Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

FISICA

DE' CORPI PONDERABILI

OSSIA

TRATTATO

DELLA COSTITUZIONE GENERALE DE' CORPI

DEL CAVALIERE

AMEDEO AVOGADRO

DELL' ORDINE CIVILE DI SAVOIA

MASTRO-UDITORE NELLA REGIA CAMERA DE' CONTI
PROFESSORE EMERITO DI FISICA SUBLIME NELLA REGIA UNIVERSITA'
MEMBRO DELLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
E DELLA SOCIETA' ITALIANA DELLE SCIENZE.

TOMO I.°

ASTOR LIBRARY
NEW-YORK

TORINO

DALLA STAMPERIA REALE

1837.

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

S. R. M.

L'opera che io oso offrire a V. M. è frutto degli incoraggiamenti, che la M. V., e i suoi Reali Predecessori hanno compartiti ai deboli miei sforzi per cooperare al progresso delle Scienze Fisiche in questi Regii Stati.

Li miei studi sulle scienze naturali si sono particolarmente aggirati intorno a quella parte della Fisica, che riflette alla costituzione generale de' corpi ponderabili, e conseguentemente alle qualità delle loro molecole componenti, e alle forze da cui sono animate, alla capacità de' diversi corpi pel calore, e alla loro dilatazione dal medesimo, alla densità e forza elastica de' loro vapori ecc.

Io ebbi quindi occasione di osservare, che questa parte della fisica, che si può considerare come il fondamento delle altre, non avea finquì formato, singolarmente in Italia, l'oggetto d'un lavoro, che esattamente presentasse il complesso, e lo stato attuale delle cognizioni che vi sono comprese.

Nacque perciò in me il desiderio di riempiere questa lacuna, e di comporre un Trattato, che tutte riunisse, per quanto fosse possibile, tra loro concatenate e connesse le ricerche, e le scoperte anche recentissimamente fatte in questo ramo di Scienza, non senza comprendervi il cenno di que' lavori coi quali aveva tentato io stesso di dilatarne il campo.

Accintomi da più anni all' impresa, e trattando ciascuna parte del mio soggetto con

Per tale considerazione io confido che V. M. guarderà benignamente a quest'offerta mia, e con tale fiducia mi avanzo a supplicare la M. V. di aggradirne gli umilissimi miei rendimenti di grazie, insieme con l' omaggio della fermissima fedeltà, e del profondissimo rispetto, col quale bacio le mani della S. R. M. V.

L'Umil.mo ed Obb.mo Servitore
e Fedelissimo Suddito
Amedeo Avogadro

INTRODUZIONE

Per far conoscere in una maniera precisa l' oggetto dell' opera che io presento al Pubblico, credo cosa conveniente l' esporre dapprima alcune idee generali sulla classificazione delle Scienze Fisiche, onde fissare la relazione che colle loro diverse parti si trova aver quel ramo particolare delle medesime, che io mi propongo di trattare.

Tutte le cognizioni umane possono ridursi a due grandi classi, cioè le *Scienze Fisiche* che si aggirano sulle cose sensibili, ossia sui *corpi* e sulle loro proprietà, e le *Scienze Metafisiche* che esaminano la natura e le qualità degli enti che non cadono sotto i sensi, ma sono essi medesimi dotati d' intelligenza o di senso.

Le Scienze Fisiche di cui soltanto dobbiamo qui occuparci, si soddividono in due parti che possono indicarsi coi nomi di *Matematica*, e *Fisica*, prendendo quest' ultimo nome in un senso più ristretto che quello di Scienze fisiche.

La Matematica (sotto il qual nome intendiamo qui quella che comunemente si dice *Matematica pura*) si limita a considerare ne' corpi due proprietà affatto astratte, e generalissime, la *quantità* e l' *estensione*, delle quali la prima conviene non solamente ai corpi,

ma anche agli enti incorporei ed intelligenti, poichè di questi si ha pure a considerare il numero, e i diversi gradi delle loro facoltà; onde per riguardo a questa proprietà la matematica rinchiude qualche cosa di metafisico, e confina così colla classe delle scienze di questo nome; l' altra poi, l' estensione, si può in certa maniera riguardare, per naturalissima astrazione, come distinta dal corpo sensibile medesimo, cioè come lo spazio che il corpo occupa, e che difficilmente si potrebbe concepire annullato, quando anche il corpo dal medesimo si togliesse. Questo basta per caratterizzare tale proprietà, e far vedere la ragione per cui se ne unisce la cognizione a quella della quantità, per farne l' oggetto della Matematica, sottraendola al dominio della Fisica, senza entrare nelle questioni, che da molti si agitano, sulla realtà o non realtà dello spazio in se stesso.

Quella qualità che distingue il *corpo* o *materia*, quale la Fisica lo considera, è l' *impenetrabilità*, cioè la proprietà per cui un corpo non può sussistere dove già se ne trova un altro, ossia per cui ciascun corpo esclude gli altri corpi dal luogo che esso occupa.

Infatti egli è evidente che per questa proprietà appunto i corpi divengono sensibili al tatto, e sarebbe facile il far vedere, che anche gli altri sensi non possono essere colpiti dai corpi o immediatamente o mediatamente, se non in ragione di tale proprietà.

Ma il corpo considerato come impenetrabile ha poi anche un'altra proprietà, o dirò meglio capacità, che for-

e distinte di cui sono composti, e li riguarda, per quanto appartiene al suo principale oggetto, come perfettamente solidi, o perfettamente fluidi, e questa si distingue col nome di *Meccanica*; la seconda li considera quali realmente sono, come formati dalla riunione di tali molecole più o meno strettamente tra loro connesse secondo certe leggi, ma senza occuparsi delle diverse spezie di queste molecole, da cui risultano le diverse sostanze che in natura esistono, e questa è la *Fisica* presa in un senso più ristretto dei precedenti, e quale s' intende generalmente dai più moderni autori di Corsi di Fisica; la terza finalmente esamina quelle diverse spezie di molecole, ossia le diverse sorta di sostanze che dalla loro riunione si formano, e le leggi con cui le molecole eterogenee tra loro si uniscono, o si separano per la produzione di tali diverse sostanze, e questa parte si chiama *Chimica*.

La *Fisica propriamente detta* tiene così il mezzo tra la meccanica, e la chimica, cosicchè se altri volesse riservare il nome di Fisica alla scienza dei corpi sensibili e impenetrabili, presa in tutta la sua generalità, e per opposizione alla Matematica, o almeno attribuirlo alla Fisica generale in cui le tre parti indicate sono comprese, potrebbe assegnare a questa parte separatamente il nome di *Chimico-meccanica*, poichè non pare esserle stato consecrato dall'uso alcun nome particolare e distinto, come pur sarebbe stato convenevole.

