procede così, mi si rappresentano alcune difficultà che mi muovono a dubitare. E prima, conceduto, del che non dubito, che nel pendolo sia stata fatta una conserva di forza potente a sollevare le sue 400 libbre di peso per tutto l' arco DF, questo accaderà sempre tuttavolta però ch'ei non trovi intoppo nel viaggio; ma se passando per D urta colla zanca AE in una resistenza di 100 libbre, ancorchè quivi in D sia il sommo vigore della sua forza, pare che pur gliene debba in parte essere diminuita, cioè, s' io non m' inganno, la ventesima parte. Imperocchè trovandosi il pendolo AB, quando è pervenuto in D, con impeto d' alzare le sue 400 libbre sino in F; tal impeto ne alzerebbe colla zanca AE cinque volte tanto, cioè due mila, per essersi posto il braccio AB quintuplo in lunghezza della zanca AE; l' urto dunque nel peso P, che è 100 libbre, detrae 100 dalle 2000, cioè la vigesima parte. Ritorna dunque il pendolo indietro colla vigesima parte manco dell' impeto, col quale dianzi si partì scendendo dal punto B; tal che nella tornata non ricalerà dal punto B, ma da altro H più vicino a D, e l' impeto, che fu come di 400 libbre, verrà ora come di 380, cavandone cioè le venti toltegli dall'urto in G. Bisognerebbe dunque, per ristorar la perdita de' venti gradi d' impeto, restituirgliene altri venti, ma la forza del movente non ne ha da prestare se non cinque; adunque il pendolo, che nella prima scesa dal termine B si partì con impeto tale, che arrivando in D si trovava con 400 gradi d' impeto, in questo secondo passaggio ne averà solamente 385.

de' quali il nuovo urto in G torna a levargliene venti (che tanti son quelli che son necessarj per alzare il peso P), talchè i gradi 385 diventano 365; per lo che tornando indietro il pendolo non risalirà alla medesima altezza H, ma più basso; dove il motore gli somministrerà i suoi cinque gradi di forza, sicchè scendendo con 370 alzerà ben per ancora il peso P, ma con perdita di venti gradi di forza; e così continuando in ogni andata la perdita di venti ed il ristoro di cinque, in breve tempo mancherà l' aiuto di costa del pendolo.

Propongo nel secondo luogo un'altra considerazione. Voi dite: la forza che s'adopra non è più di cinque gradi, adunque colla pura leva DAE, della quale il braccio DA è quintuplo della zanca AE, non si può alzare più di 25 gradi di resistenza, ma la resistenza del peso P è 100 gradi, adunque è impossibile alzarlo. Vero: ma ditemi se con fare quattro parti del peso P non potrò io colla detta forza alzarne una per volta, e tra quattro volte alzar tutto il peso, come col pendolo io l' alzava in un tratto solo? Certo sì; e l' opera sarebbe ragguagliata, tutta volta che si potesse nel tempo che col pendolo si danno, v. g., 10 impulsi, darsene 40 con la leva semplice, il che penso io che si potrà fare, però considerate le seguenti particolarità nel pendolo.

Prima, a voler che il momento della sua somma gravità lavori, bisogna ritirarlo indietro in gran lontananza dal perpendicolo AD, altrimenti l' urto suo è debole, e questo tornare indietro da D verso B colla tornata in D è tutto tempo ozioso e gittato via. Ma all' incontro la forza applicata in D alla leva leggiera è tutta utile, lavorando per tutto lo spazio che si spigne verso F. La gravità del pendolo fa che la forza non la può brandire, nè far che le sue andate e tornate, cioè le sue vibrazioni, non sieno se non sotto un tempo limitato e assai lungo in comparazione delle vibrazioni, che apprendendo colla mano il termine D dell'asta leggiera AD la forza potrà fare molto frequenti. Aggiungasi che se l' andata del pendolo non è per un grand' arco, l' impeto del pendolo scendente non acquista gran momento, e per breve spazio trapassa oltre AD verso F, e poco s'alza la stremità della zanca E, ed in conseguenza poca è l'acqua che si cava in una sgorgata; dove è da notarsi che l'impeto del pendolo sempre va diminuendo nel montar su dal D verso F, ma la forza posta in D spignendo verso F sempre è la medesima; sicchè si può continuare quanto ne piace a fare la sgorgata lunga, e cavar in conseguenza più acqua.

FRAMMENTO II.

Per concedere alla parte ogni maggior vantaggio che desiderar si possa per la ragione sua, io concedo i membri di tutta la sua macchina, cioè macine, ruote, conocchie e leve, essere di maniera aggiustate, librate e così proporzionatamente compartite, e più gli assi, i perni ed i poli esser tanto delicatamente lavorati, bilicati ed unti, che il tutto insieme, mentre abbia da camminar vacuo, possa esser mosso con qualsivoglia gran velocità da ogni minima forza, da un soffio solamente. E questo si deve intendere trattone il pendolo, il quale essendo un peso molto grave, e dovendo nel muoversi esser alzato (il che non accade ad altro membro della macchina), non può esser rimosso dal suo stato perpendicolare se non da qualche forza: e perchè tal pendolo ritiene per qualche tempo l'impeto che successivamente gli viene dalla virtù movente contribuito, io (persistendo nella medesima larghezza di concedere alla parte ogni maggior vantaggio) voglio supporre che tal tempo sia una eternità, quando da esterno impedimento non gli venisse fatto resistenza ed intoppo: sicchè finalmente, in virtù di tal impeto impresso nel pendolo, anche tutto l'ordigno insieme fosse atto a muoversi in perpetuo, muovendosi però vacuo da ogni operazione. Ma quando si levi il pendolo e si aggiunga sotto la macine il grano da frangersi, perlochè ella non si muova più nella sola aria libera, ma urti negli intoppi de' grani frapposti, è ben necessario concedere che per far l'effetto, e continuare l'operazione del macinare, il primo movente vada continuando di far forza, e che dove prima per mia concessione tutto l'ordigno, rimossone il pendolo, doveva andare a vuoto, aggiuntovi ora la resistenza del grano, abbia bisogno d' una determinata e non minor virtù movente; determini dunque la parte quanto debba esser almeno tal virtù, e chiamisi, v. g., dodici gradi, sicchè da virtù minore di dodici gradi il grano non potrebbe esser macinato; e però possiam dire che la resistenza di esso grano, nell' atto dell' esser macinato, pareggia dodici gradi di virtù movente senza che niente gli avanzi; e questo s' intende lavorando senza il pendolo. Ma considerando la parte come il pendolo è in un certo modo una conserva inesausta di virtù (poichè egli è atto a ritenere eternamente qualsivoglia impeto una sol volta conferitogli), e di più vedendo come, col farlo più e più grande e pesante, si può esso ridurre ed esser atto a ricevere e conservare maggiore e maggior numero di gradi e di virtù, e che perciò tal immensa virtù gli può esser impressa anco da pochissimi gradi di forza motrice, coll' andar successivamente più e più volte facendogli impeto; considerando, dico, la parte cotali accidenti ha creduto, coll' intervento del pendolo, poter far l' istesso effetto del macinare con forza minore di dodici gradi (che per supposizione è la minima che possa macinare senza il pendolo). Ora posto il pendolo capace d' ogni gran numero di gradi di virtù, determini la parte quanta forza vuol che sia quella del primo movente, del qual ella si vuol servire, e quanti gradi ella ne voglia imprimere e depositare nella conserva del pendolo innanzi che si cominci a mandare il grano sotto la mola: sia, per esempio, cento gradi. Or cominciando l'operazione, dia il movente il primo impulso, col quale e muoverà il pendolo dal suo stato primo perpendicolare, e lo solleverà tanto che nel ritorno averà acquistato due gradi di virtù, quanto è quella del movente (che se la parte credesse ch' e' ne acquistasse più, non occorrerebbe dar più impulsi, perchè ritornando il pendolo verso il perpendicolo, ed avendo egli concepito più di due gradi di virtù, trapasserebbe, spinto da sè medesimo, dall' altra banda del perpendicolo per maggiore intervallo che non fu quello del primo impulso datogli da due gradi soli del movente, e così successivamente si anderebbe da sè stesso avanzando nell' impeto infinito, che è grande assurdo). Ma perchè questa virtù è impressa nel pendolo indelebilmente, tornando il movente a dargli un altro impulso, gl' imprimerà altri due gradi di virtù, sì che già ritornerà con quattro, e nel terzo impulso ne acquisterà altri due, sì che saranno sei, e successivamente in 50 spinte acquisterà i cento gradi di virtù, in sè stessa perpetua, quando bene il movente cessasse, pur che non gli fosse opposto alcuno intoppo. Or continui pure il movente la sua operazione, e comincisi a mandare il grano sotto la mola, la resistenza del qual grano, per la supposizione, pareggia 12 gradi di virtù movente; adunque nel tempo d'uno impulso il movente conferisce due gradi di virtù, ma il grano ne arreca dodici di resistenza, però ai cento gradi d' impeto del pendolo ne saranno levati dieci, ond' egli opererà con novanta solamente; ma nel seguente impulso il movente ne aggiugne due e il grano pur ne rimuove dodici, sì che il pendolo si riduce a lavorar con ottanta; e così conseguentemente, levando il grano cinque volte più che non rimette il movente, in manco tempo di quello di nove impulsi sarà finita la virtù e fermato il mulino, il quale non cominciò a macinare se non dopo il tempo di cinquanta impulsi; e così in tale operazione si sarà buttato via circa i $\frac{5}{6}$ del tempo, anzi molto più ancora se noi meglio andremo considerando il tutto. Sarebbe tale il dispendio del tempo quando la virtù adiutrice del pendolo prestasse il suo aiuto continuatamente, siccome la resistenza del grano senza intermissione continuatamente impedisce; ma il pendolo circa agli estremi termini delle sue andate, nelle quali e' si riduce allo stato di quiete, pochissimo o nulla opera, facendo forza colla sola sua gravità, privata di velocità di moto, la qual velocità egli ancora languidamente acquista mediante la resistenza del grano; ne seguita che i suoi impulsi sono interrotti, e che buona parte del tempo si spende oziosamente. Ma dirà forse l' avversario, potersi pur ricever comodo dal pendolo, sebben non così grande quanto sarebbe il già detto, che era il poter fare, mediante l' aiuto del pendolo, con due soli gradi di forza, quello che senza esso si farebbe con dodici gradi, dicendo ciò potersi ottenere colla forza di dieci gradi; ma io, replicando il medesimo discorso, mostrerò questo esser impossibile: dichiarando che se in dieci impulsi s' imprimono nel pendolo cento gradi d' impeto operando senza grano, all' incontro, nel tempo di 44 impulsi susseguenti, la resistenza aggiunta del grano fermerà il macinare: perchè, mentre la forza de' dieci gradi moventi fa un impulso tale che i 100 rimangano 98, e scemandone due nell' altro impulso rimangano 96, finalmente al quarantaquattresimo impulso si riducono a dodici, i quali vengono pareggiati dalla pura resistenza del grano. E tutto questo segue quando la macchina tutta fosse libera da tutti gl' impedimenti esterni ed accidentarj, conforme alla vantaggiosa supposizione fatta a principio: la qual cosa è del tutto falsa e impossibile; anzi gl' impedimenti son eglino pur molti e molto grandi, mediante i tanti toccamenti di denti con ruote e conocchie, di fusi con perni, di poli con sostegni, e dell' immensa gravità stessa delle ruote e delle macine, tal che assolutamente la forza movente meglio e più validamente opererebbe senza il pendolo, e meglio ancora lavorandosi con una sola e semplice ruota dentata, che toccasse un solo rocchello adattato nel fuso della macina.

FRAMMENTO III

(cominciato a distendere in Dialogo).

Interlocutori

SALVIATI *e* SAGREDO.

SALV. Non so s' io m' abbia ben capito la struttura e la maniera d' operare di questo nuovo strumento per sollevare con poca fatica pesi gravissimi. Dirò ciò che apprendo, e voi supplirete in quello ch' io mancassi. Nel proposto disegno il peso da essere alzato è questo notato A (*Fig.* 194), posto essere di cento libbre. Questa CDE si figura essere una leva zancata convertibile intorno ad un perno stabile fermato in D. Il braccio maggiore che pende, cioè la lunghezza DE, si pone esser quintupla del minore CD. La forza movente applicata nella estremità E è eguale al momento di cinque libbre di peso. Ora astraendo dal peso della leva, cioè supponendo ch' ella non pesi nulla, è manifesto che la forza posta in E, non avendo maggior momento che l' equivalente di cinque libbre, spignendo contro al grave A, non potrà coll' estremità C alzar più di venticinque libbre, anzi sostenere; ma l' A è cento, dunque è lontanissimo dall'esser mosso da cinque. Per far dunque che questa piccola forza o momento superi la quattro volte maggiore resistenza o momento, servendosi pur dell' istessa lunghezza di leva, si ha l' autor della macchina (in vero con sottile avvedimento) immaginato di sommamente ingravire il braccio della leva DE, e dove si supponeva esser senza gravità, convertirlo in un pendolo di quattrocento o più libbre, figurato per DFG; ed accomodando al peso A un rampino B sotto il quale vada a urtare l' estremità C della zanca DC, ha senza errore compreso, che mentre il pendolo sia a piombo, ogni minima forza lo può rimuovere dallo stato perpendicolare; nel quale poi, mercè della propria gravità, lasciato libero, ritorna non solamente, ma oltre di quello trapassa quasi altrettanto, quanto dalla detta forza ne fu allontanato: dal che ne seguita, che se nel ritorno che per sè solo farebbe, se gli applicherà il secondo impulso della medesima forza, trapasserà lo stato perpendicolare di assai più che prima, ed aggiugnendo poi al secondo ritorno il terzo impulso, e così successivamente continuando gl' impulsi a tempo proporzionato a' ritorni, piglierà, a guisa di campana, frega e impeto tale, che sarà bastante a sollevare in ciascuna sua vibrazione non solo il proprio peso delle quattrocento libbre, ma urtando coll' estremità della zanca C nel rampino B, alzerà il peso ancora delle cento di A; e la forza movente, benchè non superiore al momento di cinque libbre, lavorando in E, conserverà e continuerà perpetuamente l' impeto del pendolo, col quale, come si vede in ogni vibrazione, leverà su il peso di cento libbre del peso A col solo peso di cinque. Non so s'io m' abbia bene inteso e spiegato il concetto dell'Autore.

Sagr. Inteso, per quanto credo, e spiegato benissimo, ora che dice V. S. d'invenzione così bizzarra?

Salv. Dico che ha sembianza d'una delle più ingegnose che mai sieno cadute nei più svegliati ingegni; perchè il sentirsi dire, mentre che colla leva DE tu non sei potente ad alzare la quarta parte del peso A, io voglio far sì che coll'istessa, e nell'istesso modo usata, tu ne alzi non solo le cento di A, ma quattrocento altre appresso, e che queste quattrocento sien quelle che ti avvalorino, pare che trapassi tutte le immaginazioni. Ma vorrei io qui sapere se l'inventore termina qui l'uso di tale invenzione, o pur l'adatta a qualche particolare con notabile acquisto sopra la facoltà d'altre macchine indirizzate a simili effetti di alzar pesi.

Sagr. Io credo, e così parmi, che la macchina si potrebbe applicare a varie operazioni, una delle quali, che per ora ha nell'intenzione l'Autore, è di applicarla ad una tromba per alzar l'acqua; dove il solido A rappresenta lo zaffo con tutto il peso dell'acqua da alzarsi. E più manifestamente si scorge che, in virtù del pendolo, ad ogni sgorgata si potrà buttar fuori gran quantità d'acqua, cosa che senza esso non si farebbe.

Salv. Tutto cotesto è verissimo; ma crede V. S. che perciò tale strumento sia bastante a cavarne notabil quantità più d'ogn'altro? Perchè dal discorso fatto sin qui par che si possa concludere un eccesso grandissimo, giacchè colla tromba circoscritta in virtù del pendolo se ne caverà gran copia, e senza esso nè pure una gocciola.

Sagr. Una differenza tanto grande quanta è dal molto al niente mi conturba, e mi fa entrare in sospetto che sotto così speciosa e mirabile apparenza non s'asconda qualche gran fallacia: però non so che mi rispondere.

Salv. Credo che il vostro sospetto non sia vano, anzi tengo per fermo che non pochi altri strumenti nel presente caso di alzar acqua non saranno inferiori a questo: ma per non avere a fare lunghi discorsi nel paragonarlo con altri molto diversi, voglio che trattiamo d'una simil tromba, la quale lavori coll'istessa leva zancata, privata e libera dalle quattrocento libbre del pendolo e da ogn'altro peso. Ma prima che passar più avanti, penso di poter mostrare a V. S., con certa general considerazione, come veramente è forza che nel discorso sopra fatto si occulti qualche fallacia. Però ditemi se (rimosso il peso A) applicata una limitata forza equivalente, v. g. di quattro libbre di peso, a spignere e far vibrare il pendolo DE di peso di quattrocento libbre, vi sia necessaria una distanza determinata, oltre alla quale non sia possibile passare.

Sagr. Circa questo che V. S. mi dimanda, stimo primieramente, che non solo il momento delle quattro libbre di forza sarà bastante a rimuovere il pendolo dalla quiete, cioè dallo stato perpendicolare, ma che ogni minima che se gli applichi ne lo rimuoverà, la quale poi, secondo che sarà maggiore, per maggior distanza lo sospignerà. In oltre, se nel ritornare indietro che farà esso pendolo per la propria gravità, la detta forza lo risospignerà, lo farà slontanare ancor più dal perpendicolo, ma però una forza molto inferiore al momento della gravità del pendolo, quale è la proposta di quattro libbre, v. g. d'un arco di dieci o dodici gradi, oltre al quale non lo potrà giammai far sormontare.

Salv. Così è necessario che sia. Ma quando, levato il peso del pendolo, la leva DE restasse leggerissima, e quella medesima forza delle quattro libbre se gli applicasse, sino a quanto allontanamento dal perpendicolo la potrebbe sollevare?

Sagr. Potrebbe accompagnarla per tutto un intero quadrante e più.

Salv. Or torniamo alla figura col pendolo. E posto che esso dal momento delle quattro libbre di forza non potesse nè accompagnato nè vibrato muoversi oltre a dieci gradi, quando la distanza CB, tra la zanca DC e il rampino B, fosse di dieci gradi del cerchio descritto dalla linea DC, intorno al centro D, l'estremità C, cacciata dalla vibrazione del pendolo, non vi arriverebbe mai, e in conseguenza mai non verrebbe alzato il peso A, quando ben fosse solamente un'oncia. Ma consideriamo adesso quello che si potrà fare colla medesima leva zancata, rimossone il peso del pendolo. E perchè si è concluso che le quattro libbre di forza potranno sospigner la leva non solo oltre a dieci, ma oltre a novanta gradi, quando l'estremità C della zanca arriverà al rampino B, essendo la leva ED quintupla della zanca DC, la forza quattro potrà levar venti di resistenza che fosse in A. Ecco dunque scoperto come nel discorso fatto di sopra ci è sotto qualche fallacia, poichè in quello si concludeva che la medesima leva in virtù del gravissimo pendolo alzava gran peso, e senza il pendolo non alzava nulla; ed in questo per l'opposito si dimostra che la giunta del grave pendolo toglie del tutto il poter alzar gran peso, che senza il pendolo comodamente si solleva con quattro di forza. La proposizione dunque universale, che la gravità aggiunga forza alla leva nell'alzar pesi, è falsa.

LETTERE

INTORNO

LA STIMA DI UN CAVALLO

Della singolare controversia agitata nelle seguenti lettere (edite già nelle precedenti edizioni, e delle quali la Palatina possiede soltanto copie contemporanee) così discorre il Nelli a pag. 747 della sua Vita di Galileo:

« Costumavasi in quei tempi felici nella nostra città di Firenze di fare diverse letterarie adunanze nelle case dei Signori, i quali non spendevano il tempo loro o nel corteggiare assiduamente le femmine, o fra le scuderie, o negli smodati giuochi, ma bensì fra gli eruditi colloqui e tra gente culta passavano lietamente le ore ed i giorni. In una di queste conversazioni fecesi pertanto il seguente quesito:

» Un cavallo, che realmente vale scudi cento, da uno viene stimato mille e da un altro dieci: domandasi qual sia la migliore stima, e chi dei due abbia giudicato più stravagantemente.

» Viveva allora un prete Nozzolini pievano di S. Agata nel Mugello, uomo culto. A questo pertanto indirizzò il quesito il Signor Andrea Gerini gentiluomo fiorentino, a cui il prenominato Nozzolini comunicò il proprio sentimento, il qual era che, per fare la stima in questione, uno doveva valersi della proporzione aritmetica e non della geometrica, ed essere di sentimento che maggiore stravaganza usata avesse quello che aveva prezzato il cavallo scudi mille, che l'altro il quale lo aveva valutato soli scudi dieci.

» Pervenne alle orecchie di Galileo lo stato della questione, e subito si espresse che questa andava giudicata con proporzione geometrica e non aritmetica, e dello stesso parere fu il padre don Benedetto Castelli.

» Caduto il parere di Galileo sotto gli occhi del Nozzolini, questi persistè sempre nell'opinare che dovesse decidersi la questione con la proporzione aritmetica e non geometrica, non ostante il sentimento contrario di sì dotto uomo e del Padre Abate Castelli.

» Venne fuora nuovamente in campo il Galileo sulla medesima disputa per capacitare il Nozzolini, ed ultimare la questione insorta nella di sopra espressa adunanza letteraria; e con sua lettera scritta ad anonimo il dì 10 Giugno 1627 si dichiara di aver letto quanto sulla nota controversia aveva scritto il Nozzolini persistente nell'opinare che la stima del cavallo dovesse reputarsi nella categoria della divisione delle comuni mercanzie, e che dovesse decidersi per mezzo della proporzione aritmetica e non della geometrica, esponendo esso Galileo diffusamente le sue ragioni in contrario.

» Non restò il Nozzolini persuaso del ragionamento di Galileo; ed ostinandosi nell'opinare che, per risolvere la questione sull'esorbitanza maggiore o minore della stima di quel cavallo, dovesse valersi della proporzione aritmetica e non geometrica, scrisse altre lettere per convalidare la sua opinione; contro delle quali non stimò opportuno il Galileo di opporsi per troncare una volta una disputa, che niente poteva apportare di utilità e vantaggio all'umano intendimento ».

Lettera d'Andrea Gerini al Nozzolini.

Di Firenze, il dì 24 Aprile 1627.

Io mi son trovato alli giorni passati in una conversazione dove si disputava un punto di Matematica, e perchè la gente si pugneva, sono ricorsi per la sentenza al Sig. Galilei, e perchè una parte non si quieta, mi è venuto in pensiero di scrivere a V. S. per sentire la sua opinione, della quale se ne vuol favorire, so che sarà gradita, quando però sia con suo comodo, e senza interrompimento di altri suoi studj. Il punto è questo:

Un cavallo, che vale veramente cento scudi, da uno e stimato mille scudi e da un'altro dieci scudi: si domanda chi abbia di loro stimato meglio, e chi abbia fatto manco stravaganza nello stimare. Se a V. S. pare farci sopra un poco di discorso con sua opinione, a lei me ne rimetto, e ho preso questa sicurtà sapendo che si diletta di curiosità. Nuove non ho da darle, che però farò fine con ricordarmele servitore, e da Dio pregarle lunga vita in sua grazia.

Lettera del Nozzolini in risposta all'antecedente.

Di S. Agata, il dì 26 Aprile 1627.

Il dubbio, che V. S. mi propone, mi par così facile da risolvere, che io dubito di non l'intendere, e che ci sia sotto qualche difficultà da me non conosciuta; e dicendomi V. S. che co-

stì ne sia nata disputa e controversia fra i begl' ingegni di Firenze dovrei tacere, e confessando la mia ignoranza, piuttosto aspettarne la soluzione degli altri, che io dirne cosa alcuna : ma per obbedire a V. S. dirò in ogni modo quello che io ne sento, confidando che se ella conoscerà che io ne favelli imprudentemente, straccerà questa mia lettera, e senza mostrarla ad altri ricuoprirà la vanità de' miei ragionamenti.

Il dubbio è questo : una cosa val 100, *da uno è stimata* 1000 *e da un altro* 10, *si domanda qual di loro abbia stimato meglio, e chi abbia fatto minore stravaganza.*

A questo così a un tratto risponderei, che se quel primo si discosta dal giusto per 900, *e quel secondo per* 90, *chi non vede che il primo commette dieci volte maggiore stravaganza che il secondo? So bene che mi si può opporre che il primo stima dieci volte più del giusto, ed il secondo dieci volte meno, e però la stravaganza del primo nel più viene a esser simile ed eguale a quella del secondo nel meno. A questo io rispondo che questa sorta di considerazione di proporzione non ha luogo nei conti de' mercanti, e per meglio esplicarlo dico così. Non è dubbio alcuno che il comprare, vendere, prestare, rendere, barattare e simili altri traffichi della mercatura appartengono a quella parte della giustizia che si chiama commutativa, della quale è offizio aggiustare le disuguaglianze delle nostre commutazioni, quali anticamente consistevano in semplici baratti di quelle robe che avanzavano a noi e mancavano a un altro, con quelle robe che avanzando a lui mancavano a noi; nel qual caso si trovavano due difficoltà, la prima dell' opportuno riscontro, v. g. che io, a chi avanza il vino e mancano le scarpette, mi abbatta a trovare uno a chi avanzino le scarpette e manchi il vino; la seconda del saper conoscere quante scarpette meriti un barile del mio vino. E per questo fu necessario trovar la moneta, che a guisa di una mercanzia comune ci servisse per giudice e prezzo di agguagliar giustamente i nostri traffichi, ed in questo aggiustamento dicono i politici che si deve osservare la proporzione aritmetica e non geometrica.*

Proporzione geometrica s' intende quella abitudine, quel rispetto, che si trova tra quattro numeri, ovvero altre magnitu-

dini, delle quali la prima abbia la medesima forza sopra la seconda, che la terza sopra la quarta; come, per esempio, perchè il 10 ha la medesima forza sopra il 5 che il 4 sopra il 2, questi quattro numeri 10, 5 : 4, 2 si chiamano proporzionali di proporzione geometrica, la quale può ancora trovarsi in tre termini soli, v. g., la medesima forza che ha l'8 sopra il 4 l'ha il 4 sopra il 2; ma perchè quel 4 di mezzo si piglia 2 volte, anco questa che pare di tre termini viene a essere di quattro.

La proporzione aritmetica risguarda il sopravanzo, e si ritrova tra quattro numeri, de'quali il primo avanzi tanto il secondo quanto il terzo avanza il quarto, secondo la qual proporzione questi quattro numeri 10, 8, 4, 2 sono proporzionali, perchè di tanto il 10 avanza l'8 di quanto il 4 avanza il 2: e anco questa può stare in tre termini, come 6, 4, 2, dove il 6 tanto avanza il 4 quanto il 4 avanza il 2. Di queste due specie di proporzione dicono che la geometrica si osserva e si adopra in quella parte della giustizia che si chiama distributiva, alla quale si appartiene distribuire giustamente i premj al merito, e le pene al delitto. Per tanto se il mio merito sarà doppio del vostro, anco la mia rimunerazione dovrà esser doppia della vostra, se il mio delitto sarà duplo del vostro, anco la mia pena dovrà essere doppia della vostra, se il mio delitto sarà triplo del vostro, anco la mia pena dovrà essere tripla dolla vostra, nella quale distribuzione apparisce evidentemente la detta proporzione geometrica.

Ma nella giustizia commutativa questa proporzione geometrica non ha luogo, ma sibbene l'aritmetica, come si può vedere in questo esempio. Pongasi che noi facciamo una divisione di mercanzia comune; a voi tocca lana e a me seta, e ricorrendo al giudice del prezzo e della moneta, troviamo che voi avete avuto lana per ventiquattro scudi, ed io ho avuto seta per scudi sei. Qui bisogna aggiustare questa disuguaglianza riducendola in numero mezzano tra il ventiquattro ed il sei, che aggiusti la nostra mercanzia. Ora dico che questo numero mezzano non deve aver mezzanità di proporzione geometrica, che il ventiquattro abbia sopra lui la medesima forza che egli ha sopra il sei, perchè se noi lo volessimo tale, noi avremmo a mul-

tiplicare insieme i due estremi, cioè 6 con 24, che fanno 144, e di questo si avrebbe a pigliare la radice quadrata, cioè trovar un numero che multiplicato in sè stesso faccia 144, il quale è 12, e questo tal 12 sarebbe mezzano di proporzione geometrica fra i due sopraddetti estremi. Ora se noi riducessimo la disuguaglianza della nostra commutazione a questo 12, cioè se voi deste a me sei dei vostri scudi, sicchè congiunti colla seta mi facessero la somma di 12 scudi, io non avrei altrimenti il conto mio, perchè a voi resterebbe lana per 18 scudi, e io fra danari e seta non ne avrei se non 12. Ma se in questo caso noi ricorriamo alla proporzione aritmetica, si farà il giusto bilancio del negozio; il numero mezzano di proporzione aritmetica si trova, non multiplicando, ma raccogliendo insieme gli estremi, e dividendo pel mezzo il raccolto; però raccogliendo 24 con 6, che fan 30, e dividendolo pel mezzo ne viene 15, e questo 15 è il vero mezzo della nostra divisione, perchè tanto è minore del 24 quanto maggiore del 6: però se voi darete a me 9 de' vostri scudi, io ne averò 15 e voi 15, e si sarà aggiustata la nostra disuguaglianza.

Ora applicando le cose dette al proposito nostro, se noi consideriamo i tre numeri posti di sopra nella proposta del dubbio, cioè 1000, 100, 10, noi vediamo che fra essi è proporzione geometrica, la quale non ha luogo nella giustizia commutativa, e però non può esser buona a difendere la grande stravaganza che si trova nel caso nostro: poichè il primo si parte dal giusto per 900 ed il secondo per 90. E sebbene qui si parla di stima e non di baratto o di vendita, nondimeno il medesimo giudizio si ha da far di lei che di loro, poichè la stima s' indirizza alla vendita ovvero al baratto, o per dir meglio sono una cosa medesima, poichè la stima non è altro che una compra non anco ratificata, e la compra non è altro che una stima di già accettata, e però le stravaganze delle stime debbono esser ridotte all' aggiustamento per la medesima strada della proporzione aritmetica, per la quale si vede che allora sarebbero egualmente lontani dal giusto quando il vero prezzo della cosa fusse 505, dal quale il primo si discosta nel più per 495, ed il secondo nel meno similmente per 495, sicchè possiamo conclu-

dere, che maggiore stravaganza faccia lo stimatore del 1000 *che quel del* 10.

Forse alcuno dubiterà come sia vero che la proporzione geometrica non abbia luogo nella giustizia commutativa e nei traffichi mercantili, poichè noi vediano che tutti i conti e le ragioni di mercanti sono fondati sopra la regola del 3: *se* 8 *mi dà* 6, *che mi darà* 4? *la quale è geometrichissima. A questo si risponde che è vero che detta regola del tre ci serve a ritrovare i conti e i prezzi delle mercanzie, ma nell'aggiustare le disuguaglianze delle commutazioni non ha luogo, come abbiamo mostrato di sopra. Ma di nuovo potrebbesi opporre che nell' aggiustare i traffichi delle compagnie, dove uno mette* 1000, *l' altro* 2000 *e l' altro* 3000, *o altra somma di scudi, quando si viene a bilanciare il guadagno che si perviene a ciascuno, non si adopra altro che la geometrica regola del tre. A questo risponderei, che questa azione di vedere quale parte di guadagno tocchi a ciascuno degl' interessati è azione di giustizia distributiva, poichè in essa si ha riguardo di merito e di retribuzione di premio e di guadagno, secondo che altri ha meritato, sicchè non è maraviglia che vi si adopri la proporzione geometrica. E questo è quanto ora mi occorre dire per soluzione del dubbio proposto, dove se avrò detto molte semplicità, V. S. deve in un medesimo tempo scusar me (che non ho saputo più là) e accusar sè stessa, che in queste difficultà, che fanno dubbio agli elevati ingegni fiorentini, si ricorra a un pretazzuol di contado che ne dia sentenza definitiva: e le bacio le mani pregando nostro Signore Dio per ogni sua prosperità.*

Lettera del Nozzolini ad Andrea Gerini.

Di S. Agata, il dì 10 Maggio 1627.

Ho ricevuto la lettera di V. S. insieme col parere del Signor Galilei sopra il quesito che ora si va disputando per Firenze; ed in verità se io avessi da principio saputo che una persona di tanta stima e di tanto sapere avesse sopra di ciò pubblicato sue scritture, io non avrei in modo alcuno scritto *a V. S. quel che io me ne giudicassi, perchè io debbo ben credere che più vagliano i sogni di un tal uomo che le più esquisite considerazioni che io sapessi mai fare. Ma poichè io ne ho già scritto a V. S., e poichè ella mi comanda che io consideri questa scrittura del Sig. Galilei, e che essendo ella contraria alla mia, io dica se altro ho da dire per confermazione del mio detto; e perchè io so che gli uomini dotti non si sdegnano se qualunque minima persona produca in mezzo i suoi pensieri per investigazione della verità, non mi periterò a dire di nuovo qualche cosa intorno a questo quesito, nel quale si cerca qual sia maggiore stravaganza stimare* 1000 *ovvero stimare* 10 *quel che veramente val* 100.

Per decisione di questo dubbio il Sig. Galilei primieramente distingue, che in questo caso si può adoprare o la proporzione aritmetica ovvero la geometrica. E che adoprando la prima farà maggiore stravaganza lo stimatore del 1000 *che quel del* 10, *e adoprando la seconda le stravaganze saranno eguali; poi determina e dice, che assolutamente qui si deve adoprare la proporzione geometrica, e di ciò non adduce altra ragione che questa: che se noi volessimo in questo caso servirci della proporzione aritmetica, ne seguiterebbe che chi stima* 200 *scudi una cosa che ne vale* 100 *farebbe maggiore stravaganza che chi la stimasse uno solo, poichè il primo si parte dal giusto aritmetico per* 100 *scudi ed il secondo per* 99. *Ma questa, dice egli, è cosa del tutto irragionevole, e vuole che minore stravaganza faccia quello del* 200 *che quello dell' uno, perchè il primo stima solamente* 2 *volte più, ed il secondo* 99 *volte meno del dovere ec.*

A questo io rispondo, che quello che dal Sig. Galilei è stimato cosa irragionevole, appresso di me non è inconveniente alcuno, e penso che minore stravaganza e minore lontananza dal vero commetta lo stimator dell' 1 *che quel* 200, *e per provarlo dico così:*

Quando si ragiona di due numeri o linee o altre magnitudini, delle quali si vada cercando qual sia maggiore e qual minore, ovvero se elle siano eguali, per volerne rettamente giudicare bisogna ricorrere alla misura, e in misurando si ha da *aver riguardo a due cose: prima, di adoperare la medesima misura, e non diverse misure; la seconda, di guardar quante volte la detta medesima misura entri nelle proposte cose: che se si adoperassero diverse misure, v. g. in una cosa il braccio e nell'altra la canna, sebbene entrasse tante volte il braccio nell' una quanto la canna nell' altra, non per questo le suddette cose sarebbero eguali.*

Stando ferma questa verità, della quale non è da dubitare in modo alcuno, dico che la proporzione geometrica non è al caso a giudicare la maggioranza o eguaglianza di due cose, come quella che non adopera la medesima misura ma diverse, e solamente ha riguardo che l' una misura entri tante volte in una cosa quante l' altra misura nell' altra cosa, come si vede in questo esempio; il 90 *ha la medesima forza sopra il* 30 *che il* 30 *sopra il* 10; *e però questi tre numeri* 90, 30, 10 *sono proporzionali geometricamente, ed in quanto al numero delle misure la cosa sta pari, perchè il* 10 *entra tre volte nel* 30 *ed il* 30 *entra tre volte nel* 90. *Ma la misura è diversa, poichè il* 10 *misura tre volte il* 30 *con una misura di dieci braccia, ed il* 30 *misura tre volte il* 90 *con una misura di trenta braccia.*

Inoltre, la proporzione geometrica non solamente nelle sue misure adopra diversità specifica, ma ancora diversità generica, cioè si serve di misure tra loro tanto diverse che non hanno niente che fare insieme, come si vede in quel teorema nel quale si prova che in quei triangoli, che hanno la medesima altezza, tanta forza ha la base sopra la base quanta il triangolo sopra il triangolo, dove le basi si misurano con una linea e i triangoli con una figura. E questa diversità di misure non dà fastidio alla proporzione geometrica, alla quale basta che tante volte entri la linea nella linea quante la figura nella figura; ma non è già buona a vedere che abitudine abbia la linea colla figura. Piglio un altro esempio nella materia della giustizia distributiva, alla quale è appropriata la proporzione geometrica. Voi avete servito alla repubblica 10 *mesi ed io* 20 *mesi, onde se a voi si conviene di premio* 50 *barili di vino, ovvero* 30 *staiora di terreno, o* 12 *libbre d'argento, viene a me il premio di* 100 *barili di vino, ovvero* 60 *staiora* *di terreno, o 24 libbre d' argento. Qui il merito si misura col mese, ed il premio col barile, o collo staioro, ovvero colla stadera. Tutto questo dico per mostrare che di quelle due cose che si ricercano a misurare perfettamente, la proporzione geometrica non ha riguardo se non a una sola, cioè al numero delle misure, ma di adoperare diversa misura di diversità specifica o generica non fa caso nessuno.*

Ora applicando questa verità alla soluzione del dubbio, dico che è vero che quello che stima 1000 stima dieci volte più, e quello che stima 10 stima dieci volte meno, e così quanto al numero delle misure sono in eguale stravanganza. Ma la misura è molto diversa; il primo è lontano dal vero per dieci misure grandi di cento scudi, e il secondo è lontano per dieci misure piccole di dieci scudi, e però non si possono domandare eguali queste due stravaganze e lontananze, siccome noi non diremmo che da S. Maria del Fiore fussero egualmente lontani il Campanile ed il S. Giovanni, per essere il Campanile lontano dieci passi di bambino, ed il S. Giovanni dieci passi di gran gigante. Similmente nel secondo esempio, è vero che chi stima 200 quello che val 100 è lontano per un doppio solo, e chi lo stima 1 è lontano per 99 meno, ma quel doppio solo è una misura tanto grande, che supera quelle 99 misure del meno.

Ma se noi ci serviremo della proporzione aritmetica, noi troveremo che questa è accomodatissima a giudicare di queste stravaganze, poichè ella adopera la medesima misura; v. gr. questi tre numeri 14, 10, 6 sono in proporzione aritmetica, poichè il 14 avanza tanto il 10 quanto il 10 avanza il 6, e questi tali avanzi si misurano colla medesima misura dell'unità, la quale entra quattro volte nell' avanzo del 14 sopra il 10, e quattro volte nell' avanzo del 10 sopra il 6. Similmente se nella stima del 1000 e del 10 noi facessimo che il vero prezzo fusse 505, allora queste stravaganze e lontananze sarebbono eguali, misurate colla suddetta misura dell' unità, che entra 495 volte nella lontananza fra il 1000 e il 505, e similmente entra 495 volte nella lontananza fra il 10 e il medesimo 505. Per la qual cosa parmi che si possa conchiudere, che nel nostro caso ci dobbiamo servire della proporzione aritmetica, e non della geome-

trica; la qual ragione aggiunta a quelle che io dissi nell' altra lettera, tanto più dovrà confermar questa verità: e questo mi basti aver detto in questa materia.

Ma con tutto ciò, per modo di facezia e per burlar un poco con V. S., mi pare di aggiugnere in quest' ultimo, che se questa mia decisione non le piacesse, io la indirizzerò a un giudice e a un foro competente, il quale ogni giorno determina e giudica sopra tal questione, e ne ha la soluzione prontissima, che ogni dì la mette in atto pratico: questo tal giudice è il foro de' beccai. Io ho veduto molte volte che i beccai, e con i contadini e fra loro medesimi, entrano in dispute ed in iscommesse di chi si appressa più alla stima del peso di un porco o di una vitella, e ho veduto che se uno la stimerà libbre 48 e l' altro libbre 12, quando si viene al giudizio della stadera, se si trova che quella tal cosa pesi libbre 30, si determina che nessuno vinca, ma da 30 in giù si dà la vittoria a quello del 12, e da 30 in su a quello del 48, e non ho veduto che la proporzione geometrica appresso questi giudici sia di momento alcuno; e sebbene geometricamente fra il 48 e il 12 il numero mezzano proporzionale è il 24, nondimeno da questo foro il 24 e gli altri fino al 29 inclusivamente sono aggiudicati a favore di quello del 12; e pure questi casi e queste scommesse sono non solamente simili, ma anco una cosa stessa col caso nostro, attalchè mi pare gran maraviglia che appresso ai nobili spiriti fiorentini si abbia a revocare in dubbio con tante dispute e scritture quel problema che appresso a' beccai è deciso, noto e manifesto già mille anni sono. E però se in questa lite da alcuno mi sarà dato la sentenza contro, io prometto a V. S. di voler muovere appello al foro de' beccai, il quale per sua particolare prerogativa merita di esser chiamato il foro della giustizia, poichè ogni beccaio sa così bene adoperare con una mano la bilancia e coll' altra il coltellaccio, che pare che si possa con verità affermare che ciascuno di loro sia una giustizia.

E con questo fine a V. S. bacio le mani, pregandole da Dio ogni contento.

Lettera di Galileo Galilei.

Per la decisione del caso che si disputa tra le parti, che è chi de' due stimatori abbia meglio stimato e minore stravaganza abbia fatto circa la stima di una cosa, che veramente val cento, quello che la stimi mille o quello che la stimi dieci; parmi che prima si debba stabilire ciò che importi stimar giusto e bene, e quello che importi stimare ingiusto e stravagantemente.