Per la soddivisione ulteriore di questo ramo di Scien-

za, di cui dee far parte l'oggetto della presente opera, osserveremo, che le molecole corporee possono presentarsi in due stati affatto diversi; nell'uno esse sono tra loro più o meno strettamente riunite da forze intrinseche od estrinseche, cosicchè vengano a formare masse sensibili, e che si manifestano particolarmente col loro peso, onde ne risultano i corpi detti *ponderabili*; l'altro è uno stato di disunione, e di tenuità tale, che dal loro complesso non si formano masse distinte, dotate di peso sensibile, ma solo fluidi sottilissimi, i quali o circondano le molecole de' corpi ponderabili, e possono passare dall'uno all'altro di essi con moto proprio, o sono universalmente diffusi nello spazio, e suscettibili di moti di vibrazione che per essi si propagano, secondo le due teorie diverse che si sono proposte per ispiegare i fenomeni che si riferiscono ad alcuni di essi, e che non è qui il luogo di esaminare. Quindi la divisione della Fisica propriamente detta, ossia della Chimico-meccanica in *Fisica de' corpi ponderabili*, e *Fisica de' corpi imponderabili.*

La costituzione generale però dei corpi dotati di massa sensibile, di cui si occupa la prima di queste parti, è strettamente collegata o colla presenza, e colla maggiore o minor quantità di uno dei fluidi imponderabili che dalla sensazione di calore che è atto ad eccitare in noi fu detto *calorico*, o secondo l'altra delle due accennate teorie, con un moto di vibrazione più o men rapido delle loro molecole, che dall'uno all'altro si comunica per mezzo delle vibrazioni d'un fluido imponderabile generalmente diffuso nell'interno di essi

corpi, come in tutto lo spazio. Quindi resta necessario che la Fisica de' corpi ponderabili si occupi anche di questo fluido particolare calorifico, o delle vibrazioni di quel fluido generalmente in essi diffuso, in quanto possano i loro effetti influire sulla costituzione de' corpi ponderabili medesimi, rimandando però le considerazioni più generali sul moto di tali fluidi alla Fisica de' corpi imponderabili.

I fluidi poi che formano l' oggetto proprio e speciale di quest' ultima possono distinguersi in due classi, relativamente a due modificazioni diverse nella lor maniera d' agire. I fluidi della prima classe, senza esercitare ordinariamente alcuna influenza sulla costituzione dei corpi di massa sensibile, entrano però nella lor sostanza, girano attorno alle loro molecole, o aderiscono alla lor superficie ed esercitano sopra i medesimi certe azioni da cui risultano moti particolari in alcune circostanze nelle masse sensibili stesse; da una o più specie di questi fluidi dipendono i fenomeni che si sono compresi sotto il nome di *elettricità* e di *magnetismo*. Di questi fluidi, e della loro azione dee la Fisica ossia la Chimico-meccanica occuparsi, poichè noi non li conosciamo che per le proprietà che ne risultano nei corpi di massa sensibile a cui aderiscono, e non sotto forma di sostanze separate, come quelle che formano l' oggetto particolare della Chimica, e forse non sono essi essenzialmente distinti quanto alla loro sostanza dagli altri fluidi imponderabili; i fenomeni elettrici e magnetici hanno del resto tra loro una troppo grande analogia perchè si possano separare

per giungere all' occhio ; sia che tali effetti si producano per mezzo delle vibrazioni comunicate dalle molecole dei corpi medesimi a quelle d' un fluido generalmente diffuso nello spazio.

La parte della Fisica propriamente detta, che tratta dell' elettricità e del magnetismo, può comprendersi sotto al nome di *Elettrologia*, e quella che si occupa dei fenomeni della luce, e del calorico raggiante, i quali sono sottoposti a leggi comuni, sotto il nome di *Ottica.*

Quanto alla *Fisica speciale*, poichè essa si aggira sovra i corpi particolari che compongono l' universo, essa si divide naturalmente dalla considerazione della diversa natura, o mutua relazione di questi oggetti. E in primo luogo tali oggetti sono, o *terrestri* o *celesti*; *terrestri* chiamiamo quelli che si trovano sulla superficie della terra che noi abitiamo, o nelle sue viscere, per quanto noi possiamo conoscervi addentro; i corpi *celesti* poi sono quelle grandi masse, dette comunemente *astri*, che colla terra medesima considerata nel suo complesso, compongono l' intiero universo. La Fisica speciale adunque può dividersi in *Fisica terrestre*, e *Fisica celeste*; quest' ultima con proprio nome chiamasi anche *Astronomia.*

Tra i corpi terrestri, i quali possiamo conoscere più da vicino che i corpi celesti, altri diconsi *organici*, ed altri *inorganici*; quelli hanno una struttura e configurazione particolare, nascono gli uni dagli altri, crescono, e si sviluppano, assimilandosi le sostanze di cui si nutrono, e esercitano in generale

certe funzioni che si comprendono sotto il nome di *vita*; tali sono gli *animali*, e le *piante*.

I corpi inorganici al contrario non hanno che forme per dir così accidentali, sebbene talvolta determinate, si producono per semplice apposizione delle materie di cui sono composti, e non esercitano alcuna particolar funzione; tali sono le pietre, l' acqua ecc. Quindi la Fisica terrestre può soddividersi in *Fisica terrestre organica*, e *Fisica terrestre inorganica*.

Abbiamo detto che i corpi organici comprendono gli *animali*, e le piante o *vegetali*. Conseguentemente la Fisica organica ha due parti, che si distinguono coi nomi di *Zoologia*, ossia Trattato degli animali, e *Fitologia* o *Botanica*, cioè Trattato de' vegetali o delle piante.

Quanto ai corpi inorganici, che formano la massa inerte del nostro globo, gli uni appartengono alla sua parte solida, e diconsi *minerali*, gli altri alla parte fluida, che comprende il mare, i fiumi, i laghi, e l'atmosfera ossia massa d'aria che circonda il globo terrestre. Questi ultimi corpi hanno una stretta relazione tra loro nell' economia di questo globo, poichè per mezzo della svaporazione le acque passano continuamente nell' atmosfera, e i vapori che ne risultano condensandosi poi di nuovo in pioggia, neve ecc. danno origine alle fontane e ai fiumi, che riconducono queste acque al mare, e così successivamente per una perpetua circolazione. Quindi il celebre mineralogista Werner ha il primo separati questi corpi dai minerali sotto un nome particolare, cioè di *Regno atmosferico*, nella stessa maniera che avanti lui già da antichissimo tempo si di-

stinguevano i tre *Regni* o grandi classi di corpi terrestri, *animale*, *vegetale* e *minerale*.

Siccome adunque la Fisica terrestre organica si occupa de' due regni *animale* e *vegetale*, così l' inorganica s' aggira sopra gli altri due regni *minerale*, e *atmosferico*, e si divide quindi in due parti, di cui la prima si chiama *Mineralogia* (prendendo questo nome nella sua più estesa significazione), e l'altra *Meteorologia*, poichè *meteore* si dicono in generale i fenomeni che accadono nell' atmosfera.

Aggiungendo ora a queste quattro parti della Fisica speciale terrestre, la Fisica celeste ossia l' astronomia, la Fisica speciale viene a comprendere cinque scienze distinte, cioè la *Zoologia*, la *Botanica*, la *Mineralogia*, la *Meteorologia*, e l' *Astronomia*. Osserveremo ancora che la Fisica speciale potrebbe anche chiamarsi con un nome più usitato *Storia naturale*, se non che sotto questo nome non si suole comprendere nè l' astronomia, nè la meteorologia.

La divisione che qui abbiamo indicata delle scienze Fisiche si scosta a molti riguardi, come è facile vedere, da quella che Ampère ha data delle stesse scienze, che egli chiama *Cosmologiche* per opposizione alle scienze metafisiche da lui dette *Noologiche* (*Essai sur la philosophie des sciences*, *Paris* 1834). Così egli separa dapprima ciò che riguarda i corpi organici sotto il nome di *Scienze Fisiologiche*, e quanto alle altre parti che sono secondo lui le *Scienze Cosmologiche propriamente dette*, egli comprende nelle *Scienze Matematiche*, che corrispondono a quella parte da

noi qui sopra chiamata semplicemente *Matematica*, anche la Meccanica, e l'Astronomia; in vece che noi abbiamo riferite queste scienze alla *Fisica* presa nel suo senso più esteso, e come in opposizione a quello di *Matematica*, cioè la prima alla *Fisica generale*, e la seconda alla *Fisica speciale*. Quanto alle scienze Fisiche di Ampère, che astrazion fatta da quegli stralci delle scienze Fisiologiche, della Meccanica, e dell'Astronomia corrisponderebbero alla nostra *Fisica* presa nel senso più esteso, egli le divide in *Scienze Fisiche propriamente dette* che sono l' equivalente della nostra *Fisica generale*, e *Scienze geologiche* che corrispondono, avuto riguardo alla separazione suddetta della Fisica organica, e dell' Astronomia, alla nostra *Fisica speciale*. Ma in vece di dividere quelle *scienze Fisiche propriamente dette*, ossia la Fisica generale immediatamente per rapporto ai diversi oggetti che vi abbiamo distinti, e che, per la separazione suddetta della meccanica, si ridurrebbero a due, e così nella *Fisica propriamente detta*, o *Chimico-meccanica*, e nella *Chimica*, Ampère ne fa dapprima (per non parlare della parte tecnologica, che egli considera separatamente, come applicazione di queste scienze) due gradi di cognizioni, di cui l' uno si limiterebbe all' osservazione dei fenomeni, sotto il nome di *Fisica elementare*, e l'altra cercherebbe di assegnarne le leggi sotto quello di *Fisica matematica*; e soddivide poi queste due parti ciascuna in una maniera analoga a quella che abbiamo adoperata immediatamente per la Fisica generale, cioè la prima in *Fisica sperimentale*, e *Chimica*, la seconda

in *Stereonomia* (nome alquanto improprio con cui egli indica la scienza delle leggi che reggono le proprietà fisiche dei corpi), e *Atomologia* ossia Teoria atomica, delle quali egli non ispinge più oltre la divisione nel suo Quadro generale delle Scienze.

La classificazione delle scienze di Ampère è dedotta da certe idee generali sistematiche, che talvolta non senza qualche violenza o soverchia sottigliezza si applicano alle divisioni particolari dei diversi rami, e in maniera da separare, e smembrare in più parti quelle dottrine, che si sogliono trattare unitamente secondo che la connessione degli oggetti pare richiederlo. Senza cercar di togliere a quella ingegnosa classificazione il merito che essa possa avere in se stessa, come quadro delle cognizioni umane, ho creduta la divisione che ho sopra indicata, più conforme alle idee ricevute sull' ordine, e la distribuzione delle scienze Fisiche, e più atta a render ragione dei limiti in cui l' oggetto della presente opera è compreso. Così per non parlare, se non dei rami che a quest' oggetto si riferiscono più da vicino, sarebbe forse difficile di separare quello che riguarda i fenomeni, e la loro osservazione immediata, dall' esposizione delle leggi con cui si è cercato di rappresentare questi stessi fenomeni, e quindi così poco conveniente di isolare ciò che costituisce secondo Ampère la *Fisica sperimentale* da quello che apparterrebbe alla *Fisica matematica*, come lo sarebbe il separare la Chimica dalla teoria atomica che ne è il complemento, o la parte più razionale. E quanto alle applicazioni della Fisica alle arti, se si parla della sem-

vastissimo dominio delle Scienze Fisiche, si scegliesse dai diversi loro coltivatori alcuno di essi rami, a cui si applicassero più specialmente ed anche esclusivamente.

Le diverse parti della *Fisica speciale* furono dapprima particolarmente distratte da quella generale denominazione di *Fisica*, e coltivate separatamente, e v' ebbero già da tempo più o meno antico Mineralogisti, Zoologi, Botanici ed Astronomi di professione. Si andò quindi a poco a poco restringendo anche il campo della Fisica generale, col separarne diversi rami particolari che divennero scienze sussistenti da loro stesse. Così si trattò a parte la Meccanica, considerandola come Matematica applicata. La Chimica fornì materia amplissima a lavori speciali, e a corsi e trattati elementari che la presero per oggetto, e in questi ultimi tempi fu a un dipresso ristretta la sfera di ciò che si chiamò un *Corso di Fisica* a quella parte che sopra abbiamo indicata col nome di *Fisica propriamente detta*, ossia *Chimico-meccanica*, e che comprende la Fisica de' corpi ponderabili, le Teorie del magnetismo e dell' elettricità, e l' Ottica. Tale è l'estensione dei Trattati di Fisica di Haüy, Biot, ecc.