Stimerà giusto e bene quello che stima cento la cosa che giustamente val cento; devieranno dalla giusta stima e stravagantemente quelli che la stimeranno più o meno del giusto. E di questi colui commetterà maggiore stravaganza che più esorbitantemente dal giusto prezzo o nel più o nel meno devierà. E perchè parrà forse ad alcuno che deviare egualmente dal giusto nel più e nel meno possa intendersi in due modi, cioè o in proporzione aritmetica (che è quando l'eccesso del più sopra il giusto è eguale all'eccesso del giusto sopra la minore stima, come se il giusto sia dieci e l'una stima sia dodici e l'altra otto, dove le differenze sono eguali, cioè 2) o in proporzione geometrica (che è quando la maggiore stima al giusto ha la medesima proporzione che il giusto alla minore, che sarebbe quando uno stimasse venti quello che val dieci e l'altro lo stimasse cinque, dove l'uno stima il doppio più e l'altro la metà meno; e che così in conseguenza deviare più dal giusto s'intenda quando nel primo modo l'uno eccesso sia maggior dell'altro, e nel secondo la maggiore delle due stime riguardi il giusto con maggiore proporzione di quella che avesse il giusto alla minore stima), è necessario stabilire in quale delle due maniere si debbe intendere il presente caso.

Dico pertanto che assolutamente si deve intendere della proporzione geometrica e non dell'aritmetica. Imperocchè, stando pure nell'istesso caso, quando della proporzione aritmetica intender si dovesse, non solamente quello che stima mille la cosa che val cento sarebbe più cattivo stimatore dell'altro che la stimasse dieci, ma colui ancora che la stimasse dugento commetterebbe stravaganza maggiore che quello che la stimasse uno, essendo che l'eccesso del dugento sopra il cento (che è cento) è maggiore dell'eccesso di cento sopra uno, che è novantanove. E così lo stimatore che stimasse dugento scudi un cavallo, che giustamente valesse cento, meriterebbe di esser chiamato più cattivo stimatore di quello che lo stimasse un solo scudo, che è quanto se altri dicesse che quello che stima il cavallo il doppio di quel che veramente vale, commette maggior stravaganza nella stima che quello che lo stima la centesima parte, cosa del tutto irragionevole, e che non cade quando le differenze si considerano nella proporzione geometrica, secondo la quale quello che stima uno fa esorbitanza tanto più dello stimatore di dugento, quanto la proporzione di cento a uno è maggiore di quella di due a uno, cioè di dugento a cento.

Le deviazioni dunque delle stime dal giusto si devono giudicare secondo la proporzione geometrica, e così quello che stima una roba la centesima parte di quello che ella vale è assai più esorbitante stimatore che quello che la stima il doppio più, e in conseguenza egualmente deviano dal giusto quelli due che stimano uno il doppio più, e l'altro la metà meno; uno il decuplo del giusto e l'altro la decima parte solamente.

Aggiungasi che non si può ragionevolmente credere che le parti nel principio della presente controversia intendessero della proporzione aritmetica, perchè ciò sarebbe un voler supporre due troppo gravi mancamenti, uno nell'una e l'altro nell'altra parte, cioè che l'uno ignorasse che il 900 è più del 90, e che l'altro con poca coscienza sopra tale ignoranza dell'avversario cercasse di guadagnarsi il premio della scommessa. Concludo pertanto che li due stimatori abbiano egualmente esorbitato e commesse eguali stravaganze nello stimare l'uno mille e l'altro dieci quello che realmente val cento.

LETTERA DEL P. BENEDETTO CASTELLI AD ANDREA ARRIGHETTI.

Con mio particolar gusto ho letta la lettera di V. S. e la decisione del Sig. Galileo, nella quale non solo ho notata la rettitudine del giudizio, ma la chiarezza ancora de' motivi, solita del Sig. Galileo; e in segno della replicata da me lettura ho preso ardire di significare a V. S. alcune cosette, non in maggior confirmazione della decisione, ma per mostrare che la verità ha i riscontri da tutti i versi.

Prima dunque, supponendo nel caso nostro che il cavallo che val cento sia stimato male nel più, e sia la stima 200, *io domando all' amico suo quanto si dovrebbe stimare nel meno con eguale errore? È forza rispondere che bisogna stimarlo nulla, per servare la proporzionalità aritmetica, perchè tanta differenza è dal nulla al cento quanto dal* 100 *al* 200. *Ora il voler poi dire che tanto abbia fatto stravaganza quello che stima il doppio quanto quello che stima nulla mi par troppo gran debolezza, massime che, fortificando il mio dubitare, suppongo che il cavallo, che realmente val cento, sia stimato scudi trecento, e dimando di nuovo quanto si deve stimare nel meno coll' egualianza aritmetica? dove bisogna rispondere spropositi immensi.*

In oltre io considero che essendo stimato un cavallo, che val cento, da uno stimatore uno scudo, e da un altro centonovantanove, queste due stime dall' amico suo devono essere tenute egualmente esorbitanti, essendo in tutte e due la differenza novantanove. Ma dall' altro canto se noi consideriamo il negozio mercantilmente, le perdite e il guadagno nella prima stima sono a ragione di 9900 *per cento, e le perdite e i guadagni nella seconda stima vengono solo a esser a ragione di novantanove per cento; attalchè in conto alcuno le stime fatte con egualità aritmetica non possono esser egualmente esorbitanti. Io qui scuserei l' amico suo volentieri se non resta persuaso, non essendo egli mercante, e avendo tralasciati gli studj della matematica per attendere a' più sicuri delle leggi, ma vorrei che almeno considerasse la trita legge* Rem majoris pretii C. de rescind. vendit, *dove si vede che l'Imperatore considera la stravaganza del prezzo colla proporzionalità geometrica, non aritmetica ec.*

LETTERA DEL NOZZOLINI AD ANDREA GERINI.

Quando io scrissi l' ultima lettera a V. S. scrissi tanto in fretta che io non ebbi agio a dichiararmi così chiaramente come io avrei voluto; però le mando la presente, la quale contiene il medesimo, ma più apertamente esplicato.

Con la lettera di V. S. ho ancora ricevuto quella del suo amico di Roma, nella quale sono opposte tre opposizioni contro la nostra opinione; la prima è questa. Quando quel cavallo che val cento scudi fu stimato con eccesso nel più scudi dugento, a volere nel meno adoperar la proporzione aritmetica, cioè allontanarsi dal giusto per scudi cento, bisognerà stimarlo niente; la qual cosa è uno sproposito immenso, perchè dal cento al dugento è pur qualche abitudine o ragione o rispetto, ma dal cento al nulla non è abitudine nè rispetto alcuno.

A questa opposizione mi è facil cosa rispondere, perchè io mi ricordo che fin quando io era fanciulletto sapeva dire simili stime coll' eccesso nel meno corrispondente a quello del più. Quando io andava in mercato a comprare delle pere, mentre io sapeva che elle valevano un quattrin l' una, se il venditore me ne chiedeva due quattrini dell' una, io gli diceva non già di volergli dar nulla dell' una, perchè ben vedeva che avrei detto uno sproposito, ma di voler due pere per un quattrino, e se egli mi chiedeva tre quattrini dell' una, ed io diceva di volerne tre per un quattrino. E queste mi pajono le risposte convenienti coll' eccesso del meno corrispondente all' eccesso del più. Pertanto nel proposito del cavallo che val cento ec. alla stima soverchia del dugento corrisponde domandar due cavalli per cento ec., perchè siccome il primo vuol due paghe per un cavallo, così il secondo vuol due cavalli per una paga, e non per questo segue che volendo due cavalli per cento scudi egli venga a stimarli cinquanta scudi l' uno, ma dice questo per fare una stima che gli giovi tanto nel meno quanto gli nuoceva quell' altra nel più, il qual giovamento non poteva trovare sopra un cavallo solo, sebben l' avesse stimato il meno che si potesse. Ed in amendue queste stime viene in virtù a esser nascosto quel niente o nulla che ci era di sopra opposto, perciocchè lo stimatore del *dugento chiede due paghe, per l' una delle quali vuol dare un cavallo, e per l' altra non vuol dar nulla, e lo stimatore del meno chiede due cavalli, per l' uno de' quali vuol dare la giusta paga, e per l' altro non vuol dar nulla. Ma questo tal nulla non apparisce così spropositato, come sarebbe a dire di stimar nulla quel cavallo solo.*

La seconda opposizione è questa: Se il cavallo di cento scudi da uno stimatore fusse stimato centonovantanove e da un altro uno scudo solo, qui sarebbe la proporzione aritmetica, perchè di tanto il centonovantanove supera il cento, di quanto il cento supera l' uno; ma mercantilmente poi i guadagni e le perdite verrebbono molto diverse, perchè secondo la prima stima quando il cento diventa centonovantanove si guadagna 99 *per cento, ma nella seconda quando l'uno diventa cento si guadagna* 9900 *per cento, perchè se uno mi dà cento, il centinajo mi darà dieci mila, che detrattone il capitale de' cento scudi, ci resterà di guadagno* 9900 *per cento.*

A questo io rispondo che qui si scambiano le carte in mano, cioè si entra di un proposito in un altro. Noi abbiamo la stima giusta, che è cento, e ne abbiamo due ingiuste, una nel più, che è centonovantanove, e una nel meno, che è uno. Nel primo processo si va dalla stima giusta verso l' ingiusta, dicendo: se cento mi diventa centonovantanove, si guadagna novantanove per cento; nel secondo processo si doverebbe similmente andare dalla giusta verso l' ingiusta, dicendo: se cento mi diventa uno si perde novantanove per cento; e così la cosa tornerebbe esquisitamente del pari. Ma l'oppositore, dopo che nel primo processo è ito dalla stima giusta all' ingiusta, cioè dal cento al centonovantanove, nel secondo processo poi va al contrario dalla stima ingiusta verso la giusta, dicendo: se uno mi diventa cento, il cento guadagnerà 9900. *Ma che sproposito è questo? quando si è mai ragionato nel caso nostro che l' uno ci abbia a diventar cento? si è ben ragionato che il cento per una stima diventi centonovantanove, e per un' altra stima diventi uno, e così come per la prima si guadagna novantanove per cento, così per la seconda si perde novantanove per cento, e così la cosa torna del pari.*

Ma perchè forse potrebbe dir l' oppositore di voler accomo-

dar questi numeri a suo modo, e far questi processi a suo beneplacito, o pigliare per antecedente e per conseguente quale gli torna più comodo, io non voglio pigliar contesa con lui sopra di ciò, ma gli voglio conceder liberamente che secondo queste stime non rieschino bene i conti de' guadagni e delle perdite del tanto per cento. Ma che inconveniente ne segue per questo? Chiara cosa è che il guadagno di tanto per cento si trova per la via della regola del tre, la quale è geometrica in tutto e per tutto. Or che maraviglia sarà se da un fondamento di numeri disposti secondo la proporzione aritmetica, non seguitino bene i conti che procedono per via di proporzione geometrica? questo non è inconveniente nessuno. Anzi inconveniente non piccolo si vede nel suo argomento e nella sua opposizione, che ha in sè quel difetto che dai logici è domandato petitio principii, *cioè assume come noto e manifesto quello di che si disputa e che si deve provare. Perciocchè noi siamo ora su questa disputa, se in queste stime si debba adoperare la proporzione aritmetica ovvero la geometrica, ed egli argomenta così: Non si deve adoperare la proporzione aritmetica, perchè non vi è dentro la geometrica regola del tre. Quanta forza abbia questa ragione giudichilo ciascuno.*

La terza opposizione è posta in una legge citata dall' oppositore, nella quale dice che l' Imperatore considera la stravaganza del prezzo secondo la proporzione geometrica. Qui io non posso dire cosa alcuna. Io non ho mai studiato legge, e non ho pur un libro di tal professione. E qui intorno a molte miglia non posso ricorrere ad alcuno che mi mostri le parole della detta legge, le quali se io vedessi, forse troverei qualcosa da rispondere. Pertanto V. S. le faccia vedere e considerare se ci valesse alcuna di queste due fughe, o che l'Imperatore tratti in quel luogo di cose appartenenti alla giustizia distributiva, la quale si serve di tal proporzione geometrica, ovvero che ragioni quivi del modo di trovare il prezzo di alcuna cosa, e non di agguagliare le disuguaglianze; perchè sebbene le disuguaglianze de' prezzi si aggiustano colla proporzione aritmetica, nondimeno quando si vanno cercando i prezzi delle cose, si cercano per via di proporzione geometrica.

Dopo questo che ho detto qui nel suddetto proposito, mi par di aggiugnere quattro parole nel proposito della stima del mille e del dieci in confermazione di quel che ho scritto nell'altre lettere ec.

La stravaganza dello stimare pare a me che sia la medesima che quella del vendere e del comprare, poichè la stima e la compra non sono differenti intrinsecamente, ma solo nell'essere o ratificata o non ratificata, essendochè la stima, subito che è accettata, diventa compra e vendita, sicchè nell'altre cose il medesimo giudizio dovrà farsi dell'una che dell'altra. Pertanto ora lasciamo stare lo stimare, e consideriamo quello che accade nelle stravaganze del vendere e del comprare. Chi vende la roba più che ella non vale si parte tanto dal giusto, e fa tanta stravaganza quanto è quell'eccesso; e volendo nelle medesime vendite ritornare al giusto e ricompensare la fatta stravaganza, bisogna che un'altra volta nel vendere la medesima cosa al medesimo compratore, si allontani dal giusto verso il meno quanto se ne allontanò verso il più, come per esempio: io vendo grano; il suo prezzo è soldi cento lo stajo; voi ne comprate uno stajo da me, e io ve lo fo pagare soldi centoventi; se io vorrò fare la giusta ricompensa, quando voi tornerete pel secondo stajo, bisognerà che io ve lo dia per soldi ottanta. Ora se io vi avessi fatto pagare il primo stajo soldi mille, vi domando se quando voi tornate pel secondo stajo io farei la debita ricompensa o stravaganza nel meno a darvelo per soldi dieci? Certo che no: perchè avendo io nel primo pagamento ricevuto prezzo per dieci staja, e datovi uno stajo solo, bisognerebbe che la seconda volta io ricevessi un prezzo solo e vi dessi dieci staja. Attalchè l'utile del pagar soldi dieci il secondo stajo non ricompensa il danno dell'aver pagato mille quel primo. Perchè nel primo io mi allontano dal giusto nel più per nove centinaia, e in questo secondo non mi allontano verso il meno per un centinajo intero: a tale che queste stravaganze o lontananze non possono esser eguali. Se adunque nel vendere e nel comprare fa maggiore stravaganza chi vende mille quel che val cento, che non fa nel meno chi lo vende dieci, il medesimo ancora si dovrà dire dello stimatore.

Inoltre per un'altra via mi piace di aggiugnere un poco di chiarezza a questa verità. Quando noi facciamo le stravaganze nel più e nel meno, a volere che esse procedano di pari passo e sieno fra loro corrispondenti, bisogna adoperare i medesimi nomi di parte e di moltiplice, perchè variandoli non possono bene corrispondersi tra loro. Mi dichiaro più apertamente così: Diciamo che un barile di vino vaglia dodici lire, e che voi nello stimare vogliate eccedere nel più ed io nel meno: quando voi lo stimerete quindici lire, che altro vuol dire questa stima se non: Io vi voglio usurpare una quarta parte di paga? ed a questa stima del più che si può egli rispondere nel meno, se non: Io vi voglio usurpare una quarta parte di barile? sicchè al quarto nel più corrisponde il quarto nel meno. Similmente al terzo nel più, cioè a' sedici, corrisponderà il terzo nel meno, cioè otto. Ora se si vanno guardando que' tre numeri 15, 12, 9, e quei secondi 16, 12, 8, sono fra loro in proporzione aritmetica; similmente alla stima della metà più, cioè 18, corrisponderà la metà meno, cioè 6. A quella di due terzi più, cioè 20, quella di due terzi meno, cioe 4, come si vede nella dicontro tavoletta, nella quale si vede che tutti i predetti numeri son disposti con proporzione aritmetica.

Stravaganze.	più.		meno.
di un quarto	15	12	9
di un terzo	16	12	8
di un mezzo	18	12	6
di due terzi	20	12	4
di tre quarti	21	12	3
del doppio	24	12	6
del triplo	36	12	4
del quadruplo	48	12	3

Ora scendiamo più abbasso, e facciamo che voi lo stimiate il doppio, cioè ventiquattro. Si ha egli a dire che a questa stima corrisponda nel meno quella della metà sei? non già, perchè questo sei fu posto a corrispondere al diciotto, e però non può egualmente corrispondere a quella del diciotto e a quella del ventiquattro. Similmente a quella del triplo nel più non può rispondere quella del terzo nel meno, cioè il quattro, perchè questo quattro fu posto corrispondente al venti; e finalmente al quadruplo nel più, cioè a' quarantotto non può corrispondere nel meno il tre, il quale corrispondeva al ventuno.

Per la qual cosa bisogna dire, che al doppio più, cioè a due cotanti più, corrisponda non la metà, ma due cotanti *meno, cioè due barili per dodici lire, e al tre cotanti più corrisponda non la terza parte, ma tre cotanti meno, cioè tre barili per dodici lire, e finalmente al quattro cotanti più risponda quattro cotanti meno, cioè quattro barili per dodici lire. Per la qual cosa, ritornando al proposito nostro, quando uno stimerà mille un cavallo che val cento, la corrispondente stravaganza nel meno sarà il dire, che dieci cavalli vaglino cento scudi, e questo per avere sopra dieci cavalli quella tanta stravaganza nel meno che corrisponda a quella del mille, la quale non si sarebbe potuta avere sopra un cavallo solo, ancorchè si fusse stimato meno che un granello di rena.*

Lettera di Galileo.

Da Bellosguardo, li 10 *Giugno* 1627.

Io lessi, come ben sa V.S., la prima lettera scritta in proposito della controversia che nacque tra lei e il Sig Nozzolini circa il determinare intorno alla grandezza delle stravaganze delli due stimatori, uno de' quali aveva stimato mille e l' altro dieci un cavallo, il cui giusto prezzo era veramente cento. E benchè a me restasse incognito il nome dello scrittore di essa lettera, non però mi si occultò il suo molto intendere, che tanto chiaramente resta apparente nella dotta e insieme adorna e cortese sua scrittura. Ho dipoi letta ancora la seconda, scritta pure nel medesimo stile, ove l'Autore, con occasione di aver veduta quella decisione, che io, come arbitro eletto di comun consenso da V. S. e dalla parte, messi in carta, fa così onorata menzione della persona mia, che benchè e' continovi di esser contrario al mio parere, tuttavia la modestia e gentilezza del suo trattare continova di accrescere in me l' affetto che già ho tutto rivolto e applicato a reverirlo, e, per quanto io potessi, onorarlo. In segno di che al presente mi pare di esser in obbligo di rispondere a quanto egli oppone nelle dette sue lettere, che troppo gran mancamento sarebbe o il simulare di non l' aver vedute e lette attentamente, o col silenzio mostrar ombra di non ne aver fatto quella stima che pur di necessità convien farsi di scritture con tanta acutezza e dottrina spiegate, e condite di tanta cortesia. Solo mi dispiace che io non saprò colla mia rusticità corrispondere al merito della gentilezza sparsa in esse scritture, e bisognerà che l'Autore per sè stesso, a guisa di ape che sa convertire in dolcezza l'austerità che da talun fiore va delibando, rivolga in soavità quello che, non già dalla volontà, ma dalla penna, potesse con men soave stile scapparmi. Aggiunto a tale obbligo il comandamento di V. S., che sotto titolo di desiderio m'impone ch'io debba dire quanto mi occorre intorno alle dette scritture, vengo con quella libertà che molto ragionevolmente deve potersi usare tra quelli che più ansiosi sono della verità che della ostentazione, e che il medesimo Autore delle due lettere domanda che a sè conceduta sia, vengo, dico, a spiegare a V. S. quello di più, che per confermazione della prima mia scrittura (che tuttavia mi par veridica) mi hanno fatto sovvenire le due lettere del Sig. Nozzolini.

E prima, io so che V. S. benissimo si ricorda di quello che io le risposi la prima volta che ella mi propose in voce il quesito sopra il quale nacque la controversia; che fu, quale de' due stimatori avesse più stravagantemente stimato, l'uno de' quali stimasse mille e l'altro dieci quel che giustamente valeva cento; e sa che io corsi subito a giudicare molto più esorbitante la stima del mille, come quella alla quale seguiva molto maggior danno e perdita; e potrebbe forse esser accaduto, che quando il discorrer sopra tal quesito fusse terminato allora, io non mi fussi altramente mutato di parere. Ma il significarmi V. S. che la domanda era in controversia tra uomini non volgari, col soggiugnermi appresso che i medesimi disegnavano che io dovessi sopra di ciò deporre anco in carta il mio giudizio, mi fece con attenzion maggiore considerare la qualità del quesito, ed in effetto mutar opinione e cader nella sentenza che poi messi in scrittura. Dubito che il medesimo sia accaduto al Sig. Nozzolini, e tanto più quanto, oltre a quello che ho sperimentato in me medesimo, ho sentito rispondere l'istesso da tutti quelli a' quali ho fatta la proposta, non l'avendo ancor fatta fuori che a persone molto accorte. Che dunque dal Sig. Nozzolini uscisse la prima lettera nata da quella apprensione che nel primo aspetto si appresenta alla mente, e di più scritta, per quanto intendo, in una scorsa di penna, io non me ne maraviglio punto. Ma ben mi nasce un poco di scrupolo per la seconda, scritta sei giorni dopo, dove si scorge che nè l' aver più posatamente potuto discorrere sopra il quesito, nè quel poco che egli aveva letto nella mia decisione, l' hanno rimosso dalla prima opinione, secondo la quale egli persiste in affermare che l' esorbitanza delle stime si deva misurare dall' assoluto allontanamento dal giusto prezzo, e si fonda sopra certo politico decreto, che vuole che nella giustizia commutativa si proceda nell' aggiustar le disuguaglianze colla proporzione aritmetica, e nella distributiva colla geometrica; e stimando egli che la quistione proposta sia dell' attenenti alla giustizia commutativa, vuole colla proporzione aritmetica misurare la quantità dell'esorbitanze de' due stimatori ec. Ora, poichè V. S. comanda, dovendo dire il parer mio, cominciando da questo capo, che è il principal fondamento delle due scritture, confesso liberamente di non restar capace di questo negozio, e dubito che qui avvenga quello che accade in molte altre proposizioni scritte da uomini comunemente stimati grandissimi, le quali non sono intese, nè forse sono intelligibili, ma quelli che le profferiscono, ed anco quelli che le ascoltano, fatti creduli dall' autorità de' lor primi prolatori, simulano d' intenderle, e per non si dichiarare di capacità inferiori a quelli che le adducono, gli danno l' assenso. Ora io, deposta questa sorta d'ambizione, mi dichiaro bisognoso di esser fatto capace di questa materia, e resterei con obbligo grandissimo al Sig. Nozzolini se egli col parlar più chiaramente e distintamente mi traesse di questa confusione, e la chiamo così perchè non so, per molto che io mi ci sia affaticato, applicare al nostro proposito l' esempio che egli nella prima lettera arrecò sotto titolo di commutazione o baratto, e che poi, correggendo l' errore da sè commesso, mutò in una divisione di mercanzia comune, mantenendo però sempre la medesima opinione che in cotali traffichi mercantili si debbano aggiustare le disuguaglianze colla proporzione aritmetica; e la confusione mia nasce di qua. Nella prima lettera ci propone una commutazione di lana in seta, dicendo: Io do a voi lana e voi a me seta, e troviamo che io ho dato a voi lana per ventiquattro scudi e voi a me seta per scudi sei ec.; e credendo che la disuguaglianza di tal baratto si possa e debba aggiustare servendoci della proporzione aritmetica, trova il numero mezzano tra il ventiquattro e il sei, secondo tal proporzione, che è quindici, e dice che dandomi voi tanto che, fra li sei scudi di seta e i denari che io ricevo da voi, io abbia quindici scudi, saremo aggiustati; e però detratti nove scudi dai ventiquattro che vi ho dato in tanta lana e datili a me, io fra seta e lana avrò quindici scudi e a voi resteranno quindici in tanta lana; accortosi poi dell' errore (perchè io coll' aver dato ventiquattro scudi di mia lana, ne ricevo solamente quindici tra denari e seta) mutò il quesito, e non fece più me padrone della lana e sè della seta, ma pose la seta e la lana esser mercanzie comuni non più da barattarsi, ma da dividersi tra di noi. Ma, Sig. Nozzolini, l' aver voi scoperto il vostro errore non vi sottrae dall' obbligo intrapreso di mostrare come nelle permutazioni le disuguaglianze si aggiustino colla proporzione aritmetica; e sebbene la disuguaglianza del nostro baratto non veniva ristorata col risarcimento de' nove scudi, non è per questo che in qualche altro modo non possa essere ragguagliata: però ditemi pure come noi possiamo aggiustarci, e mostratemi ciò che abbia che fare in tale aggiustamento la proporzione aritmetica; e per venire alle corte, se io ho dato a voi lana per ventiquattro scudi e voi a me seta per sei, il modo facilissimo per far ch' io abbia il conto mio è che voi mi diate scudi diciotto di danari, che così ci saremo aggiustati: ma qual corrispondenza hanno tra di loro i numeri 24, 18, 6, e come entra qui proporzione aritmetica nè altra? Ma se noi prenderemo il quesito emendato, non lo chiamando più un baratto, ma una divisione di mercanzie comuni, mi par che il Sig. Nozzolini commetterà un più grave errore, perchè il caso non sarà più delli attenenti alla giustizia commutativa, ma alla distributiva, trattandosi di distribuir tra di noi mercanzie comuni; e così contro al decreto de' politici, e contro al parere del Sig. Nozzolini, non la proporzione geometrica, ma l'aritmetica entrerà nella giustizia distributiva, e vi entrerà con doppio errore, poichè ella entra qui dove non doveva entrare, e non entra nel quesito, quando era di giustizia commutativa, dove entrar doveva, se i decreti politici son retti. Ma finalmente, posto che simili aggiustamenti fussero sotto la giustizia commutativa, e che si ragguagliassero colla proporzione aritmetica, io non però resto capace di quello che si abbiano che fare colla materia di che si tratta, la quale è di misurare due esorbitanze prese in due stime; azione lontanissima dal dover dividere trenta scudi, che sono il prezzo di alcune mercanzie, in due parti eguali. E quando il Sig. Nozzolini soggiunge e dice, che allora sarebbero egualmente esorbitanti le due stime del mille e del dieci, fatte sopra quel cavallo o altra cosa vendibile, quando il vero suo prezzo fusse scudi non cento, ma cinquecentocinque, dal quale per eguali intervalli distanno il mille e il dieci, io dico che egli pure equivoca col supporre quello che è in quistione. Imperciocchè il suo detto non è vero, se non supposto che dell'esorbitanza delle stime misura sia l'eccesso e il mancamento di esse stime dal vero prezzo, misurati con proporzione aritmetica, il che è quello che io tuttavia nego, e pur questo medesimo mi dà occasione di ragionevolmente negarlo; perchè qual semplice fanciullo non resta capace e non conosce che se io darò un sacchetto in mano a due dentrovi cinquecentocinque piastre, acciò eglino a giudizio stimino quante ve ne sieno dentro, incomparabilmente esorbiterà più quello che dirà stimare esservi dieci piastre, che quello il qual dicesse esservene mille, perchè il peso, se non altro, dichiarerà lo stimator del dieci essere stoltissimo, essendo che il peso di cinquecentocinque piastre è più di libbre cinquanta, ed esso lo giudica una sola, e s'inganna di più di cinquanta tanti, ma l'altro che lo stima mille s'inganna di men del doppio. Ma di più dico: il Sig. Nozzolini dice di aver ridotto le due esorbitanze all'egualità, quando si facesse il prezzo del cavallo essere non cento, ma cinquecentocinque scudi:

ora io gli domando che lasci stare il prezzo del cavallo nei cento scudi e la maggior stima nel mille, e dicami quale dovrebbe esser la stima nel meno, acciò la stravaganza fusse secondo la sua regola eguale all' altra; qui bisogna trovare uno tanto esorbitante che dica il giusto prezzo del cavallo parergli che fusse questo, che il padrone del cavallo gli facesse un fornimento che costasse scudi 810, e poi desse il cavallo così fornito per ducati dieci, perchè così il venditore scapiterebbe scudi 900, come nell' altra stima del mille il compratore pur resta al disotto di scudi 900. Oltre a quanto ho detto, vi viene ancora da considerare come dell' equivoco in che persiste il Sig. Nozzolini ne è causa quell' istesso errore, nel quale io ancora incorsi quando V. S. la prima volta mi propose il quesito, che fu il giudicare l' esorbitanza delle stime dalla grandezza della perdita pecuniaria del compratore e del venditore del cavallo, il che è del tutto falso; perchè quando le perdite fusser misure delle stravaganze delle stime, dove non fusse perdita veruna, nè anco vi sarebbe stravaganza alcuna, e così la stravaganza delle due stime del mille e del dieci intorno alla valuta del cavallo non sarebbe nulla, se non seguisse la vendita e compra del cavallo, perchè senza queste non vi è perdita; ed in oltre nello stimare, v. g., pesar mille libbre quello che ne pesa venti, o giudicare quella torre esser alta quattrocento braccia, che è alta solamente sessanta, non vi sarebbe parimente esorbitanza, perchè nè nelle braccia, nè nelle libbre vi è scapito o perdita per nessuno. Oltre a quanto ho infin qui detto intorno alla prima lettera, mi par di soggiugnere, come cosa assai notabile, che il Sig. Nozzolini chiaramente afferma prima in generale ne' traffichi mercantili non aver luogo la proporzione geometrica, ma l' aritmetica, il qual detto egli prova coll' esempio portato prima sotto nome di baratto di lana e seta, e poi corretto col mutarlo in una divisione di mercanzie tra due, il quale abbiamo già mostrato erroneo e fuori del caso: all' incontro poi egli muove due istanze, per le quali si mostra ne' traffichi mercantili entrar l' uso della proporzione geometrica, l' una è che tutti i conti de' mercanti son fondati sulla regola delle tre cose proporzionali, e l' altra delle compagnie, delle quali tutti i ragguagli si trovano pure con la medesima regola del tre; e questi due casi non hanno opposizione alcuna che sien traffichi e negozj mercantili e risoluti giustissimamente colla proporzione geometrica e non con altra. Or come s' è lasciato il Sig. Nozzolini persuadere che la mercatura si governi colla proporzione aritmetica, indotto a ciò credere per un esempio erroneo e falso, e non piuttosto ha detto la mercatura governarsi colla proporzione geometrica, mentre egli stesso adduce esempj verissimi, che dimostrano i più importanti e principali negozj mercantili risolversi tutti per la proporzione geometrica? Oltre che si potevano addurre altri conti non meno principali, la risoluzione de' quali dipende dalla geometrica proporzione, come degl' interessi sopra interessi, che chiamano interesse a capo d' anno, delle sei cose proporzionali, della regola del tre inversa; e per concluderla in breve, io non so ritrovare in tutti i negozj mercantili conti e ragioni alcune di momento, nelle quali abbia luogo la proporzione aritmetica, ma sì bene la geometrica. Ora venghiamo a considerare le cose contenute nella seconda lettera, dove primieramente mi pare che il Signor Nozzolini erri in un principalissimo punto, che è poi la radice di tutta l' equivocazione, ed è che egli nel misurar quelle cose, della maggioranza delle quali si disputa, adopera misure inette a ciò, come quelle che differiscono *plusquam genere* dalle cose da misurarsi; e pur la misura deve essere della medesima specie che la cosa misurata, perchè i tempi si misurano con un tempo, i pesi con un peso, i prezzi con un prezzo. Ma il Sig. Nozzolini nel giudicare qual sia maggiore esorbitanza delle due, quella che stima dugento scudi il cavallo, che veramente val cento, o quella che lo stima uno scudo, vuol servirsi per misura di una moneta che differisce dalle disorbitanze *plusquam genere*. Misura atta a misurar le stravaganze è una stravaganza e non uno scudo, una libbra, una canna; come poi tal misura si ritrovi dirò qui appresso, dopo che averò mostrato il medesimo Sig. Nozzolini servirsi anco di tal misura inetta malamente, prendendola assolutamente e non in relazione al vero valore della cosa stimata. Considerando solamente e assolutamente i guadagni e le perdite, e la semplice differenza tra di loro, ha giudicato peggiore stimatore quello dalla cui stima proveniva maggior danno al compratore o venditore; e così, seguendo questa regola, più esorbitante stimatore sarà colui secondo la cui stima il compratore scapitasse cento scudi, che quell' altro alla cui stima si perdesse scudi dieci, e siano pur qualsivogliano quelle cose in cui s' investono i danari. Or tal discorso è molto erroneo per gli assurdi innumerabili che ad esso ne vengono in conseguenza, tra' quali uno sarebbe questo, che, seguitandosi tal regola, potrebbe accadere che stimatori esorbitantissimi e del tutto stolti sien degni d' esser anteposti a stimatori di acutissimo giudizio e perspicacissimo avvedimento. Io non credo che il Sig. Nozzolini mi negherà che se uno stimasse una noce, di quelle che se ne danno dieci al quattrino, valere uno scudo, sia un esorbitantissimo stimatore; ed all' incontro se uno nello stimare un giojello di valore di quattromila scudi, errasse di un solo scudo, credo che dal medesimo Sig. Nozzolini e da tutti i periti del mondo sarebbe stimato uno stimatore puntualissimo. Tuttavia se vogliamo seguire la sopraddetta regola, bisogna dire lo stimator del giojello commetter maggiore stravaganza che quel della noce, poichè seguendo la sua stima, chi pagasse il giojello scudi 4001 resterebbe in danno di uno scudo, e quello che desse uno scudo per prezzo d' una noce perderebbe tanto meno dell' altro, quanto è il valore d' una noce, che pure è qualche cosa. Ma dimostriamo più chiaramente ancora come non si possono giudicare in modo alcuno le stravaganze delle stime senza la relazione di quelle al giusto valore della cosa stimata. Io domando al medesimo Sig. Nozzolini, quale delli due stimatori è stato più esorbitante, quello che nello stimare l' altezza d' un monte s' ingannò di cento braccia, o quello che nello stimare il peso di un giovenco s' ingannò di dieci libbre. Qui non si può primieramente dire che non ci sia in nessuno delli stimatori esorbitanza, poichè ciascheduno per difetto di giudizio stima lontano dal giusto, e il difetto del giudizio è la materia dell' esorbitanza; nè si può dire quello esser più esorbitante di questo, perchè alla stima sua segue perdita maggiore che alla stima dell' altro, attesochè le cento braccia non vagliano nè più nè meno, nè tanto quanto le dieci libbre; dunque bisogna ridursi necessariamente a dire che per giudicare della qualità o quantità di tali stravaganze sia forza sapere qual fosse la vera altezza del monte e quale il vero peso del giovenco. Or pongasi che la vera altezza del monte fusse 1000 braccia e il vero peso del giovenco fusse 100 libbre. Che dirà il Sig. Nozzolini chi si sia maggiormente ingannato delli due stimatori? forse quel del monte, perchè s' ingannò di cento, che è più di dieci, che è l' inganno della stima del giovenco? Ma se dalla grandezza del numero nominato si deve attendere la grandezza della esorbitanza, e dire che è più esorbitante lo stimatore del monte che lo stimatore del giovenco, perchè quello errò di cento e questo di dieci, muterò il nome delle dieci libbre in centoventi once, e così quella che secondo il Sig Nozzolini era stima meno erronea, diventerà più erronea. Or non son queste pur troppo puerili vanità? E chi non vede che per determinare la controversia bisogna ricorrere alla proporzione geometrica, e dire lo stimatore del monte che errò di cento braccia, essendo l'altezza del monte braccia mille, s' ingannò della decima parte della vera altezza, e lo stimator del giovenco, che errò dieci libbre dal vero, che fu libbre cento, pur s' ingannò della decima parte del vero peso; adunque questi furono stimatori egualmente erronei. E applicando questo rettissimo discorso alli stimatori del cavallo, si dovrà dire: perchè lo stimatore del più errò del decuplo del vero prezzo, il qual vero prezzo fu decuplo della minore stima, adunque l' esorbitanze furono eguali. E qui mi par luogo di considerare quel che dice il Sig. Nozzolini circa la proporzione geometrica, rifiutandola come non accomodata a giudicare nel nostro caso, ma sì ben l' aritmetica; attesochè quella (dice egli) non ha riguardo all' identità numerica delle misure che si adoperano nel misurare, ma solamente riguarda se le misure, qualunque elle sieno, son contenute altrettante volte o più o meno nelle cose che si misurano. Adunque, Sig. Nozzolini, se io mostrerò che nel misurar le cose, delle quali noi disputiamo, niente importi che le misure convengano nè anche in genere, non che in ispecie o in numero, la proporzione geometrica ci potrà benissimo aver luogo. Ora negherete voi che la stravaganza di colui che stima centocinquanta braccia l'altezza di una torre, che misurata poi si trova esser braccia cento, non sia eguale all'esorbitanza di quell'altro che stima un vitello pesare centocinquanta libbre, che poi alla stadera si trova esser cento e non più? Certo bisognerà dire questi esorbitare egualmente quanto al giudicare, ancorchè le misure che essi adoperano differiscano *plusquam genere*, servendosi l'uno del braccio e l'altro della libbra, sì che non si può dire che errino egualmente, perchè tanto vagliano cinquanta braccia d'altezza, quanto cinquanta libbre di peso. Ora finalmente, da quanto sin qui ho detto, possiamo concludere, la misura delle esorbitanze non esser quella medesima che misura le cose, ma essere in astratto una general relazione e abitudine che ha la stima falsa verso il vero valore delle cose stimate; e così perchè le stime ne' due proposti esempi hanno ambedue relazione di maggioranza in ragione o proporzione sesquialtera verso le vere magnitudini di esse cose stimate, però si deve dire che quelli stimatori hanno egualmente esorbitato; ed essendo la misura delle stravaganze quale abbiamo detto, secondo che la proporzione delle false stime verso il vero valore andrà variandosi, crescerà ancora o scemerà la grandezza della esorbitanza. E qui possiamo concludere che, per misurare la grandezza delle stravaganze, che son difetti di giudizio, bisogna servirsi della proporzione geometrica, e l'aritmetica servirà per misurar semplicemente le perdite, che son danni della borsa, cose differentissime dalle esorbitanze: anzi pure, se vogliamo parlare più propriamente, possiamo lasciar di nominare la proporzione aritmetica, perchè nel misurar la quantità della moneta, come anco quella delle libbre, delle braccia ec. per la quale le stime false distanno dal vero valore, non ci bisogna altro che semplicemente numerare. Qui dunque consiste l'equivocazione del Sig. Nozzolini, nella quale incorse da principio, e che poi ha voluto mantenere. Che se il primo quesito fusse stato proposto sopra stime fatte circa cose nelle quali l'esorbitanza non avesse apportato danno e perdite, dicendo, v. g., due stimando l'altezza del gigante, che è dieci braccia, uno lo stimò cento braccia e l'altro uno, non sarebbe seguìta controversia veruna, perchè bene egualmente stolti appariscono ambidue, l'uno stimandolo più alto del palazzo lì appresso, e l'altro stimandolo così piccolo, che non gli arriverebbe alla cintola. Nè per mio credere avrebbe il Nozzolini commesso un *isteron proteron*, facendo dato quello che era quesito, e quesito quello che era dato. Egli ha prima supposto per cosa retta che l'esorbitare più o meno si debba determinare dal discostarsi dal giusto per intervalli maggiori o minori aritmeticamente misurati, cioè assolutamente, e senza referirli alla giusta grandezza della cosa misurata; e stabilito questo, e volendolo poi sostenere per ben fatto, si è ridotto a dover dire che più erri chi stima dugento quel che val cento, che chi lo stima uno o un mezzo; il che credo fermamente che non avrebbe detto, quando tal quesito gli fusse stato fatto da principio, ma avrebbe risposto quel di uno; e fatta questa chiarissima supposizione, avrebbe poi potuto conoscere la deviazione dalle vere stime dover esser regolata non dalla proporzione aritmetica, ma dalla geometrica: dove ora, se egli vorrà persistere nella medesima opinione, bisognerà sostenere infinite cose lontanissime da ogni ragionevol discorso, e dire che migliore stimatore di due chiamati a giudicare a occhio quante doppie erano quelle poste in un mucchio sopra una tavola, e che veramente erano mille, fu quello che disse parergli che potessero esser due o al più tre, che l'altro che l'avesse giudicate poter essere a suo giudizio duemila; dove il primo senz'altro verrebbe subito sentenziato per iscemo al tutto di mente, ma per condennar l'altro sarebbe necessario contar la moneta, perchè l'ingannarsi del doppio può a molti accadere, ma l'errare in quattro o cinquecento doppi è cosa da stolti affatto. Ma più bisogna che il Sig. Nozzolini dica che colui che stima monte Morello esser alto 10,000 braccia sia più esorbitante stimatore che un altro che dicesse che al suo giudizio è non solamente alto punto, ma è una laguna o voragine profonda cento braccia; il che accaderebbe quando si trovasse che la vera altezza del monte fusse un palmo meno di 5100 braccia, dal qual numero lo stimatore del 10,000 si allontana 4900 braccia meno un palmo. E per rispondere in ultimo anche alla facezia de' beccai, i quali affermano essersi egualmente ingannati nella stima del peso quei due, de' quali uno stimò centodieci quel vitello che si trovò poi pesar libbre cento, e quell' altro che lo stimò novanta; dico che ciò procede perchè loro, per poca intelligenza, credono veramente che egualmente s' ingannino nello stimare quelli che egualmente si scostano l' uno nel più e l' altro nel meno dal vero peso, il che è falso, nè essi intendono il perchè; e di tal loro ignoranza ne è causa l' esser per lunga pratica divenuti così esatti stimatori, che rare volte s' inganneranno anche di dieci per cento, come qui fanno li due stimatori del centodieci e del novanta, perchè tra due numeri poco tra sè differenti pochissima è la differenza del numero tra di essi medio in proporzione aritmetica e il medio geometricamente (come nel presente caso il medio aritmeticamente tra centodieci e novanta, che è cento, poco è differente dal medio geometricamente, che è novantanove, qualcosa di più); quindi è che la picciolezza dell' errore non si rende conoscibile alla lor poca intelligenza: che quando l' uno di quelli stimatori avesse giudicato il vitello pesar libbre dugento e l' altro manco di quattro danari, assolutamente nessun beccajo avrebbe detto quel delle dugento libbre esser più esorbitante stimatore che l' altro di quattro danari, chè l' errar da un vitello di latte, che abbia un mese, a un giovenco che ne abbia tre, è assai più tollerabil difetto che lo scambiarlo con un grillo; de' vitelli che pesino dugento libbre pur se ne trovano e se ne vedono tutto il giorno, ma de' minori di un grillo non se ne son veduti giammai.