Tuttavia anche questo campo di cognizioni era ancor troppo vasto, e comprendeva oggetti troppo tra loro diversi, perchè non si dovesse cercare a coltivarne separatamente le diverse parti. Infatti le due ultime divisioni di cui abbiamo parlato, l'Elettrologia, e l'Ottica, furono già da lungo tempo, senza cessar di far parte dei trattati o corsi compiuti di Fisica, argomenti di trattati od opere speciali; e nei corsi di Fisica

stessi furono comprese fra limiti ben determinati, sebbene esposte con quella maggior o minor estensione, e diligenza che ai loro autori pareva richiedere la natura e la destinazione dei medesimi.

La sola Fisica de' corpi ponderabili rimase come nocciuolo per dir così della Fisica presa nell' accennato più ristretto senso, ma senza che le siano stati assegnati limiti ben precisi, nè fatta un' esatta enumerazione, e distinzione dei punti su cui essa dee aggirarsi, e quindi essa non fu trattata nè nei corsi di Fisica (di cui gli altri oggetti assorbivano necessariamente una gran parte dell' estensione che loro si poteva concedere), nè in opere separate ad essa specialmente consecrate, con quella pienezza che si richiedeva per formare un quadro compiuto delle moltiplici cognizioni che vi si riferiscono.

Per penetrare alquanto più addentro e più partitamente in queste cognizioni, di quello che si potesse fare nei corsi di Fisica, conveniva finquì cercarle o nelle opere di Meccanica o di Chimica, ove esse si trovano talvolta trattate parzialmente in mezzo ad altri oggetti affatto a loro estranei; o in immense collezioni, come Memorie di Accademie, Giornali Scientifici ecc., in cui giacciono sparse le Memorie originali degli Autori sopra i diversi punti particolari che esse comprendono; o in alcune opere riguardanti altre scienze, a cui qualche parte della scienza dei corpi ponderabili fu considerata come sussidiaria, quale è per esempio la Cristallografia nei trattati di Mineralogia; o finalmente in opere speciali sopra diversi og-

getti particolari di questa scienza, ove mentre per una parte si è data un' eccessiva estensione all' esame di alcuni punti considerati sotto certi aspetti, e talvolta anche qui per servir di sussidio ad altre scienze, si è poi al contrario tralasciato di toccare ad altri punti troppo strettamente collegati coi primi per esserne convenevolmente disgiunti.

A tale lacuna nella serie delle opere didascaliche di argomento fisico, che finquì possediamo, io ho cercato di supplire col presente lavoro. In esso mi son proposto di esporre un quadro, per quanto mi fosse possibile, compiuto, e sufficientemente esteso di questo ramo di cognizioni che ho indicato nel suo complesso col nome di *Fisica de' corpi ponderabili.* Io penso d' aver qui sopra stabilito in una maniera precisa l' oggetto di questa scienza, facendone vedere il rapporto e la connessione con altre scienze più o meno ad essa vicine, di cui a tale scopo ho creduto dover presentare la generale classificazione; e nell' opera stessa se ne vedranno più specialmente le singole parti e la loro distribuzione. Sarebbe pur conveniente l' assegnare a questo ramo di scienza un nome più preciso analogo a quello delle altre scienze, da cui viene così ad essere separato, come un oggetto di studio speciale; ma non mi parve conveniente introdurre nel titolo di un' opera un nome nuovo, che avrebbe poi avuto bisogno d' una definizione per essere inteso, ed ho preferito di servirmi d' un titolo che contiene questa definizione medesima, qual' è appunto quello di *Fisica de' corpi ponderabili*, già del resto adoperato da altri in alcune

collezioni scientifiche elementari. Forse potrebbe un giorno restringersi a questa significazione il nome di Fisica, che come già abbiamo veduto, si è andato finquì vieppiù riducendo dalla più grande generalità, per cui si estendeva allo studio di tutte le proprietà dei corpi, sino al senso sotto cui questo nome si applica alle materie molto più limitate comprese negli odierni corsi di Fisica, dalle quali non si avrebbe più che a distrarre sotto i loro nomi particolari l' Elettrologia e l' Ottica. Intanto l' oggetto di questo ramo di scienza, per quanto manchi ancora d' un nome speciale, e generalmente adottato, non lascia di essere ugualmente determinato e distinto, secondo quello che sopra si è veduto, che quello degli altri rami di scienza vicini.

Da ciò che sin qui si è detto, appare che quest' opera è d' un genere affatto diverso da quello dei Trattati o Corsi di Fisica anche ristretti quanto alla natura delle materie tra i più angusti limiti che loro si sogliono assegnare, ed in cui si sia data per altra parte la maggior estensione allo sviluppamento di queste materie, quale sarebbe per esempio il *Trattato di Fisica sperimentale e Matematica* del signor Biot. Delle tre parti che questi Trattati contengono, quali le abbiamo indicate nella nostra classificazione delle Scienze Fisiche, cioè la Fisica de' corpi ponderabili, l' Elettrologia (compreso il magnetismo) e l' Ottica, una sola, e appunto quella che in tali opere era stata trattata con minor estensione, e meno compiutamente, cioè la prima di esse, forma l' oggetto della presente

opera, d' un volume a un dipresso a quelle comparabile. Quindi è che questa parte a cui essa si limita, vi è trattata in contraccambio con molto maggior estensione, di quella che le sia stata data in alcun corso di fisica, e aggiungerò ancora in alcuna opera qualunque, mancandoci appunto finquì, come già si è accennato, un Trattato speciale in cui essa si sia compresa per intiero.

Del resto io non ho fatto difficoltà di approfittare per la compilazione di questo lavoro, di ciò che ho trovato di più conveniente al mio scopo in quelle opere elementari, e corsi di fisica, e particolarmente in quella stessa egregia opera del signor Biot, di cui ho talvolta ricopiate anche le parole, principalmente pei diversi punti, su cui quel Trattato presenta sviluppamenti proprii all' Autore, e che si possono considerare come Memorie originali. Ma per la maggior parte degli oggetti compresi nel piano del mio libro, ho dovuto in generale ricorrere alle collezioni accademiche, e alle diverse opere periodiche in cui si trovano dispersi i lavori originali che li riguardano, ed anche ad alcune opere speciali più estese relative ad alcuna delle soddivisioni di questa parte della Fisica, per ritrarne ciò che mi pareva essenzialmente appartenere al mio scopo, e non ho esitato nè anche a farlo soventi colle parole stesse degli Autori, con quelle abbreviazioni, e soppressioni per una parte, e con quelle aggiunte e modificazioni per l' altra, che ho credute necessarie per lo schiarimento e per la connessione delle materie, e per evitare le inutili ri-

petizioni. Infatti io non poteva lusingarmi in generale di sostituire altre migliori espressioni a quelle che gli Autori stessi delle scoperte aveano stimate le più proprie a darne una chiara idea ai loro lettori; e quanto a quelle porzioni di opere più estese di cui ho creduto poter far uso per alcune parti della mia, sarebbe stata inutile fatica il cercar di cangiarne intieramente la tessitura e l' esposizione. Mi son dunque soventi limitato per ciascun punto particolare all' uffizio di raccoglitore, e di commentatore; l' ordine solo, e la connessione, per cui ho cercato di collegare in un solo tutto le diverse parti della scienza, può considerarsi come a me appartenente, seppure non si voglia tener conto di quelle particolari ricerche sperimentali e teoriche, sovra alcuni punti, di cui mi sono occupato io stesso in diversi tempi, e di cui non ho dovuto tralasciare di far conoscere i risultati, già pubblicati in diverse collezioni, unitamente a quelli de' lavori degli altri autori sugli stessi oggetti.