Ho detto questo, che mando a V. S., più per soddisfare al suo comandamento che per gusto ch' io abbia di occuparmi in simili controversie, delle quali ella sa quanta occasione io abbia d' esser più che sazio. Ancorchè di quanti l' abbian voluta meco, nessuno sia che non sia restato, come si dice, a piedi. Di quel che potesse accadere al presente io non lo so, conciossiachè lo scrittore delle due lettere si mostri assai più giudizioso di quanti avversarj io abbia sin qui avuti. Gradisca V. S. la mia buona volontà, e scusi l' insufficienza. E le bacio le mani.

POSCRITTA.

La copia della lettera scritta dal medesimo Sig. Nozzolini in risposta di una dell' amico nostro di Roma, scritta in confermazione della mia opinione, mi è pervenuta nel serrar di questa che gli mando; e perchè potrebbe accadere che l' amico di Roma non vedesse quanto gli viene opposto, mi pare di rispondere alcuna cosa per lui, sebben son sicuro che egli per sè medesimo assai meglio si difenderebbe. Scrisse l' amico di Roma, confutando l' opinione di chi vuol misurare l' esorbitanze cogli allontanamenti dal giusto misurati aritmeticamente, che se ciò fusse vero, bisognerebbe che quel cavallo che coll' eccesso nel più fusse stimato scudi dugento, valendo veramente cento, fusse, per fare un' eguale esorbitanza nel meno, stimato nulla, il che è inconvenientissimo, essendochè dal cento al dugento si trova pur qualche abitudine o ragione o rispetto, ma dal cento al nulla non è abitudine nè rispetto alcuno. A questo risponde il Sig. Nozzolini concedendo prima, che stimarlo nulla sarebbe veramente non solo una stravaganza maggiore dello stimarlo dugento, ma uno sproposito e mera stoltizia; e che per trovare una stravaganza, la quale nella stima del meno pareggi l' altra del più, quando è di dugento, bisogna domandare due cavalli per cento scudi; ma accortosi che il dir così viene a esser direttamente contro di sè, perchè servando la proporzione geometrica viene a stimare un cavallo cinquanta scudi, conforme a che diciamo noi, soggiugne ciò non essere uno stimare i cavalli cinquanta scudi l'uno, ma un voler pagare uno de'cavalli scudi cento e l' altro nulla. Ora qui lascio stare che il Signor Nozzolini sarà unico al mondo in dare cotal senso stravolto alla sua risposta, e gli domando in qual cosa consiste la stravaganza della stima nel meno, mentre domanda due cavalli per cento scudi, la quale secondo lui pareggi l'altra del più, che stima scudi dugento il medesimo cavallo. Nell' uno de' due cavalli, che egli dice intender di stimare cento scudi, non è assolutamente stravaganza alcuna, perchè lo stima il giusto prezzo: adunque bisogna per necessità rispondere tutta l' esorbitanza essere nell' altra, che si pretende il cavallo per niente; e così questa medesima stravaganza, che poco fa fu giudicata dal Sig. Nozzolini uno sproposito sopra tutte l' esorbitanze, sarà ora ammessa per una stravaganza simile all' altra della stima de' dugento scudi.

Ma facciamo ancora più manifesto l' equivoco con pigliar altra sorta di stime. Se uno stimasse alta dugento braccia una torre, che veramente fusse alta cento, con qual esorbitanza nel meno pareggerà il Sig. Nozzolini l' altra nel più? Già il dire che non è alta nulla vien giudicato uno sproposito da stolti; adunque egli dirà che due di tali torri farebbero un'altezza di cento braccia, ma che non per questo sarebbon cinquanta braccia l' una. Ma che sarebbero, Signor Nozzolini, l'una braccia cento e l' altra braccia nulla? ma che torre sarà questa senza altezza alcuna? Vanità estreme e fughe miserabili.

Aveva nel secondo luogo l'amico di Roma, per confermazione della nostra opinione, argomentato così: Uno che stimasse scudi centonovantanove il cavallo, che val cento, si allontana dal vero quanto un altro che lo stima uno scudo, intendendo secondo la proporzione aritmetica; tuttavia la stravaganza di questo è tanto maggior dell' altra, quanto, secondo lo stile di mercatura, quando il cento diventa centonovantanove si guadagna novantanove per cento, dove che nell' altra stima, quando l' uno diventa cento, il guadagno è di 9900 per cento. Qui grandemente si maraviglia il Sig. Nozzolini, dice che l' amico s' inganna, ed in somma rafferma nell' addotto esempio la perdita ed il guadagno esser simili, perchè siccome la stima del centonovantonove guadagna novantanove per cento, così in quella dell' uno si perde pure novantanove per cento, che però il conto torna giustissimo in conferma-zione della sua opinione; soggiugne, in modo alcuno non potersi da altre stime ritrarre gli utili e le perdite, quali l'amico di Roma afferma ritrarsi. Qui io rispondo quel che già più volte si è detto, che non la quantità de' guadagni e delle perdite è misura della quantità e grandezza delle stravaganze delle stime; e benchè nella stima del centonovantanove si guadagni effettivamente novantanove, e che in quella dell'uno si perda pur novantanove, non è per questo che il vantaggio del mercante nel trafficar cento scudi, sì che diventino centonovantanove, sia eguale al disvantaggio dell'altro, che col medesimo capitale si riduce a uno (i quali vantaggi e disavvantaggi rispondono all'esorbitanze delle stime, come quelli che dipendono dal più o meno giudizio e perizia nel negozio). Che se gli assoluti guadagni e perdite dovessero essere misura della perizia e vantaggio, e della imperizia e disavvantaggio nel negoziare, converrebbe che quello, che trafficando mille scudi si conduce a due mila, fusse giudicato miglior negoziante di quello che negoziandone cento si conducesse a mille, essendochè questo guadagno è novecento scudi e quello è mille. Tuttavia ciò non è vero, anzi questo è tanto più perito negoziante, quanto il guadagnare novecento per cento è più vantaggioso negozio di quello dove si guadagna cento per cento, che è il medesimo che guadagnar mille per mille. Se poi lo scapitare dal cento a uno sia (come dice l' amico di Roma) per appunto simile al guadagnare 9900 per cento, io non lo so; crederò bene che venendo scritto da persona molto intelligente, ne abbia la sua dimostrazione. Ma per quanto appartiene al presente negozio, a me basta mostrare che l'imperizia e disavvantaggio nel trafficare di quello che da cento si riduce a uno sia assaissimo maggiore della perizia di quello, che negoziando da cento si riduce a dugento, il che proverò così. L' imperizia nel trafficare di quello che da cento si riduce a uno, è assaissimo maggiore di quello che negoziando da due si riduce a uno. E l'imperizia di chi da due si riduce a uno mi pare assai simile alla perizia di chi negoziando da uno si conduce a due, e però l' imperizia di chi da cento si conduce a uno sarà assaissimo maggiore della perizia di chi da uno si conduce a due, la qual perizia è la medesima che quella di colui che negoziando con cento si conduce a dugento; adunque l'imperizia di colui che con cento si riduce a uno è assaissimo maggiore della perizia di quello che con cento si conduce a dugento.

Segue appresso il Sig. Nozzolini e digredendo alquanto soggiugne, in confermazione di quello che ha detto nell'altre due lettere, parergli che la stravaganza nello stimare sia la medesima che quella del comprare e vendere; e però lasciato da parte lo stimatore considera ciò che accade nelle vendite e nelle compre, dove se io vi fo pagare centoventi soldi uno stajo di grano che vaglia veramente cento, per ristorare il vostro danno debbo un'altra volta darvelo per soldi ottanta, e se io vi avessi fatto pagare mille soldi uno stajo, non vi ricompenserei con darvene poi uno stajo per soldi dieci, ma sì come io volli prima per un solo stajo il prezzo di dieci staja, converrebbe che poi dessi a voi staja dieci pel prezzo di uno stajo. La risposta a questo è di già manifesta nella lettera, dove ho mostrato la misura delle stravaganze esser diversissima da quelle con che si misurano gli scudi, le braccia, le libbre ec. E nel presente caso il rendere al compratore quello che dette di sopra più, persuaso da una stima esorbitante, ristora bene il suo danno, ma non medica punto l'esorbitanza della stima, la quale è incurabile. Se la grandezza dell'esorbitanza fusse la medesima che la grandezza del danno, dove fusse il medesimo danno sarebbe anco la medesima esorbitanza, e perchè il restituirmi un soldo ristora il danno fattomi dal venditore nel farmi pagare centun soldo una oncia di zafferano che valeva solamente cento, e colla restituzione di un soldo son rifatto del danno che ricevei dal venditore mentre pagai due soldi un limone che valeva un soldo e non più, si dovrà però dire l'esorbitanza nello stimar centuno quel che valeva cento, esser eguale a quella che valuta due quel che val uno? E chi è così cieco che non veda che se io rinvesto i miei danari in zafferano, perderò solamente uno per cento, e se io li rinvesto in limoni, perderò cinquanta per cento? Dove il Sig. Nozzolini dice la stravaganza dello stimare esser la medesima che quella del comprare e vendere, meglio era dire esser la medesima che l'inganno nel comprare e vendere. E perchè quello che mi vuol far pagare soldi due i limoni, che vaglion solamente un soldo l'uno, mi vuole ingannar del doppio, e quel dello zafferano si contenta del guadagno di uno per cento; però tanto quanto l'inganno di quello è maggiore, di tanto la sua stima si deve dire esser più esorbitante. Ho detto di sopra che il restituire il soprappiù ristora il danno al compratore, ma non emenda la stravaganza dello stimatore, la quale dissi esser incurabile; il che maggiormente si manifesta con figurar la stravaganza nella stima di altro che di prezzi. E che ciò sia vero, dicami il Sig. Nozzolini in qual maniera egli emenderà la stravaganza della stima fatta sopra l'altezza di una torre, che essendo alta solamente cento braccia, fu stimata centottanta. Dirà forse egli tale esorbitanza correggersi quando un'altra simile fusse stimata alta braccia venti? A me pare che chi dicesse così, non solo non emenderebbe la prima esorbitanza, ma ne commetterebbe un'altra maggiore.

A quello che il Sig. Nozzolini dice per aggiugner chiarezza alla sua verità, che è che quando si esorbita nel più e nel meno colli medesimi nomi di parte o di multiplice, sempre si trova la proporzione aritmetica, e che egli esemplifica dicendo: posto che una cosa vaglia dodici e che uno se ne allontani nel più per un sesto e un altro nel meno pure per un sesto, ne vengono i due numeri quattordici e dieci, dove apparisce la proporzione aritmetica; dico che questo è tanto vero quanto il dire che i numeri posti in proporzione aritmetica sono posti in proporzione aritmetica. E che ciò sia, definischiamo che cosa sia il disporre i numeri in proporzione aritmetica, e si vedrà chiaramente, dispor numeri in proporzione aritmetica essere l'ordinarli con differenze eguali fra di loro, cioè por tra di loro l'istesso numero; ma la medesima parte di un numero è sempre l'istesso numero (come per esempio la sesta parte di dodici è sempre due), adunque tanto è dire por tra essi la medesima parte di un numero, che por tra essi il medesimo numero; talchè io non intendo che guadagno ci apporti il nominar di parti ec. Ma posto che alcuna novità o acquisto ci fusse, io non però resto capace come, perchè l'aggiugnere e il sottrarre la medesima parte dispone i numeri in proporzione aritmetica, ne debba in conseguenza seguire che l'esorbitanza delle stime si abbia a regolare colla proporzione aritmetica. Questo è un tornare a suppor sempre di arbitrio quello che tuttavia io niego, ed è in quistione. E qui di nuovo le bacio le mani.

Lettera del Nozzolini.

Per mano del fattore di V. S. ho ricevuto il libro ed insieme le opposizioni del Sig. Galilei, alle quali risponderò brevemente per obbedire a V. S. Io non so con quale intenzione ella mi faccia scrivere sopra tal materia, nè a me tocca il ricercarla; so bene che, oltre all'obbedirla, la mia intenzione in questo caso non è se non d'imparare. Se io stessi in Firenze, cercherei ogni occasione di poter praticare col Sig. Galilei per apprender sempre qualcosa da' suoi dotti ragionamenti. Poichè ciò non mi è conceduto, ora che mi è nata occasione di ragionar seco per lettere, la piglio volentieri per la causa detta; se poi egli ne riceva briga e perdimento di tempo nello scrivere, bisogna che egli abbia pazienza. Gli uomini ricchi hanno sempre molti poveri all'uscio, e bisogna che lo comportino, e così le persone dotte sono infastidite da quelli che cercano d'imparare da loro. E quanto a quello che V. S. mi dice di aver operato, che in questa sua lettera sia taciuto il mio nome, forse per mia ricoperta, poichè in essa spesse volte vien replicato che le cose che io ho detto sono sciocche, vane, puerili, erronee, inette, stoltissime e altre simili parole, io rispondo che non occorreva avermi questo rispetto; io non mi sdegno che da lui mi sia detto così, perchè sapendo io che il mio sapere è piccolissimo e il suo è in altissimo grado, non mi ho da vergognare che da lui mi sieno date quelle riprensioni che meritamente si convengono alla mia ignoranza: pertanto venendo ora al proposito delle opposizioni fattemi, rispondo così:

La prima veramente non è opposizione, ma è una domanda che io spieghi e dichiari in che modo la proporzione aritmetica entri negli atti della giustizia commutativa, cioè nel vendere, comprare, barattare, prestare ec., attesochè a lui pare che della proporzione aritmetica non abbia cosa alcuna che fare con simili faccende. Questo fu da me esplicato, ma brevemente, nella prima lettera: ora per soddisfare a tal domanda, la qual mi vien replicata più di una volta con lunga solennità di parole, bisogna che io l' esplichi un poco più a lungo.

Aristotile, nel quinto libro dell' Etica, al capitolo terzo, dichiara che la proporzione geometrica si osserva in quella parte di giustizia che si chiama distributiva, alla quale si appartiene giustamente distribuire i premj e le pene, le pubbliche imposizioni e gabelle, e le retribuzioni a ciascuno, non già con indifferente egualità, ma con tal proporzione che come si ha merito a merito, così si abbia retribuzione a retribuzione. E dichiarando come si chiami questa tal proporzione dice così: Hanc vero proportionem Mathematici Geometricam vocant. *Ma nella giustizia commutativa questa proporzione geometrica non ha luogo, ma sibbene l' aritmetica, come chiaramente insegna il medesimo Aristotile, nel medesimo libro quinto al capitolo quarto dove tratta* de jure commutativo, *e dice così:* Jus vero, quod in commerciis est, non illa constat proportione, sed Arithmetica. *E questo va poi di sotto dichiarando con molte ragioni ed esempj. Per soddisfazione della sopraddetta domanda, se io non aggiugnessi altro, credo che questo mi potesse bastare; nondimeno non mi parrà fatica seguitar più oltre cogli esempj per maggior manifestazione di questa cosa.*

Di questo che di sopra si è detto, io nella prima lettera posi questo esempio: Suppongasi che noi facciamo una divisione di mercanzia comune, voi avete roba per ventiquattro scudi, ed io per sei; nell' aggiustare questa disuguaglianza, se noi la riducessimo alla mezzanità geometrica, cioè alli dodici, colui che avesse dodici resterebbe aggravato, perchè essendo tutta la mercanzia trenta, mentre che uno ne ha dodici, l' altro n' ha diciotto, ma se noi la riduchiamo alla mezzanità aritmetica, cioè alli quindici, ciascuno avrà il conto suo; è vero che questo tale *esempio fu allora per inavvertenza da me chiamato baratto, ma poco dipoi corressi l' errore; pertanto non posso negare che non mi sia alquanto paruto durètto che il Sig. Galilei, avendo veduto la correzione, in ogni modo più di una volta sia entrato a biasimare detta inavvertenza. Che occorre ferire i morti? Che accade confutare quello che da me è stato reprobato e corretto? Parevami che ciò si potesse facilmente dissimulare, ma* transeat.

Presi questo esempio di divisione di mercanzia comune perchè più facilmente vi si vedeva questa verità, ma non è per questo che la medesima proporzione aritmetica non entri anco non solo nelle compre, ne' baratti, nelle prestanze e altre commutazioni volontarie, ma ancora nelle involontarie, come sono l' usurpazioni, l' ingiurie e l' offese, nelle quali in qualche modo entra il jus *commutativo: allora non mi posi a ciò esplicare per evitar prolissità, ma ora per obbedienza non guarderò a questo. Nel predetto capitolo quarto, c' insegna Aristotile che nella giustizia commutativa non si ha rispetto a dignità o merito di persona, ma tutti si stimano eguali, e quando uno vende o baratta, non ha a riavere più o meno del giusto per esser più ricco o più nobile, ma ogni cosa si ha a ridurre all' egualità, come se noi fussimo tutti del pari. Ora quando noi venghiamo a contrattare insieme, ci abbiamo a stimare eguali. Però dichiamo, per esempio, che io vaglia dieci e voi dieci. Subito che contrattiamo, e io do a voi o in vendita o in baratto o in prestanza o in altro modo sei della mia roba, voi diventate di sedici ed io di quattro. Qui bisogna aggiustare questa inegualità; se noi ricorriamo alla mezzanità geometrica, cioè all' otto col restituirmi quattro, io non avrei il mio conto; nè anco è dovere che avendo voi dodici più di me, vi si tolga tutto quel dodici per darlo a me, perchè io diventerei di sedici e voi di quattro, e così tornerebbe la medesima disuguaglianza; ma riducendosi al numero che tra il sedici e il quattro è mezzano aritmetico, cioè al dieci, allora sarà fatta la giusta uguaglianza.*

Aristotile in detto luogo, per mostrare che nelle commutazioni tutti gli uomini si stimarono eguali, quando vuole esemplificare, assomiglia i contrattanti a due linee eguali: v. g. (*Fig.* 195) *supponghiamo che* AB *ed* EH *siano due contraenti eguali, e per via di alcuna commutazione da* AB *si levi la parte* CB *e si aggiunga all'* EH, *che crescerà in* EM. *Per aggiustare questa disuguaglianza si ha da trovare il mezzo aritmetico tra* EM *e* CA, *il quale sia* DD, *e questo è quello che si chiama il giusto, e poi dall'* EM *si ha da tagliare non tutta quella parte con che supera la* AC, *ma solamente tutta quella con che supera il giusto* DD; *però tagliandone* HM, *ed aggiugnendola ad* AC, *essa ritornerà* AB, *come era prima.*

In oltre pone altri esempj negli atti involontarj dell' offese e dell' ingiuria, e chiama l'offendere acquisto, e l'esser offeso perdita, la quale vien poi dal giudice stimata o in danari o in altro, per poter ridurre la cosa all' egualità; onde, come dice qui Eustazio nel commento, pare che il giudice chiami a sè l'offenditore dicendo: Voi eravate prima del pari, v. gr. tu eri quindici ed egli quindici; ora per l' offesa che tu gli hai fatta, la quale da me è stimata nove, tu sei diventato ricco di ventiquattro, ed egli è restato povero di sei. Ora bisogna ridurre la cosa al giusto, il quale è mezzo fra questi due ingiusti ventiquattro e sei; che s' egli fusse mezzo geometrico, cioè dodici, non si farebbe la debita uguaglianza, ma sibbene col pigliar mezzo aritmetico. Ed in questa maniera Aristotile ed i suoi commentatori dimostrano la giustizia commutativa governarsi colla proporzione aritmetica ec.

Ora non pare a me che mi resti altro da fare se non mostrare che l' aggiustamento della disuguaglianza delle stime si appartenga alla giustizia commutativa, e per conseguenza si serva della proporzione aritmetica. Questo assai efficacemente pare che si possa provare coll' uso inveterato comunemente accettato da ognuno. Quando si radducono due stimatori alla stima di alcuna cosa, v. gr. di un podere, e che avute tutte le debite considerazioni sono in differenza, per esempio di cento scudi, e non si vogliono accordare, allora si chiama un terzo, al quale se apparirà alcuna ragione da appressarsi più all' uno che all' altro, la dirà, ed accomoderà il negozio. Ma posto che a lui non apparisca alcuna probabile ragione contro alcuno di loro, si vede che, secondo un usitatissimo costume, questo chia-

to dà in quel mezzo colla proporzione aritmetica, e non a to, perchè non gli apparendo alcuna evidente ragione in fa- 'e più dell' uno che dell' altro, perchè dovrebb' egli accostarsi più uno che all' altro? Onde, nel caso nostro, se li due stima- i del dieci e del mille stessero ostinati, e si desse loro un tal so, che non vedesse cosa alcuna che lo persuadesse ad ap- rare più l' una stima che l' altra, che altro farebbe egli se a dare in quel mezzo? per qual ragione si debb' egli acco- re più al dieci che al mille? Queste ragioni prese dall' uso nune, conservato sempre insino da' nostri antichi, appresso di sono di grandissimo momento. E però io stimo assai ben vata questa cosa. Conosco che io dovrei fermar qui il mio ionamento, perchè se le cose dette son vere, tutte l' altre op- sizioni cascano a terra, e se elle non son vere, non saranno co di momento alcuno quelle che io sia per dire; nondimeno esercizio letterario andrò seguitando l' altre opposizioni.

SECONDA OPPOSIZIONE.

Mi si oppone che io abbia mal determinato, che la divi- ne di mercanzia comune appartenga alla giustizia commuta- a, perchè, secondo lui, appartiene alla distributiva. Rispondo la giustizia distributiva colla sua proporzione geometrica riguardo al valore e al merito delle persone, e dove trova ersità di merito, non distribuisce mai egualmente. Ma quando e mercanti dividono una mercanzia comune, se l' uno di loro esse più prerogative che non furon mai, non avrà mai nella isione pur un quattrino più della metà. E qui non dirò altro.

TERZA OPPOSIZIONE.

Quando io diceva che le due stime del dieci e del mille ebbono egualmente stravaganti quando il giusto prezzo fusse quecentocinque, dice che questo sarebbe vero quando la stra- ganza delle stime si pigliasse dalla lontananza dal giusto zzo, ma che ella si deve pigliare dall' esorbitanza. Per ri- ndere a questa cosa bisogna che io mi rifaccia un po' più *da alto. Quando V. S. mi propose il presente dubbio, me lo propose con queste precise parole: Una cosa, che vale veramente cento scudi, da uno è stimata mille scudi, e da un altro dieci scudi; si domanda chi abbia di loro stimato meglio, e chi abbia fatto manco stravaganza nello stimare. Quanto a quelle parole,* meglio stimato, *mi pensava che* migliore stimatore *si dovesse interpretare come nell' altre cose; v. gr. miglior tiratore di arco, di balestra o di stioppo si chiama chi col tiro più si appressa al bersaglio; miglior giocatore di pallottole o di trucco colui che* caeteris paribus *si appressa più al segno: e con questi mi pareva che avesse conformità il caso nostro, e però migliore stimatore fusse quello che più si appressa al giusto prezzo della cosa. Considerando quell' altra parola di* stravaganza , *pensava che stravagare non volesse dir altro che andare vagando fuori di qualche cosa, e che tanto maggiore o minore fusse la stravaganza, quanto più o meno altri si allontanasse da quella tal cosa, il qual significato veniva a tornare il medesimo come quel di sopra. Ora questa stravaganza vien chiamata esorbitanza, e guardando io di cavare dalle parole di questa scrittura quel che da lui sia inteso per esorbitanza, mi par di raccorre che non voglia dir altro che sciocchezza e balordaggine; poichè quando il Sig. Galilei biasima una di queste stime esorbitanti, le chiama sciocche, stolte, e da uomo cieco di mente, e con altri simili vocaboli, sicchè il ricercare quale stima sia più esorbitante, non vorrà dire altro se non quale stima sia più sciocca e balorda.*

Prima che io passi più oltre intorno alla sciocchezza e balordaggine delle stime, io voglio supporre quello che si suppone della sciocchezza e balordaggine delle dispute dialettiche. È vero che il dialettico professa di disputare con qualunque di qualsivoglia problema, ma discaccia dalle sue dispute quelli che affermassero cose tanto empie, che meritassero gastigo; come chi negasse che Dio sia buono, o che il padre si debba onorare, e altre simili, ovvero negasse cosa tanto chiara che quel tale mostrasse di esser privo di sentimento, come chi negasse che la neve fusse bianca, o che il fuoco fusse caldo. Nel medesimo modo tengo, che non si debba aver considerazione di quelle stime che *senza alcuna scusa mostrino che lo stimatore sia privo di cervello, come sarebbe che uno, vedendo scoperte sopra una tavola diecimila doppie, dicesse che fussero una o due, ovvero che Montemorello gli paresse una laguna, o che un vitello pesasse quanto un grillo, o che cinquecentocinque piastre fiorentine pesassero una libbra, o altre simili però da simili sciocchissime stime non voglio che si piglino argomenti contro di me. Però da certi estremi non si può giudicare della natura della cosa; chè sebben si vede una gocciola di acqua star rotonda come una palla sopra un mattone, ovvero star pendente da un tetto senza cadere, non si può poi arguire che un baril d' acqua sia per fare il medesimo. E sebben nelle precedenti lettere ho ragionato di quelli stimatori che stimano uno scudo, ovvero dieci, quel cavallo che val cento, nondimeno ho supposto che questi conoscessero qualche probabil cagione di stime così basse, come dire, pensassero che quel cavallo avesse tale infermità che in breve diventasse una carogna, o che dovesse morire la sera medesima, o altre simili. Avendo dunque per nostro supposto scacciato da' nostri ragionamenti queste sciocchissime stime, noi vedremo che la stravaganza non vuol dir altro che lontananza dal giusto, il che appare così. Quando* 10,000 *doppie da uno stimatore son giudicate due, e da uno* 20,000, *sebben è più vicino al vero quel di due che quel di* 20,000, *nondimeno confesso che sarà più sciocco. Ma partiamci da questi estremi, e non mi si argomenti da una gocciola di acqua a un barile: sia lecito a me quello che è lecito a ogni disputante, partansi da noi questi sciocchissimi stimatori, e parliamo di due stime più giudiziose. Una cosa, che vale sessantacinque, da uno è stimata sessanta e dall' altro settanta: qui non è esorbitanza nè sciocchezza. Ora se il giudizio della stima non si ha da pigliar dalla vicinanza del giusto, da quale altra cosa si avrà egli a pigliare? si vede pure che quella stravaganza vuol dir lontananza dal vero, poichè in tutte le stime è stravaganza o poco o assai, ma non già in tutte è sciocchezza. Ora se il giudizio di queste due stime di sessanta e settanta si piglia dalla vicinanza del giusto, perchè non avverrà il medesimo anco nell' altre?*

Inoltre, suppongkiamo che si disputi del peso di una cosa, che in verità pesi libbre sessanta, e da uno sia stimata libbre cinquantacinque, e dall' altro cinquanta: qui ambidue hanno stimato meno, e pure si dà la vittoria a chi più si appressa al giusto. Se quella cosa fusse in verità pesata quaranta, amendue avrebbon detto più, e nondimeno sarebbe stimata migliore quella stima che più si appressasse al giusto. Ora se quando amendue pendono nel più, ovvero amendue nel meno, si misurano le stime colla vicinanza del giusto, qual sarà la cagione che quando uno pende nel più e l' altro nel meno, non si abbia a osservare il medesimo ordine?

Inoltre io considero le parole del dubbio proposto, dove dato che uno stimi dieci e uno mille quel che val cento, si domanda due cose: l' una chi abbia meglio stimato, l' altra chi abbia fatto minore stravaganza. Quanto a quel meglio stimato dico così: dove è il buono e il meglio bisogna ancora che sia l' ottimo, perchè dove è una cosa buona e poi un' altra migliore, se non si terminasse nell' ottimo, si darebbe il processo in infinito: trovato l' ottimo, gli altri buoni tanto sono stimati migliori quanto più s' appressano all' ottimo; nelle stime l' ottimo è il giusto, adunque quanto l' altre stime manco s' allontanano dal giusto, tanto saranno migliori, sicchè la lontananza dal giusto determina quel meglio stimato.

Ora se il fare manco stravaganza fusse il medesimo che meglio stimare, non ci sarebbe più dubbio alcuno. Qui io voglio credere che siano cose diverse, acciò io non noti di superfluità il propositore del dubbio, che abbia fatta la medesima domanda due volte, ovvero in due modi. Però è verisimile che si debba distinguendo dire, che delle stime alcune sono vicine al giusto ed alcune molto lontane, e che queste seconde sieno chiamate le stravaganti, e che il detto propositore abbia veduto che amendue le stime sieno molto lontane, e però abbia domandato quale di loro sia manco stravagante. Per determinare il vero in questo caso, parmi che si debba di nuovo distinguere, dicendo: di queste stime stravaganti alcune hanno la loro stravaganza chiara, manifesta ed espressissima ai sensi senza alcuna probabile cagione di tanta sciocchezza, come chi stima due quelle doppie che sono 10,000. Alcune altre hanno la loro stravaganza *più coperta, e con qualche probabile ragione, come chi vedendo una balletta di piombo, che pesa dugento libbre, pensando che sia stoppa, la stima dieci. Se noi parliamo di queste seconde, dove sia bisogno venire al pesare, misurare o contare, dico che in queste procedono benissimo tutti i miei ragionamenti fatti di sopra; perchè a che effetto si vien egli al peso e alla misura se non per vedere chi più si sia appressato al giusto? Se noi parliamo di quelle prime esorbitanze sciocche, che di queste niuno artefice o scientifico dovrebbe parlare o dar regola, perchè debbono essere scacciate dagli uomini giudiziosi, quando mai viene in disputa se un grillo pesi quanto un vitello, o se Montemorello sia una laguna? Ma caso ch' e' se ne debba ragionare, per isminuzzare anco un po' più questa faccenda, io voglio farne un' altra divisione, dicendo: di queste esorbitantissime stime, alcune hanno l' esorbitanza manifesta da una parte sola, o del meno o del più, come quella delle* 10,000 *doppie stimate due nel meno e* 20,000 *nel più, dove apparisce più sciocchezza nel meno che nel più. Alcune altre hanno la sciocchezza manifesta dall'una e dall'altra parte, come se il gigante di piazza fusse stimato un braccio nel meno, e alto quanto il palazzo nel più, nelle quali amendue stime si vede apertissima la stoltizia. Se noi parliamo di quelle da una parte sola, dico che da quella parte sempre apparirà la sciocchezza non solo in proporzione aritmetica, ma anco in geometrica. Do questo esempio: io sto appoggiato a una torre alta trenta braccia, e la stimo e dico che essa non è niente alta più di me, e un altro dice ch' ella è alta trecento braccia; qui è la proporzione geometrica, e nondimeno la mia stima sarà sempre tenuta più sciocca, perchè senz' altra misura si vede che io dico un estremo sproposito, dove a voler vedere di quell' altro bisognerà venire alla misura. Ma se noi parliamo di quelle che hanno la sciocchezza dall' una e dall' altra parte, dico che, poichè in queste la stravaganza e la sciocchezza non decide la questione, bisognerà venire alla misura del gigante e del palazzo, e guardare quale delle due stime si sia più appressata al vero, sì che in tutti i modi pare che la cosa torni qua, che la stravaganza delle stime s' abbia a misurare colla vicinanza del giusto.*

QUARTA OPPOSIZIONE.

Questa proposizione è intorno al ritrovar le stime coll'eccesso del meno corrispondente all' eccesso del più in proporzione aritmetica. Mi è domandato così: quando il cavallo di cento scudi sarà stimato nel più mille, qual sarà la stima del meno? A questo rispondo che, senza fare a quel cavallo una covertina sì ricca, ci è un altro modo col dir così: come tu per un cavallo chiedendo mille scudi vuoi dieci prezzi, e così io per un prezzo solo voglio dieci cavalli, e però stimo che dieci cavalli vagliano cento scudi, e questo non perchè io stimi che essi vagliano dieci scudi l' uno, ma per avere sopra dieci cavalli quella tanta stravaganza nel meno che corrispondesse a quella del più. Questa medesima domanda fece l' amico di Roma, dicendo se il cavallo di cento fusse stimato dugento nel più, a volerlo con pari proporzione stimar nel meno, bisogna dire che egli vaglia nulla. A questo io risposi che, senza venire a questo sproposito del nulla, ci era un' altra via col dire, che così come tu chiedendo dugento chiedi due prezzi per un cavallo, così io per un prezzo chiedo due cavalli, stimando che due cavalli vagliano cento scudi. Ora dal Sig. Galilei, nella poscritta, mi viene opposto che io abbia messo in campo l' offerta del nulla: leggasi la mia terza lettera, non si troverà che io dica questo; anzi per non avere a discendere a questo di stimar nulla un cavallo, ho trovato l' altro modo di chiedere e stimar due cavalli cento scudi: è ben vero che io soggiunsi che in questo modo di stimar cento due cavalli vi era nascosto il nulla, ma non già aperto e spropositato, come sarebbe dicendo: io stimo nulla questo cavallo; perchè mentre io stimo due cavalli cento scudi, non vedo che si faccia alcuna menzione del nulla: però tutto quello che nella poscritta è detto contro di me in questa materia, è detto a torto per non aver ben guardato la mia lettera.

QUINTA OPPOSIZIONE.

Mi oppone ch' io abbia detto che la stravaganza delle stime si abbia a pigliare dalla perdita pecunaria, e però in quelle dove non sia perdita pecunaria, sebbene sieno stravagantissime, *a mio detto, non sarà errore nessuno. Io ho guardato un poco di bozza che io ho quassù della mia prima lettera, e non ci trovo questa cosa; ma io voglio concedere ch' ella ci sia, e rispondo che io non considero quella perdita pecuniaria se non quanto ella è lontana dal giusto, dalla qual lontananza tengo che si debban giudicare le stravaganze delle stime.*

SESTA OPPOSIZIONE.

Fa instanza che tutti i conti de' mercanti son fondati sulla regola del tre, e che però malamente io ho scacciato la proporzione geometrica dai traffichi mercantili. Rispondo che è vero che nel trovare i prezzi di tutte le cose, l' acquisto de' cambi e ricambi, nel ritrovare il merito di ciascuno che ha capitale nella compagnia, e nel ritrovare tutte le difficoltà de' conti de' mercanti, si adopera la proporzione geometrica, ma nelle suddette azioni non consiste la commutazione; quando noi verremo all' atto di commutare e di aggiustare i nostri debiti, allora ci entra la proporzione aritmetica. Piglio questo esempio: Quando voi mi vendete trenta libbre di seta, mentre che si va cercando per ora colla regola del tre, a lire venticinque la libbra, quanto varranno libbre trenta, noi non siamo ancora nella commutazione; ma quando si sarà trovato che io sia debitore di lire 750, *e che noi verremo all' atto di pareggiarci, allora si fa la commutazione, e qui si adopera la proporzione aritmetica nel modo che ci ha insegnato Aristotile.*

SETTIMA OPPOSIZIONE.

Mi risponde che a voler giudicare le stravaganze delli due stimatori del 1000 *e del* 10 *io adoperi per misura una moneta, ed io rispondo che così si deve fare; le misure hanno a esser convenienti al misurato; qui si tratta di misurar queste due lontananze dal giusto, che consistono in danari, e perciò ci vuol misura di moneta; quando si tratta di stime che consistono in braccia si adopera il braccio, quando in barili si adopera il barile, e così in tutte l' altre, stando sempre fermo qui,* *che queste stravaganze s' abbiano a ponderare secondo la lontananza dal giusto, e secondo che sarà questo giusto o moneta o tempo, o linea, o superficie, o altra cosa, se gli hanno ad appropriare le sue convenienti misure.*

OTTAVA OPPOSIZIONE.

In quest' ottavo luogo con una sola cauzione mi difenderò da molte opposizioni a un tempo; la cauzione è questa: Io non voglio uscire della quistione proposta, la quale è fondata sulla considerazione di due stime di una cosa sola, e però quello che mi si opporrà intorno alle stime di cose diverse, non ha che fare col nostro proposito; tutto quello che io ho detto, determinato e concluso, è in considerare due stime d' una cosa sola, i quali detti non si posson poi verificare in diverso proposito, quando si va comparando insieme stime di cose diverse; però tutti quelli inconvenienti che sono addotti da lui quando va comparando insieme la stima della noce e del giojello, la stima del monte e del vitello, la stima della torre e del giovenco, non hanno che fare niente contro di me; a me basta che i miei detti si verifichino nelle due stime di una cosa sola; se poi in altro proposito patiscono difficoltà, non ha a parer maraviglia.

NONA OPPOSIZIONE.

La nona opposizione è intorno a colui che vedendo **10,000** *piastre sopra una tavola, le giudicasse due o tre. La decima, di quello che giudicasse Montemorello una laguna, alle quali non intendo di rispondere per la ragione detta nell' opposizione terza, attesochè di simili sciocchissime stime non si deve entrar in disputa.*

DECIMA OPPOSIZIONE.

Questa è intorno all' uso comune che ordinariamente si suol conservare nella decisione delle dispute di simili stime, il qual uso fu da me esemplificato coll' esempio delle scommesse che i beccai soglion fare a chi più s' appressa alla vera stima del peso di alcun loro animale, dove se l' uno dirà quarantotto e l' altro dodici, solo il trenta è lasciato di parità, ma da' trenta in giù *la vittoria è del dodici, da quivi in su del quarantotto, e non si è mai veduto che in simili casi si vada cercando mezzanità geometrica. Contro a questo mi sono dette due cose; l' una, che quelli che così giudicano sono ignoranti, il che quando sia vero comprenderà una grandissima parte degli uomini di questo mondo, che pur fanno professione di giudicar bene in questo caso ; l' altra, che questi beccai, come esperti e pratichi in simili scommesse, si appressano colla stima al vero peso, e se una cosa sarà cento libbre, a discostarsi molto, l' uno dirà* 90, *e l'altro* 110, *ma in questi due numeri poca differenza è dal mezzo geometrico all' aritmetico, e questa poca differenza non è da loro considerata, però se ne stanno al mezzo aritmetico. Questo non mi acquieta, perchè se non ci fusse differenza se non d' un' oncia sola, se fusse dovere attaccarsi al mezzo geometrico, quello a chi e' fusse favorevole per vincer la scommessa, vi si appiglierebbe. Inoltre facciamo che questi medesimi beccai vengano in disputa d' un' altra cosa a loro non tanto nota; v. g. supponghiamo che due di costoro vedino una balletta ammagliata, e l' uno credendola stoppa la stimi libbre dieci, e l' altro credendola zecchini la stimi libbre mille, e sopra di ciò facciano scommessa a chi più s' appressa al vero. È egli da credere che essi fussero per lasciare il lor solito costume, e che volessero andar cercando il mezzo geometrico? io credo di no. E ancora quando si venisse alla stadera, io non credo mai che alcun giudice desse il torto a quel del dieci, ogni volta che si trovasse che il vero peso fusse da* 505 *in quà; e di quest' uso tanto comune e tanto approvato, come ho detto di sopra, mi pare che si abbia a fare grandissimo conto. Di quell' esempio, che qui è da lui addotto, che un beccajo stimi un vitello manco di un' oncia, non fo caso nessuno per la ragion detta di sopra all' opposizione terza, chè si ha a ragionar di stima che abbia faccia di stima, e non d'una estrema pazzia.*

UNDECIMA OPPOSIZIONE.

Seguono ora le opposizioni della poscritta, la prima delle quali è intorno a quell' offerta del nulla, della quale abbiamo di già ragionato nell' opposizione quarta, però non occorre qui re-

plicarlo: l' altra sta intorno a un' opposizione fattami nella lettera dell' amico di Roma intorno a' guadagni e alle perdite dei mercanti, la quale opposizione era questa. Quando il cavallo di cento scudi è stimato nel meno uno scudo, a servar la proporzione aritmetica dovrà nel più essere stimato 199, *e così verranno questi tre numeri* 1, 100, 199, *ne' quali andando dalla sinistra verso la destra, cioè dall'* 1 *al* 100, *e dal* 100 *al* 199, *si fa due processi di guadagno, ma molto differenti, perchè quando l'* 1 *diventa* 100, *si guadagna* 9900, *ma quando il* 100 *diventa* 199, *si guadagna solamente novantanove per cento. Andando poi dalla destra verso la sinistra, cioè dal* 199 *al* 100, *e dal* 100 *all'* 1, *si fa due processi di perdita, ma similmente molto diversi, perchè quando il* 199 *diventa* 100, *si perde insino a cinquanta per cento, ma quando il cento diventa uno, si perde novantanove per cento, e però questa cosa non può star bene. A questa opposizione io diedi nella terza lettera due risposte, la prima sia questa: I guadagni del tanto per cento son fondati sulla regola geometrica del tre, e questi tre soprascritti numeri son disposti in proporzione aritmetica. Or come può da un fondamento di numeri aritmetici nascer la proporzione geometrica? queste sono spezie diverse di proporzione, e non può l' una nascer dall' altra: sarebbe appunto voler che dalle gatte nascessero i cani. L' altra risposta che io diedi fu questa, che a volere proceder bene ne' sopraddetti tre numeri, non bisogna andare da sinistra a destra nè da destra a sinistra, ma dal mezzo agli estremi, cioè dal giusto verso amendue gl' ingiusti, cioè dal* 100 *verso l'* 1 *e verso il* 199, *e allora saranno le perdite e i guadagni eguali, perchè quando il cento diventa uno, si perde novantanove per cento, e quando il cento diventa centonovantanove si acquista novantanove per cento.*

Ora il Sig. Galileo, lasciando stare la prima risposta, la quale io stimo la buona, dà contro alla seconda col dire che sebben la perdita di novantanove per cento è eguale all' acquisto del novantanove per cento, nondimeno in questi due processi il mercante non apparisce egualmente perito e giudizioso. E in dimostrar questa cosa fa una lunga dimora, ma io brevemente me ne spedisco dicendo, che io non fò caso se il mer-

cante in questi guadagni e perdite apparisca più giudizioso o no: che importa a me questa cosa? io dissi così per mostrare che in qualche modo, secondo i tre numeri posti di sopra, si trovava egualità di perdita e di guadagno; ma quando ancora questa mia seconda risposta non valesse nulla, io non me ne curo, pur che resti buona la prima, contro la quale non mi vien detto cosa alcuna. Quando a un dubbio fattomi io do due risposte, mi basta che me ne sia menata buona una sola, perchè in virtù di quella sola penso d'aver soddisfatto all'obbligo.

DUODECIMA OPPOSIZIONE.

Questa è intorno a un mio detto contenuto nella mia terza lettera, dove con quell'esempio dello stajo del grano, che val cento soldi, venduto una volta centoventi e un'altra ottanta, voleva dalla egualità della restituzione argomentare alla egualità della lontananza delle stime del più e del meno. Il Sig. Galilei mi oppone due cose; prima dice, e dice bene, che questa mia ragione varrebbe se la stravaganza delle stime si misurasse colla lontananza dal giusto, ma che questo appresso di lui è falso; in questo ha ragione, in quanto che bisogna prima decidere se la stravaganza delle stime si ha da misurare colla lontananza dal giusto o no, poi si potrà determinare se questo mio detto sia falso o no. La seconda cosa che mi oppone è, che a questo mio detto ne seguiterebbero molti inconvenienti, quali sono da lui tutti fondati sulla comparazione di stime di cose diverse; ma a questo io dico, che tutto quel che io dico, ed ho detto in questa materia, mi basta che abbia verità nelle stime di una cosa sola, perchè di queste stime di una cosa sola ho sempre inteso e ragionato, e quello che è detto a un proposito non è maraviglia che trovi e patisca difficultà in un altro.

ULTIMA OPPOSIZIONE.

L'ultima opposizione è contro a un altro mio detto della medesima terza lettera, il quale essendo similmente fondato sul medesimo fondamento, che la stravaganza delle stime si misuri *colla lontananza dal giusto, a ragione vien ributtato dal Signor Galilei, che tiene che questo fondamento sia falso. Bisogna dunque aspettare la decisione della verità o falsità di quel fondamento, e poi si determinerà della verità o falsità di questi miei ultimi detti.*

Questo è quanto mi occorre dire intorno alle predette opposizioni. E di tutti questi miei ragionamenti in tutto e per tutto mi rimetto al giudizio del Sig. Galilei, il quale io onoro, e reverisco, e osservo con tanto affetto, che egli non ha da pensare che questo che io scrivo sia scritto ad altro fine che per imparare da lui. Mi sa ben male che per conto mio abbia avuto briga di questa sua scrittura così lunga, massimamente essendo egli spesso infastidito da simili molestie, come egli dice nell' ultimo; ma pure, come io dissi in principio, bisogna che egli abbia pazienza, e gli convien far conto d' esser a similitudine d' una finissima pietra di paragone, sopra la quale ogni studioso desideri dare un' arrotatura al coltellino dell' ingegno suo per acquistarne sottigliezza e perfezione: e con questo fine a V. S. ed a lui bacio le mani.

ALTRA LETTERA DEL NOZZOLINI.

Nell' ultima lettera di V. S. mi vien significato come ella dubiti che la mia ultima scrittura sia per ritrovare inciampo, in quanto che l' autorità di Aristotile appresso a' matematici moderni è di poco momento. A questo io dico, che quando mi abbia a esser opposto questo, qual cosa risponderò io? Ma intanto acciocchè la mia causa non resti al tutto priva di patrocinio, poichè per me non ha a valere nè autorità di Aristotile, nè alcuno uso inveterato, mi piace di addurre a mia difesa un' altra ragione, la quale io riserbava per ultimo refugio; ma poichè io vedo che ogni altra cosa periclita, l' addurrò di presente. V. S. si servirà di essa secondo che più le parrà opportuno.

Nella predetta mia scrittura mi sono affaticato in mostrare come nella nostra disputa si deve adoprare la proporzione aritmetica. Ora con una ragion sola voglio mostrare che in nessun modo vi si può adoperare la proporzione geometrica. E per provarlo, la prima cosa io suppongo che se noi siamo appresso a *una scala, e ragioniamo di salire, noi intendiamo andare dall' infimo grado verso il supremo; se noi ragioniamo di scendere, noi intendiamo andar dal supremo verso il più basso. Similmente se noi abbiamo due numeri diseguali, come otto e quattro, se noi ragioniamo di maggioranza, o di tutto, o di multiplice, noi risguardiamo dall' otto verso il quattro, se noi ragioniamo di parte e di minoranza, noi risguardiamo dal quattro verso l' otto. Questa cosa manifestamente ci dimostra Euclide quando, nel principio del quinto libro, definendo la parte, dice:* Pars est magnitudo magnitudinis minor majoris, *cioè un rispetto della minore verso la maggiore, e poi definendo il multiplice, dice:* Multiplex autem major minoris, *cioè un rispetto della maggiore verso la minore. Il medesimo appunto va replicando nel principio del settimo libro, dove parla de' numeri:* Pars est numerus numeri minor majoris, multiplex vero major minoris. *Insomma la maggioranza importa andare dal maggiore al minore, e la minoranza importa andare dal minore verso il maggiore.*

Dipoi io piglio le parole del Sig. Galilei, dette da lui nella prima scrittura mandatami da V. S., nella quale era posta la decisione del nostro dubbio secondo la sua sentenza, dove dice così: Egualmente deviano dal giusto quei due, che stimano uno il doppio più e l' altro la metà meno, uno il decuplo e l' altro la decima parte. *E per questa ragione vuole che qui sia proporzione geometrica, perchè come si ha il mille al cento, così si ha il cento al dieci.*

Ora per lo contrario io dico così: quando io considero la prima stima, che è di maggioranza, cioè del decuplo più, io vo dal maggiore al minore, cioè dal mille al cento; ma quando io considero la seconda stima, che è di minoranza e della decima parte, io vo dal minore al maggiore, cioè dal dieci verso il cento. Ma se la cosa sta così, dove si è mai trovato che proporzione alcuna geometrica si ritrovi tra due processi, de' quali uno vada dal maggiore al minore e l' altro dal minore al maggiore? questo non si troverà mai. Piglinsi tutte le spezie di proporzione geometrica raccontate da Euclide nel principio del quinto libro, e guardisi la Omologa, l' Alterna, la Inversa, la Composita, la Divisa, la Conversa, la Exaequali, la Ordinata, la Perturbata, *e se altre ve ne sono, in tutte manifestamente si vedrà, che se nel primo processo si va dal maggiore al minore, nel secondo si ha da fare il medesimo; se nel primo dal minore al maggiore, nel secondo si fa il medesimo. Ma qui nel caso nostro se nel processo della prima stima si considera il decuplo più di maggioranza, cioè si va dal mille al cento, e nel processo della seconda stima, che è di decima parte e di minoranza, si va dal dieci al cento, come si può dire, che sia geometrica proporzione nel dire: come si ha il mille al cento, così si ha il dieci al cento? Questo non sarà mai vero.*

Se voi vorrete dire che la proporzione geometrica si salvi disponendo i numeri così: mille, cento, dieci, e col dire: come si ha il mille al cento, così si ha il cento al dieci; rispondo che questa non sarà la nostra disputa. Noi ragioniamo di due stime di una cosa, delle quali ci sia una del meno, cioè vada dal minore al maggiore; ma nel modo predetto ambedue sono del più. Quando si va dal mille al cento, questa è del più, quando dal cento al dieci, questa è del più. Quando saranno due stime di cose diverse, che ambedue pendano nel più, ovvero ambedue nel manco, confesso che vi si possa trovare la proporzione geometrica; ma nelle stime di una cosa sola, delle quali una penda nel più e l'altra nel meno, se vi si trova mai proporzione geometrica voglio che mi sieno cavati gli occhi.

Nella proporzione aritmetica non dà fastidio alcuno che una stima sia del più e una del meno, perchè quivi non si guarda se non la lontananza, e tanto è andare dal maggiore al minore, quanto dal minore al maggiore; tanta lontananza è dall'otto al quattro quanta dal quattro all'otto; tanto è da casa mia a casa vostra, quanto da casa vostra a casa mia. Ma nella proporzione geometrica non è così. Non è vero che così si abbia l'otto al quattro, come il quattro all'otto, perchè l'uno è doppio e l'altro è metà. E questo mi basti intorno a questa ragione, la quale se mi sarà soluta ed abbattuta, prometto di non voler più dire una parola.

PARERE

INTORNO

ALL' ANGOLO DEL CONTATTO

SPIEGATO DA GALILEO IN UNA LETTERA DI RISPOSTA, SCRITTA DALLA VILLA D'ARCETRI, NE'30 OTTOBRE 1635, A GIOVAN CAMMILLO GLORIOSI MATEMATICO NAPOLETANO, E COMMENTATO DA VINCENZO VIVIANI (1).

Dopo aver accusato la ricevuta della missiva inviatagli dall'Autore, così prosegue Galileo:

Intanto, per segno d' aver pur veduto qualcosa delle sottilisssime speculazioni di V. S., voglio conferirle certo mio discorso, che gran tempo fa mi passò per fantasia, per provare che l'angolo del contatto sia detto così equivocamente, che in somma non sia veramente angolo, convenendo in questo col Vieta, le cui ragioni molto acutamente par che V. S. vada redarguendo; sì che se mi mostrerà la fallacia della mia, che mi par poco men che concludente dimostrazione, bisognerà che io sia con lei.

Stando dunque sulla ricevuta definizione, che *l' angolo sia l' inclinazione di due linee poste in un piano, che si toccano in un punto, e non son poste fra loro per diritto;* figuriamoci un poligono rettilineneo ed equilatero inscritto nel cerchio (*Fig.* 196). È manifesto, le inclinazioni o direzioni de'suoi lati esser tante, quanti sono gli stessi lati, se saranno di numero dispari, ovvero quanto la metà, se il numero sarà pari (avendo gli opposti la medesima direzione). Ora, se intenderemo a qualsisia linea retta AB essere applicato il lato

(1) Questo scritto di Galileo e l' unito commentario del suo discepolo, furono pubblicati dal Viviani stesso nelle Aggiunte alla *Scienza Universale delle Proporzioni*, pag. 107 e segg. Il commentario fu poi pretermesso nelle successive edizioni delle Opere di Galileo.

CD d' uno di detti poligoni, questo con quella non formerà angolo, camminando amendue per la medesima direzione, ma ben lo formerà il lato seguente DE, come quello che sopra la segnata retta si eleva, ed inclinandosegli sopra, la tocca. E perchè il cerchio si concepisce esser un poligono di lati infiniti, è necessario che nel suo perimetro sieno tutte le direzioni, cioè infinite; e però vi è quella di qualsivoglia linea retta segnata, la quale non può intendersi esser altra che quella del lato (degl' infiniti che ne ha il cerchio) che ad essa sia applicato: adunque quello del cerchio, che alla linea retta si applica, non forma angolo con essa; e tale è il punto del contatto. Qui poi non si può dire che, sebbene il punto che tocca non contiene angolo colla tangente, tuttavia pur lo contenga il punto contiguo conseguente, sì come nel poligono, non il lato che si applica alla retta proposta, ma il lato seguente è quello che l' angolo forma e costituisce; non si può, dico, dir questo, perchè il punto che succede a quel contatto non tocca la retta, la quale da un sol punto del cerchio, e non da più vien toccata; ma nella definizione dell' angolo si ricerca, oltre all' inclinazione, il toccamento ancora; adunque il chiamato angolo del contatto è con errore detto così, ne è veramente angolo, nè ha grandezza alcuna.

Sovviemmi anco, oltre a molt' altri, aver fatto un discorso in cotal forma:

Se stando ferma la DE (*Fig.* 197), intenderemo la segante AB girarsi sopra il punto del segamento C, sì che dallo stato AB calando A verso D, trapassi in GF, facendo l' angolo FCE superiore alla DE, dove prima conteneva l'inferiore ECB; è manifesto l'angolo BCE andarsi per tal conversione inacutendo e ristrignendo in modo che finalmente la sua quantità si annichili e del tutto svanisca, il che accaderà quando essa retta AB si congiugnerà colla DE. Ora applicando lo stesso discorso all' arco ACB segato dalla retta ON nel punto C, constituendo i supposti angoli misti ACO, NCB; se intenderemo essa retta ON girarsi sopra il punto C, da O verso D inacutendo i detti angoli, e finalmente trapassando nello stato di GCF, sì che l'angolo inferiore NCB si faccia superiore come FCB, non comprendo come ciò possa accadere senza passare per l'annichilazione di essi angoli, la quale annichilazione non può essere se non quando essa retta convertibile non segasse più la curva ACB, il che avviene quando essa si unisce colla tangente DE. Nell'arco dunque e nella tangente non sono angoli, ma l'annichilazione degli angoli.

Il discorso anco che vien fatto per confermare che l'angolo della contingenza non solamente sia quanto, ma talmente quanto ch'e' sia divisibile in infinito, mentre si descrivano cerchi maggiori che passino per lo medesimo toccamento, è, s'io non m'inganno, manchevole; imperciocchè non l'angolo, il quale dico non aver quantità, ma ben lo spazio tra la circonferenza del minor cerchio e la retta tangente vien diviso e suddiviso dalle maggiori e maggiori circonferenze; il che assai chiaramente mi pare che si possa mostrare con l'esempio di molti poligoni rettilinei simili e disuguali nella seguente maniera.

Sieno nella retta MB (*Fig.* 198), perpendicolare alla AE, i centri M, N di due cerchi disuguali toccanti la AE nel medesimo punto B, e intendasi nel minore inscritto un poligono equilatero, del quale sieno lati le rette BI, IO, OS, e prolungata la BI termini nella circonferenza del cerchio maggiore nel punto C; è manifesto la linea BC essere un lato del poligono similmente inscritto nel cerchio maggiore, nel quale le due CD, DF sieno lati conseguenti. Qui si vede che il perimetro FDCB divide ben lo spazio intercetto tra il perimetro del poligono SOIB e la retta BE; ma non però vien diviso l'angolo IBE, essendo il lato IB parte del lato BC, ed essendo l'angolo IBE comune, anzi lo stesso del fatto dalla EB e dai due lati de' poligoni BI, BC; e discorrendo nello stesso modo di tutti gli altri poligoni tra loro simili di qualunque numero di lati, e quanto si voglia differenti in grandezza, l'angolo IBE sarà sempre comune, nè giammai segato, ma bene andrà sempre facendosi più acuto multiplicandosi i lati del poligono; vero è che l'angolo IBE sarebbe esso ancora diviso dal lato d' un poligono maggiore, tuttavolta che ei fusse di più lati ed in conseguenza dissimile. Di qui mi pare che si possa ritrarre che essendo i cerchi tutti poligoni simili di lati infiniti, applicandoli alla retta AE nel comune toccamento B, venga ben lo spazio tra la tangente e l' arco interno BIOS diviso dall'arco esteriore BCDF, ma non già l' angolo B, essendo comune ad amendue i poligoni; e l' essere i cerchi tutti poligoni simili di lati infiniti, toglie il potersi dire il cerchio maggiore esser poligono di più lati che il minore, e perciò atto a dividergli il suo angolo; perchè sì come non si può intendere poligono alcuno potersi inscrivere in un cerchio, benchè immenso, di lati innumerabili, che uno di altrettanti (e però simile) non si possa inscrivere in qualsivoglia altro, benchè piccolissimo, così non si può dire che l' angolo del contatto non sia uno e comune ad amendue i cerchi; e se tale angolo non è divisibile, non è quanto, e se non è quanto, non è vero angolo, ma equivocamente così detto.

Considerisi appresso, che sì come multiplicandosi più e sempre più nel cerchio SO il numero de'lati del poligono, l'angolo IBE sempre si fa più acuto, par che per necessaria conseguenza ne segua, che dove i lati sieno infiniti, tal angolo sia infinitamente acuto, cioè non quanto e non angolo ec.

Segue dipoi il Galileo con altro breve capitolo esaminando alcune conclusioni, che il Gloriosi inferisce dalle ragioni addotte dal sopramnominato Francesco Vieta: ma essendochè per l' intelligenza di tali ponderazioni converrebbe riferire, e ciò che scrisse l' istesso Vieta, e ciò che v' oppose il Gloriosi, colla risposta di questo al medesimo Galileo, tralascio di trascrivere più oltre esso capitolo, e rimetto i curiosi a soddisfarsi pel rimanente ne' proprj autori, poichè non ho preteso di portar qui il progresso tutto della quistione, con le proposte e risposte altrui, ma solamente le principali ragioni, che a stimare nulla tal angolo mossero il mio riverito Maestro, al di cui parere liberamente sottoscrivendomi, così mi fo lecito di soggiugnere:

Se tra le condizioni dell' angolo piano volle Euclide, nella definizione di esso, quella ancora, che le linee costituentilo non sieno poste fra loro in diritto, parmi che di qui assai manifestamente si comprenda ch' ei non intese per modo alcuno di chiamar con quel nome l' incontro d'una linea curva con una retta, e perciò non quello di una circonferenza d'un cerchio con la retta linea toccantelo; essendo assolutamente impossibile constituire o adattare una linea curva talmente ch'ella torni in dirittura con una retta, e tanto più è impossibile il far ciò con due curve insieme congiunte. Onde non potendosi mai con dette linee effettuare la vietata posizione, superfluamente e fuori di proposito l'avrebbe egli esclusa da simil sorta di accoppiamento. Se dunque egli stimò necessaria alla definizione dell'angolo piano quella particolare eccezione, parmi che di qui concluder si debba ch'egli intese di parlar d'angoli fatti solo da quelle linee che qualche volta coll'eccettuata posizione si abbattono di accoppiarsi. E tali sono le linee rette solamente, due delle quali toccandosi in qualche punto comune ad esse, possono, dopo l'infinite inclinazioni e aperture sempre maggiori, giugnere finalmente a situarsi tra loro in una medesima dirittura. Di qui è che io mi fo a credere che Euclide adducesse la definizione solamente per l'angolo rettilineo, e non quella generale per questo e per gli altri chiamati comunemente curvilinei, cornicolari e misti ec. ec. E ciò maggiormente mi si conferma dall'osservare che il medesimo Euclide in tutti i suoi Elementi, ed in ogni altra sua opera cognita a noi, non propone mai, come si dice, *ex professo*, di dimostrare alcun teorema o di risolver problema intorno agli angoli che son detti curvilinei, nè li paragona mai fra di loro come egli fa in più luoghi de' rettilinei. Che se nel suo terzo libro si trova che tali accoppiamenti fatti dalla circonferenza del cerchio con una retta che lo tocchi, o da quella che passi per lo suo centro, o da altre che lo seghino, vengono paragonati nella proposizione 16 con gli angoli acuti rettilinei, e nella 31 con l'angolo retto, io non son lontano dal credere quello di che sospettò col Peletario quel sublime ingegno francese, tra' restauratori dell'antica Geometria forse il primo, dico Francesco Vieta, che queste tali comparazioni sieno state aggiunte alla fine di dette proposizioni da qualche bello spirito degli antichi, o come sogliam dire da qualche saccente; anzi tengo per fermo che cotal uomo le cavasse quivi come corollarj delle medesime proposte d'Euclide, onde poi a contemplazione di queste sue aggiunte gli convenisse alterare la definizione dell'angolo premessa da Euclide al suo primo libro, la quale stando forse così: *Angolo è quella scambievole inclinazione di due linee rette poste in un piano, che toccandosi in un punto non son poste in dirittura fra di loro:* la riformasse per farla più generale, e che servisse a quelle sue aggiunte con levare la condizione di rette alle linee, e così la riducesse universale per tutti gli angoli da lui intesi, e che di poi v' aggiugnesse di proprio la definizione particolare pei soli rettilinei; siccome ancora che al terzo libro premettesse la definizione per gli angoli delle porzioni, la quale io per me stimo adattata a questi non meno impropriamente che a quello chiamato del contatto. Ma in qualunque modo ciò sia seguito, non mi par già ch' ei meriti il conto diffondersi e confondersi di vantaggio in simil contesa; poichè quando bene il tutto fosse d' Euclide stesso, non so poi vedere che gran biasimo glie ne venga, e qual pregiudizio risulti alla stabilità dei fondamenti geometrici, ond' egli occorra affannarsene col medesimo Vieta, dicente che non a torto si tiene per qualcuno tali conclusioni controverse essere adulterine, *ne sibi non satis constet Euclides, et alioqui geometrica multa corruant fundamenta*; perchè finalmente quando mai si concordi o si conceda che l' addotta definizione non si competa ad altri angoli che a' rettilinei, e che questi soli come enti, e però come quanti, sieno divisibili e comparabili fra di loro, e che gli altri tutti impropriamente si chiamino angoli, e si voglia poi nonostante che le comparazioni de' curvilinei co' rettilinei sieno proprie d' Euclide; il maggior disordine che accader possa in Geometria sarà che le dette comparazioni fatte nel fine delle citate proposizioni del terzo libro sieno improprie o non vere, e conseguentemente ne avverrà che il numero delle vere proprietà geometriche (che non vi è dubbio che ei sia infinito) manchi di un due o di un tre al più. Ma che? esso numero pur tuttavia resterà infinito. Oltrechè, quando tali conclusioni si togliessero affatto dagli Elementi, tutto il rimanente avrebbe per appunto suo vigore come prima, come che esse abbiano fine nel medesimo lor principio, e da esse non dipenda pur una delle tant'altre proprietà dimostrate in tutti i quindici libri degli Elementi d' Euclide o degli altri trattati che di lui ci son pervenuti alle mani.

Se altri poi, sostenendo la parte contraria, dirà la definizione dell' angolo piano esser propria d' Euclide in quella forma ch' ella vi si legge, ma che per esser posta universale, tanto per l'accoppiamento delle linee curve che delle rette, quella condizione, che esclude la posizione delle linee per diritto, riguarda solamente all' inclinazione quando elle sieno rette, e perciò vi è necessaria; io facilmente mi accomoderò a concedergli il tutto senza contesa, ma gli soggiugnerò bene che se è angolo ancora l' inclinazione, che ha una linea curva sopra una retta, egli mi assegni quale e quanta sia la parte di essa curva la quale determina l' inclinazione con la medesima retta: cioè se (per esempio, essendo circonferenza di cerchio) se ne debbano prender novanta o più gradi, ovvero ottanta, o quaranta, o dieci, o due, o uno, o un mezzo ec., oppure se (qualunque sia il numero di gradi presi) l'angolo sia il medesimo sempre. La prima cosa non può dirsi, perchè non vi è ragione per cui più un numero di gradi che un altro stabilisca l'inclinazione della circonferenza con la retta. Non ancora la seconda, perchè dovendo le due linee costituenti l'angolo aver fra loro direzioni diverse, e non la medesima, ma averle però ciascuna linea sempre verso una stessa parte, è vero che quanto alla retta ell'ha direzione sempre verso quella parte secondo la quale ell'è distesa, tanto nel prenderne una piccola porzione che una grande, ma la direzione della circonferenza non riguarda già verso la stessa parte così nel termine d'un arco piccolo che d'un maggiore; e però essendo diverse le direzioni delle diverse parti della medesima curva, diversi ancora saranno gli angoli che le dette parti fanno con la medesima retta linea, e non sempre gli stessi come e' si pongono.

Se poi si dicesse che le direzioni degli archi vanno prese non a' loro estremi termini, ma a quel punto dov'esse convengono con la retta, io domando col Galileo se in ciaschedun cerchio sono tutte le direzioni, sicchè non ne sieno più nel maggiore che nel minore. È forza dire che in ciascuno son tutte. Stante ciò, io soggiungo, col medesimo Galileo, sull'ultima sua figura, che la direzione BE, che è la medesima che quella del punto B dell'arco BI, dovrà essere anco in qualche punto dell'arco BC, e questa non potrà essere che nel comun punto B: e però amendue gli archi BI, BC e la retta BE hanno al punto B la medesima direzione; ma dove è la medesima direzione non si forma angolo, adunque ec. ec.

Dico inoltre col Galileo, in primo luogo, che quando due cerchi si toccano per di fuori, una sola retta linea e non più si può tirare per lo punto del lor contatto fra le circonferenze, la quale non le seghi; e questa è la tangente qualunque de' cerchi a quel punto stesso del contatto; adunque la quantità dell'angolo fatto dalle dette circonferenze è tanta quanta è la quantità della larghezza di quella sola retta tangente che passa fra di esse, che è lo stesso che dire, quest'angolo non ha quantità. L'angolo poi formato dalla retta tangente e da una sola delle dette circonferenze sarà quanto è la metà della larghezza della medesima retta tangente, cioè similmente sarà non quanto.

Secondariamente, che d'ogni angolo rettilineo quanto se ne può assegnare un minore, sicchè quell'angolo, che di tutti i rettilinei quanti è minore, bisogna ch'e' sia non quanto; ma il minor di tutti i rettilinei quanti è quello che si fa dalla circonferenza del cerchio e dalla retta linea tangente, per la prop. 16 del terzo libro d'Euclide; adunque tal angolo è non quanto, cioè non è angolo, ma impropriamente così detto.

Oltre all' addotte, altre ragioni vi sarebbero per confermare il non essere di siffatto angolo: ma parendomi in fine tal disputa, come dir sogliamo, di lana caprina, chiunque ha più genio alle controversie di cose frivole (che di questi il mondo letterato pur troppo abbonda) che alla sodezza delle verità irrefragabili matematiche, potrà veder a piacer suo ciò che negando o affermando ingegnosamente ne scrissero, oltre a' mentovati autori, il Cardano, il Peletario, il Clavio, il Tacquet, ed altri celebri matematici, che non vi mancano, e per tal guisa tentar d' estinguere, se non accender vie più, questa sete, ch' io per me in materie simili stimo sete d' infermo più che di sano, la quale appagata, suol bene spesso più tosto offenderlo che ristorarlo.

CONSIDERAZIONE

SOPRA IL GIUOCO DEI DADI (1).

Che nel giuoco dei dadi alcuni punti sieno più vantaggiosi di altri, vi ha la sua ragione assai manifesta, la quale è il poter quelli più facilmente e più frequentemente scoprirsi che questi, il che depende dal potersi formare con più sorte di numeri: onde il 3 e il 18, come punti che in un sol modo si posson con tre numeri comporre, cioè questi con 6. 6. 6 e quello con 1. 1. 1, e non altrimenti, più difficili sono a scoprirsi che v. g. il 6 o il 7, li quali in più maniere si compongono, cioè il 6 con 1. 2. 3 e con 2. 2. 2 e con 1. 1. 4, ed il 7 con 1. 1. 5, 1. 2. 4, 1. 3. 3, 2. 2. 3. Tuttavia ancorchè il 9 e il 12 in altrettante maniere si compongano in quante il 10 e l'11, perlochè d'egual uso dovriano esser reputati, si vede nondimeno che la lunga osservazione ha fatto dai giuocatori stimarsi più vantaggiosi il 10 e l'11 che il 9 e il 12.

E che il 9 e il 10 si formino (e quel che di questi si dice intendasi de' lor sossopri 12 e 11), si formino, dico, con pari diversità di numeri, è manifesto; imperocchè il 9 si compone con 1. 2. 6, 1. 3. 5, 1. 4. 4, 2. 2. 5, 2. 3. 4, 3. 3. 3, che sono sei triplicità, ed il 10 con 1. 3. 6, 1. 4. 5, 2. 2. 6, 2. 3. 5, 2. 4. 4, 3. 3. 4, e non in altri modi, che pur son sei combinazioni. Ora io, per servire a chi m'ha comandato che io debba produr ciò che sopra tal difficoltà mi sovviene, esporrò il mio pensiero, con speranza, non solamente di sciorre questo dubbio, ma di aprire la strada a poter puntualissimamente scorger le ragioni, per le quali tutte le particolarità del giuoco sono state con grande avvedimento e giudizio compartite ed aggiustate. E per condurmi colla maggior chiarezza

(1) L'autografo di questa scrittura, edita già nelle precedenti edizioni delle Opere, si ha nei MSS. Palatini, Par. VI, Tom. 3.

che io possa al mio fine, comincio a considerare come essendo un dado terminato da sei faccie, sopra a ciascuna delle quali gettato, egli può indifferentemente fermarsi; sei vengono ad essere le sue scoperte e non più, l'una differente dall'altra. Ma se noi insieme col primo getteremo il secondo dado, che pure ha altre sei faccie, potremo fare 36 scoperte tra di loro differenti, poichè ogni faccia del primo dado può accoppiarsi con ciascuna del secondo, ed in conseguenza fare 6 scoperte diverse; onde è manifesto, tali combinazioni esser sei volte 6, cioè 36. E se noi aggiugneremo il terzo dado, perchè ciascuna delle sue faccie, che pur son sei, può accoppiarsi con ciascuna delle 36 scoperte delli altri due dadi, avremo le scoperte di tre dadi esser sei volte 36, cioè 216, tutte tra di loro differenti. Ma perchè i punti dei tiri di tre dadi non sono se non 16, cioè 3. 4. 5 sino a 18, tra i quali si hanno a compartire le dette 216 scoperte, è necessario che ad alcuni di essi ne tocchino molte; e se noi ritroveremo quante ne toccano per ciascheduno, averemo aperta la strada di scoprire quanto cerchiamo, e basterà fare tale investigazione dal 3 sino al 10, perchè quello che converrà a uno di questi numeri, converrà ancora al suo sossopra.

Tre particolarità si debbon notare per chiara intelligenza di quello che resta: la prima è, che quel punto dei tre dadi, la cui composizione risulta da tre numeri eguali, non si può produrre se non da una sola scoperta, ovvero tiro di dadi; e così il 3 non si può formare se non dalle tre faccie dell'asso, ed il 6, quando si dovesse comporre con tre dui, non si farebbe se non da una sola scoperta. Seconda: il punto che si compone dai tre numeri, due de' quali sieno i medesimi e il terzo diverso, si può produrre da tre scoperte, come v. g. il 4, che nasce dal 2 e dalli due assi, può farsi con tre cadute diverse, cioè quando il primo dado scuopra 2 e il secondo e terzo scuoprano asso, o scuoprendo il secondo dado 2 e il primo e il terzo asso, o scuoprendo il terzo 2 ed il primo e secondo asso. E così v. g. l'8, in quanto resulta da 3. 3. 2, può prodursi parimente in tre modi; cioè scuoprendo il primo dado 2 e li altri 3 per uno, o scuoprendo il secondo dado 2 ed il primo e terzo 3, o finalmente scuoprendo il terzo dado 2 ed il primo e secondo 3. Terza: quel numero di punti che si compone di tre numeri differenti, può prodursi in sei maniere; come per esempio, l'8, mentre si compone da 1. 3. 4, si può fare con sei scoperte differenti; prima, quando il primo dado faccia 1, il secondo 3 e il terzo 4; seconda, quando il primo dado faccia pur 1, ma il secondo 4 e il terzo 3; terza, quando il secondo dado faccia 1, e il primo 3 e il terzo 4; quarta, facendo il secondo pur 1, e il primo 4 e il terzo 3; quinta, quando facendo il terzo dado 1, il primo faccia 3 e il secondo 4; sesta, quando sopra l'1 del terzo dado, il primo farà 4 e il secondo 3. Abbiamo dunque sin qui dichiarati questi tre fondamenti: primo, che le triplicità, cioè il numero delle scoperte dei tre dadi, che si compongono da tre numeri eguali, non si producono se non in un modo solo; secondo, che le triplicità che nascono da due numeri eguali e dal terzo differente, si producono in tre maniere; terzo, che quelle che nascono da tre numeri tutti differenti, si formano in sei maniere. Da questi fondamenti facilmente raccorremo in quanti modi, o vogliam dire in quante scoperte differenti si posson formare tutti i numeri dei tre dadi, il che per la seguente tavola facilmente si comprende; in fronte della quale sono notati i punti dei tiri dal 10 in giù sino al 3, e sotto essi le triplicità differenti, dalle quali ciascuno di essi può resultare, accanto alle quali son posti i numeri secondo i quali ciascuna triplicità si può diversificare, sotto i quali è finalmente raccolta la somma di tutti i modi possibili a produrre essi tiri; come per esempio,

1
3
6
10
15
21
25
27
———
108
108
———
216

10		9		8		7		6		5		4		3	
6 3 1	6	6 2 1	6	6 1 1	3	5 1 1	3	4 1 1	3	3 1 1	3	2 1 1	3	1 1 1	1
6 2 2	3	5 3 1	6	5 2 1	6	4 2 1	6	3 2 1	6	2 2 1	3				
5 4 1	6	5 2 2	3	4 3 1	6	3 3 1	3	2 2 2	1						
5 3 2	6	4 4 1	3	4 2 2	3	3 2 2	3								
4 4 2	3	4 3 2	6	3 3 2	3										
4 3 3	3	3 3 3	1												
	27		25		21		15		10		6		3		1

nella prima casella abbiamo il punto 10 e sotto di esso sei triplicità di numeri con i quali egli si può comporre, che sono 6. 3. 1, 6. 2. 2, 5. 4. 1, 5. 3. 2, 4. 4. 2, 4. 3. 3. E perchè la prima triplicità 6. 3. 1 è composta di tre numeri diversi, può (come sopra si è dichiarato) esser fatta da 6 scoperte di dadi differenti; però accanto ad essa triplicità 6. 3. 1 si nota 6, ed essendo la seconda 6. 2. 2, composta di due numeri eguali e di un altro diverso, non può prodursi se non in 3 differenti scoperte, però se gli nota accanto 3; la terza triplicità 5. 4. 1, composta di tre numeri diversi, può farsi da 6 scoperte, onde si nota col numero 6, e così dell'altre tutte, e finalmente a piè della colonnetta de' numeri delle scoperte è raccolta la somma di tutte: dove si vede come il punto 10 può farsi da 27 scoperte di dadi differenti, ma il punto 9 da 25 solamente, e l'8 da 21, il 7 da 15, il 6 da 10, il 5 da 6, il 4 da 3 e finalmente il 3 da 1, le quali tutte sommate insieme ascendono al numero di 108. Ed essendo altrettante le scoperte dei sossopri, cioè dei punti 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18 si raccoglie la somma di tutte le scoperte possibili a farsi colle faccie dei tre dadi, che sono 216. E da questa tavola potrà ognuno, che intenda il giuoco, andar puntualissimamente misurando tutti i vantaggi, per minimi che sieno, delle zare, degl' incontri e di qualunque altra particolar regola che in esso giuoco si osserva.

RISPOSTA AL PROBLEMA

ONDE AVVENGA CHE L'ACQUA A CHI V' ENTRA APPAJA PRIMA FREDDA E POI CALDA PIÙ DELL'ARIA TEMPERATA

Proposto a Galileo da Pietro Bardi de' Conti di Vernio (1).

È ben degno dell'acutezza dell'ingegno di V. S. Illustrissima il Problema che l'altr'jeri ella messe in campo, alla presenza di quei nobilissimi gentiluomini che furono ad onorare il mio piccolo tugurio che tengo nella villa d'Arcetri, e del quale mi domandò che io gli distendessi in carta la resoluzione, mentre che allora non era tempo d'interrompere parlando più giocondi ragionamenti. Farollo adesso, più per obbedire al suo comando che per isperanza che io possa arrecarle condegna soddisfazione.

La questione proposta da V. S. I. è, onde avvenga, che andando nella stagione caldissima per bagnarsi nel nostro fiume d'Arno, essendosi spogliata, e trattenendosi ignuda per qualche tempo in luogo ombroso in riva al fiume, dove non sente alcuna molestia nè di caldo nè di freddo, trattenendosi, come dico, ignuda e all'ombra, nell'entrare poi nell'acqua sente notabilissima e quasi insopportabile offesa di freddo; stata poi per qualche tempo nell'acqua, e assuefatta, per così dire, alla sua temperie, va comportando tal freddezza assai temperatamente. Uscita poi dell'acqua, e venuta sulla medesima ripa ombrosa, dove da principio stette in dolce temperie d'aria, sente ora estremo rigore di freddezza, e tale che l'induce a tremare assai gagliardamente; ma se di lì torna a rigettarsi nell'acqua, sente la temperie d'un bagno più tosto caldo che altrimenti, onde la medesima acqua coll'intervallo di breve tempo se le rappresenta ora molto fredda ed ora assai calda, e uscendone di nuovo fuora per andare a vestirsi, le è forza

(1) Di questo breve scritto, edito già nelle precedenti edizioni delle Opere, manca l'autografo.

grandemente tremare. Si ricerca adesso la cagione del rappresentarsi al nostro senso la medesima acqua, e nel medesimo luogo, gratamente calda, che poco avanti parve grandemente fredda.

La questione è assai bella e curiosa, e volendone investigare la ragione e conseguire scienza, andrò proponendo quei principj e manifeste nozioni, dalle quali cotal scienza depende, mostrando coll'esempio del presente progresso quanto sia vero il detto di Platone, che la nostra scienza non è altro che una certa ricordanza di proposizioni da noi benissimo intese, e per sè stesse manifeste. Queste proporrò io ordinatamente, e da lei e da ogn' altro so che saranno conosciute per vere e note. Dico pertanto, che se io domanderò a qualunque si sia, di senso e d' intelletto anche meno che mediocre, se mettendo egli la mano in un vaso pieno d' acqua, che per lungo tempo sia stato in una stanza ombrosa, ei sentirà l'acqua molto più fredda che l' aria della medesima stanza; so che risponderà di sì, e ciò non per mia dottrina, ma per sua propria cognizione. E nel secondo luogo se io gli domanderò, se una quantità d' acqua stata lungamente in luogo ombroso parrà al mio senso assai più fredda che l' altr' acqua, che per molte ore sia stata esposta a' più ardenti raggi del sole estivo, e massime se ella sarà poco profonda; sono parimente sicuro ch'ei risponderà, tal proposizione essergli manifestissima senza alcuno insegnamento d' altri. E se nel terzo luogo io l' interrogherò, se egli stima che una quantità di quell' acqua scaldata dal sole, trasferita nella stanza ombrosa, si raffredderà, ed anco in breve tempo, se ella sarà in poca quantità; non è dubbio che egli come cosa notissima l' affermerà. Passiamo ora avanti, ed essendo che l' eccesso del freddo d' una quantità d' acqua sopra il freddo dell' aria posta nel medesimo luogo è grandissimo, assegni V. S. quel numero che più le piacerà dei gradi di freddo all' acqua, e quale le pare all'aria: ed abbia per esempio l' acqua 20 gradi di freddo e l' aria ne abbia 4; è ben noto a ciascheduno che tra 20 e 4 cascano di mezzo altri numeri. Ora all' acqua di fiume che in poca profondità viene scorrendo sotto i raggi del sole, e che per conseguenza, riscaldata in parte, ritiene manco di 20 gradi di freddezza, glien'assegniamo v. g. 10; laonde, benchè men fredda dell' acqua ombrosa, ella è però più fredda dell' aria opaca, il cui freddo fu posto solo 4 gradi. Consideri adesso come, costituita ignuda nell'aria ombrosa che solo ha 4 gradi di freddo, si trova in tal temperie che entrando nell' acqua, la quale, benchè assolata, ha tuttavia 10 gradi di freddo, sentirà notabile offesa sopra quella che sentirà dall' aria. Consideri poi come, uscendo dopo qualche tempo dell' acqua assolata, entra nell' aria ombrosa, ma bagnata e coperta d' un sottil velo d'acqua, il quale, per sua concessione, prestissimo si raffredda e si riduce a 20 gradi di freddezza, che è quella che si è assegnata all' acqua posta in luogo ombroso.

Trovasi adunque in tale stato circondato da 20 gradi di freddo; ben dunque è per sè stesso manifesto, che se allora si getterà nell' acqua assolata, spogliandosi 10 gradi della freddezza che la circonda, goderà una temperie assai grata, cioè quella dell' acqua assolata. Ridotto dunque tutto il discorso in brevi parole, scorgesi, tal diversità derivare dalle due differenti relazioni, cioè, che nella prima entrata nell' acqua ella si parte dall' aria che ha poca freddezza, cioè 4 soli gradi, ed entra nell' acqua, la quale in comparazione dell' aria ne ha molta, cioè 10 gradi; ma nel secondo ingresso ella si trova circondata da 20 gradi di freddezza, che tale è l' acqua posta in ombra, della quale ella è bagnata, e che per la sua sottigliezza repentinamente, posta in ombra, si raffredda, ed entra nell' acqua assolata assai men fredda.

NOTE.