Ho per altra parte citate accuratamente le memorie, e le opere speciali da cui ho ricavato i diversi materiali che ho radunati in questo Trattato, onde possano ad essi ricorrere gli studiosi che volessero risalire ai fonti stessi, consultando i lavori originali, ed ho anche notato espressamente i libri di più generale argomento di cui ho particolarmente approfittato per l' esposizione di alcune divisioni della mia opera, onde evitare la taccia di essermi appropriato il frutto delle fatiche dei loro autori, senza renderne loro la dovuta testimonianza.

Quanto alle diverse parti del ramo di scienza che forma l' oggetto di questo Trattato, e di cui si vedrà la distribuzione e l' ordine, quale ho creduto doverlo adottare, nel corso dell'opera stessa, mi limiterò qui a dire alcuna cosa sulla maniera con cui ho trattato i punti contenuti nel I.° volume che esce ora alla luce, e che sarà seguito dal rimanente dell' opera, tosto che ne sarà finita la stampa.

Delle due Parti che formano la più general divisione di questo Trattato, l' una relativa alla costituzione de' corpi considerati ad una temperatura fissa, l' altra all' influenza che vi esercitano i cangiamenti di temperatura, soddivisa ciascuna di queste parti in più Libri, il presente volume non comprende che i due primi libri della prima, che riguardano la costituzione dei corpi in generale, e quella de' corpi solidi in particolare.

Non occorre premettere qui alcuna cosa sulle generalità che formano l'oggetto del 1.° Libro, il quale non occupa che una piccola porzione del volume. Nel 2.° Libro che ne costituisce la maggior estensione, ho procurato di riunire l' indicazione de' lavori matematici sulla natura delle forze, che appartengono alle molecole de' corpi solidi, e i risultati sperimentali più importanti sulla loro coesione, elasticità ecc.; proprietà dipendenti da queste forze. Tra i lavori matematici, ossia di applicazione del calcolo alla meccanica molecolare, sono compresi sia quelli di *statica*, cioè che riguardano l' equilibrio delle forze molecolari colle forze esterne che tendono a cangiar

la posizione delle molecole, e quindi la figura dei corpi, sia quelli di oggetto *dinamico*, cioè che si riferiscono alle vibrazioni che negli stessi corpi si producono quando, cessando queste forze esterne, essi ritornano alla lor figura primitiva, e così anche ai suoni che risultano da tali vibrazioni comunicate all' aria, e per mezzo di questa trasmesse all' organo dell' udito. Queste cose possono riguardarsi come appartenenti realmente alla Meccanica, e così escluse rigorosamente dall' oggetto di questo Trattato, in quanto esse sono conseguenze matematiche di leggi supposte nell' esercizio delle forze che vi si considerano, e che sarebbero vere, quand' anche le leggi stesse fossero semplicemente ipotetiche; e infatti si trovano esse esposte con maggiore o minor estensione nei Trattati più compiuti di Meccanica, qual è per esempio quello del sig. Poisson, 2.ª edizione. Non è però men vero che le supposizioni che servono di base al calcolo, sulle leggi delle forze molecolari, sono appunto quelle che hanno luogo approssimativamente tra le molecole de' corpi per piccolissime variazioni nella loro relativa posizione, e le conseguenze stesse che se ne deducono, mentre sono soventi lasciate a parte da chi non istudia la meccanica, che per le applicazioni più usuali di questa scienza, o per quelle che l' Astronomia ci presenta, si connettono per altra parte strettamente con altre cognizioni più speciali sulla costituzione de' corpi, che appartengono essenzialmente al dominio della Fisica propriamente detta. Ho dunque stimato indispensabile di dare un' idea alquanto particolarizzata di queste

ricerche nel mio Trattato; se non che mentre ho cercato di far vedere il rapporto dei risultati ottenuti colla natura delle forze molecolari, per quanto possiamo conoscerla, come quella che la Fisica dee principalmente considerare, ho creduto poter sopprimere come estranee al mio scopo le particolarità dei calcoli analitici, per mezzo di cui si è passato da quei principii generali alle conseguenze più speciali, contentandomi di riferire queste ultime, e di paragonarle coi risultati sperimentali. Relativamente a quel rapporto dei risultati di cui si tratta colla natura delle forze da cui dipendono, ho procurato sopratutto di esporre con qualche accuratezza le specolazioni del sig. Poisson contenute nelle sue Memorie speciali sui punti che vi si riferiscono, e di cui il sig. Poisson non ha creduto di dover far uso egli stesso nel suo *Trattato di Meccanica*.

Per le ricerche sperimentali relative alle vibrazioni sonore che formano una delle applicazioni più estese dei suddetti principii, ho fatto uso, oltre ai lavori di Chladni (di cui però non ho riferito che i risultati principali, e de' quali si può render teoricamente ragione in una maniera generale), anche di quelli più recenti del sig. Savart, e di altri, che non si trovano finora radunati in alcun trattato compiuto nè di meccanica nè di fisica.