Lo scioglimento di questo problema è ingegnosissimo, nè più sottile poteva inventarsi in que' tempi, ne' quali per non essere in uso i termometri, sicuri giudici del caldo e del freddo, conveniva fidarsi dei sensi, i quali ingannevolmente rappresentano ciò che in fatti non è tale. Il Sig. Dott. Giuseppe del Papa, nel suo dottissimo libro dell' umido e del secco, valendosi di squisiti termometri, ci ha insegnato non esser vero altrimenti che l' acqua esposta per tempo considerabile al sole sia più fredda dell' aria esposta al medesimo per altrettanto tempo, anzi che è molto più calda, e ciò addiviene per aver ella maggior corpulenza e densità, per cui trattiene in maggior copia i raggi del sole, e si riscalda più dell'aria, come vediamo accadere quando ambidue questi corpi si espongono al fuoco. La vera cagione di questo e molti altri somiglianti accidenti viene acutamente dal Signor Papa attribuita allo spogliarci noi, o rivestirci di quel vapore assai caldo, di cui continuamente gode la nostra cute per le molte particelle del fuoco, le quali traspirano da tutto il corpo continuamente. Questa calda traspirazione che sempre si trova sopra le nostre carni, perchè gode del caldo dell'aria ambiente, e in oltre riceve non pochi ignicoli che esalano dall'interno, dee necessariamente esser più calda dell'ambiente, onde se con un ventaglio si dà moto all'aria, sì che rada e tolga via questo vapore o traspirazione che stava al contatto della cute, quantunque in luogo di lei succeda l'aria assai calda, come segue d'estate, nondimeno sentiamo refrigerio, perchè questo caldo ambiente succede in luogo della traspirazione più calda di lui, e perciò pare più freddo. L'acqua parimente, e qualunque altro liquido, quando sarà men calda dell'ambiente che è al contatto delle nostre carni, produrrà in noi quell'affezione che chiamiamo freddo o freschezza, poichè ci spoglierà di questo vapore o traspirazione da cui siamo fasciati, e succederà in suo luogo; e per dar regola di ciò che sia per apparirci o caldo o freddo, conviene far paragone fra questo caldo vapore che da noi traspira, e il liquido che ce ne spoglia e n'occupa il luogo, venendo al contatto del nostro corpo. Perciò può accadere che ci paja caldo un ambiente rispetto ad un altro di cui in realtà sia più freddo, mentre quello non ci spogli della traspirazione, e all'incontro l'altro più caldo di lui, ma men caldo di questa, la scacci e ne occupi il luogo. Quindi dipendono molti effetti degni della curiosità d'un filosofo, la spiegazione de' quali si contiene nel libro mentovato, insieme con altre molte rare dottrine.

PARERE

SU DI UNA MACCHINA DA PESTARE [1]

Molti comodi e di grandissima utilità son provenuti in diverse arti manuali dagl' istrumenti meccanici, e altri se ne possono alla giornata sperare dai professori perfettamente intelligenti di essa scienza macchinatrice. E ho detto professori perfettamente intelligenti, perchè altri che s' applicano a nuove invenzioni, svegliati solamente da certo natural talento, ma privo delle ragioni matematiche, le quali intrinsecamente dimostrano la natura dei primi e semplici strumenti, dei quali le altre macchine si compongono, possono facilmente restare ingannati nei loro pensieri, e spendere vanamente il tempo, le fatiche e i danari; e di questi il numero è grande; e sarà sempre di tutti quelli che credono con la loro arte poter defraudare la natura, cioè potere, o con minor fatica, o con minor dispendio di tempo, effettuare quelle operazioni che senza la macchina non potrebbono effettuare se non con più fatica o in maggior tempo, cosa che, assolutamente parlando, è del tutto impossibile. In questo errore (se non son io quello che erra) mi par che si trovi involto l' artefice, che avendo veduto quattro pistoni soli da polvere esser fatti lavorar da tutta la forza di un uomo, si è persuaso in virtù d'una sua macchina moltiplicar tanto la forza del motore ch' ei ne faccia lavorar sedici; e tanto maggiormente si è confermato in tal suo pensiero quanto che realmente ha fabbricato la macchina, e visibilmente ne mostra l' effetto; l' effetto, dico, di far andar sedici pistoni con la forza di un sol uomo. Ora scusando pri-

(1) Pubblicato la prima volta dal Venturi (*Memorie e Lettere* ec. pag. 349) dalla copia esistente in Palatina (Par. VI, T. 2) di mano di Cosimo nipote di Galileo, tratta, come ivi è detto, dalla bozza originale dello stesso Galileo. Forse questo è quel *Frammento di parere o risposta del Galileo a quesito meccanico*, del quale il Viviani dice aver ricevuto copia dal Signor Cosimo nipote del Galileo. (*Scienza delle proporzioni*, pag. 104).

mieramente la fallacia dell'artefice, dependente in vero da una molto probabile apparenza, cercherò, comandato da chi sopra di me tiene assoluto imperio, di scoprire la fallacia, traendo insieme l'artefice d'errore. E facendo principio da una proposizione, che può parere nel primo aspetto molto stravagante, dico che quei pestatori, che l'artefice mi dice lavorar, quello con quattro pistoni, quello con sedici, e l'altro, se vi fusse, con cento, non è vero che uno pesti con quattro, l'altro con sedici e il terzo con cento, ma tutti pestano con un piston solo, e non più. Ed è come se due pestando, uno desse i colpi sempre con il medesimo pistone, e l'altro ad ogni colpo lo scambiasse: dove gran semplicità sarebbe il dire (per quanto appartiene all'opra del pestare o poco o assai) che uno pesta con un pistone solo, e l'altro verbigrazia con quattro, e che per ciò questo fa quattro volte più lavoro di quello. Vero sarebbe questo quando costui alzasse li quattro pistoni tutti insieme, e che con essi desse le bôtte così frequenti quanto l'altro con quel solo. Avverta dunque l'artefice che la multiplicazione del lavoro non consiste nella moltitudine dei pistoni, ma nella frequenza delle pestate; che tanto lavora un piston solo quanto mille, tutta volta che il solo darà mille colpi in quel medesimo tempo, che i mille ne daranno un per uno. Ora venendo alla sua macchina, con la quale mi dice far lavoro per quattro di quell'altre, atteso che con la forza di un uomo fa andar li suoi sedici pistoni, e l'altra quattro solamente; dico che, come ei non vuol altro, io farò che il medesimo uomo ne faccia andar non solamente sedici, ma venti, trenta e quaranta con l'ampliare la ruota della volanda, ingrossare l'asse e crescere il numero de' suoi denti, che l'uno dopo l'altro successivamente alzano i pistoni; questo effetto, dico, lo farò io ed esso ancora, ma non creda per questo di accrescere l'effetto del pestare il carbone o salnitro in maggior quantità dentro il medesimo tempo. Per crescer l'opra bisogna crescere non il numero dei pistoni, ma il numero delle pestate. Se dunque e' vuol che io intenda ed affermi che la sua macchina dei sedici pistoni opri quattro volte più dell'altra dei quattro, bisogna che mi faccia vedere che nel tempo medesimo che l'altra fa dare una bòtta per uno ai suoi sedici, che è il medesimo che dire che nel tempo che la piccola ruota dell'altra macchina dà una volta, anco la sua grande ne dia parimente una. Che quando, per la minore resistenza, il motor facesse dare quattro girate alla piccola ruota, mentre che la grande ne desse una sola, l'operazione sarebbe del pari, perchè le bôtte sarebbono sedici tanto dell'una quanto dell'altra macchina; e così son sicuro che succederà l'effetto, quando la volanda de' quattro pistoni sia fatta con la debita proporzione rispetto all'uso suo, che è di moderare i vuoti de' denti dell'asse in quelli de' pistoni, sì che meno ne vengano offese le braccia del movente. Anzi voglio mettere in considerazione all'artefice, che il pensiero suo di agevolare ancora più l'operazione con il crescere e di grandezza e di peso la volanda, è per mio credere per partorire effetto tutto contrario alla sua intenzione; il che dichiarerò così. Due sono le resistenze che si hanno a muovere, l'una è dei pistoni, e l'altra è della volanda: quella dei pistoni non si accresce o diminuisce per crescere o scemare il lor numero, tutta volta però che se ne abbia da alzare uno per volta, che così tanto è che i pistoni siano uno quanto venti. Resta dunque la considerazione della volanda, la quale essendo figurata in una ruota che ha da girare sopra il suo asse, può essere più o meno resistente, secondo che ella sarà più grave o più grande; perchè di due ruote del medesimo peso, ma l'una di maggior diametro dell'altra, la maggiore resisterà più al moto, e dalla medesima forza verrà mossa più tardamente, in quel modo che per ritardare il tempo dell'oriuolo basta allontanare i due piombi dal centro. Di quelle poi di egual grandezza, ma diseguali però nel peso, la più grave verrà dalla medesima forza mossa più lentamente; ora mentre l'artefice voglia ampliare ancora più la sua gran ruota, ed aggravarla con altri piombi, farà che ella necessariamente non si muoverà se non tardamente, che è l'istesso che dire che i pistoni in molto tempo daranno manco bôtte.

PENSIERI

SULLA CONFRICAZIONE (1).

Un corrispondente di Galileo suppone una palla grave liscia appoggiata sopra il centro della base superiore orizzontale d' un cilindro retto, essa pur liscia: in tal caso facendo rotare il cilindro intorno al suo asse verticale, pretende che la palla debba rimanere senza movimento, perchè essa non tocca il cilindro sottoposto se non in un punto immobile, che è l' estremità dell' asse del cilindro. Galileo risponde:

La verità di tal conclusione presa in astratto non veggo che si possa negare, ma perchè mi par che V. S. la pigli in concreto, trattando di materie gravi realmente, come sassi e metalli, dubito grandemente che il negozio fusse per succedere altrimenti, e ciò non solo quando l' incumbente solido fusse un prisma o cubo, com'ella pone nel secondo luogo, ma anco nell' istessa figura sferica. Imperocchè sia pur essa sfera di materia quanto si voglia dura, come di bronzo o di porfido, ed il piano medesimamente del cilindro terso e durissimo, nel posar la sfera sopra tal piano gravata dal proprio peso non resterà con un contatto di un punto indivisibile, ma o incaverà la superficie del cilindro, o ammaccherà la propria, o farà l' uno e l' altro; il quale accidente io argomento dall' esperienza, mentre veggo palle di porfido cadenti da alto sopra piani durissimi ribalzare gagliardamente, argomento che, sì come accade nel pallone ben gonfiato, la superficie di tal palla si riflette alquanto, ed anco quella del piano soggetto, nel ritorno delle quali due superficie al lor pristino stato, disfacendo l' arco e l' inflessione, sospingono in alto essa palla: la quale, accompagnata dall' impeto guadagnato nello scendere da alto, fece ammaccature nella propria superficie e nel piano

(1) Pubblicati la prima volta dal Venturi (pag. 351) da una copia, dice egli, di Vincenzo Galilei. La Palatina peraltro ne possiede l' autografo in un foglio del Tom 2 della Parte VI dei MSS. Galileiani.

soggetto maggiori che non fa nel solo posarvisi con la propria gravità; ma pur anco con questa ve le fa, sì che occupando il contatto di tal palla non un sol punto, ma una superficie circolare, ed essendo di più la palla così convolubilissima circa al proprio centro, io tengo per fermo che alla conversione del cilindro, e massime quando il moto fusse tardissimo, essa palla ancora si lascerebbe trasportare.

L'istesso e molto più stimo che accaderebbe del cubo o parallelepipedo posati sopra il medesimo cilindro, e questo mediante la confricazione delle due superficie, la qual non veggo che si possa far tanto debole, che si riduca come s'ella non vi fusse, e come se le due superficie non si toccassero: il che mi par che si possa argomentar da questo, che se noi intenderemo una superficie pulitissima, come, verbi grazia, d'uno specchio, piana e situata orizzontalmente, sopra la quale sia posata una palla perfettissima, e un dado parimente pulitissimo, quando tal superficie inclinandosi, benchè pochissimo, si rimuova dall'esser parallela all'orizzonte, la palla scenderà senza dubbio, ma non così farà il dado. E questo perchè la palla girando andrà mutando sempre contatto senza alcuna confricazione; ma il dado, non potendo scendere senza che una delle sue facce vada continuamente confricandosi con quella dello specchio, credo che troverà per tal confricazione intoppo; e quando ciò sia, posato sopra il cilindro si lascerà trasportare, non potendo esser che la confricazione si faccia senza resistenza nessuna. Parmi anco che, trattandosi di corpi materiali sottoposti a vari accidenti, oltre al peso e alla figura si devano porre essi ancora in considerazione: imperocchè oltre alla scabrosità o politura di superficie, per le quali agevolmente o con resistenza possono soffregarsi, veggiamo gran differenza derivare dall'essere tali superficie, mercè di qualche vapore oleoso che le rende lubriche, o di qualche altro acido che le allega, esser quelle pochissimo resistenti e queste assaissimo alla confricazione. Guardisi qual differenza è tra la lubricità della pelle dell'anguilla e la resistenza al tagliare d'un coltello, che abbia solamente tagliato qualche frutto, e massime agro.

Quanto segue qui sotto è in due versi, di carattere minutissimo, nel margine superiore di questa scrittura:

La sfera sopra un piano ad ogni piccola inclinazione scende, ma non così una piastra, segno dell' aderenza di tutte le parti. Nota la differenza tra la confricazione delle parti e la revoluzione, dove sempre si muta contatto: il mobile cede alla confricazione, e però la sfera si moverà al moto del cilindro, e molto più il cubo.

AVVERTENZA

INTORNO

IL CAMMINARE DEL CAVALLO (1).

Nelle molte delizie per le quali si rende Napoli tra le altre città d'Italia ragguardevole, non sono di minore stima l'acque del Formale (2), le quali non solo alla sete degli abitanti con diletto soccorrono, ma quelli ancora mandano a torle, che e per diversi mari e per alpi diverse ne sono più lontani, non perchè di acque siano bisognosi, e ma per di quelle abbeverarsi più saporitamente. Conservano queste credito per lunghezza di secoli, ed i napoletani non pure godono di loro salute, purità e freschezza, ma di avere un sì ricco dono della natura se ne vanno sopra le altre nazioni e gloriosi e altieri. Ora s'egli avvenisse che qualche valente empirico ritrovasse con sue distillazioni ch'elle ritengono qualche materia che alla nostra complessione è nociva, con quanto ritegno bisognerebbe ch'egli ciò palesasse! Quai romori da' paesani si leverebbono contro di lui, vedendo da tali non pensati distillamenti privarsi nell'avvenire del gusto che sin qui avevano goduto, ed esser loro stato messo nel capo uno scrupolo di aver colto, come si dice, co' fiori il serpente! Farebbe ben di

(1) Edita già dal Venturi, Parte II, pag. 353, dal Cod. 2, Parte VI dei MSS. Palatini, in testa alla quale scrittura si legge:

« *Del Signor Pier Francesco Rinuccini, saggio fatto ad istigazione del Galileo cieco per introduzione all'esame sopra del trattato di Aristotile* de Incessu Animalium, *che esso Galileo voleva pubblicare* ». Noi riportiamo questo Saggio, non altrimenti da quel che ha fatto il Venturi, come cosa di Galileo, perchè, se non le parole, certamente sono di lui i concetti, tanto più che dalla sua lettera del 7 Maggio 1610 a Belisario Vinta (Tom. VI, pag. 96) e da quella del 23 Gennajo 1638 a Elia Diodati (T. VII, p. 208) abbiamo testimonianza come sempre volgesse in animo di scrivere intorno questa materia.

(2) I luoghi dentro Napoli destinati a raccogliere le acque per uso della vita diconsi nel paese *Formali*. Tali acque sono condotte in Napoli dal Vesuvio, da S. Agata, da Caserta.

mestiero all' alchimista averne più che certa e sicura la prova, per salvarsi dal furore del popolo, che di tante perdite in una perdita si dorrebbe. Non dissimile accidente sarà da temersi da chi che sia, che arrisicandosi a sottilmente esaminare i detti degli antichi filosofi, e sopra tutti quelli del Maestro di color che sanno, si abbatterà a cosa ritrovarvi, che sia lontana dal vero. Tacerla, più sarebbe forse a suo pro, e imparar da Cam e da Atteone esser sempre disvantaggioso di scoprir l' altrui vergogne; ma se forza di verità gli sciogliesse la lingua, e la natura a vendicare i suoi oltraggi lo chiamasse, perchè negherà la voce che da lei ebbe, se ella al figliuolo mutolo di Creso la rese perchè il padre dell' imminente pericolo facesse avvertito? Dire è meglio quando il fine è buono: e quale può essere o migliore o più lodevole che scoprire un veleno che in una fonte pubblica si nascondesse, dove tutto il mondo corre a bere senza alcun riguardo? Tali sono gli scritti di Aristotile, cioè fontane esposte al pubblico, ove l'umano legnaggio a gara si lancia per bere avidamente i dogmi filosofici. Laonde se altri scoprirà quell' acque limpidissime, riputate pure e sincere, non esser del tutto da ogni immondizia purgate, e molto mescolarvisi di fango, con quali strida sarà assalito, qual tumulto contro di lui non meno dai fontanieri che da' bevitori solleverassi? Maggiore al sicuro di quello che l' immaginazione possa rappresentare al pensiero. Sarà dunque lodevole tacersi dove con tanto rischio si ha da comprare la salute di chi ha per male il guarire? Non si ha da tacere. Mettiamo dunque alquanto dell' acqua peripatetica, e distillatala veggiamo se è così pura e netta, chente altri la ci ha dipinta. Pigliamo dove egli tratta del camminare degli animali, e prima esaminiamo quel luogo dove del cavallo prende a ragionare.

Dice Aristotile che il camminare del cavallo non si fa, nè può farsi altrimenti che movendo i piedi in maniera, che vengano come ad incrociarsi; cioè, a dirlo più chiaramente, che quando si muove, verbi grazia, il piede diritto dinanzi, si muove di dietro nell' istesso tempo il manco o sinistro. Imperciocchè, se il cavallo movesse tutti e due i piedi dall'istessa banda nell' istesso tempo, gli sarebbe forza cadere, mancandogli quell' appoggio del quale per sostenersi ritto l' ha provveduto la natura. Sin qui Aristotile; al quale dentro ogni termine di riverenza rispondendo, dimando così: da qual cagione avete voi creduto esser derivato, che voi non cascassi ogni volta che voi vi metteste a camminare? perchè io non credo che voi andaste per le strade soltanto a piè pari; e se voi non facevate così, o non vi faceste portare, vi era duopo, volendovi muovere, muover prima l' uno dei piedi, cioè spogliare del suo sostegno interamente tutta quella parte, cioè cascare. Forse dal non cascare vi fiancheggiava la ragione, della quale sono manchevoli i cavalli? Oh se questa vale a poter trasgredire, movendosi, le inviolabili leggi della natura, perchè non ci moviamo noi, o senza piegar le ginocchia, o posati sopra piano non sodo e stabile, ma per l' aria, o sulla superficie dell' acqua, o sulle cime delle biade? Ma se egli osservando gli animali non istimò conveniente ad uomo filosofo rivolgere gli occhi in sè stesso, doveva almeno più attentamente fermarsi alla contemplazione di quelli; e se voleva insegnar come si movano i piedi di un cavallo che si move, bisognava prima imparare in quanti modi si move. Se così faceva, avrebbe veduto che tal volta si move con i piedi rispondentisi reciprocamente di traverso, come viaggiando egli aveva facilmente osservato; alle volte move insieme i due dalla medesima banda, come quei cavalli che *Chinei* o portanti sono chiamati. Talora alzano quei dinanzi uniti, quasi poi uniti strascinando quei di dietro, come nelle corbette addiviene; e sovente tutt' a quattro gli levano, e ciò quando vanno in capriole; talvolta ne leveranno anche un solo, e forse in altri modi; ma questi che si sono detti mi pare che siano a sufficienza, acciò si vegga quanto sia alla verità contrario il detto di Aristotile circa il moversi del cavallo. È forse vero che il cavallo caderebbe se movesse tutt' a due i piedi dalla medesima banda, e nell' istesso tempo, con intenzione di star fermo, ma si vede che così facendo piega a quella parte, e con lui fa piegare chi ci è sopra, e se l' ajuto degli altri due indugiasse male ne avverrebbe. Ma quel pronto soccorso rimedia ad ogni inconveniente. Nell' istessa maniera segue in tutti gli altri moti, talchè se Aristotile diceva: al cavallo che vuole star fermo conviene tener tutt' a quattro i piedi in terra: a mio parere avrebbe detto bene, non potendo star ritto naturalmente in altra maniera. Ma quando egli è in moto, la natura non gli ha limitato l' adoperar le gambe più in questa che in quell' altra guisa, come potrà veder chiunque si piglierà briga di andare a qualsivoglia cavallerizza, ed osservare in quanti modi mova ad un fischio di bacchetta il cavallo i piedi obbedienti.

THEORICA

SPECULI CONCAVI SPHÆRICI.

AVVERTIMENTO.

Questo lavoro inedito, e sinora ignorato, di Galileo si ha in un solo gran foglio contenuto nel Tomo 2 della Parte VI dei MSS. Galileiani, dove intorno alla figura, che, ridotta in proporzione minore della metà, noi riportiamo nella dodicesima ed ultima tavola del presente volume, è non solo apposta ad ogni linea e ad ogni punto la rispettiva illustrazione, ma si contengono altresì e l'Albero delle apparenze, e i Principj delle medesime, le quali cose tutte fedelmente qui trascriviamo.

È lavoro autografo di Galileo e nitidissimo, e da assegnarsi forse ai primi anni del suo ritorno da Padova a Firenze, nei quali, dalle lettere del Magini a lui dirette, possiamo argomentare essersi egli occupato in tale materia (1).

(1) Vedansi nel Tomo I delle lettere dirette a Galileo, quelle del Magini sotto il 28 settembre 1610 e 28 gennaio 1611, a pag. 106 e 133.

ARBOR APPARENTIARUM

QUÆ REPRÆSENTANTUR A SPECULO CONCAVO SPHÆRICO.

Speculi repræsentatio.

- **Cum prima luce solis**
  - Calorem in aere intendit ita ut
    - Comburat
      - alba.
      - nigra.
    - Lateres signet.
    - Plumbum in laminas diductum fluere faciat.
  - Calorem etiam ita remittit ut cognoscatur de hyeme et aestate per reflexionem.
  - Literas in pariete remoto legendas proponit.
- **Cum luce secunda**
  - Varias imagines, rectas, inversas, magnas, parvas, demonstrat.
    - Res multas integras.
    - Partes earum tantum, ut quando demonstrat unicum oculum aspicientis.
    - Et unius rei duas imagines in diversis locis.
  - Varia loca imaginum, quae sunt 5.
    - Ultra speculum.
    - Inter speculum et rem obiectam.
    - In loco rei obiectae.
    - Ultra rem obiectam, idest post illam, et tunc res obiecta est vicinior speculo quam sua imago.
    - Et in superficie speculi.
  - Situs permutatos, ut apparet in literis obiectis, ante, retro, sursum, deorsum etc.
  - Species esse sensu tactus perceptibiles, ut apparet ex gladii acie emissa, et lumine candelae, item ex nive aut glacie infrigidante per suam imaginem remote.
  - Sermonem et vocem reddit ut Eco, ita ut qui maxime distant, audiant, nisi surdastri fuerint: qui vero magis accedunt ad loquentem non audiant.
- **In tenebris**
  - Sole illuminante ea quae sunt extra depingit papyrum vel parietem pictura mirabili earum rerum, quae sunt extra.
  - Cum candelis aut facibus accensis efficit ut
    - Remote possint legi literae in loco obscuro, vel in noctu videantur quae fiunt in castris inimicorum.
    - Prope legantur literae lumine existente remoto.

PRINCIPIA OMNIUM

QUÆ VIDENTUR PER SPECULUM.

Speculi superficies polita, concava secundum determinatam concavitatem portionis debitae sphaerae, nam quantum cadit a debita proportione tantum minus repraesentat quae dicta sunt; hoc apparet per comparationem apparentiarum nostrorum Speculorum et illorum, quae ab artifice quodam facta fuerunt sine mensura.

Res objecta, quae dicitur etiam vera forma, et res visa; harum quatuor sunt species: Sol; luminosa corpora candelarum aut hujusmodi alia; prospecta illuminata; et quaecunque aliae res visibiles.

Linea incidentiae verae formae; haec est linea quae defert simulacra rerum ad Speculi superficiem.

Linea contingentiae dicta, omnibus punctis Speculi applicabilis: verum haec linea applicatur ultimis punctis superficiei, quia ex tali situ fit ultima apparentia.

Semicirculus gradibus distinctus pro mensura angulorum.

Anguli ad has omnes apparentias requisiti, et sunt maxime necessarii, quia ex illis pendent omnia quae apparent: horum species sunt duae, namque alii sunt incidentiae, alii reflexionis, qui semper sunt aequales et permutabiles, ita ut ex angulo incidentiae possit fieri angulus reflexionis, et e converso. Isti anguli aut continentur a linea incidentiae et contingentiae, et sunt anguli incidentiae, vel a linea reflexionis et contingentiae, et sunt anguli reflexionis.

Situs verae formae respectu Speculi variatus alios atque alios angulos incidentiae facit, ex quo sequitur ut anguli reflexionis varientur.

Linea quae transit per centrum, dicta cathetos incidentiae, quae imaginatur extendi ultra Speculum, et ex ea et loco imaginis viso ultra Speculum concludit ratio, visum fieri necessario per species intentionales, quia talis apparentia non potest fieri nisi per virtutem sensitivam.

Locum imaginis semper esse in duabus lineis necessario, quod probat Vitellio in V proposit. 37; et ex apparentiis quae sequuntur hoc principium concludit ratio, species ab objectis multiplicatas esse reales: sunt autem praedictae lineae ea quae reflexionis dicitur, et quae cathetos incidentiae nominatur; in his apparet imago de necessitate.

Duabus praedictis lineis existentibus parallelis, locus imaginis est in linea transversali conjungente puncta duarum ad angulos rectos; et quia in hac apparentia calor apparentis ignis intenditur, ex hoc principio apparet multiplicatio accidentium substantiae verae formae non semper fieri per congregationem radiorum, non enim congregantur radii .... duae lineae praedictae, quia a catheto incidentiae recedunt.

DECLARATIO

LINEARUM LOCORUMQUE SCHEMATIS SPECULI.

Linea A. — Haec linea potest repraesentare Solis radios, et reflexionem luminis candelae, unde imago luminis candelae apparet tantae magnitudinis quantum est Speculi superficies. — Eadem linea repraesentat radios Solis, qui semper occurrunt rebus inferioribus secundum aequidistantiam, non obstante quod Sol sit longe major ipsa terra, et per consequens omnibus rebus quae sunt minores ipsa terra, ut est Speculum; facit hanc apparentiam incompraehensibilis *magnitudo* corporis Solis; nam res in illuminatione proinde se habent ac se haberent parietes domorum erecti ad perpendiculum super terram, qui sunt aequidistantes secundum sensum propter terrae magnitudinem, non sunt autem revera aequidistantes propter centrum ad quod tendunt perpendicula; eadem de causa Solis radii occurrunt rebus inferioribus secundum aequidistantiam: nam ex 35 propositione II Vitellionis omnes radii ab uno puncto exeuntes accedunt ad aequidistantiam quando elongantur a corpore luminoso. Occurrunt itaque secundum aequidistantiam ut linea repraesentat.

Linea B. — Haec linea habet duplicem comparationem ad Speculum: 1.° quidem ut linea incidentiae, et tunc imago hujus incidentiae apparet extra Speculum in aere inter rem objectam et Speculum: 2.° comparatur ut reflexio, quando scilicet forma objecta Speculo est in linea, quae huic correspondet, et in tali comparatione imaginem defert ultra rem objectam; quod certe est omni admiratione dignum his, qui causam nesciunt hujus apparentiae.

Linea C. — Haec linea, cum sit perpendicularis ad lineam contingentiae Speculi, reflectitur in se ipsa, ideo imago apparet in loco rei;

Linea D. — Haec linea repraesentat imaginem inter Speculum et rem objectam, et potest etiam esse linea incidentiae verae formae; tunc autem imago debet apparere ultra veram formam.

Linea E. — Haec linea habet duas comparationes ad ipsum Speculum: 1.ª est ut sit linea refractionis radiorum Solis, et tunc comburet: 2.ª est ut sit prima incidentia candelae, et tunc sua linea reflexa apparere facit imaginem luminis candelae in superficie Speculi, et potest calefacere per remotam distantiam, et illuminare quidem clarissime, ita ut noctu legantur literae.

Linea F, *sive linea punctorum a perpendiculari usque ad centrum Speculi.* — In hac linea nunquam potest apparere aliqua imago verae formae, quia imagines earum semper apparent ultra Speculum. Praeterea omnia videntur erecta, et dextra apparent dextra, et quando verae formae occurrunt Speculo imagines accedunt ad Speculum, et recedunt formis veris recedentibus a Speculo.

Locus 1. — Est locus concursus omnium radiorum Solis, ubi plumbum colliquatur et lapides comburentur, quando Sol est clarissimus. In hoc loco omnia confunduntur, quia permutantur sursum deorsum.

Locus 2. — Est locus apparitionis imaginis inter Speculum et rem objectam. Usque ad locum concursus radiorum omnia videntur inversa sursum deorsum, et imagines moventur versus veras formas motas versus Speculum, receduntque imagines a formis veris, illis recedentibus a Speculo.

Locus 3. — Est locus imaginis in loco rei. Centrum Speculi ubi imagines apparent cum rebus, quarum sunt imagines, et in quo non possumus videre nisi unum oculum.

Locus 4. — Est locus imaginis ultra rem objectam.

Locus 5. — Est locus imaginis in ipsa Speculi superficie apparentis, et potest se extendi in remotam distantiam, quia non determinatur puncto, sed procedit per aequidistantiam.

PROBLEMI VARJ.

AVVERTIMENTO.

In quel brano di lettera di Galileo a Elia Diodati, del 23 Gennaio 1638, conservatoci dal Viviani, che noi abbiamo recato a pag. 208 del Tomo VII della presente edizione, si legge:

« Quanto poi alle altre mie fatiche, sappia V. S. che io ho *buon* » *numero di Problemi e questioni spezzate, tutte al mio consueto nuove,* » *e con nuove dimostrazioni confermate.* . . . . . e queste saranno, s'io » non m' inganno, d' una gustosa e curiosa lettura ».

Il concetto qui espresso da Galileo non ebbe poi adeguata esecuzione; avvegnachè, come avverte lo stesso Viviani nel riportare il brano surriferito (1), nei quattro anni che ancora visse il grand'uomo fu incessantemente afflitto non solo dalla completa cecità e da frequenti e gravi malattie, ma da continue indisposizioni solite accompagnar la decrepità; ond' è ch' ei non potè applicarsi di proposito a dettare e distendere questo residuo delle sue speculazioni, massimamente che dovendosi egli servire degli occhi altrui, non quelli di ciascheduno erano atti a supplire alla di lui impotenza, ma si richiedevano quei di persona, la quale non solamente gli fosse amorevole, ma libera di poter convivere con lui nel luogo della sua relegazione, ed ancora (quanto ogn' altra cosa) erudita e ben instrutta nelle matematiche e nelle filosofiche discipline, affinchè, appena ch' egli avesse spiegato il concetto suo, l' amico poi, nel distenderlo, fosse stato abile a dargli forma convenevole e perfezione.

Ben è vero che nei detti ultimi quattro anni della sua vita intese Galileo a più e diversi altri lavori, i quali siam venuti recando nel corso della presente edizione; ma ciò stesso menomò d'avvantaggio il poco tempo ch' egli avrebbe potuto dedicare alla esecuzione del su indicato disegno, del quale rimasero colorite soltanto alcune parti, che fra poco riporteremo, corrispondenti appunto ad alcune rubriche della

(1) Scienza Universale delle Proporzioni e Ragguaglio delle ultime opere di Galileo, pag. 86.

Selva, che ci è conservata fra i MSS. Palatini, di questi problemi o questioni spezzate, com' egli dice. E che veramente fosse concetto di Galileo il comporne un'operetta di *gustosa e curiosa lettura* si conferma da un' avvertenza, che si trova, nel mezzo della Selva stessa, concepita così:

Da porsi nel titolo del libro. — *Di qui si comprenderà in infiniti esempli qual sia l'utilità delle matematiche in concludere circa alle proposizioni naturali, e quanto sia impossibile il poter ben filosofare senza la scorta della geometria, conforme al vero pronunciato di Platone.*

Questa Selva, o sommario di problemi e questioni da trattarsi, si ha, di mano del Viviani, tra i MSS. Palatini nel Codice 3 della Parte VI, insieme coi sette quesiti risoluti, che, sotto titolo di *problemi varj*, sono già stati prodotti nell'edizione di Firenze del 1718, e nelle posteriori, e qui da noi si riproducono, premesso il surriferito sommario; che è press' a poco tutto quanto Galileo potè condurre in ordine al vagheggiato disegno.

SELVA DI PROBLEMI VARJ.

agione de' Funamboli (1).

erchè nel nuotare si stracca il petto, e si affanna la respirazione (2).

nde avvenga che andando l'estate a bagnarsi, l'acqua del fiume pare freddissima, ma se alquanto di poi si esce fuori si sente freddo grandissimo, e ritornando nel medesimo fiume, l'acqua che prima parve freddissima si sente calda (3).

on quale artifizio alcuni nuotatori si distendano supini sopra l'acqua, e quivi restino, senza punto muoversi, a galla (4).

ual movimento facciano i pesci per nuotare, e come sia falso che per tal effetto si servano delle alette che hanno sotto la pancia.

el camminar delle serpi.

el volar degli uccelli, e qual sia l'uso delle penne della coda in questa operazione, e come essa coda non serva loro per timone; e qual parte del corpo faccia l'officio del timone.

rrori d'Aristotile nel libro *de Incessu animalium*, dove si dimostra prima:

Che è falso che i quadrupedi non possano levar da terra nel medesimo tempo li due piedi dalla medesima banda, cioè l'anteriore e il posteriore, destri o sinistri (5).

(1) È fra i problemi risoluti che rechiamo più innanzi.

(2) Come sopra.

(3) Problema risoluto in forma di lettera al Conte Bardi, da noi recato a ıg. 292 del presente volume.

(4) Anche questo è fra i problemi che rechiamo più innanzi.

(5) Veggasi intorno questo argomento quanto abbiamo riportato a p. 307 tto titolo di *Avvertenza intorno il camminare del cavallo.*

Mostrasi essi quadrupedi muovere le gambe in tutti i modi possibili a combinarsi;

Mostrasi l'errore d'Aristotile mentre scambia il calcagno nel ginocchio, e il carpo nel gomito;

Erra parimente nel dire che le flessure delle braccia e delle gambe nell'uomo siano contrarie a quelle degli altri bipedi e dei quadrupedi.

Quale sia l'uso del timone, e come con esso si volga il vascello con tanta facilità.

Come si possa col medesimo vento navigare in parti contrarie.

Come navigando a orza si mantenga il navilio dritto verso il luogo dove si desidera arrivare.

Perchè faccia più viaggio una galèa con vento assai mediocre, che a remi, benchè mossa con la forza di 300 e più forzati.

Se sia vero quello che dice Aristotile, cioè che più gagliardamente spinga la vela quanto più è alta, e se ciò avviene per la ragione addotta da esso, presa dalla leva; e se sia vero che quelli che vogano a mezza galèa, voghino più che gli altri a poppa o a prua, parimente per ragione della leva.

Cercare con qual proporzione cresca la velocità del moto crescendo il numero di quelli che vogano; sì che essendo in galèa 300 schiavi, e facendo tre miglia per ora, quando vogano 100 o quando vogano 200 quante miglia si farà.

Perchè (si come è in proverbio) impedisce più uno che scia, che non aiutino quattro che voghino.

Con qual artifizio si navighi quasi diametralmente contro al vento, guadagnando con lo star su le volte.

Del navigare a orza.

Dell'operazioni de' remi, e come la forza de' remiganti non s'impiega tutta nel tirar il remo mentre la barca scorre.

Perchè i banchi nella galèa s'accomodino ad angolo obliquo.

Qual sia l' uso delle piccolissime vele poste sopra la gaggia della nave.

Perchè ne' luoghi montuosi sono più frequenti le tempeste e le varie perturbazioni dell'aria.

Se la cagione de' tremuoti si deve stimare esser sopra o sotto la terra.

Onde avvenga che il reflusso prima cominci ai Due Castelli che a Venezia.

Perchè le aste lunghe lanciate fanno maggior colpo.

Perchè per far diversi effetti si cerchino diverse grandezze di martello e lunghezze di manichi.

Quando si voglia ficcar l'asta nel maglio, meglio succederà percotendo l'asta in terra, lasciando il maglio libero, che se altri brancasse il maglio con la mano, e percotesse con l'asta in terra.

Una palla molto grave posata sopra un piano, e che percossa dal vento gagliardo non gli ceda nè si muova, se la medesima sarà mossa sopra quel piano sì che riceva il vento ad angolo retto, gli cederà deflettendo verso la parte che il vento la caccia.

Qual sia la ragione che le trottole o le ruzzole girate si mantengano ritte, e ferme no, ma trabocchino.

L'uovo stretto fra le mani per punta non si rompe.

Le freccie o le aste che non siano diritte non camminano dirittamente, ma fanno obliquo viaggio mediante l'obliquo incontro dell'aria che le piega a orza.

Se quello sopra il quale si vuol percuotere cederà al percuziente con pari velocità della sua, la percossa sarà nulla. La forza dunque della percossa vien misurata dalla velocità del percuziente sopra la cedenza del percosso. Quindi è che le freccie e le zagaglie torte fanno minor colpo perchè il centro della loro gravità non rispondendo alla cuspide per la linea del moto, non cessa di proseguire alquanto torcendosi d'avvantaggio l'asta lanciata, sì che il moto di esso centro detrae parte della velocità della cuspide che percuote.

Come senza offesa del paziente se gli rompa sul corpo una grandissima pietra con un grossissimo martello.

Rompesi un'asta con la percossa d'un pugno.

Rompesi una mazza posata su due bicchieri senza romperli.

La forza che muove non s' impiega tutta se non applicata al mobile mentre è fermo: ma quando esso ancora ha concepito il moto, l' eccesso della virtù movente è quello che solamente lavora; di qui avviene che mentre la carrozza è ferma, sforzo maggiore bisogna che faccino i cavalli per sbarbarla, come si dice, di quello che fanno poi nel conservarla in moto.

Assai manco si salterebbe a piè giunti se minor fusse la lunghezza del piede, e forse il salto sarebbe nullo se si posasse sopra le punte di due coni.

Quando la velocità è l' istessa ed uniforme, gli spazj passati hanno fra loro la medesima proporzione de' tempi, e quando il tempo è l' istesso e le velocità differenti, gli spazj passati son fra di loro come esse velocità. Quando dunque la velocità crescesse secondo la proporzione dell' allungamento del tempo, gli spazj passati crescerebbero con doppia proporzione di quella che cresce il tempo.

Volendo la natura far il cielo inalterabile, meraviglia è che ella non l' abbia fatto di sustanza tale che non lasci luogo di dubitare: ma all' incontro ammettono i filosofi trovarsi nel cielo qualità, dalle quali più che da tutte l'altre si possa argumentare alterazione; e queste sono il denso e il raro, le quali appresso di noi sono cagione potissima di moltissime alterazioni, come di gravità e leggerezza ec.

Problema I.

Per che cagione volendo un nuotatore star fermo, e a galla nell' acqua, sia necessario ch' ei stia supino, con le gambe aperte, con le braccia distese sopra il capo, e intirizzito.

La cagione del problema è questa. Volendo il nuotatore star a galla e fermo, bisogna ch' ei cerchi di farsi nell' acqua più leggiero che può, e questo gli succederà ogni volta che ei si accomoderà in tal modo, che del suo corpo ne resti sommerso più che sia possibile, perchè un peso di tanto divien più leggiero nell' acqua, di quanto pesa tant' acqua eguale in mole alla parte demersa di esso peso. Ora il nuotatore stando nell' acqua supino, viene a farsi in essa leggerissimo, perchè dalla bocca, e picciola parte del viso in fuori, tutto il resto del suo corpo resta sommerso; che se in altra positura ei si accomodasse, v. g. bocconi, o per lato, non gli riuscirebbe lo stare a galla senza muoversi, perchè tanto si sommergerebbe, che cacciando la bocca sott' acqua, per non poter respirare, anderebbe a risico di affogarsi. Inoltre egli è necessario ch' ei tenga le gambe aperte assai, perchè essendo il nostro petto, per l' aria che in esso si racchiude, mercè dei polmoni grandi assai, molto più leggiero nell' acqua che le coscie e le gambe, che sono massiccie e piene, non bisogna che il nuotatore le tenga strette ed unite, perchè così il lor centro della gravità cascherebbe assai lontano dal petto, onde sarebbe sforzato il nuotatore per la leva delle gambe e coscie a dirizzarsi, nè potrebbe stare a diacere; dove che, se le terrà aperte e separate, il loro centro della gravità verrà più vicino al petto, e così gli faranno manco leva. Bisogna ancora ch' ei tenga le braccia distese sopra il capo, perchè tenendole così, viene a contrappesare il peso delle gambe e delle coscie; che se le tenesse accosto ai fianchi, ajuterebbe col peso delle braccia le gambe e le coscie a farlo rizzare e tirarlo giù. Ed in ultimo gli convien stare colla vita intirizzita, tal che e' venga a fare del suo corpo un composto solo, perchè se si abbandonasse e si lasciasse andare, le braccia, le coscie e le gambe, essendo più gravi del petto, anderebbero al fondo, e seco tirerebbero il nuotatore.

Problema II.

Si domanda la cagione onde avvenga che il nuotare arrechi grandissimo affanno ai nuotatori, non ostante che e' sieno leggerissimi nell' acqua, onde con ogni picciola forza facilmente per essa si muovono.

Si risponde che non è la forza, che si fa per nuotare, quella che arreca l' affanno grande a chi nuota, ma l' avere a tirar sott' acqua buona quantità d' aria, mediante la necessità del respirare; il che si dichiara così. Io ho un pallone, e lo voglio col mio fiato gonfiare; piglio un cannellino di canna, lo metto nell' animella, e comincio per quello a soffiar nel pallone; certo che, se detto pallone non sarà circondato da altro che dall' aria, assai facilmente mi riuscirà il gonfiarlo; ma se piglierò poi il medesimo pallone sgonfio, e lo metterò in un vaso grande pieno di acqua, e vorrò poi gonfiarlo tenendolo in essa sommerso, chiara cosa è che durerò una gran fatica, perchè mi converrà alzare tant' acqua col fiato, quanta è l' aria che io caccio nel pallone. Ora colui che nuota non attrae col respirare l' aria nel petto, stando circondato da aria, dove prima con poca fatica il nostro petto si gonfiava, ma deve respirare e tirar l' aria sott' acqua, della quale tanta mole ne viene ad alzare, ogni volta ch' ei respira, quanta è l' aria che respirando ei manda nel petto, i muscoli del quale non essendo usi a un esercizio tanto laborioso, grandemente si affaticano; e di qui procede l' affanno grande del nuotatore. A questo si può aggiugnere ancora, che essendo per avventura i medesimi muscoli quelli che ajutano a muover le braccia nel nuotare, si viene loro a raddoppiar la fatica, onde e per questa e per quella dell' aver a tirar l' aria sott'acqua, si cagiona a chi nuota l'affanno che abbiamo detto.

Problema III.

I funamboli, tenendo un' asta lunga in mano, facilmente camminano e ballano sulla corda, e senz' essa appena ci si possono reggere. Si domanda che ajuto gli porga la detta asta.

La risoluzione del presente problema dipende da tre verissime proposizioni. La prima è tale. Io ho un pezzo di trave, e lo drizzo a perpendicolo sopra terra; drizzato che io l' ho, vedo che non vuol stare altrimenti in piede, ma che comincia a inclinare per cadersene disteso in terra; allora se io, che lo vedo cadere, lo soccorro subito, con ogni picciola forza e lo terrò e lo tornerò a drizzare che non vada giù, cosa che non così facilmente farei se lo soccorressi quand' ei fusse vicino a distendersi in terra. Da questa prima proposizione se ne cava la seconda, che è questa. Uno per passare un fosso è necessitato di camminare sopra un punto strettissimo, qual sarebbe un tronco di un albero, o un' pezzo di tavola larga un quarto di braccio: ora se costui averà qualche ritegno o appoggio, benchè minimo, sul quale si possa reggere quando si sente barcollare, facilmente passerà il fosso, perchè, come abbiamo detto nell' esempio della trave, basta ogni picciola forza e resistenza per tener in piede una cosa che accenni di voler cascare. La terza proposizione è, che con assai maggiore prestezza e velocità si vibra e si scuote un pezzo di legno corto colla mano, che non si fa un' asta molto lunga. Ora il funambolo, a guisa di quello che ha da passare il fosso pel ponte stretto, ha da camminare sopra una corda, sì che se non avesse qualche appoggio, quando e' si sente vacillare, cascherebbe facilissimamente in terra; ma egli ha l'appoggio dell' asta lunga che porta in mano; perchè quando ei si sente piegare e andar giù da una banda, egli si appoggia e si aggrava dalla medesima sull' asta, la quale, per esser molto lunga, con gran lentezza si muove alla forza che gli vien fatta; sì che non così tosto ella comincia a muoversi, che il funambolo, al quale basta ogni minimo appoggio per riaversi, si è già riavuto e raddrizzato.

Problema IV.

Io ho due lance del medesimo peso e della medesima lunghezza, cioè che tanto legno è in una che nell' altra, ma una di esse è piena e massiccia, e l' altra è incavata e vuota a guisa di una canna; si domanda adesso qual di queste due lance più difficilmente si scavezzerà, o troncherà.

Si risponde che la vuota farà maggior resistenza nel troncarsi che non farà la massiccia, e tanto maggiore quanto è maggiore il diametro suo di quello della piena. Per la qual cosa quindi è, che la provvida natura, dovendo far gli uccelli molto leggieri acciò più facilmente si muovessero per aria, ma colle penne gagliarde acciò potessero durare a volare, dette loro le penne dell' ali, che son quelle che più dell' altre si affaticano, di materia leggerissima, ma col calamo vuoto, acciò fussero gagliarde, e resistenti al troncarsi; che se con la medesima quantità di materia gliele avesse fatte piene, assai più facilmente si potrebbono spezzare. E l' istessa industria ha osservato ancora in farli alcuni ossi, come quelli degli stinchi e delle coscie, i quali si vedono molto sottili, e questo per leggerezza dell' uccello, ma vuoti dentro perchè e' sieno più gagliardi. Ma qui potrebbe domandare uno, perchè la natura non ha fatto ai quadrupedi, e agli altri animali che camminano sopra la terra, l' ossa delle gambe vuote come quelle degli uccelli, ma molto grosse e piene di midollo, come si vedono. Per questo si risponderà, che i quadrupedi, ed altri animali che vanno sopra terra, andando sempre a pericolo di urtare le gambe in sassi, o altri intoppi, con pericolo di frangersi o schiacciarsi gli stinchi, era necessario che la natura li facesse pieni e massicci, acciò non così facilmente si potessero schiacciare. Ma gli uccelli che vanno per aria, dove non hanno a temere intoppo alcuno, ma debbono essere principalmente leggieri, hanno gli stinchi e le penne dell' ali vuote, e per leggerezza, e perchè nel moto, che fanno nel volare, facciano più resistenza a spezzarsi.

PROBLEMA V.

Onde avviene che le stelle ci appariscano al senso immobili, con tutto che camminino con somma velocità, sì che in brevissimo tempo camminano grandissimo spazio del cielo.

A tal quesito si risponderà così, che le stelle ci appariscono immobili nel medesimo modo che immobile ci si dimostra la lancetta dell' oriuolo. Perchè se noi piglieremo un oriuolo, e lo accomoderemo in tal maniera, che prodotto il suo indice vada a ferire in una stella posta in Oriente, e dall'altra parte del detto indice che riguarda l'Occidente porremo l'occhio, vedremo che secondo che l'indice si verrà inalzando, la stella lo seguiterà, mantenendosi sempre nell' istessa linea retta dell' indice, nè mai accaderà che noi la vediamo o sotto o sopra di esso, sì che ci parrà che ella si muova al moto dell' indice, il qual moto essendo a noi insensibile, insensibile ancora ci viene a essere quello della stella, ec.

PROBLEMA VI.

Onde avviene che in tempo che sia nebbia, e la mattina a buon' ora, si vede intorno alle siepi grandissima quantità di ragnateli, dove che quando il tempo è sereno, e nel mezzogiorno, non se ne vede più uno.

Si vedono assaissimi ragnateli quando è nebbia, perchè i fili di essi, che sono per la loro somma sottigliezza invisibili, vengono a essere ingrossati da un grandissimo numero di stille minutissime di acqua, componenti la nebbia, che ci si posano su, onde si fanno visibili, e ci appariscono come tante filze piccolissime di perle; e per quest' istessa ragione se ne vedono ancora in gran quantità la mattina a buon' ora, perchè l' istesso effetto che cagionano in essi le minute stille della nebbia, lo cagionano anco le stille della rugiada, la quale gli cade sopra la notte, onde poi la mattina si vedono carichi delle dette stille, le quali, insino che il Sole non le consuma, son causa che noi vediamo tanta gran quantità di ragnateli.

PROBLEMA VII.

Onde accade che alcune volte dopo una nebbia scoprendosi il Sole, le foglie di vite ed altre frondi divengono aride e si seccano.

La cagione di tale effetto è questa. Si posa (mentre dura la nebbia) sulle foglie delle viti una grandissima quantità di stille minutissime, di quelle istesse che ci fanno vedere i ragnateli, e queste sono di figura rotonda e sferica perfettissima; si dissolve poi la nebbia e si scopre il Sole, i raggi del quale passando per quelle piccolissime sferette percuotono per refrazione la foglia che ad esse soggiace, sì che nel medesimo modo che gli stessi raggi passando per una palla di cristallo, o per una caraffa piena di acqua, e percuotendo sull'esca e sul panno, o altra cosa simile, la riscaldano ed accendono, così anco passando per quei piccioli globetti vengono a riscaldare talmente la foglia, che l'inaridiscono e seccano affatto. Ma è da notarsi che non sempre accade questo, perchè se la nebbia durasse molto tempo, si verrebbono a ragunare sulle foglie tante di quelle minute goccioline, che si rammonterebbono l'una sopra l'altra, si confonderebbono insieme, e finalmente, perdendo affatto la figura sferica, si schiaccierebbono, onde altro non apparirebbe sulla foglia che un sottil velo di acqua; ed in questo caso il Sole non fa in esse quell'effetto che fa mentre quelle goccioline vi sono sopra intatte ed intere.

PENSIERI VARJ (1).

1. Il dire che le opinioni più antiche ed inveterate siano le migliori, è improbabile; perchè sì come d' un uomo particolare l' ultime determinazioni pare che siano le più prudenti, e che con gli anni cresca il giudizio, così dell' universalità degli uomini pare ragionevole che l' ultime determinazioni siano le più vere.

2. Sensum visus asseris omnium maxime fallaciis esse obnoxium, ob idque non leviter, quaecumque visui occurunt, esse credenda: fateor; scias tamen te contra te ipsum obloqui. Dicam enim ego: quia visus, praesertim in maximis distantiis, decipitur, hinc factum est, ut omnes homines ad haec usque tempora ob visus imbecillitatem decepti sint, credentes triformem Saturnum unam tantum esse stellam; Jovem solitarium incedere, cum tamen quatuor adstent illi circulatores; Lunam esse superficie perpolita, asperam tamen et tuberosam existentem deprehendimus; Venerem atque Mercurium semper circulariter intra naturalis potentiae cancellos obstrictos latere, oculis vero nostris mira perspicillorum efficacia munitis obviam sese fecerunt.

3. Si corpora physica non ex indivisibilibus constant, sed habent quanta minima in quae resolvantur, inquirendum est de ipsorum minimorum figuris, quae dubio procul erunt sphaericae. Afferunt enim causam, cur minima naturalia ne-

(1) MSS. Galileiani, Par. VI, Tom. 2, di mano del Viviani; editi già nella edizione di Firenze del 1718 e nelle posteriori.

Questi *Pensieri* sono quasi una cosa stessa coi *Problemi varj*, anzi taluno, come a suo luogo avvertiremo, è risoluzione di quesiti posti nella Selva precedente; e noi avremmo addirittura compresi e gli uni e gli altri sotto un unico titolo di *Problemi e Pensieri varj*, dove non fosse stato il rispetto dei nostri predecessori.

cessario sint quanta, quia scilicet talis forma, ut puta lapidis, terrae, auri, sub minori quantitate consistere nequit. Cum autem tres sint quantitatis dimensiones, dicendum est, formam illius corporis physici sub minore longitudine, latitudine et profunditate consistere non posse. Dimensiones autem istae in corpore non organico non differunt nisi secundum nostram considerationem; aequalia ergo erant in minimis hisce componentibus, et per consequens quia minima erant physica.

4. Fixae sunt admodum exiguae, adeo ut neque Canis ipse multa superet minuta secunda. Licet quatuor Mediceorum Planetarum periodi velocissimae sint, nunquam tamen huc usque iidem fuerunt situs, vel eaedem intercapedines. Quod liquido constat, si consequentes deinceps Constitutiones observentur, quae eumdem ordinem minime servant: quod si et horum, numero tantum quatuor, brevissimae restitutiones irrationales sunt, quid, quaeso, de aliis septem erronibus existimandum? Quis eorum errores statutis legibus excribet?

5. Utimur tanquam rationali mensura temporibus revolutionis diurnae, et eorum particulis, menstruas Lunae, Solis annuas, et alias reliquorum Planetarum reversiones metiri consuevimus, quae tum inter se, tum primae lationi incommensurabiles cum sint, irrationabiles ergo, et prorsus inexplicabiles extant. Quapropter iis, qui sequentur, astronomis, sicuti et superioribus omnibus, negotium in astronomia non deerit. Insuper reliquarum omnium lationum mensuram facimus diurnam revolutionem, ejusque particulas, quasi et ipsa aequabilis et uniformis sit, aequalesque illius arcus aequalibus temporibus respondeant; sed quis observavit, quis vidit Æquatoris aequabilem esse transitum?

6. Calidi est rarefacere, et frigidi condensare. Numquid corpus aliquod, quod in aqua frigida non descendat, quia densior, descendat idem in calida, quia rarior?

7. In vasculis vitreis occlusis liquores et fructus diu forte servantur.

8. Esse in gravi repugnantiam intrinsecam ad motum instantaneum, adeo ut non ratione medii impedientis contingat

successio et tarditas, qua dempta, scilicet per vacuum intervallum, mobile instantanea casurum foret celeritate, patet vel maxime ex eo, quod in principio lationis lente movetur, impetumque ac celeritatem acquirit succesive, quod minime contingeret, si a principio intrinseco inesset illi propensio ad instantaneum motum. Cum enim tam in principio quam in medio lationis eadem semper habeatur medii resistentia, aeris nempe quiescentis, motus esset aequabilis orsus ab eodem principio, factus in eodem medio semperque eodem modo disposito.

9. Crediderunt peripatetici causam scintillationis fixarum esse remotionem, ob quam visus noster debilis et trepidans ad illas pervenit; sed ut rectius loquantur, ob quam illarum fulgor debilis ac titubans ad oculum pertingit; quod de more ex diametro falsum erit. Nam fixae scintillant, quia suapte natura lucidae fulgorem ab intra emittunt, radiosque fulgentissimos vibrant. Planetae vero suapte natura obscuri alieno tantum lumine in superficie pinguntur. Languet exinde eorum lux adscititia, quae moveri desinit in planetarum corpora impingens.

10. Dicis stellarum infra tertiam magnitudinem nullas esse operationes, deque illis nullam ab astronomis curam haberi. Verum tuam inscitiam non agnoscis? Nonne nebulosarum curam maximam geris? At nebulosae quid aliud sunt, quam stellarum infra tertiam magnitudinem congeries?

11. Motus deorsum gravibus est naturalis, quatenus ea restituit in bonam constitutionem, quae prius erant in mala, et sic motus etiam sursum iisdem naturalis est, ut cum lignum ex aquae fundo fertur ad superficiem, ut ibi naturaliter quiescat, ita quoque arboris ramus attollitur sursum naturaliter, quia vi inflexus fuerat.

12. È bella cosa il sentire alcuni peripatetici ignorantissimi di matematica farsi avanti con dire che Aristotile fu così gran matematico quanto altri, quasi che tanto basti che Aristotile ne abbia saputo per sè e per loro.

13. Che il fumar dell'acque dei pozzi l'inverno non venga da lor calore è manifesto, perchè i panni che si asciugano al

Sole, l' inverno fumano e la state no, e l' alito si vede l' inverno e non la state.

14. Si Luna esset speculum, ad imagines circumadstantium corporum pingeretur, ipsorumque simulacra ad nos retorqueret. Verum Solis ac stellarum idola ob nimiam illarum a Luna distantiam, nec non ob Lunae a nobis elongationem, itemque ob ejus sphaericitatem omnino inconspicua forent. Afficeretur igitur universa Lunae superficies ab imaginibus totius aetheris circumfusi, cujus colore coloraretur; invisibilis ergo esset Luna in coelo, ac Solis lumen nullatenus ad nos retorqueret. Sol enim in hemisphaerio Lunae eam occuparet partem, quam corpus illius in toto fere coelo occupat. Posita Solis diametro gr. 0 m. 34, erit ejus discus ad sui coeli superficiem ut 1 ad 221,760.

15. Sia il solido B (*Fig.* 199) in specie egualmente grave come l' acqua; e sia la mole C più grave in specie del solido B, ma di gravità assoluta eguale ad esso; sarà dunque la mole C minore della mole B. Pongasi la mole CD eguale alla B, ed intendasi la parte D esser aria. Adunque D, essendo aria, in aria non peserà niente, e però tutta la mole CD peserà in aria quanto C, cioè quanto B. Le moli dunque B, CD in aria pesano egualmente. Dico che anche in acqua saranno eguali in peso, cioè, che nè anco CD peserà nulla. Imperocchè pesando il solido C in aria quanto la mole B, cioè, quanto una mole d' acqua eguale a CD, ed inoltre pesando C in acqua meno che in aria, quanto è il peso in aria d' una mole d' acqua eguale alla mole C; adunque C in acqua pesa quanto una mole d' acqua eguale alla mole D in aria. Ma la gravità in aria d' una mole d' acqua D è eguale alla leggerezza d' altrettanta mole d' aria in acqua; adunque la gravità del solido C in acqua è eguale alla leggerezza della mole d' aria D in acqua: adunque il composto CD in acqua non pesa nulla, come B.

16. In ogni mobile, che debba esser mosso violentemente, pare che siano due specie distinte di resistenza; l' una che risguarda quella resistenza interna, per la quale noi diciamo più difficilmente alzarsi una pietra di mille libbre che una

di cento; l'altra che ha rispetto allo spazio per il quale si ha da fare il moto; e così maggior forza ricerca una pietra ad esser gettata lontana cento passi che cinquanta. A queste diverse resistenze rispondono proporzionatamente i due diversi motori, l'uno dei quali muove senza percuotere, l'altro opera percuotendo. Il motore che opera senza percossa non muoverà se non una resistenza minore, benchè insensibilmente, della sua virtù o gravità premente, ma la muoverà bene per spazio infinito, accompagnandola sempre colla sua stessa forza: e quello che muove percuotendo, muove qualsivoglia resistenza benchè immensa, ma per limitato intervallo; onde io stimo vere queste due proposizioni: il percuziente muovere infinita resistenza per finito e limitato intervallo: il premente muovere finita e limitata resistenza per infinito intervallo. Sì che al percuziente sia proporzionabile l'intervallo e non la resistenza; ma al premente la resistenza e non l'intervallo. Le quali cose considerate mi fanno dubitare che il quesito del Sig. Francesco sia inesplicabile, come quello che cerchi agguagliare cose non proporzionabili, che tali credo io che siano le azioni della percossa e della pressione, sì come nel caso particolare qualunque resistenza, che sia nel cuneo BA, sarà mossa da qualunque percuziente C, ma per limitato intervallo, come tra i punti BA. Ma dal premente D non qualunque resistenza sia nel cuneo BA sarà spinta, ma una limitata e non maggiore del peso D. Ma questa non sarà spinta per il limitato intervallo tra i punti BA, ma in infinito, essendo sempre ugual resistenza nel medesimo mobile AB, come si deve supporre, non si facendo menzione in contrario nella proposta.

17. Appresso le scuole de' filosofi è approvato per vero principio, che del freddo sia proprietà il ristrignere e del caldo il rarefare. Ora, stante questo, intendasi che l'aria contenuta nello strumento sia della medesima temperie che l'altra aria della stanza dove si pone, e così per ritrovarsi questi due corpi egualmente gravi in specie, ne segue che l'uno non scaccia l'altro, come a quello che per non acquistar niente è meglio restar quivi. Ma se l'aria circonfusa alla palla si

raffredderà con l'imporvi qualche corpo più freddo, i calidi contenuti nell'aria compresa nella palla, come quelli che per esservi un mezzo men leggiero di loro, se ne saliranno in alto, e tale aria diverrà più fredda di prima, e così, per l'antidetto principio, si ristrignerà e terrà meno luogo, *ne detur vacuum*, onde il vino salirà su ad occupare il luogo lasciato vuoto dall'acqua; e di poi riscaldata, tale aria, rarefacendosi e tenendo maggior luogo, verrà a scacciare e mandar giù il vino, il quale come grave volentieri le cederà quel luogo; onde ne segue che il freddo non sia altro che privazione di caldo. Che gli uomini muojano intirizziti dal freddo avviene perchè il freddo ambiente va consumando tutti quegli atomi ignei che trova nelle membra, onde non v'essendo più il calor naturale, si muore. L'acqua posta in una stanza si trova nella medesima temperie che la stanza dove si pone, partecipando ambedue ugualmente di atomi ignei. Ma che una mano, che tenuta in aria ti par calda, poi posta nell'acqua si raffredda, questa ne è la cagione, considerandosi il caldo esterno e l'interno, che mentre resta in aria, gli atomi ignei suoi proprj hanno luogo d'uscire, che son quelli che cagionano il caldo; ma posta in acqua, le particole d'essa tornano e serrano gli aditi onde escono i detti atomi, essendo le parti dell'acqua maggiori delle porosità, per le quali essi scappano fuori; il che non avviene nell'aria, trovando il campo libero, come quelli che non son tenuti dalle parti dell'aria per esser minori de' pori onde *erumpunt*, essendo che il caldo non sia altro che il contatto e solleticamento di quegli atomi calidi, i quali nello scappar fuora trovano le membra del corpo. L'aria freddissima per tramontana è più fredda del diaccio e della neve. In confermazione di che, se si approssimerà allo strumento in tal tempo o della neve o del diaccio, il vino calerà notabilmente. In oltre, per confermar questo, un vaso pien d'acqua posto nell'acqua non ghiaccierà, e posto in aria ghiaccierà. In oltre l'acque de' fiumi dovriano agghiacciarsi nel fondo, dove son più lontane dal caldo dell'aria, e non nella superficie, dove son vicinissime all'aria, ma ne segue il contrario; onde nell'istessa maniera, cioè dall'operazione del caldo e del freddo, si maturano tutte le frutte e biade, perchè se considereremo la struttura e fabbrica di quelle, prima vedremo: L'uva è composta di grani o vogliamo dire vesciche, e questo si vede apparentemente nell'uva, dove ogni grano è una vescica: il simile ne' pomi granati, fichi, cocomeri ed altri; onde tali vesciche essendo piene d'umore, venendo il caldo del Sole, le spreme e sgonfia, e mandano fuori parte di quell'umore, onde la sera son passe. Ma nel sopraggiugner la notte, e raffreddandosi l'aria, tali vesciche si vengono a riempire di nuovo umore, e maggior di quello che il giorno avanti avevano mandato fuori, onde esse vesciche vengono a molto più farsi capaci; e per questa alterazione si maturano, facendo l'istesso effetto che fa l'istrumento, in confermazione di che si veggono la mattina durissime.

In un fiasco si può costipare tant'aria, che pesi oltre al peso ordinario del fiasco e dell'aria, quanto un coso di venti soldi, onde ne seguita ch'ella sia grave e non leggiera; perchè se ella fusse tale, quanta più aria si costipasse nel fiasco, tanta più forza avrebbe d'andare in alto, come si vede che un vaso quanto più s'empie di terra, tanto più va al fondo.

18. Le parti quante nella linea terminata o sono finite o infinite: finite no, perchè la divisione non si estenderebbe in infinito; infinite no, perchè la linea proposta sarebbe stata infinita in lunghezza. Dico nè esser infinite, nè finite, ma esser tante che rispondono ad ogni numero, e rispondendo ad ogni numero non sono infinite, perchè nessun numero è infinito; nemmeno sono finite, cioè determinate da qualche numero, perchè d'ogni numero determinato ce ne sono altri maggiori.

La fallacia è nel distinguere dicendo, o sono finite o infinite; perchè il finito e l'infinito sono differenti di genere; ed in questa guisa non è buona distinzione il dire, l'avorio o è giallo o è dolce, potendo essere nè giallo nè dolce.

Dirà alcuno: io divido la linea in due parti quante, poi in quarti, poi in centesimi, nè mai arrivo al fine della divisione; adunque nella linea è l'infinito de' quanti. S'inganna questo nel suo discorso, perchè non meno dista dall'infinito il 1000 che il 100, o che il 20, o che il 4; e dal 4 al 20, poi al 100 ed al 1000 ec. non si cammina verso la infinità; onde questa inquisizione non ci può accertare se vi sia l'infinito o no; sì come quello che, partendo da Venezia, naviga sempre verso mezzo giorno non trovando mai Costantinopoli, non può dire che Costantinopoli è lontana da Venezia in infinito, potendo essere ovvero che Costantinopoli non sia in natura, ovvero che quella strada non vada in quel verso: ma potria ben dire tal distanza esser infinita, quando andando a quella volta dove fusse Costantinopoli, fusse impossibile l'arrivarvi mai. Concludo adunque, che la via della divisione e suddivisione non camminando verso l'infinito, non ci serve niente per concludere se vi sia o no. Puossi continuar sempre la divisione senza che mai le parti siano infinite, ma sempre contenute da qualche numero, del quale non ve ne sia un altro maggiore, ne vi è numero che sia infinito.

Quello che risponde a tutti i numeri non è di necessità infinito, perchè non v'è numero alcuno infinito; e quello che è determinato da qualche numero non risponde a tutti i numeri, perchè nessun numero include tutti i numeri. Adunque quello che è determinato da qualche numero è altro che quello che risponde a tutti i numeri; e quello che risponde a tutti i numeri è altro che l'infinito. Adunque abbiamo tre cose differenti, cioè: quello che è determinato da qualche numero, quello che risponde a tutti i numeri, e l'infinito. Chi dunque dirà che le parti del continuo son tante che rispondono ad ogni numero, dirà bene.

19. Cercasi per qual cagione i luoghi montuosi o vicini alle gran montagne siano più degli altri sottoposti alle tempeste, fulmini, tuoni e baleni (1). Forse la cagione è tale. Levansi nella terra vapori ed esalazioni. Sono i vapori materia delle pioggie, nebbie e nuvole. Ma l'esalazioni producono stelle cadenti, travi ed altre impressioni ignee. Queste son

(1) Questo quesito, del quale qui abbiamo la risoluzione, è fra gl'indicati nella Selva dei Problemi varj.

frequenti nell'estate per le molte esalazioni elevate dal caldo del sole; quelle abbondano nell'inverno e ne'tempi non caldi per la copia de'vapori umidi; e mentre che l'aria sarà ripiena di semplici vapori, darà semplicemente pioggia e nevi; ma se vi saranno in copia semplici esalazioni, vedrannosi le sole impressioni ignee sopradette. Ma se nell'istesso tempo abbonderanno nell'aria e vapori ed esalazioni, allora per il contrasto delle contrarietà, l'esalazioni serrate e combattute da'vapori produrranno tuoni, lampi e saette, ed i vapori per l'antiperistasi dell'esalazioni non solo in pioggia, ma in grandine e tempesta si scioglieranno. Ora a ciò che si elevino nell'istesso tempo e l'esalazioni ed i vapori, sono i luoghi montuosi accomodatissimi, e massime nel tempo caldo. Imperocchè ferendo il sole i dorsi de'monti esposti a mezzodì ad angolo retto, gli risecca e n'estrae copia grande d'esalazioni; ma dai dorsi boreali e dalle valli profonde ed umide ascendono in gran copia i vapori, i quali mescolati con le esalazioni sono materia atta a produrre, mediante le loro contrarie qualità, quegli effetti più violenti di tuoni, lampi, fulmini, grandini, tempeste, dove che dalle pianure lontane dai monti, per esser loro nello stesso modo ferite dai raggi solari, non si fanno elevazioni di materie contrarie, ma simili, ed atte a produr effetti uniformi e meno violenti. L'inverno poi, per l'abbassamento del sole, pochissime esalazioni dai monti, e meno dalle pianure si elevano; onde in quella stagione si hanno solamente gli effetti dei vapori, cioè pioggie, nevi ec. In oltre da'paesi montuosi maggior copia di vapori e di esalazioni si elevano che dalle pianure, perchè la superficie v. g. di dieci miglia di paese montuoso è assai maggiore che quella di dieci miglia di piano; e perchè l'evaporazioni si fanno dalla superficie, adunque ec. Dico in oltre maggior copia di vapori elevarsi dalla terra umida che dall'acqua, perchè l'acqua, come diafana, trasmette i raggi del sole, e meno si riscalda che la terra opaca, la quale riscaldata più, maggiormente fuma. Segno di ciò sia, che in un giorno di estate, d'un vaso d'acqua profonda, poca se ne asciugherà, ma se si continuerà d'aspergere sottilmente una pietra o una tela, grandissima copia d'acqua si convertirà in vapore. Poco dunque di vapori e meno di esalazioni si eleva dal mare.

20. Aquam in sua regione non gravare colligunt ex eo, quod si quis in profundo maris locetur, pondus imminentis aquae non sentiat. Id autem si recte dictum est, inferam ego, non modo aquam non gravare, verum potius levitare. Nam si magnus e. g. lapis in profundo maris ponatur, non modo ob imminente aqua non reddetur gravior, verum longe minus ponderabit, quam si aqua ablata fuerit.

21. Incalescat vitreum vas oris angustissimi, donec aer extrudatur, statimque obturetur ne novus subintret aer, et ita exinanitum ponderetur in libra exactissima; deinde immissum idem vas in aqua, aperiatur, ingredietur tantundem aquae, quantum desiderabatur aeris: haec aqua servetur in alio vase, deinde primum vas optime siccatum iterum ponderetur jam naturali aere repletum, ponderabit dubio procul magis quam antea dum esset exinanitum; acceptaque ponderum differentia, erit pondus aereae molis aquae servatae aequalis.

22. Fannosi liti e dispute sopra l'interpretazione d'alcune parole d'un testamento d'un tale, perchè il testatore è morto, che se fosse vivo sarebbe pazzia il ricorrere ad altri che a lui medesimo per la determinazione del senso di quanto egli aveva scritto. Ed in simil guisa è semplicità l'andar cercando i sensi delle cose della natura nelle carte di questo o di quel filosofo più che nell'opere della natura stessa, la quale vive sempre, ed operante ci sta presente avanti gli occhi veridica ed immutabile in tutte le cose sue.

DELL'ORIUOLO A PENDOLO

LETTERA

DI VINCENZO VIVIANI AL PRINCIPE LEOPOLDO DE' MEDICI

nella quale si discorre della parte che spetta a Galileo nel merito di questa invenzione.

AVVERTIMENTO.

Il fatto dell'applicazione del pendolo all'oriuolo ha dato luogo ad una controversia non dissimile da quella dell'invenzione del cannocchiale, rivendicandolo alcuni a Galileo, e l'olandese Cristiano Ugenio difendendolo come invenzione e gloria tutta sua propria. In tutta questa controversia il vero si è: 1.° che Galileo prima d'ogni altro imaginò e tentò negli ultimi anni della sua vita l'artificio della suddetta applicazione, artificio rimasto imperfettissimo per la morte di lui e del figliuolo Vincenzo, il quale più tardi s'era proposto di continuare l'opera del padre: 2.° che Cristiano Ugenio, nove anni dopo la morte del suddetto Vincenzo Galilei, pubblicò nel suo *Horologium oscillatorium* una teoria perfezionata di tale artificio, protestando allora e poi di non aver avuto cognizione alcuna di quanto in tal proposito era stato imaginato da Galileo. E può darsi benissimo che non avendo l'Ugenio appena dieci anni di età quando Galileo diede cenno agli Stati Generali d'Olanda del suo divisamento, ed essendo da poi rimasto secreto ogni ulteriore suo concetto intorno a ciò, l'Ugenio altro mai non ne sapesse fuorchè la generale proposizione; ma che questa notizia appunto fosse l'occasione che lo condusse ad occuparsi di un argomento, nel quale egli riuscì poi così bene. Di guisa che, fermo stante che il primo ad imaginare l'applicazione del pendolo all'oriuolo fu Galileo, il merito dell'Ugenio è, rispetto all'effettiva applicazione, quello stesso che Galileo ebbe nella fabbrica del cannocchiale, con questa differenza bensì, che dove l'occhialaro di Middelburgo non seppe e non avrebbe mai saputo andar oltre in quella casuale scoperta, Galileo avrebbe certamente perfezionata l'opera propria se nol sopraggiungeva la morte.

Le seguente lettera del Viviani al Principe Leopoldo de' Medici fu da quell'esimio discepolo di Galileo scritta ad istigazione del Principe stesso allorchè appunto veniva in luce l'oriuolo oscillatorio dell'Ugenio coll'esagerata pretesa di una priorità di concetto, che giustamente non gli potevano consentire i Toscani, e che venne solennenemente impugnata nei *Saggi di naturali esperienze* fatte nell'Accademia del Cimento con queste parole:

In quell'esperienze, che richiedono squisitezza maggiore, e che sono di sì lunga osservazione, che le minime disuguaglianze delle vibrazioni del pendolo dopo un gran numero arrivano a farsi sensibili, fu stimato bene di applicare il pendolo all'oriuolo sull'andar di quello che, prima d'ogn'altro, immaginò il Galileo, e che dell'anno 1649 mise in pratica Vincenzo Galilei suo figliuolo. Così è necessitato il pendolo dalla forza della molla e del peso a cader sempre dalla medesima altezza: onde con iscambievol benefizio non solamente vengono a perfettamente eguagliarsi i tempi delle vibrazioni, ma eziandio a correggersi in certo modo i difetti degli altri ingegni d'esso oriuolo (1).

E querelandosi pure l'Ugenio nel 1673 dell'espressioni surriferite col medesimo Principe Leopoldo, questi, per mantenere intatta la gloria del suo grande concittadino, confermò la giustizia dell'asserto degli Accademici, pur affermando di credere:

Che a notizia di V. S. non sia per alcun tempo venuto il concetto, che sovvenne ancora al nostro Galileo, di adattare il pendolo all'oriuolo, perchè ciò era a pochissimi noto, e l'istesso Galileo non aveva ridotto all'atto pratico cosa veruna di perfetto a tal conto, come si vede da quel poco che fu manipolato ed abbozzato dal figliuolo; e mi rendo certo che quando V. S. avesse avuto notizia di questa cosa, non avrebbe taciuto di saperla (2).

Il Nelli, nella sua Vita di Galileo, governato più dalla sua animosità contro il Targioni, il quale assolutamente sostiene la priorità della invenzione galileiana, che dallo zelo stesso del grand'uomo, al quale intendeva di erigere un nuovo monumento di gloria, si affatica stranamente ad escludere ciò che sembra assai bene provato dalle affermazioni d'insigni contemporanei. Molte altre cose potremmo aggiungere intorno a questo argomento; ma il fin qui detto basti per ora, riserbando il di più alla Vita dell'Autore.

(1) Pag. 22 dell'edizione originale di Firenze del 1691. — La lettera del Viviani si ha nel Tomo IV della Parte VI dei MSS. Palatini, e fu già pubblicata dal Nelli, p. 721 e segg., e in parte dal Venturi, Par. II, p. 286 e segg.

(2) Fabbroni *Lettere d'uomini illustri*, T. I, pag. 224.

Altezza Serenissima,

Mi comanda l' A. V., sempre intenta a nobilissime e giovevoli speculazioni, che io debba ordinatamente mettere in carta quelle notizie che si hanno circa all' invenzione ed usi del maraviglioso misurator del tempo col pendolo di Galileo Galilei d' eterna e gloriosa fama, e principalmente circa all' applicazione del medesimo pendolo agli usati oriuoli. Obbedisco non già con quella evidente ed ornata narrativa, la quale si richiederebbe avendo a comparire avanti al purgatissimo giudizio dell'A. V., ma bensì con quella sincerità che è mia propria, cavando il tutto da quel sommario racconto, che d' ordine pure di V. A. io scrissi già sono cinque anni intorno a vari accidenti ed azioni della vita di sì grand' uomo, e da quanto io so aver sentito dalla di lui viva voce.

Siccome adunque è notissimo, per le tradizioni pervenuteci, che a niuno degli antichi o moderni filosofi è stato permesso dal sommo incomprensibile Motore l' investigare pur una minima parte della natura del moto e de' suoi ammirandi accidenti, fuorichè al nostro gran Galileo, il quale con la sublimità del suo ingegno seppe il primo sottoporlo alle strettissime leggi della divina Geometria, così non si revoca in dubbio il medesimo Galileo essere stato il primo a regolare con semplicissimo, e per così dire naturale artifizio la misura del tempo dall' istesso moto misurato. E per ridurre il tutto distintamente a memoria, l' origine ed il progresso di questa sua utilissima invenzione fu tale.

Trovavasi il Galileo, in età di venti anni in circa, intorno all' anno 1583, *nella città di Pisa, dove per consiglio del padre s' era applicato agli studj della filosofia e della medicina, ed essendo un giorno nel Duomo di quella città, come curioso ed accortissimo che egli era, caddegli in mente di osservare dal moto di una lampana, che era stata allontanata dal perpendicolo, se per avventura i tempi delle andate e tornate di quella, tanto per gli archi grandi che per i mediocri e per i minimi, fossero uguali, parendogli che il tempo per la maggior lunghezza dell' arco grande potesse forse restar contraccambiato dalla maggior velocità con che per esso vedeva muovere la lampana, come per linea nelle parti superiori più declive. Sovvennegli dunque, mentre questa andava quietamente muovendosi, di far di quelle andate e tornate un esamine, come suol dirsi, alla grossa per mezzo delle battute del proprio polso, e con l' aiuto ancora del tempo della musica, nella quale egli già con gran profitto erasi esercitato; e per allora da questi tali riscontri parvegli non aver falsamente creduto dell' egualità di quei tempi. Ma non contento di ciò, tornato a casa, pensò per meglio accertarsene di così fare.*

Legò due palle di piombo con fili di egualissime lunghezze, e dagli estremi di questi le fermò pendenti in modo, che potessero liberamente dondolare per l' aria (che perciò chiamò poi tali strumenti dondoli o pendoli), e discostandole dal perpendicolo per differenti numeri di gradi, come per esempio l' una per 30, *l' altra per* 10, *lasciolle poi in libertà in un istesso momento di tempo, e con l' aiuto d' un compagno osservò che quando l' una per gli archi grandi faceva un tal numero di vibrazioni, l' altra per gli archi piccoli ne faceva appunto altrettante.*

Inoltre formò due simili pendoli, ma tra loro di assai differenti lunghezze, ed osservò che notando del piccolo un numero di vibrazioni, come per esempio 300 *per i suoi archi maggiori, nel medesimo tempo il grande ne faceva sempre un tal istesso numero, come è a dire* 40, *tanto per i suoi archi maggiori che per i piccolissimi; e replicato questo più volte, e trovato per tutti gli archi ed in tutt' i numeri sempre rispondere le osservazioni, ne inferì ugualissima esser la durazione tra le andate e le tornate d' un medesimo pendolo, grandissime o piccolissime ch' elle* *fossero, o* almeno *non iscorgersi tra loro sensibile differenza, e da attribuirsi all' impedimento dell' aria, che fa più contrasto al grave mobile più veloce che al meno.*

S' accorse ancora che nè le differenti gravità assolute, nè le varie gravità in ispecie delle palle facevano manifeste alterazioni, ma tutte, purchè appese a fili d' uguali lunghezze dai punti delle sospensioni ai lor centri, conservavano un' assai costante egualità de' lor passaggi per tutti gli archi; se però non si fusse eletta materia leggerissima, come è il sughero, il di cui moto, dal mezzo dell' aria, che al moto di tutt' i gravi sempre contrasta, e con maggior proporzione a quello de' più leggieri, vien più facilmente impedito, e più presto ridotto a quiete.

Assicuratosi dunque il Galileo di così mirabile effetto, sovvennegli per allora di applicarlo ad uso della medicina per la misura delle accelerazioni de' polsi, come pur tuttavia comunemente si pratica (1).

Indi a pochi anni applicatosi agli studj geometrici, ed astronomici appresso, vide l' importante necessità che essi avevano d' uno scrupoloso misuratore del tempo per conseguire esattissime le osservazioni; che perciò fin d' allora introdusse il valersi del pendolo nella misura de' tempi e moti celesti, de' diametri apparenti delle fisse e de' pianeti, nella durazione degli ecclissi ed in mille altre simili operazioni, principalmente ottenendo da tale strumento, più e più accorciato di filo, una minutissima divisione e suddivisione del tempo, ancora oltre ai minuti secondi, a suo piacimento.

Guidato poi dalla geometria e dalla sua nuova scienza del moto, trovò le lunghezze de' pendoli esser fra loro in proporzione duplicata di quella de' tempi d' ugual numero di vibrazioni. Ma perchè il Galileo nel comunicare le sue speculazioni, come abbondantissimo ch' egli n' era, ne fu insieme liberalissimo, quindi

(1) « Il Santorio celebre medico si spacciò per autore di aver posto in opera l' uso del pendolo nella medicina. L' essere lettore il Galileo a Padova molto tempo avanti che quel medico pubblicasse le sue opere, fa credere che il Galileo avendo manifestato che il pendolo potesse aver uso nella medicina pratica per conoscere la maggiore o minore frequenza de' polsi, il Santorio profittasse di questa notizia, spacciando per propria idea questa invenzione ».
(Nota di G. B. Nelli).

è che questi usi, e le nuovamente da esso avvertite proprietà del suo pendolo, a poco a poco divulgandosi, trovaron talvolta o chi con troppa confidenza se le adottò per proprj parti, o chi nella pubblicazione di qualche scritto, artifiziosamente tacendo il nome del loro vero padre, se ne valse in tal guisa, che almeno da quei che ne ignoran l' origine potrebbero facilmente credersi invenzioni di essi, se a ciò non avesse abbondevolmente provveduto la sincerità dei benaffetti, tra i quali è il Signor Cristiano Ugenio olandese, che nel proemio dell' Oriuolo da esso pubblicato nel 1658 *fa di queste invenzioni grandissima testimonianza a favore del medesimo Galileo* (1).