La parte poi della costituzione de' corpi solidi alla quale ho creduto dover dare la maggior estensione, è quella che riguarda la *cristallizzazione*. Questa parte è generalmente appena indicata nei Trattati ele-

mentari di Fisica anche più recenti; ma essa mi è sembrata troppo essenzialmente appartenente alla natura de' corpi ponderabili, perchè potessi omettere di esporre partitamente in quest'opera le cognizioni che la riguardano. È vero che questo ramo di scienza è trattato diffusamente in alcune opere speciali di cui essa forma l'oggetto; ma queste non ne abbracciano in generale tutto il complesso, e i loro autori riguardando la Cristallografia ciascuno sotto diversi aspetti, e relativamente a scopi particolari che si proposero, mentre ne hanno sviluppata alcuna parte con una prolissità forse incomoda a chi non voglia applicarsi allo studio della medesima, che come oggetto di Scienza Fisica, hanno talvolta intieramente trascurate le altre parti. Così mentre Haüy nel Trattato di Cristallografia, annesso alla sua opera sulla Mineralogia, si è principalmente occupato della teoria della *struttura* dei cristalli, colla quale si cerca di spiegarne la derivazione per la sovrapo sizione di molecole di date figure secondo certe leggi, teoria di cui egli è stato il creatore, i Mineralogisti Tedeschi che dopo lui si applicarono a questa proprietà dei corpi, ne studiarono principalmente le relazioni puramente geometriche, trascurando la parte più propriamente fisica di questa scienza. Io ho procurato di riunire, e coordinare tra loro queste due parti, aggiungendovi anche quelle altre cognizioni relative ai corpi cristallizzati che erano finquì sparse nelle Memorie particolari, e che non riferendosi specialmente nè all'uno nè all'altro dei due aspetti indicati, non si trovano radunati in alcun Trattato di Cristallo-

grafia. Tali sono tra le altre quelle che riguardano più da vicino la natura intima della cristallizzazione, e il suo rapporto colla composizione de' corpi, quali le speculazioni di Wollaston e di Ampère, e i lavori sperimentali più recenti di Mitscherlich ed altri, sull' *isomorfismo* e *dimorfismo* delle diverse sostanze, ce le hanno somministrate.

Del resto, quanto a quella parte puramente geometrica della teoria della cristallizzazione, ho realmente trovato il più gran soccorso in alcune opere scritte in tedesco, in cui si sono radunati e ridotti in sistema i lavori fatti in Germania da diversi cristallografi di quella nazione, e che sono ancora pochissimo noti nel rimanente dell' Europa, ed ho particolarmente fatto uso per questo del *Trattato di Cristallografia* di Carlo Federigo Naumann, di alcuna parte del quale il Capo della mia opera che riguarda questa teoria geometrica, si può se si vuole considerare come un sunto, od anche come una libera traduzione. Così pure nella teoria fisica della struttura de' cristalli, ho seguito passo a passo l' esposizione fattane da Haüy medesimo, sopprimendo però quella parte de' suoi calcoli ad essa relativi, che non sarebbe più stata che una duplicazione di quelli contenuti nella parte puramente geometrica.

Non mi resta più qui che a far parola dell' estensione delle cognizioni preliminari, e sussidiarie, che mi paiono necessariamente richieste in chi voglia studiare le diverse teorie contenute in quest' opera. In primo luogo ho dovuto supporre i miei lettori abba-

stanza istrutti e intelligenti nella geometria, e nell'analisi che costituiscono la matematica pura, per poterne seguire le continue applicazioni che ne presenta la Fisica, e particolarmente il ramo di essa che forma l' oggetto di questo Trattato. Lo stesso si dica dei principii della Meccanica, poichè la Fisica de' corpi ponderabili non è per dir così, secondo quello che abbiamo veduto, che la Meccanica applicata alle molecole insensibili di cui questi corpi sono composti.

Quanto alle altre parti della Fisica propriamente detta, della quale la Fisica de' corpi ponderabili non è che una porzione, cioè l' Elettrologia, e l' Ottica, compreso anche in quest' ultima ciò che riguarda le leggi del calorico raggiante, esse sono estranee all' oggetto di quest' opera, e posteriori, nell' ordine naturale delle cognizioni, allo studio del medesimo; cosicchè esse ne richieggono esse medesime la cognizione preliminare. Non ho dunque dovuto far uso in questo Trattato delle nozioni che riguardano tali scienze, se non che ho dovuto talvolta accennare, come per anticipazione allo studio delle medesime, alcuni punti di contatto, che la Fisica de' corpi ponderabili per una necessaria connessione delle materie, si trova con esse presentare.

La Chimica sebbene necessaria per compire la Fisica generale, di cui la Fisica più strettamente detta, e quindi quella de' corpi ponderabili fa parte, è ancora posteriore nell' ordine naturale delle scienze fisiche, quale sopra l' abbiamo esposto, alle scienze precedenti, ed io non dovea rigorosamente parlando supporne la

preliminare cognizione in questo Trattato. Le connessioni però delle teorie che formano l' oggetto di questo, con alcune parti della Chimica, sono ancor più frequenti e più intime che quelle relative all' Elettrologia e all' Ottica, e mi occorrerà soventi in quest' opera di prenderne come in imprestito alcuni dati che offrono applicazioni di quelle teorie, e senza cui sarebbe riuscita troppo astratta l' esposizione delle medesime. Le nozioni che queste applicazioni suppongono, possono allora in certo modo riguardarsi come appartenenti ad una generale istruzione, o scienza usuale che si può ammettere anche in chi non abbia fatto della chimica alcuno studio speciale.

Tanto meno si dee supporre richiesta per l' intelligenza degli oggetti trattati in quest' opera, la cognizione delle diverse parti della Fisica speciale, scienza affatto distinta dalla Fisica generale a cui questi oggetti appartengono. Tuttavia la Fisica inorganica, e in particolare la Meteorologia, che è, come abbiamo veduto, uno dei rami della Fisica speciale terrestre, offre molte applicazioni di alcune delle teorie comprese nella Fisica de' corpi ponderabili, le quali ho creduto dover indicare, e spiegare più o meno distintamente, come per servir di preparazione allo studio di quella scienza, e per rendere meno astratti i principii stessi di quelle teorie; nella stessa maniera che l' Astronomia offre applicazioni delle leggi generali della Meccanica che si sogliono indicare nei trattati di quest' ultima scienza; e nella stessa maniera ancora che la Fisica speciale terrestre medesima offre

frequenti applicazioni della Chimica, alle quali gli autori de' trattati di questa scienza, non possono dispensarsi dal toccare con qualche particolarità.

In generale sebbene io abbia procurato qui sopra di fissare esattamente i limiti che separano tra loro gli oggetti delle diverse scienze fisiche, e in particolare quello della Fisica de' corpi ponderabili da quelli delle altre scienze ad essa vicine, ho preferito di espormi all' accusazione di far qualche escursione negli altrui dominii, piuttosto che ommettere alcuna cosa che potesse riputarsi aver qualche rapporto alla scienza che forma lo scopo principale dell' opera, e contribuire all' intelligenza delle materie in essa trattate. Per questa ragione richiamo in diversi luoghi, come ho già detto, alcune teorie e risultati che rigorosamente appartengono alla Meccanica, e che perciò dovrei supporre già noti, e traggo dalle altre scienze di cui ho parlato, posteriori, nell' ordine sovra esposto dello studio, a quella di cui mi occupo specialmente, i summentovati oggetti di applicazione, che in un corso regolare e continuato di tutte le scienze fisiche, dovrebbero forse rimandarsi a ciascuno dei rami di scienza a cui appartengono.

FISICA

DE' CORPI PONDERABILI

OSSIA

TRATTATO

DELLA COSTITUZION GENERALE

DE' CORPI

1. Già si è accennato nell' introduzione, che la costituzione de' corpi ha una grandissima dipendenza dalla temperatura, cioè dal diverso grado di calore o di freddo, a cui si trovano esposti, sia che esso sia prodotto dalla presenza ed azione più o meno intensa di quel fluido particolare, che si chiama *calorico* perchè alla sua maggiore o minor quantità in un dato corpo si attribuisce la sensazione prodotta in chi lo tocca di calore o di freddo, o da certe vibrazioni più o meno rapide eccitate nelle molecole dei corpi, e alle quali in un'altra teoria si riferiscono i fenomeni della temperatura.

Per procedere adunque con ordine nell' esame della costituzion generale de' corpi faremo in primo luogo astrazione dalle variazioni di questa temperatura in un medesimo corpo, da cui possono risultare particolari modificazioni nella sua costituzione e non considereremo i diversi corpi, se non a una data temperatura, che per fissare le idee potremo supporre esser quella mezzana tra i più grandi calori della state, e il più gran freddo invernale del nostro clima; e passeremo quindi ad indagare anche gli effetti delle variazioni di temperatura sulla costituzione de' corpi.

Queste due considerazioni successive formeranno l'oggetto delle due parti in cui dividiamo questo trattato.

leggi o maniere con cui queste molecole possono essere ne' diversi corpi più o meno strettamente riunite. La prova più generale che se ne possa arrecare, è che tutti i corpi (posta a parte qualche eccezione) si dilatano pel calore, e si condensano pel freddo ossia diminuzion di calore, il che difficilmente si potrebbe concepire, se non si ammettesse tra le loro molecole una distanza suscettibile di essere aumentata o diminuita in queste circostanze. La stessa conseguenza si può dedurre dall'aumento o diminuzione di volume che i corpi qualunque possono subire in virtù d'una forza esterna, anche ad una data temperatura.

Quindi segue che tra le molecole materiali de' corpi debbono trovarsi molti spazii od intervalli vacui; questi spazii furon detti *pori* de' corpi, e *porosità* la proprietà de' corpi di esserne sempre dotati; ma questi pori non sono, come gli antichi fisici credevano, semplici forellini che attraversino in diverse direzioni una massa altronde continua; essi non sono altro che gli interstizii o distanze delle molecole tra loro. Questa porosità de' corpi è provata da molte altre considerazioni. Tale è quella della trasparenza quasi perfetta di molti corpi anche assai solidi e densi, come il vetro, le pietre cristallizzate, ecc.; sia che la propagazione della luce vi si faccia pel passaggio d'un fluido particolare tra una molecola e l'altra, o per le vibrazioni eccitate dall'azione del corpo lucido, e che si trasmettano attraverso ad un fluido che le circondi, vibrazioni che non si potrebbero concepire tra molecole solide in contatto. Qui pure può riferirsi la facilità con cui alcuni dissolventi chimici penetrano nell'interna sostanza di altri corpi, ne disuniscono tra loro le parti, e vengono a formare con esse una sola sostanza composta; così l'acqua scioglie i sali, il mercurio scioglie e si amalgama la maggior parte dei metalli, gli acidi potenti sciolgono i metalli più duri, ecc. Abbiamo anzi fondate ragioni di credere, che la parte vacua ne' corpi è in generale molto più estesa che la parte piena, o materiale, o in altri termini che la distanza delle molecole tra loro è molto più grande che il diametro di queste molecole.

Non ho arrecati in favore della porosità generale dei corpi molte sperienze con cui si suole provare questa proprietà ne' corpi organici, e nelle parti che loro appartengono, perchè

corpi. Ciò non si sarebbe potuto accertare *a priori*, ossia per semplice ragionamento, ma si può verificare coll'esperienza, cioè col provare se la forza acceleratrice della gravità agisca sovra tutti ugualmente, di qualunque specie essi siano, onde per esempio i pendoli che ne sono composti, di ugual lunghezza, e in parità di circostanze, facciano le loro vibrazioni in tempi uguali. Ora già Newton avea fatto sperienze a questo riguardo con pendoli terminati da corpi cavi, in cui metteva sostanze di diverse specie, e avea trovato che i tempi delle loro oscillazioni erano realmente gli stessi. Ma siccome queste sperienze di Newton non erano state fatte con tutta l'esattezza che si suole oggidì arrecare alle osservazioni della lunghezza del pendolo, e non escludevano così le piccole differenze che potessero esistere fra i diversi corpi a questo riguardo, Bessel ha creduto recentemente dover ripetere queste sperienze, impiegandovi i metodi i più esatti ora conosciuti per questo genere d'osservazioni, e ne ha riferiti i risultati in una Memoria pubblicata tra quelle dell'Accademia di Berlino, per l'anno 1830, e nel giornale intitolato *Astronomische Nachrichten*. Egli ha applicate queste sperienze a diversi metalli, a diverse sorta di pietre e all'acqua, e ha trovato che in tutti questi corpi l'effetto della gravità era lo stesso, per quanto i limiti degli errori delle sperienze potevano permettere di accertarlo. Non pare quindi potersi più dubitare che il peso de' corpi non sia in generale una misura esatta della loro massa o quantità di materia, e quindi il loro peso specifico quello della loro densità. Resterebbe solo a decidere se anche i fluidi che diconsi *imponderabili* siano compresi in questa legge; ma poco importa il saperlo, poichè è certo che le quantità di questi fluidi che possono assoggettarsi alle nostre sperienze non giungono ad avere massa od inerzia più sensibile di quello che giungono ad aver peso.

4. Le molecole materiali de'corpi sono sole veramente impenetrabili, e l'impenetrabilità considerata ne' corpi di massa sensibile non è che una conseguenza di questa impenetrabilità delle loro molecole, e della distanza a cui sono rattenute dalle forze che le animano, come vedremo in appresso. Non è dunque da maravigliare se in alcuni casi i corpi di massa sensibile presentano una penetrazione apparente, la quale è dovuta ad un più

contenute nella grossezza d'un granello d'arena, od anche in un volume affatto insensibile.