Non terminò già qui l' applicazione degli usi di questa semplice macchina, poichè dopo avere il Galileo scoperto per mezzo del telescopio, nell' anno 1610, *i quattro pianeti intorno al corpo di Giove da lui denominati Medicei, subito dalle osservazioni dei varj loro accidenti di occultazioni, di apparizioni, d' ecclissi e d' altre simili apparenze di brevissima durazione, caddegli in mente di potere valersene per universal benefizio degli uomini ad uso della nautica e della geografia, sciogliendo perciò quel famoso e difficil problema, che indarno aveva esercitato i primi astronomi e matematici dei passati e del presente secolo, che è di potere in ogni ora della notte, o almeno più frequentemente che con gli ecclissi lunari, in ogni luogo di mare e di terra graduare le longitudini. Per ciò ottenere diedesi allora ad una assidua osservazione de' periodi e de' moti di tali Stelle Medicee, ed in meno di* 15 *mesi dal primo discoprimento ne conseguì tanto esatta cognizione, che arrivò a predire le future costituzioni di ciaschedun satellite comparate fra loro e col corpo stesso di Giove, pubblicandone un saggio per i due mesi avvenire di marzo ed aprile dell' anno* 1613, *come si vede in fine della Storia delle Macchie solari. Ma conoscendo che in servizio della longitudine richiedevasi molto maggior perfezione per poter calcolare le tavole ed effemeridi, e che ciò non era possibile avere che dopo gran numero di osservazioni, e tra loro assai distanti di tempo; non prima che dell' anno* 1615, *si ri-*

(1) Christ. Ugen. *Opera Mechanica.* T. I, p. 4, Lugd. Batav. 1724.

solvè di proporre questo suo ammirabil pensiero a qualche gran Principe d' Europa, che fosse potente in mare principalmente; e conferendo ciò col Serenissimo Gran Duca Cosimo II, suo Signore, volle questi per sè medesimo muoverne allora trattato con la Maestà Cattolica di Filippo III Re di Spagna. Fra le invenzioni del Galileo concorrenti all' effettuazione di così grande impresa (oltre all' offerirsi dal medesimo di somministrare ottimi telescopi già fatti, e il modo di fabbricarli atti all' osservazione di Giove e suoi satelliti, e di poter facilmente usarli in nave, benchè fluttuante, e le tavole ed effemeridi per la predizione delle future costituzioni di quei pianeti), eravi ancora quella dell'oriuolo esattissimo, consistente in sustanza nelle ugualissime vibrazioni del suo pendolo. Questo trattato da varj accidenti interrotto, fu poi in diversi tempi riassunto, ma in fine del 1629, *non so per qual fatalità, abbandonato.*

Stimando pertanto il Galileo che il maggiore ostacolo e la massima dell' eccezioni, che forse avesse incontrato la sua proposta, fosse stata il far credere di averla esibita per quel premio di facultadi e di onori che da tutti i re di Spagna e da altri potentati veniva promesso a chi di tale invenzione fosse stato l' autore, volendo pur far conoscere che egli giammai da stimolo così vile era mosso, ma bensì dalla sicurezza del suo trovato, e con l' unica brama d' arricchire il mondo di cognizione cotanto necessaria e profittevole all' umano commercio, e sè medesimo ornare della gloria per ciò dovutagli, stabilì finalmente di farne libera e generosa offerta ai potentissimi Stati Generali delle Provincie Confederate; onde nel 1636, *mediante l' opera incessantissima del Sig. Elia Diodati celebre giureconsulto di Parigi e avvocato del parlamento, amico suo carissimo e confidentissimo, e col patrocinio del Signor Ugon Grozio, allora ambasciadore residente in Parigi per la corona di Svezia, venne all' attual proposta del suo trovato alli Signori Stati d' Olanda, diffusamente spiegando con più e diverse scritture e lettere colà inviate, tanto ai Signori Stati suddetti quanto al Sig. Lorenzo Realio presidente eletto dai medesimi all' esamine di questa proposizione, ed agli altri Signori Commessari a ciò deputati, che furono i Signori Martino Ortensio, Guglielmo Blaeu,* *Jacopo Golio ed Isacco Beckmanno, ogni suo particolar segreto e modo attenente all' uso della propria invenzione, sì quanto alla oppostagli difficultà del ridurre praticabile il telescopio nell' agitazione della nave, quanto circa al valersi del suo pendolo per misuratore del tempo; suggerendo al Sig. Lorenzo Realio, con lettera de'* 6 *Giugno* 1637, *un pensiero sovvenutogli intorno al togliere il tedio del numerar le vibrazioni del pendolo, adombrandogli brevemente la fabbrica d' un oriuolo o macchinetta, la quale mossa nel passaggio dal medesimo pendolo (che servir doveva in luogo di quel che vien detto il tempo dell' oriuolo) mostrasse il numero delle vibrazioni, delle ore e delle minute loro particelle decorse; come tutto può vedere l'A. V. S. dal seguente capitolo, qui di parola in parola trascritto, della suddetta lettera del Galileo al Sig. Realio* (1):

Vengo ora al secondo artifizio per accrescere in immenso le puntualissime osservazioni astronomiche. Parlo del mio misurator del tempo, la precisione del quale è tanta e tale, che non solamente ci darà la quantità esatta delle ore e minuti primi e secondi ma anco terzi, se la frequenza loro fusse da noi numerabile; e la giustezza è tale, che fabbricati due, quattro o sei di tali strumenti, cammineranno tra di loro tanto giustamente, che l' uno non differirà dall' altro, non solamente in un' ora, ma in un giorno, nè in un mese di tempo, pure d' una pulsazione di polso; ed il fondamento di tal fabbrica traggo io da un' ammirabile proposizione, che io dimostro nel mio libro *de motu* che ora *est sub praelo* dei Signori Elzeviri in Leida; e la proposizione è tale: Se in un cerchio eretto all' orizzonte s' ecciterà dal toccamento la perpendicolare, che in conseguenza sarà diametro del cerchio, e dal punto del contatto, ovvero dal termine sublime del diametro, si tireranno quante si vogliano corde, sopra le quali s' intendano scendere mobili, come sopra piani inclinati, i tempi dei loro passaggi sopra tali corde, e sopra il diametro stesso, saranno

(1) Quantunque l' intera lettera sia da noi stata recata a pag. 163 e segg. del Tomo VII, ne manteniamo qui, a maggiore comodità del lettore, il brano riportato dal Viviani.

tutti eguali; sì che se, v. g., dal contatto imo si tireranno sino alla circonferenza le suttese di 1, 4, 10, 30, 50, 100, 160 gradi, il mobile sopra tali inclinazioni e lunghezze scenderà per tutte in tempi eguali, ed anco in tutto il diametro perpendicolare. E questo accade ancora nelle parti delle circonferenze dei due quadranti inferiori, nelle quali, come se fussero canali, nei quali scendesse un globo grave, in tanto tempo passerà tutta la circonferenza dell' intero quadrante quanto se incominciasse a muoversi 60, 40, 20, 10, 4, 2 o un sol grado lontano dall' imo punto del contatto. Accidente in vero pieno di maraviglia, e del quale ciascheduno si può render sicuro col sospendere da un filo legato in alto un globetto di piombo o d' altra materia grave, e quello allontanando dallo stato perpendicolare, sin che si elevi per una quarta; che lasciatolo poi in libertà si vedrà andare e ritornare facendo moltissime reciprocazioni, grandi le prime, e poi diminuendole continuamente, finchè si riduca a non si allontanare più di un sol grado di qua e di là dallo stato perpendicolare; e camminando sempre per la medesima circonferenza vedrà le vibrazioni grandi, mezzane, piccole e piccolissime farsi sempre sotto tempi eguali. E volendone più ferma esperienza, sospendansi due simili globetti da due fili di eguale lunghezza, e slargato ed allontanatone uno per un arco grandissimo di ottanta o più gradi dal perpendicolo, e l' altro due o tre gradi solamente, e lasciatili in libertà, numeri uno le vibrazioni dell' uno dei penduli, ed un altro le vibrazioni dell' altro pendolo, che si troveranno congiuntissimamente numerarne uno cento, per esempio, delle grandi, quando appunto averà l' altro numerato cento delle piccolissime.

Da questo verissimo e stabile principio traggo io la struttura del mio numeratore del tempo, servendomi non d' un peso pendente da un filo, ma di un pendolo di materia solida e grave, qual sarebbe ottone o rame; il qual pendolo fo in forma di settore di cerchio di dodici o quindici gradi, il cui semidiametro sia due o tre palmi; e quanto maggiore sarà, con tanto minor tedio se gli potrà assistere. Questo tal settore fo più grosso nel semidiametro di mezzo, andandolo assottigliando verso i lati estremi, dove fo che termini in una linea assai tagliente, per evitare quanto si possa l'impedimento dell'aria, che sola lo va ritardando. Questo è perforato nel centro, pel quale passa un ferretto in forma di quelli sopra i quali si voltano le stadere; il qual ferretto terminando nella parte di sotto in un angolo, e posando sopra due sostegni di bronzo, acciò meno consumino pel lungo muovergli il settore, rimosso esso settore per molti gradi dallo stato perpendicolare (quando sia bene bilicato), prima che fermi, anderà reciprocando di qua e di là numero grandissimo di vibrazioni; le quali per poter andare continuando secondo il bisogno, converrà che chi vi assiste gli dia a tempo un impulso gagliardo, riducendolo alle vibrazioni ample. E fatta per una volta tanto con pazienza la numerazione delle vibrazioni che si fanno in un giorno naturale, misurato colla revoluzione d'una stella fissa, s'averà il numero delle vibrazioni d'un'ora, d'un minuto e d'altra minor parte. Potrassi ancora, fatta questa prima esperienza col pendulo di qualsivoglia lunghezza, crescerlo o diminuirlo, sì che ciascheduna vibrazione importi il tempo di un minuto secondo; imperocchè le lunghezze di tali penduli mantengono fra di loro duplicata proporzione di quella dei tempi, come per esempio: Posto che un pendulo di lunghezza di quattro palmi faccia in un dato tempo mille vibrazioni, quando noi volessimo la lunghezza d'un'altro pendulo, che nell'istesso tempo facesse duplicato numero di vibrazioni, bisogna che la lunghezza del pendulo sia la quarta parte della lunghezza dell'altro. Ed in somma, come si può vedere coll'esperienza, la moltitudine delle vibrazioni dei penduli da lunghezze diseguali, è sudduplicata di esse lunghezze.

Per evitar poi il tedio di chi dovesse perpetuamente assistere a numerare le vibrazioni, ci è un assai comodo provvedimento in questo modo; cioè facendo che dal mezzo della circonferenza del settore sporga in fuora un piccolissimo e sottilissimo stiletto, il quale nel passare percuota in una setola fissa con una delle sue estremità, la qual setola posi sopra i denti d' una ruota leggerissima quanto una carta, la quale sia posta in piano orizzontale vicina al pendulo, ed avendo intorno intorno denti a guisa di quelli d' una sega; cioè con uno dei lati posto a squadra sopra il piano della ruota, e l' altro inclinato obliquamente, presti questo offizio, che nell' urtare la setoletta nel lato perpendicolare del dente, lo muova, ma nel ritorno poi la medesima setola nel lato obliquo del dente non lo muova altrimenti, ma lo vada strisciando e vada ricadendo al piè del dente sussegnente. E così nel passaggio del pendulo si muoverà la ruota per lo spazio d' uno de' suoi denti, ma nel ritorno del pendulo essa ruota non si muoverà punto; onde il suo moto ne riuscirà circolare sempre per l' istesso verso. Ed avendo contrassegnati con numeri i denti, si vedrà ad arbitramento la moltitudine dei denti passati, ed in conseguenza il numero delle vibrazioni e delle particelle del tempo decorse. Si può ancora intorno al centro di questa prima ruota adattarne un'altra di piccolo numero di denti, la quale tocchi un' altra maggior ruota dentata; dal moto della quale potremo apprendere il numero dell' intere revoluzioni della prima ruota, compartendo la moltitudine dei denti in modo che, per esempio, quando la seconda ruota avrà dato una conversione, la prima ne abbia date 20, 30 o 40 o quante più ne piacesse: ma il significar questo alle SS. LL., che hanno uomini esquisitissimi ed ingegnosissimi in fabbricare oriuoli ed altre macchine ammirande, è cosa superflua, perchè essi medesimi sopra questo fondamento nuovo di sapere che il pendulo, muovasi per grandi o per brevi spazi, fa le sue reciprocazioni egualissime, troveranno conseguenze più sottili di quelle che io possa immaginarmi. E siccome la fallacia degli oriuoli consiste principalmente nel non si essere sin qui potuto fabbricare quello che noi chiamiamo il tempo dell' oriuolo tanto aggiustatamente, che faccia le sue vibrazioni eguali; così in questo mio pendulo semplicissimo, e non suggetto ad alterazione alcuna, si contiene il modo di mantenere sempre egualissime le misure del tempo. Ora intende V. S. I., insieme col Sig. Ortensio, quale e quanto sia il benefizio nelle osservazioni astronomiche, per le quali non è necessario far andare perpetuamente l'oriuolo, ma basta per l'ore da numerarsi *a meridie*, ovvero *ab occasu*, sapere le minuzie del tempo sino a qualche eclisse, congiunzione o altro aspetto nei moti celesti. . . . . . .

Io ho fatto elezione di presentare a cotesti Illustrissimi e Potentissimi Stati il mio trovato più che a qualsivoglia altro Principe assoluto, imperocchè quando il Principe solo non sia bastante a capacitarsi di tutta questa macchina, sì come quasi sempre avviene, dovendosi rimettere al consiglio di altri, e bene spesso non molto intelligenti, quello affetto, che rare volte si separa dalle menti umane, cioè di non vedere con buon occhio esaltare altri sopra di sè stesso, cagiona che il Principe mal consigliato disprezza le offerte; e l'oblatore, in vece di premio e di grazie, ne riporta disturbo e vilipendio. Ma in una Repubblica, dove le deliberazioni dipendono dalla consulta di molti, piccol numero, ed anco un solo dei Potenti, e mezzanamente intelligente delle materie proposte, può far animo agli altri di prestare il loro assenso, e concorrere all' abbracciamento delle imprese. Questo aiuto ho io sperato dal favore e dall' autorità di V. S. Illustriss., e quando succeda che per suo consiglio si ponga mano all' impresa, io ne sentirò contento grande, benchè la mia gravissima età non mi lasci speranza di poter vedere i miei studj e le mie fatiche aver prodotto e maturato il frutto, che per me ne è per risultare al genere umano in queste due grandissime e nobilissime arti, Nautica ed Astronomia. Ho soverchiamente tenuta occupata V. S. Illustrissima: la prego ec.

E conseguentemente in appresso fu (tutto ciò) *da esso comunicato agli altri Signori Commessari ed agli altri Signori Olandesi, che successivamente si adoprarono con i Signori Stati a favor del Galileo, fra' quali fu un tal Sig. Borelio consigliero e pensionario della città di Amsterdam, ed un Sig. Constantino Ugenio di Zuliehem allora primo consigliere e segretario del Sig. Principe d' Oranges, e padre del soprannominato Sig. Cristiano.*

Vedendo il Galileo che il dover trattare questa sua propo-

sizione per lettere in tanta distanza di luoghi richiedeva gran lunghezza di tempo nel rimuovere quelle difficultà, che per altro con la presenza in pochi giorni egli avrebbe sperato di superare, e che dopo averle spianate gli conveniva tornar da capo a informare nuovi deputati (come gli era succeduto dopo cinque anni continui di negoziati per la morte di tutti e quattro i Signori Commessari destinati all'esamine della sua proposta), da che l'età sua cadente di 75 *anni, e la sua cecità non gli permetteva il trasferirsi in Amsterdam, come in altro stato volentierissimo avrebbe fatto; desiderando pure per pubblico benefizio che, se non in vita sua, almeno in vita di quelli che già ne erano consapevoli, si venisse quantoprima alla sperienza del suo trovato, ch' egli reputava esser l' unico mezzo in natura per conseguire la cercata graduazione delle longitudini, stabilì d'inviare colà un amico suo fidatissimo ed intelligentissimo delle cose astronomiche, il quale si era dimostrato assai pronto di trasferirvisi, ed al quale il medesimo Galileo aveva già, dopo la perdita della vista, ceduto tutte le proprie fatiche, osservazioni e calculi attenenti ai Pianeti Medicei, e conferito la teorica per fabbricar le loro tavole ed effemeridi. Questi fu il Padre D. Vincenzio Renieri Monaco Olivetano stato insigne matematico nello Studio di Pisa, il quale si era con tanto gusto applicato a continuare le dette osservazioni, e talmente impadronitosene, che, come è benissimo noto all' A. V., per molti mesi avvenire prediceva ogni particocolare accidente intorno ai detti Pianeti, e nel* 1647 *fece vedere all'A. V. ed al Serenissimo Principe Cardinal Gio. Carlo le tavole ed effemeridi formate per molti anni, quali stava in punto di pubblicare, quando piacque a Dio, che tutto a miglior fine dispone, indi a pochi mesi togliercelo quasi repentinamente di vita. Non so già per qual disgrazia attraversandosi il caso a così profittevole cognizione, mentre il Renieri se ne stava moribondo, fu da taluno ignorante oppur maligno spirito, che ebbe l' adito nelle sue stanze, spogliato lo studio de' suoi scritti, tra i quali era la suddetta opera perfezionata, e la serie ordinata di tutte le osservazioni e calcoli del Galileo dal* 1610 *al* 1637 (1),

(1) Questa imprecisa asserzione, non che ogni altra particolarità attenente a questo fatto, è da noi stata rettificata ed illustrata nel T. V di questa edizione.

con gli altri successivamente notati dal detto Padre Renieri fino al 1648, e così in un momento si fece perdita di ciò che nelle vigilie di 38 anni con tante e tante fatiche a pro del mondo si era finalmente conseguito.

Ma tralasciando le digressioni, intendeva il Galileo d'inviare alli Signori Stati d'Olanda questo Padre Renieri, e forse ancora in sua compagnia il Signor Vincenzio proprio di lui figliuolo, giovine di grande ingegno, e alle invenzioni meccaniche inclinatissimo, i quali insieme fossero provveduti ed istrutti a pieno di tutte le cognizioni necessarie all'effettuazione di sì grand' opera. Mentre dunque il Padre Renieri attendeva alla composizione delle tavole, si pose il Galileo a speculare intorno al suo misurator del tempo; ed un giorno del 1641, quando io dimorava appresso di lui nella Villa d'Arcetri, sovviemmi che gli cadde in concetto che si saria potuto adattare il pendolo agli oriuoli da contrappesi e da molla, con valersene invece del solito tempo, sperando che il moto equalissimo e naturale di esso pendolo avesse a correggere tutti i difetti dell'arte in essi oriuoli. Ma perchè l'esser privo di vista gli toglieva il poter far disegni e modelli, a fine d'incontrare quell' artifizio che più proporzionato fosse all' effetto concepito, venendo un giorno di Firenze in Arcetri il detto Signor Vincenzio suo figliuolo, gli conferì il Galileo il suo pensiero, e di poi più volte vi fecero sopra varj discorsi, e finalmente stabilirono il modo che dimostra il qui aggiunto disegno (1) e di metterlo intanto in opera per venire in cognizione del fatto di quelle difficoltà, che il più delle volte nelle macchine con la semplice speculativa non si possono prevedere. Ma perchè il Signor Vincenzio intendeva di fabbricar lo strumento di propria mano, acciò questo per mezzo degli artefici non si divulgasse prima che fosse presentato al Serenissimo Granduca suo Signore, ed appresso alli Signori Stati per uso della longitudine, andò differendo tanto l'esecuzione, che indi a pochi mesi il Galileo, autore di tutte queste ammirabili invenzioni, cadde ammalato, ed agli 8 di gennaio 1642, stile Romano,

(1) Nel MS. Palatino non esiste che un imperfettissimo abbozzo di tale figura, tanto che abbiamo stimato meglio ometterla affatto, che recarne una non corrispondente alla descrizione del Viviani.

mancò di vita; perlochè si raffreddarono tanto i fervori nel Signor Vincenzio, che non prima di aprile del 1649 intraprese la fabbrica del presente oriuolo, sul concetto somministratogli già, me presente, dal Galileo suo padre.

Procurò dunque di aver un giovine, che vive ancora, chiamato Domenico Balestri, magnano in quel tempo al Pozzo dal Ponte Vecchio, il quale aveva qualche pratica nel lavorar grandi oriuoli da muro, e da esso fecesi fabbricare il telaio di ferro, le ruote con i loro fusti e rocchetti, senza intagliarle, ed il restante lavorò di propria mano, facendo nella ruota più alta detta delle tacche num. 12 *denti, côn altrettanti pironi scompartiti in mezzo fra dente e dente, e col rocchetto nel fusto di num.* 6, *ed altra ruota che muove la sopraddetta di num.* 90. *Fermò poi da una parte del bracciuolo, che fa la croce al telaio, la chiave o scatto, che posa sulla detta ruota superiore, e dall' altra impernò il pendolo, che era formato di un filo di ferro, nel quale stava infilata una palla di piombo, che vi poteva scorrere a vite, a fine di allungarlo o scorciarlo secondo il bisogno di aggiustarlo col contrappeso. Ciò fatto, volle il Signor Vincenzio che io (come quegli ch' era consapevole di questa invenzione, e che l' avevo stimolato ad effettuarla) vedessi così per prova e più d' una volta la congiunta operazione del contrappeso e del pendolo; il quale stando fermo tratteneva il discender di quello, ma sollevato in fuori e lasciato poi in libertà, nel passare oltre il perpendicolo, con la più lunga delle due code annesse all' impernatura del dondolo, alzava la chiave che posa ed incastra nella ruota delle tacche, la quale tirata dal contrappeso, voltandosi con le parti superiori verso il dondolo, con uno de' suoi pironi calcava per disopra l' altra codetta più corta, e le dava nel principio del suo ritorno un impulso tale, che serviva d' una certa accompagnatura al pendolo che lo faceva sollevare fino all' altezza donde s'era partito; il qual ricadendo naturalmente, e trapassando il perpendicolo, tornava a sollevare la chiave, e subito la ruota delle tacche in vigore del contrappeso ripigliava il suo moto seguendo a volgersi e spignere col pirone susseguente il detto pendolo; e così in un certo modo si andava perpetuando l'andata e tornata del pendolo, sino a che il peso poteva calare a basso.*

Esaminammo insieme l'operazione, intorno alla quale varie difficultà ci sovvennero, che tutte il Signor Vincenzio si prometteva di superare: anzi stimava di potere in diversa forma e con altre invenzioni adattare il pendolo all'oriuolo; ma da che l'aveva ridotto a quel grado, voleva pur finirlo sull'istesso concetto, con l'aggiunta delle mostre per le ore e minuti ancora; però si pose ad intagliare l'altra ruota dentata. Ma in questa insolita fatica sopraggiunto da febbre acutissima, gli convenne lasciarla imperfetta; e nel giorno 21.° *del suo male, alli* 16 *di Maggio del* 1649, *tutti gli chiuvoli più giusti, insieme con questo esattissimo misurator del tempo, per lui si guastarono e si fermarono per sempre, trapassando egli (come creder mi giova) a misurar, godendo nell'Essenza Divina, i momenti incomprensibili dell'eternità.*

Questo, Serenissimo Signore, è il progresso, o, per così dire, questa appunto è stata la vita del misuratore del tempo, degno parto del gran Galileo Come ha sentito, egli nacque nell'antichissimo e famoso tempio di Pisa intorno all'anno 1583, *con tutto che il fondamento della sua concezione fusse eterno, mentre eterno è l'effetto dell'ugualissime durazioni e reciprocazioni del pendolo, benchè non prima osservato che dal perspicacissimo nostro Linceo; principio in vero semplicissimo, e dal quale chiaramente s'apprende la verità di quel gran detto del medesimo Galileo:* la natura opera molto col poco, e tutte le sue operazioni sono in pari grado maravigliose. *Questo parto nella sua infanzia fu di vaga scorta alla medicina. Nutrito poi dalla robustissima geometria, e per la vigilante educazione in quella cresciuto, s'applicò in servizio dell'altissima astronomia, e non men atto e pronto si dimostrò all'arte nautica ed alla geografia. Si preparò a maggior uso intorno all'anno* 1641, *quando nella idea del suo genitore Galileo si vestì d'altra forma, e finalmente otto anni dopo, quando per mano del Sig. Vincenzio Galilei stava per ricevere l'ultima perfezione nell'età sua più matura, restò allora infelicemente abbandonato.*

Quanto al rimanente non tralascerò di ricordare all'A. V. come sono intorno a quattro anni che il Serenissimo Gran Duca, perspicacissimo promotore sempre di cose utilissime e nuove, si *dimostrò curioso di qualche modo per avere senza tedio, e con sicurezza, il numero delle vibrazioni del pendolo, ma però del pendolo libero e naturale, che non avesse (come nell' oriuolo del Galileo) connessione o dependenza da altro estraneo motore, che allora io feci vedere a S. A., col soprariferito capitolo di lettera del medesimo Galileo, che questi l' aveva stimato fattibile, e descrittone un modo di propria invenzione con inviarlo in Olanda; che Filippo Treffler augustano ingegnosissimo e perfettissimo artefice, degno in vero di tanto Principe, da questa apertura animato, fabbricò quella galante macchinetta, la quale sottoposta all' imo punto del verticale del pendolo per via d' un' alietta di essa, che nell' andata, ma non già nel ritorno della palla veniva mossa da un acutissimo stile fissato nella parte inferiore di essa palla, dimostrava, per mezzo di leggerissime ruote, il numero preciso delle vibrazioni e delle minuzie del tempo, secondo che più si aggradiva; che per conservare il moto di questo pendolo per un medesimo verticale si proposero e misero in opera varie invenzioni; che per comandamento pure del medesimo Serenissimo si specularono ed inventarono diverse macchine, le quali, alquanto prima che il pendolo si riducesse verso la quiete, e cessasse di sollevare l' alietta del detto numeratore, riconducevano il pendolo a quell' altezza di gradi, dalla quale era stato lasciato da principio, e così perpetuavasi in un certo modo il suo moto, e conseguentemente la numerazione delle sue vibrazioni; che in questo medesimo tempo fu presentato a S. A. dall' ingegnere Francesco Generini un modello di ferro, nel quale però era unito al pendolo il contrappeso in modo simile a quello che 14 anni avanti s' era immaginato il Galileo, ma sibbene con diversa e molto ingegnosa applicazione; che Filippo soprannominato adattò l' invenzione a un oriuolo da camera per S. A., il quale mostrava l' ore ed i minuti, e che poi ne ha fabbricati per le LL. AA. degli esattissimi, i quali dimostrano il tempo assai più minutamente diviso, e nel corso di molti giorni non variano tra di loro di un sol minuto; che d' ordine di S. A. medesima l' istesso Filippo, togliendo dall' una e dall' altra invenzione, ha ridotto a questa foggia l' oriuolo pubblico della Piazza del Palazzo dove abitano le LL. AA; e che finalmente dei mesi addie-*

tro fu inviato di Parigi all'A. V. la già nominata scrittura in dichiarazione del disegno di un simile oriuolo del sopraddetto Sig. Ugenio. Ma nei particolari dei fatti fin qui narrati non istarò a diffondermi con maggior tedio di V. A, giacchè o tutto ha per sè stessa veduto, o a tutto si è trovata presente; onde profondamente inchinandomi bacio all' A. V. la veste.

Di casa, li 20 *Agosto* 1659.

Umiliss. Devotiss. ed Obbligatiss. Servo
VINCENZIO VIVIANI.

FINE DEL VOLUME XIV
(ultimo delle Opere Fisico–Matematiche).

INDICE

LLE MATERIE CONTENUTE NEL PRESENTE VOLUME.

uesto Volume è corredato di XII Tavole di figure geometriche.

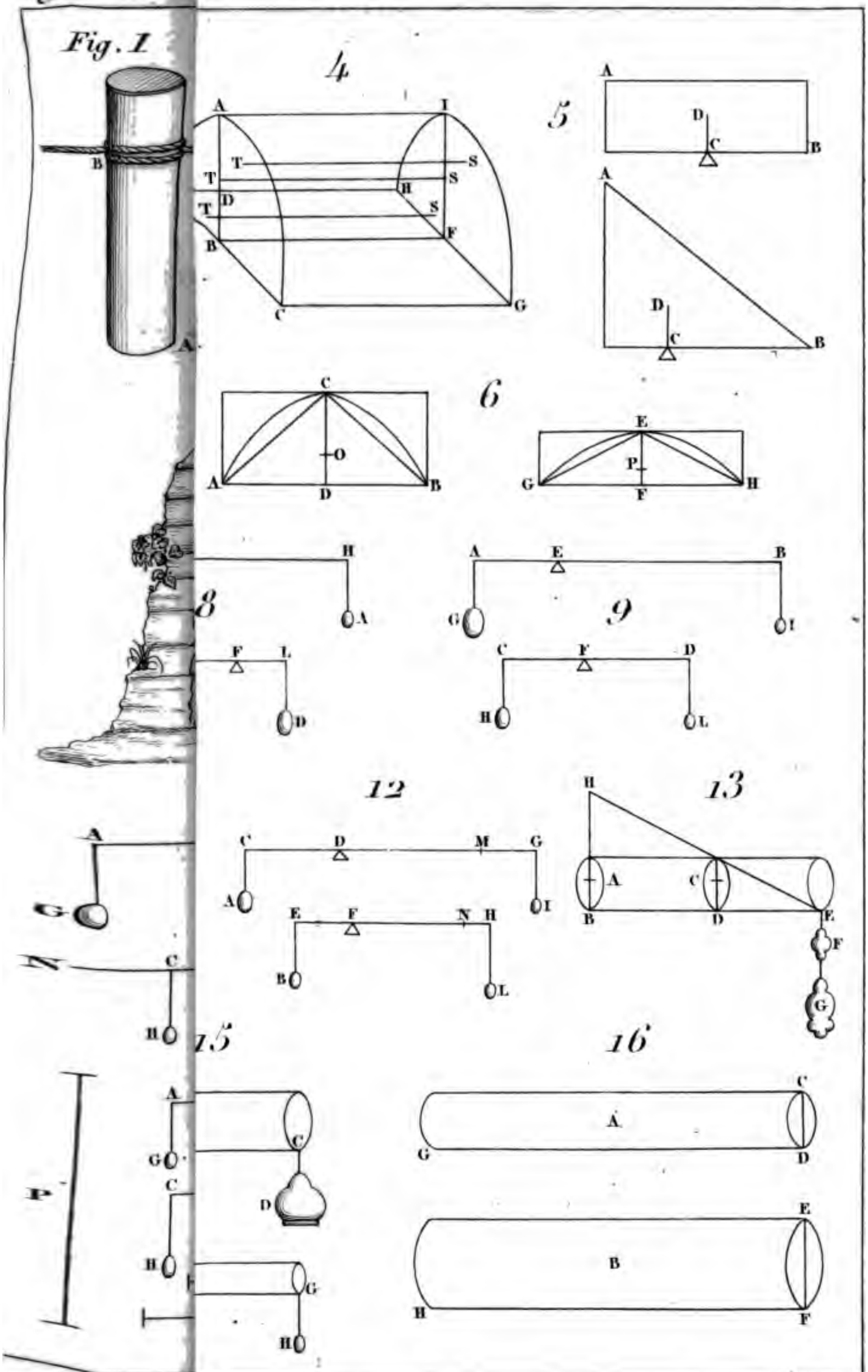


Fig. I
4
5
6
8
9
12
13
15
16

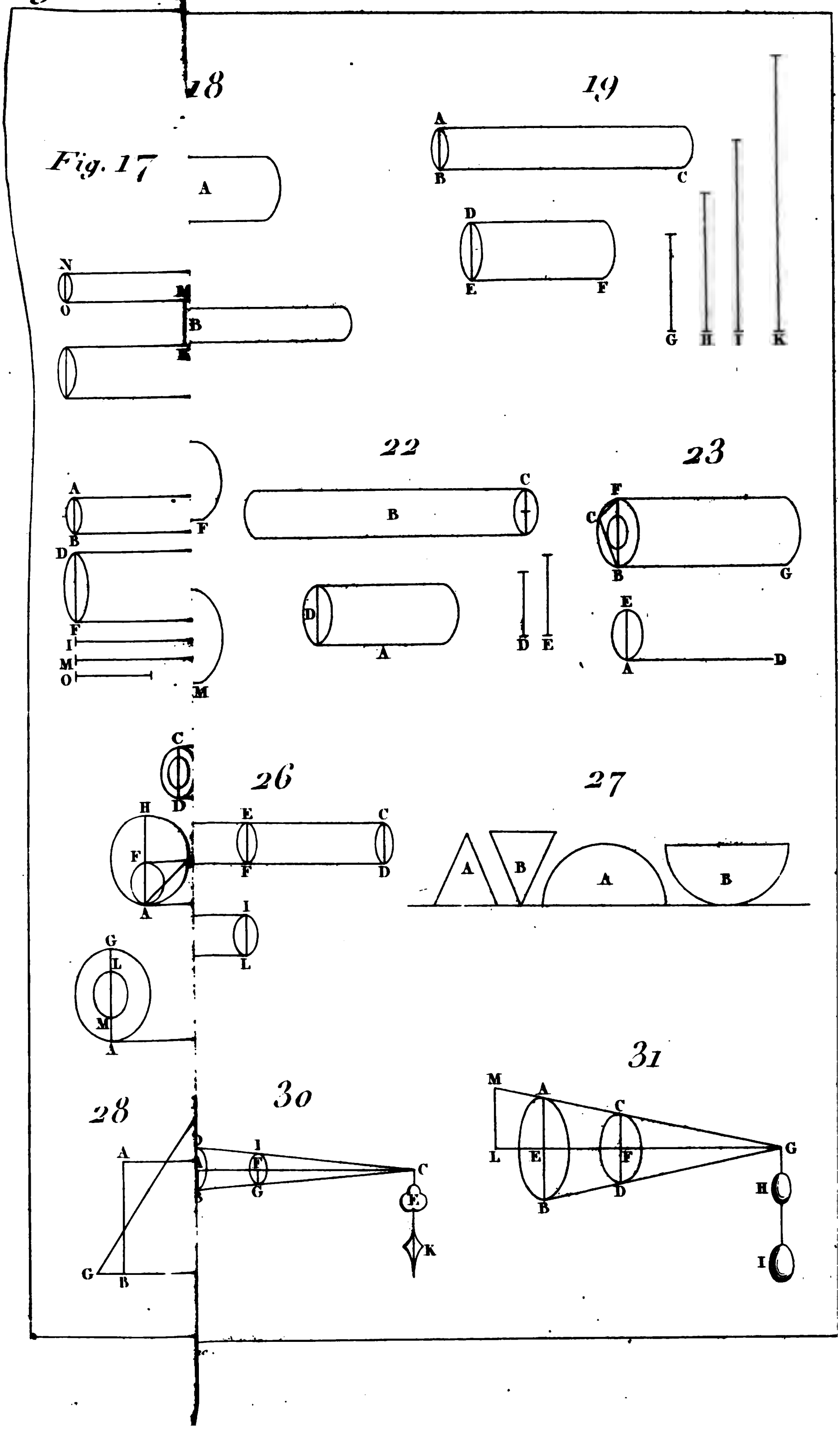
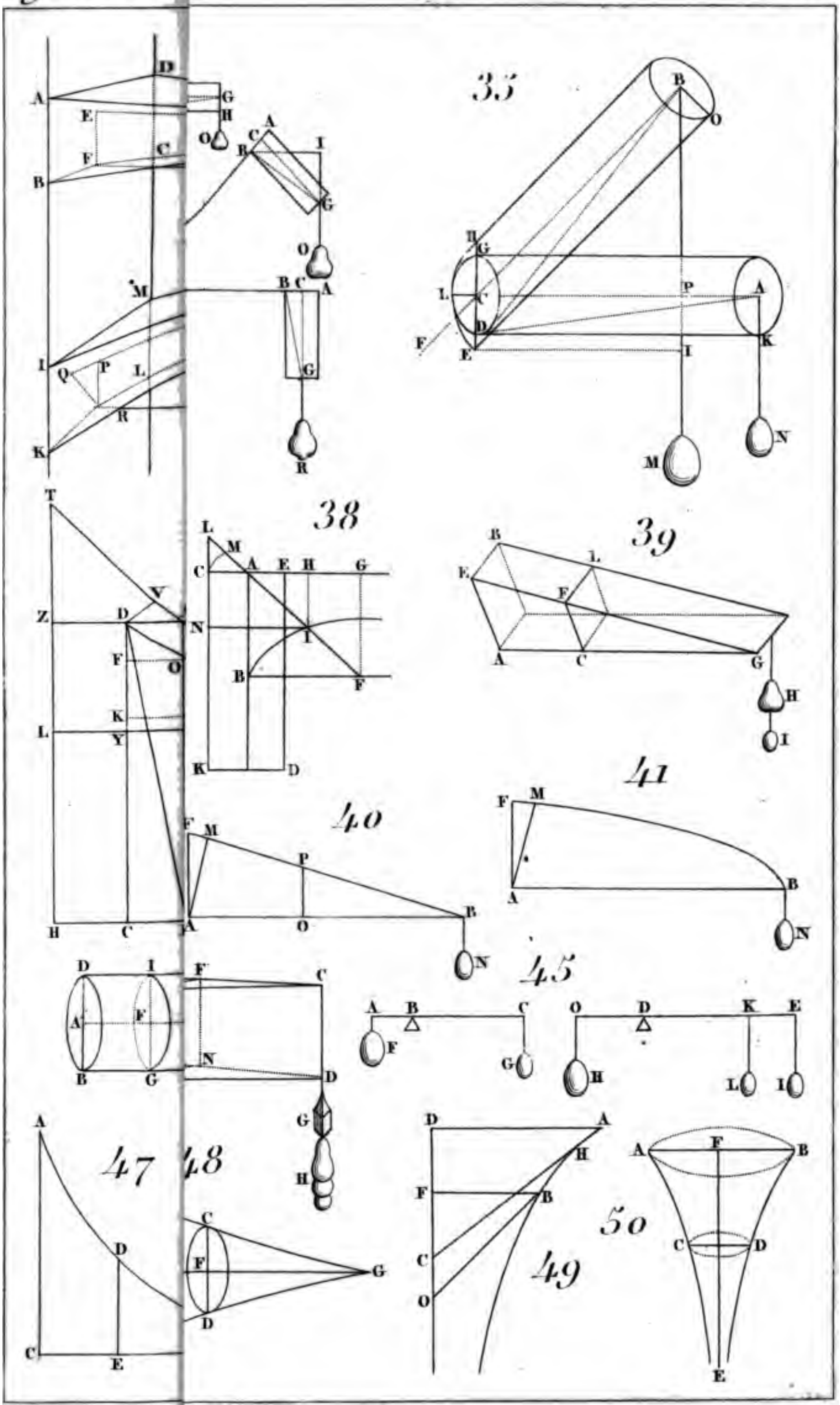
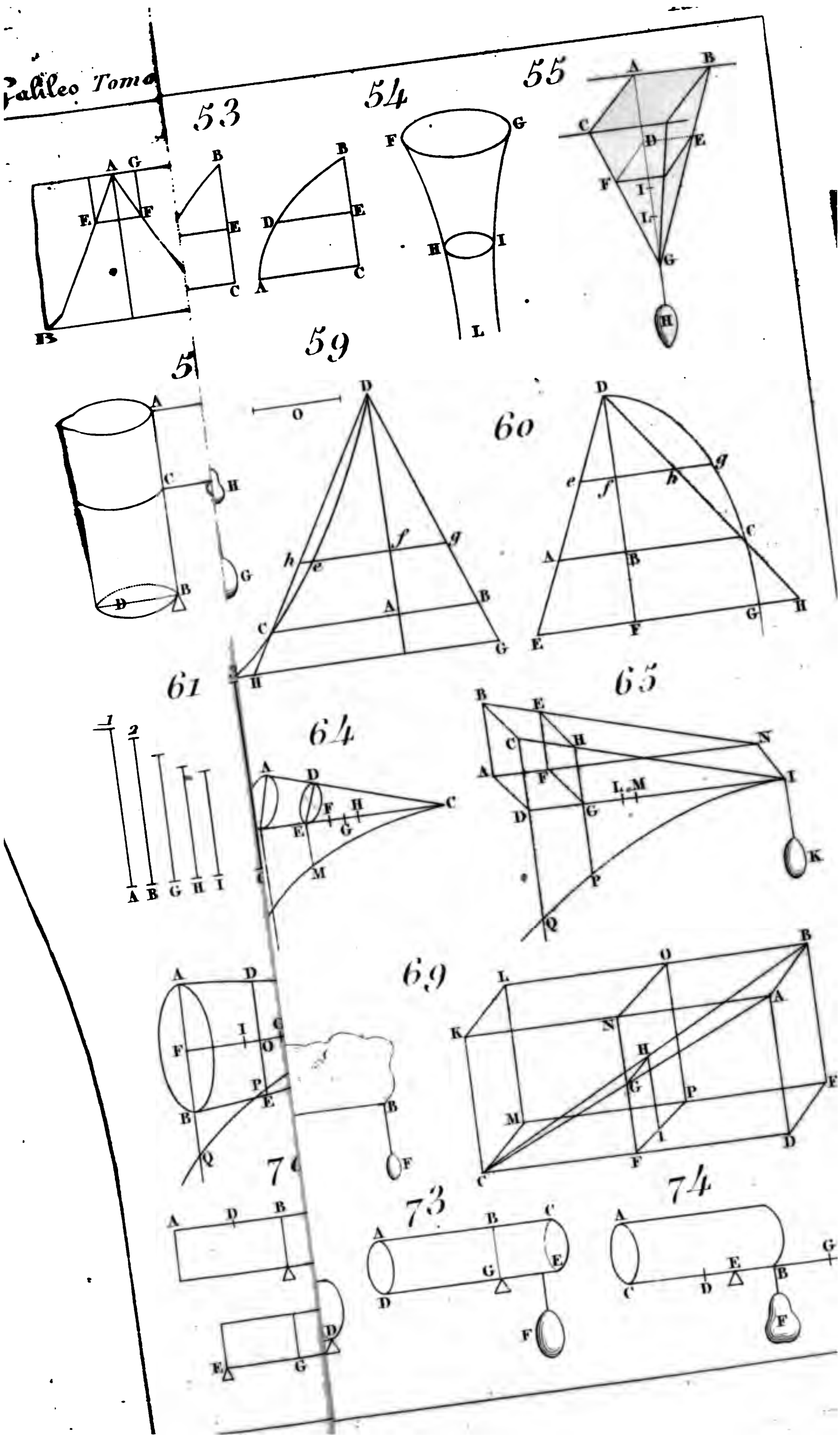


Fig. 17
18
19
22
23
26
27
28
30
31


35
38
39
40
41
45
47
48
49
50



Galileo Tomo
53
54
55
59
60
61
64
65
69
73
74

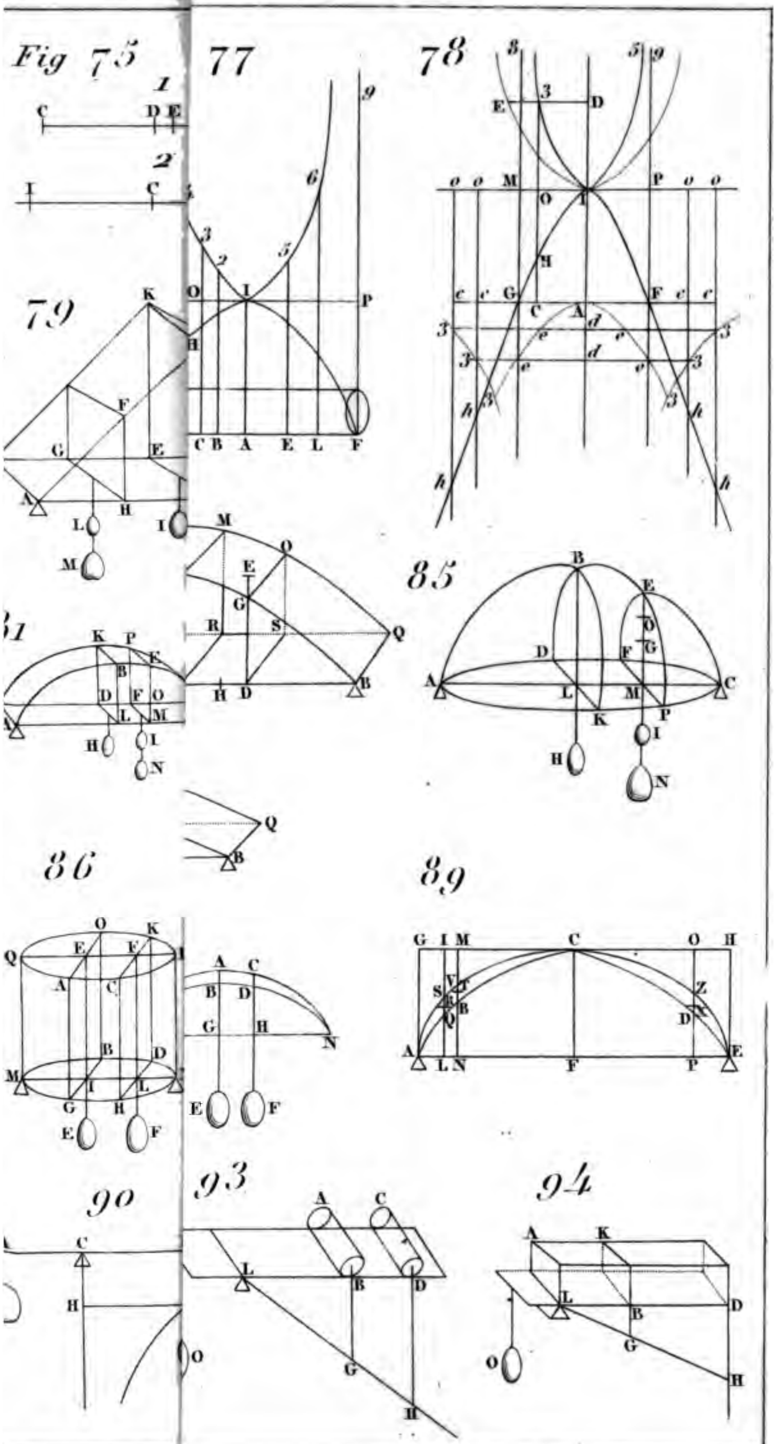


Fig 75
77
78
79
81
85
86
89
90
93
94

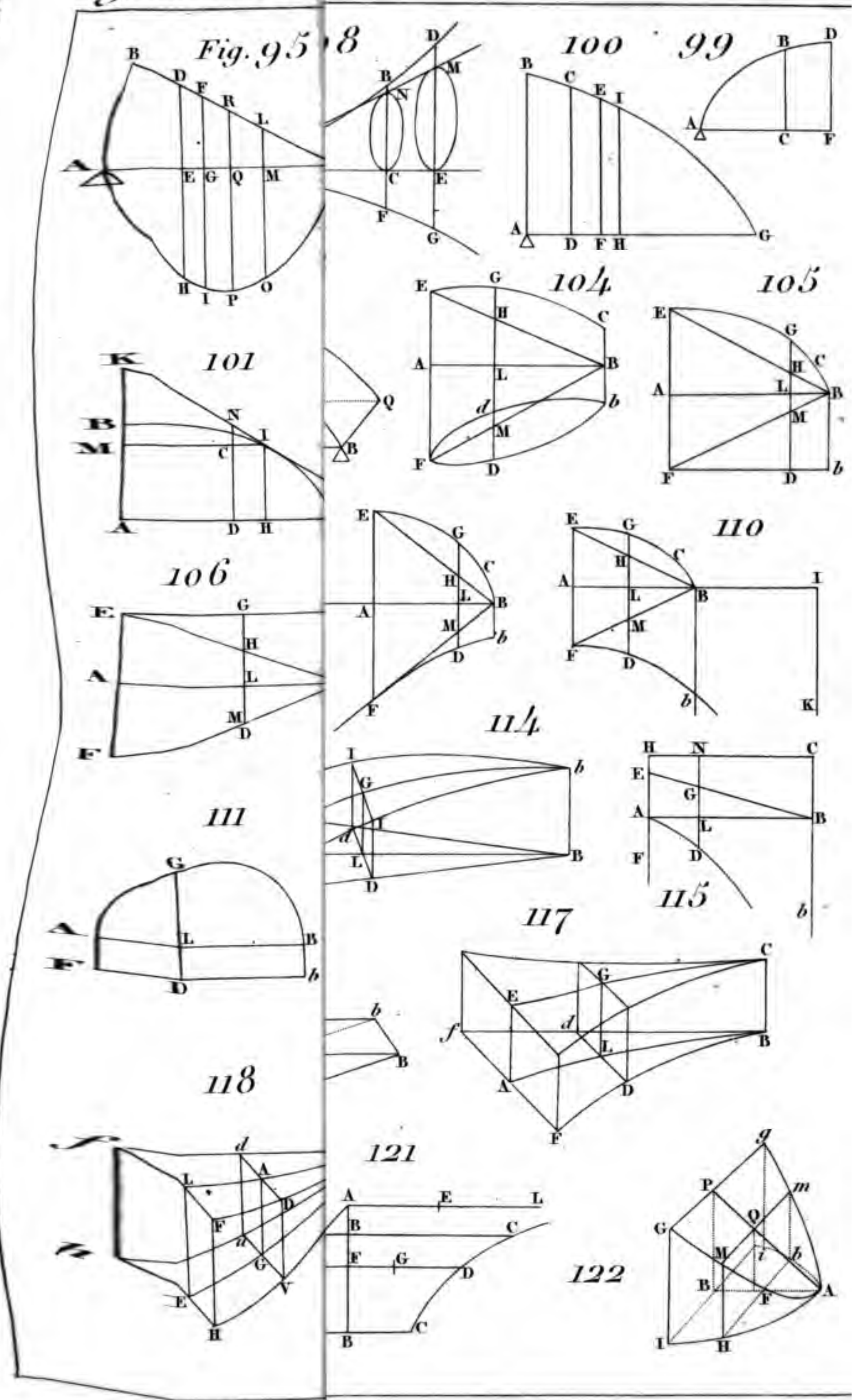
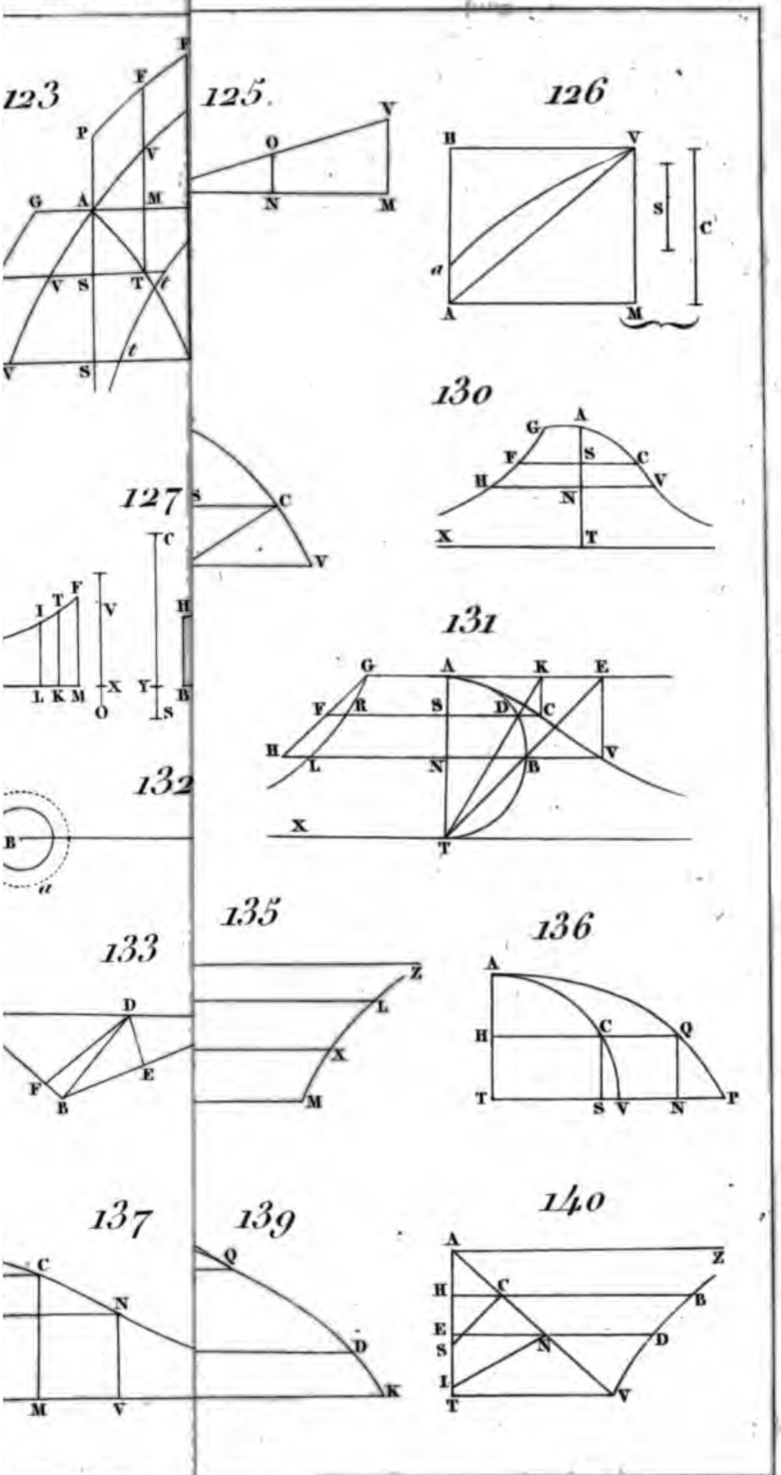


Fig. 95
98
100
99
101
104
105
106
110
111
114
115
117
118
121
122


123
125
126
127
130
131
132
133
135
136
137
139
140

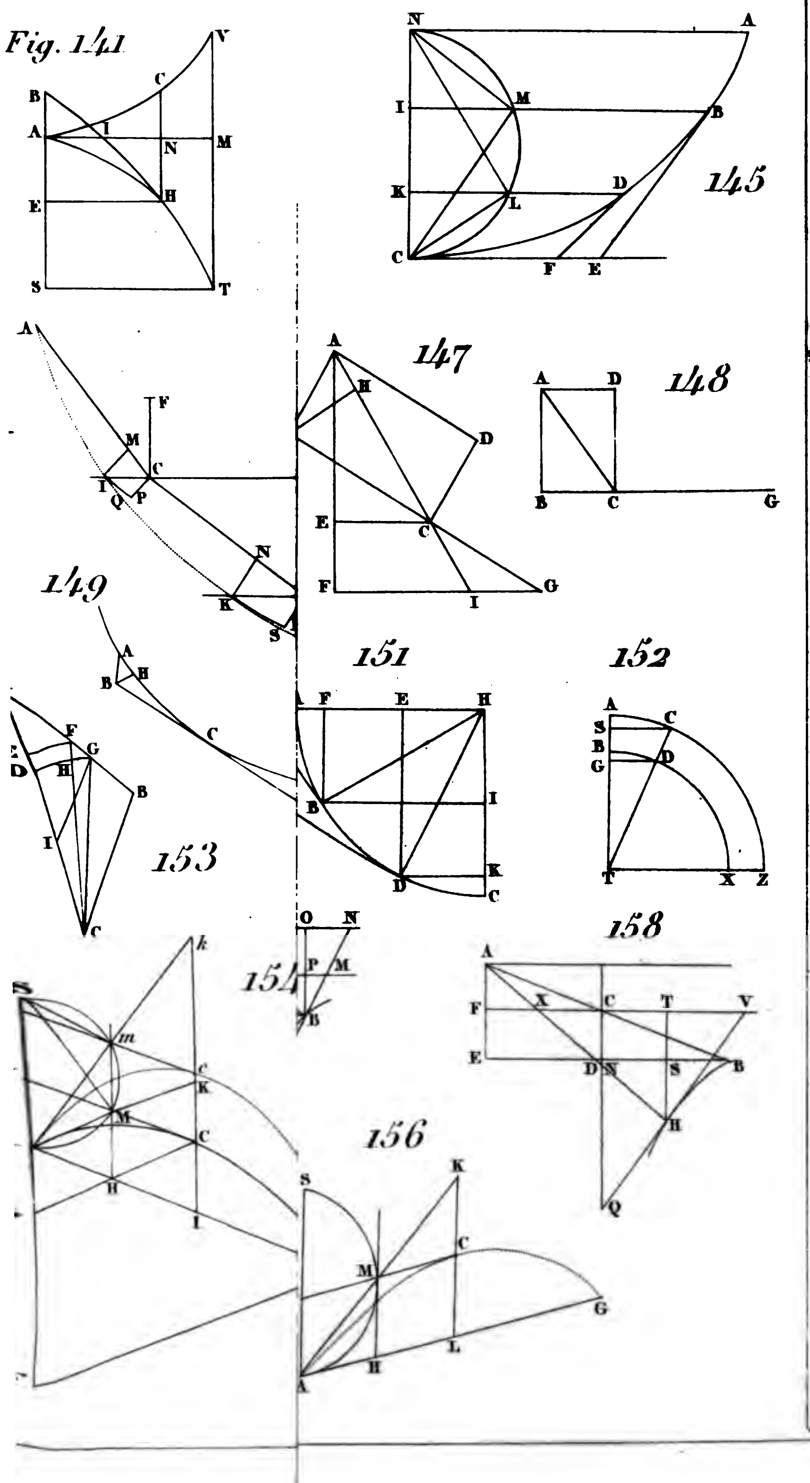


Fig. 141
145
147
148
149
151
152
153
154
156
158

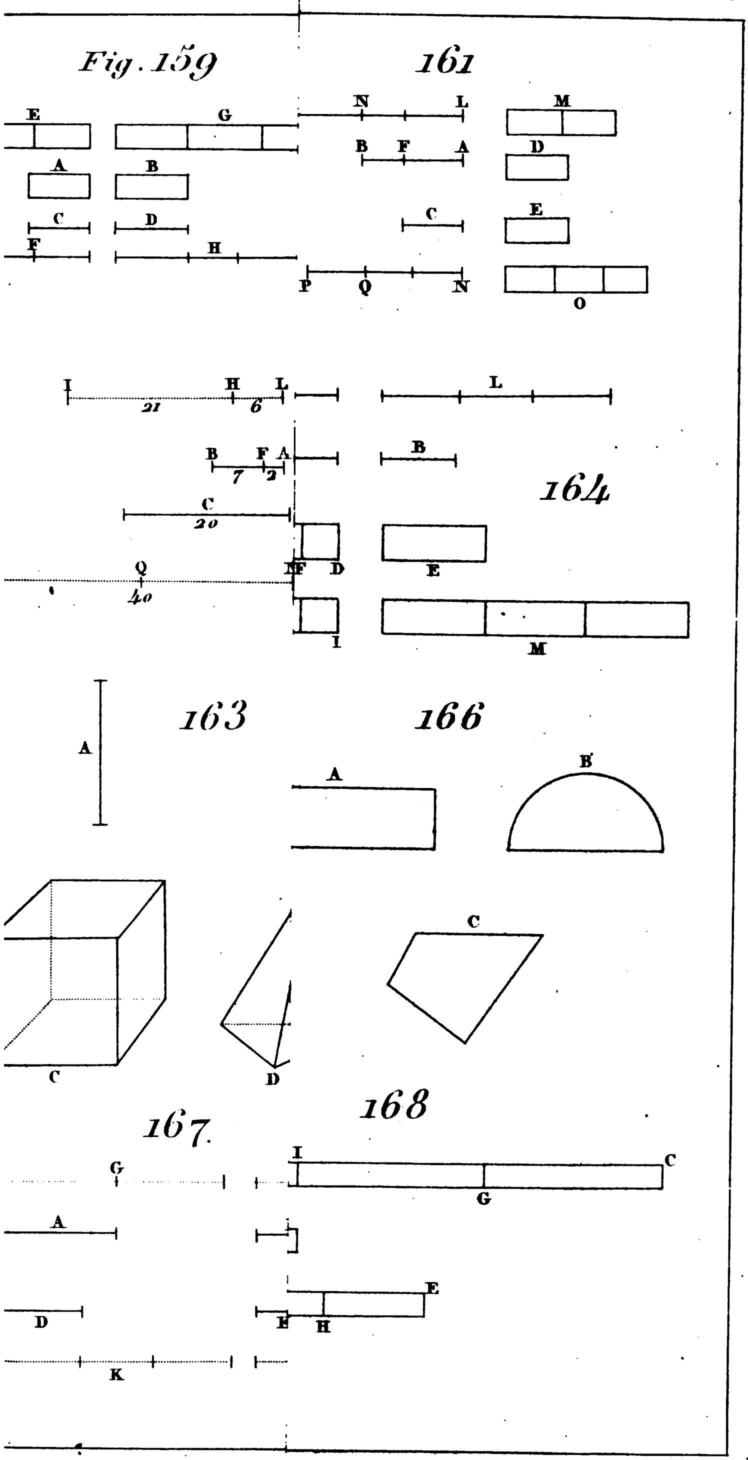


Fig. 159
161
164
163
166
167.
168
E
G
A
B
C
D
F
H
N
L
M
D
E
O
P
Q
I
21
6
7
2
20
40
I
M
A
B
C
D
K
G
E
H

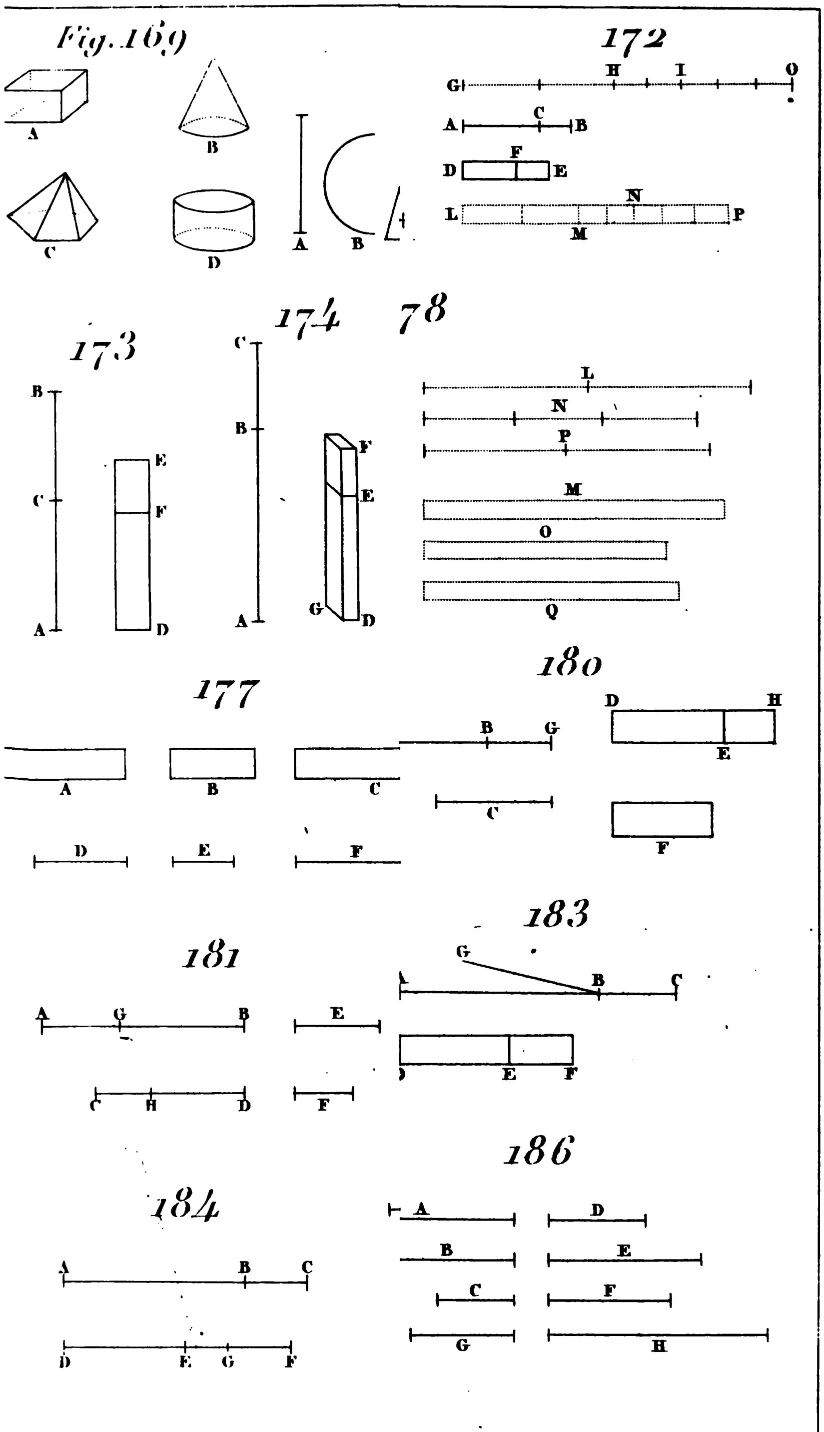
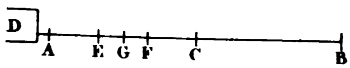
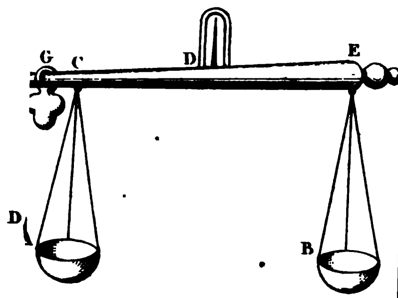


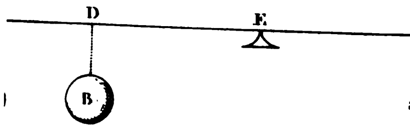
Fig. 169
172
173
174
178
177
180
181
183
184
186

Fig. 187

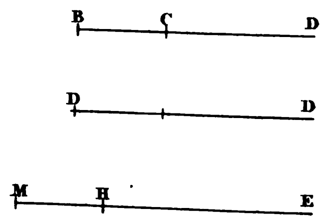




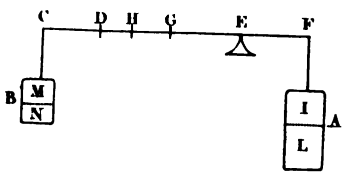
190



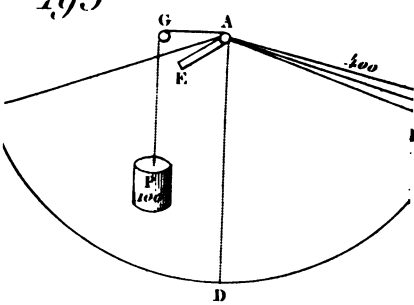
195



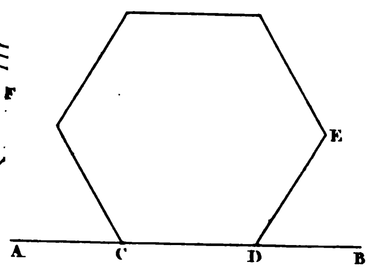
192



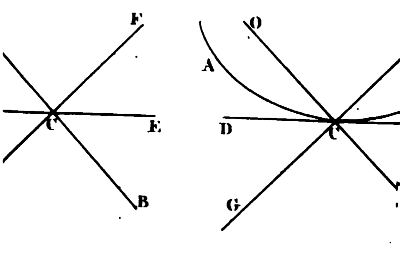
193



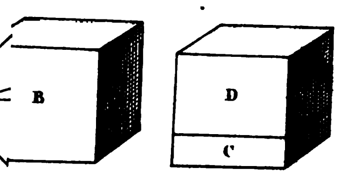
196



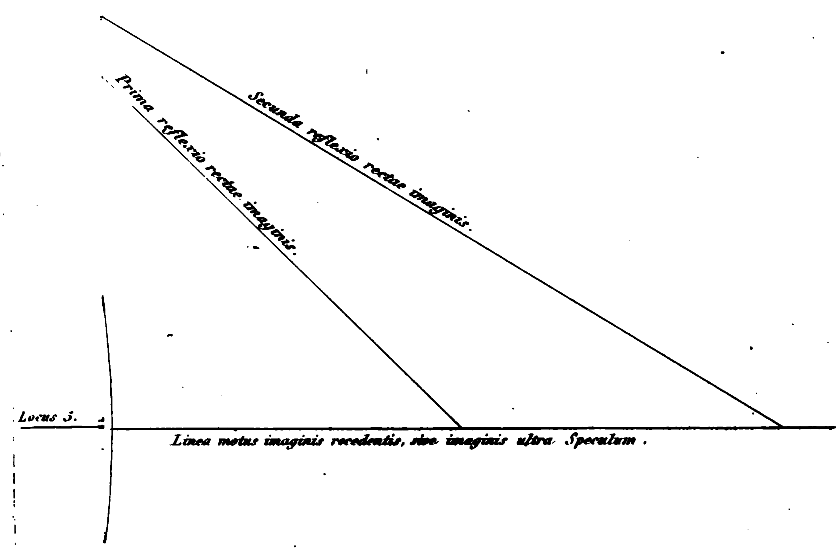
197



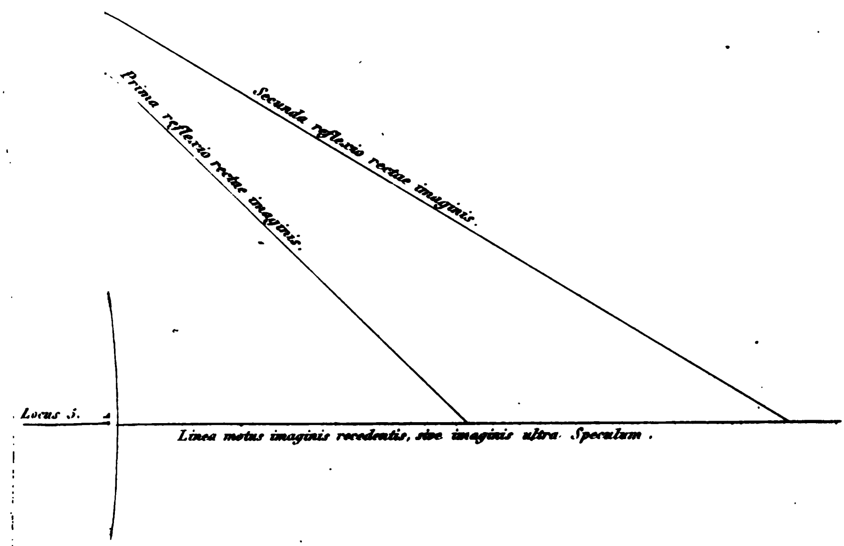
199



Schema pro theorica Speculi concavi sphaerici.



hema pro theorica Speculi concavi sphaerici.



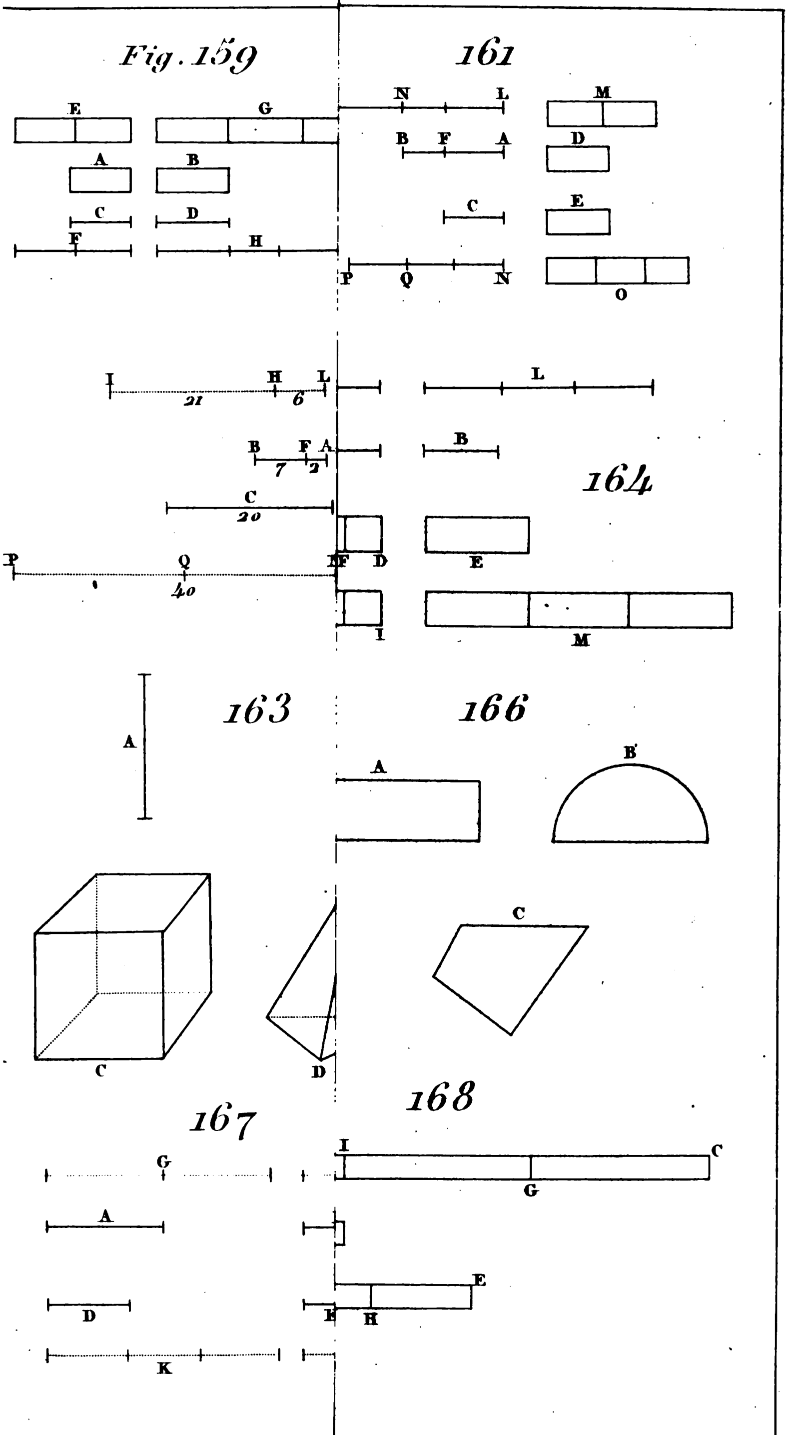


Fig. 159
161
164
163
166
167
168
E
G
A
B
C
D
F
H
N
L
M
B F A
D
C
E
P Q N
O
I H L
21 6
B F A
7 2
C
20
P Q
40
F D
E
I
M
A
A
B
C
C
D
I
C
G
G
A
E
D
H
K

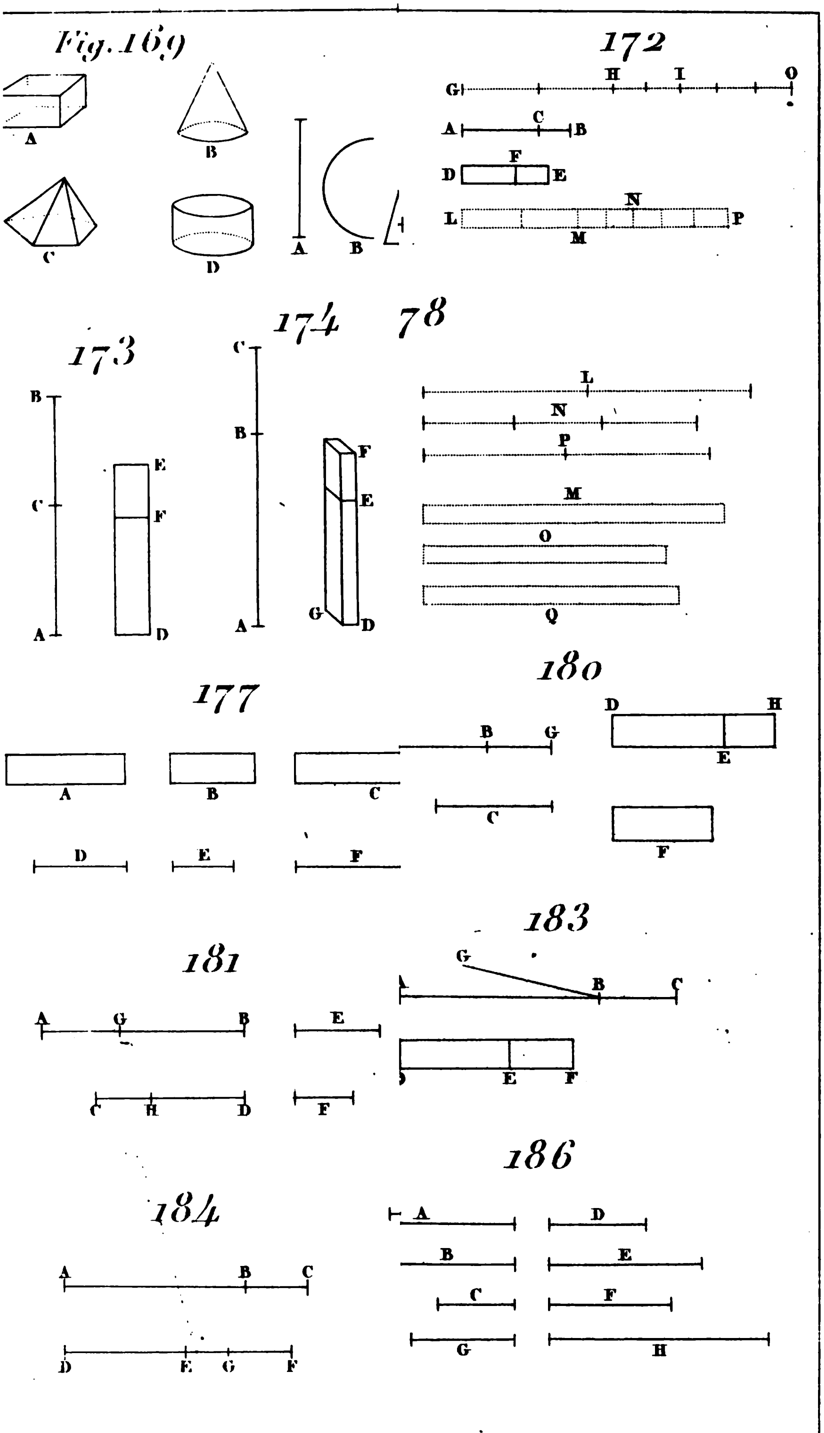
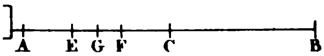
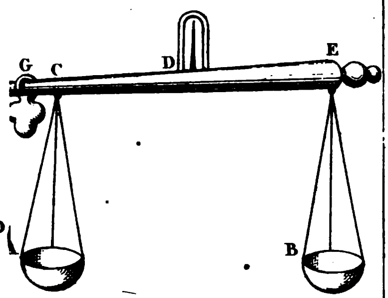


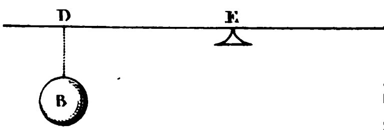
Fig. 169
A
B
C
D
A
B
172
G H I O
A C B
D F E
L N P
M
173
B
C
A
E
F
D
174
C
B
A
F
E
G D
78
L
N
P
M
O
Q
177
A
B
C
D
E
F
B G
C
180
D H
E
F
181
A G B
E
C H D
F
183
G
A B C
D E F
184
A B C
D E G F
186
A
D
B
E
C
F
G
H

Fig. 187

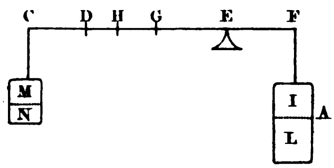


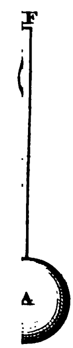


190

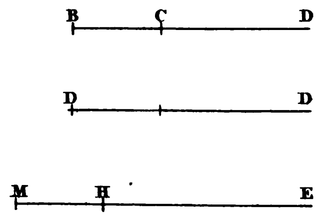


192

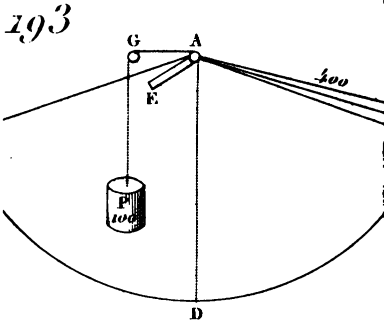




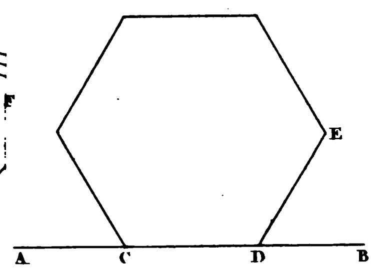
195



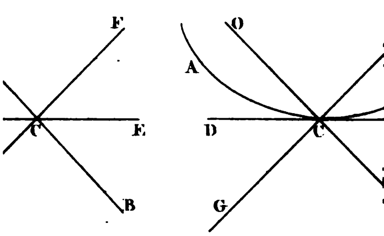
193



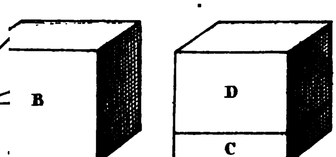
196

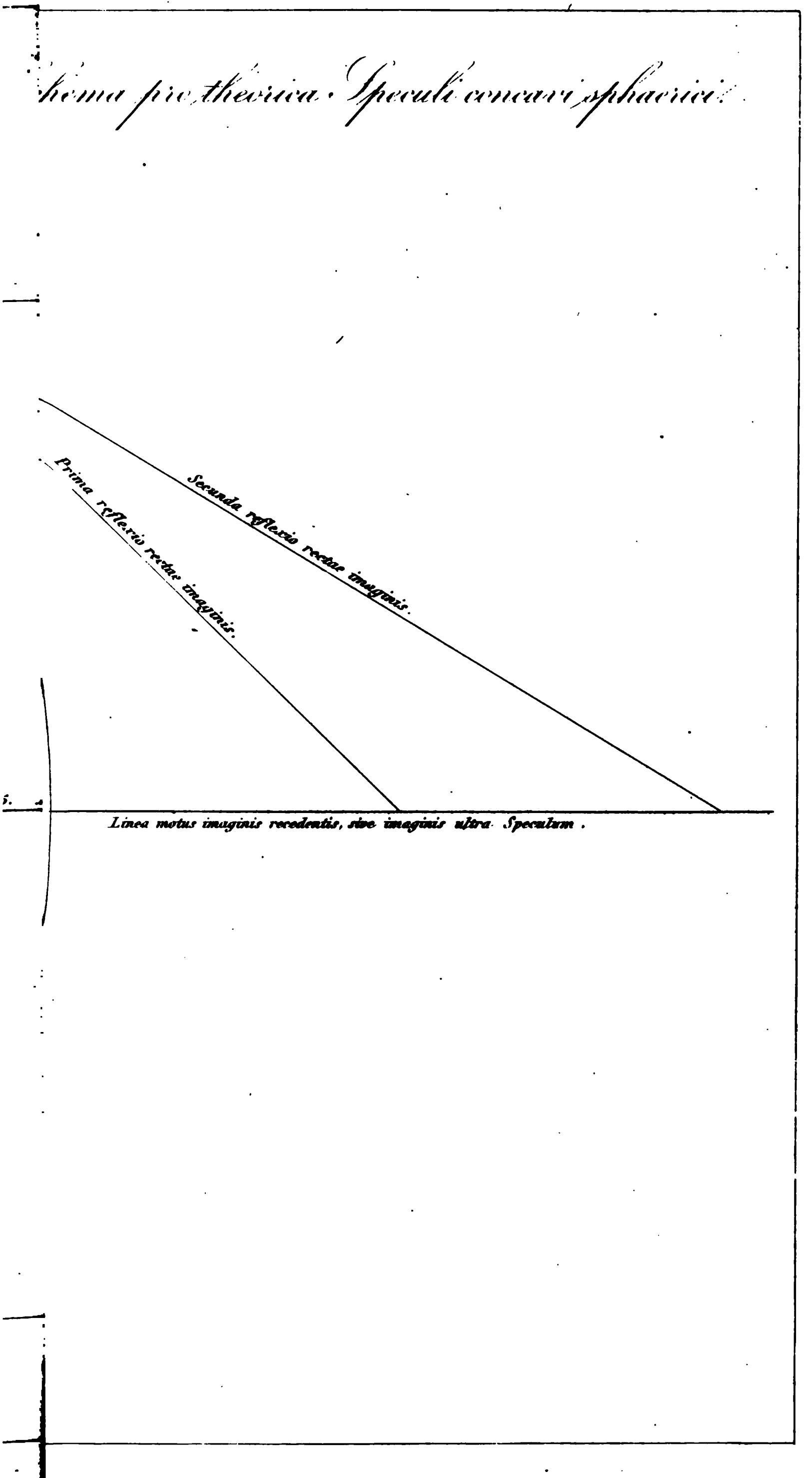


197



199





hema pro theorica Speculi concavi sphaerici
Secunda reflexio rectae imaginis.
Prima reflexio rectae imaginis.
Linea motus imaginis recedentis, sive imaginis ultra Speculum.