6. Conviene inoltre ammettere che queste molecole abbiano nei varii corpi diversa massa, e diverse figure, e disposizioni, e forse altre speciali qualità a noi ignote, da cui dipendono le diverse proprietà esterne di questi corpi. Vedremo in seguito, per quanto appartiene al nostro scopo, sino a qual punto si estendano le nostre cognizioni relativamente alla massa, ed alle figure o disposizioni di cui si tratta, sebbene appartenga propriamente alla chimica il dare l'enumerazione delle diverse sostanze formate da molecole semplici, coll'indicazione della massa relativa delle loro molecole o atomi, quali risultano dalle considerazioni proprie a quella scienza. Qui faremo soltanto osservare che queste masse, e figure, almeno per le ultime molecole, debbono supporsi affatto invariabili, cosicchè per niuna operazione nè della natura nè dell'arte possano esse venire a stritolarsi, od alterarsi, od in altri termini che le molecole debbono supporsi assolutamente *dure*; poichè se ciò non fosse verrebbero a cangiarsi stabilmente le proprietà esterne de' corpi medesimi, il che mai non si osserva. Vediamo in fatti farsi bensì nuove e varie combinazioni de' diversi corpi tra loro, e risultarne sostanze composte dotate di particolari proprietà; ma se si separino cogli opportuni chimici procedimenti le une dalle altre quelle sostanze, che si erano riunite in questi composti, ricompajono esse colle stesse proprietà precisamente, che mostravano avanti di entrare in quelle combinazioni, e però le loro molecole primitive non ne hanno subìta alcuna alterazione.

§ 2.°

Delle forze di cui le molecole de' corpi sono dotate.

7. Poichè dalla riunione di queste molecole insensibili risultano corpi di massa sensibile, ed alcuni durissimi, conviene che vi sia qualche forza che così unite le rattenga, e le spinga le une verso le altre. Questa forza, da cui dipende la coesione de' corpi si chiama *affinità* o *attrazione molecolare*. Essa non

frazione, e per conseguenza $B^{-\left(\frac{r}{\alpha}\right)^m}$ un numero poco diverso dall'unità, ma tosto che r supererà α, $\left(\frac{r}{\alpha}\right)^m$ diverrà ben presto un numero grandissimo, e quindi $B^{-\left(\frac{r}{\alpha}\right)^m}$ una frazione insensibile. Queste funzioni però non si recano qui se non come esempi del genere di funzioni di cui si tratta, la vera forma di quella che rappresenta realmente il decrescimento dell'attrazione delle molecole in natura, essendo affatto ignota. Questa forza poi di attrazione molecolare è, come si vede, d'una natura diversa da quella che si esercita tra tutte le parti di materia qualunque, la quale è in ragione inversa del quadrato della distanza, e produce la gravità terrestre, e la gravitazione universale dei corpi celesti gli uni verso gli altri, e si indica ordinariamente sotto il nome di *attrazione neutoniana*; poichè questa, in virtù della legge a cui è soggetta, non potrebbe divenir insensibile a distanza piccolissima dopo essere stata grandissima a distanza affatto menoma, come ciò dee ammettersi per l'attrazione molecolare; e altronde quella si è trovata proporzionale alle masse de' corpi qualunque e indipendente dalla natura diversa della loro sostanza, mentre al contrario l'attrazione molecolare è più o meno intensa tra le molecole de'corpi diversi, secondo la loro natura chimica.

8. Per altra parte se questa sola forza esistesse tra le molecole de' corpi, esse anderebbero subito a toccarsi, e non lascierebbero più tra loro quegli intervalli od interstizii, che pure abbiamo veduto dall'esperienza indicati; convien dunque supporre che vi sia un'altra forza opposta alla prima, cioè una forza *ripulsiva*, che tenda ad allontanare le molecole le une dalle altre, cosicchè in generale le molecole rimangano ad una distanza determinata in cui queste due forze sono tra loro in equilibrio, e vi siano ricondotte dall'eccesso di forza ripulsiva, quando fossero più vicine, e dall'eccesso di forza attrattiva sopra la ripulsiva quando si trovassero più lontane, sempre però tra quei limiti di distanza insensibile a cui queste forze si estendono. Tutto poi ci porta a credere, che la seconda di queste forze, ossia la forza ripul-

rebbero rapidamente sotto forma di ondulazioni da una parte all'altra del medesimo, come ciò accade nella formazione e propagazione del suono, in vece d'un volume permanente più o men grande, che si osserva ne' corpi più o men caldi, e d'una lenta diffusione del calore stesso, che ha luogo nelle parti dei corpi solidi, questo calore non trasmettendosi poi agli altri corpi se non per uno spazio vacuo da cui essi siano separati, o per fluidi rari, od altri corpi trasparenti per cui le ondulazioni calorifiche si comunicano senza riscaldarli essi medesimi. Pare dunque allora doversi ammettere, conformemente alle idee che Ampere ha esposte a questo riguardo in una sua nota pubblicata nella *Bibliothèque universelle* in marzo 1832, e di nuovo in maggio 1835, e negli *Annales de Chimie et de Physique* avril 1835, che le vibrazioni in cui consiste il calore appartengano agli atomi o molecole parziali di cui le molecole integranti, anche per altre considerazioni, debbono supporsi composte, ritenuti tra loro a distanze minori di quelle che esistono tra le molecole totali, e che oscillando attorno alla lor posizione d'equilibrio cangino realmente in alternative opposte direzioni la figura, e il volume delle molecole integranti, e che queste vibrazioni si comunichino poi dalle une di queste molecole alle altre per mezzo dell'etere frapposto, non altrimenti che le vibrazioni d'un corpo solido sonoro si propagano per l'aria agli altri corpi solidi circostanti. In tal caso poi la distanza delle molecole integranti tra loro, e quella degli atomi che compongono ciascuna molecola integrante, non potrebbe attribuirsi per intiero a questi movimenti di vibrazione, i quali non sarebbero possibili essi medesimi se non nella supposizione d'una distanza permanente che costituirebbe la loro posizione d'equilibrio; dovrebbe adunque la forza ripulsiva che le tiene disgiunte considerarsi come appartenente alle molecole e agli atomi stessi, e formante unitamente alle loro forze attrattive una legge composta per cui l'equilibrio avesse luogo ad una determinata distanza; se non che queste forze ripulsive potrebbero sempre attribuirsi alle particelle del solo etere, ritenute attorno agli atomi, e alle molecole integranti, in virtù d'un'attrazione che queste su quelle esercitassero. Ma l'aumento di temperatura consisterebbe, non nell'aumento della quantità di questo etere attorno alle mole-

granti; il resto appartiene alla composizione de' corpi, epperciò alla Chimica. Abbiamo però già accennato, e vedremo in seguito più specialmente che si possono supporre più ordini di molecole anche nelle sostanze semplici; cosicchè le molecole componenti una massa sensibile siano formate di altre più strettamente tra loro collegate; allora questi ordini di molecole sono formati da un medesimo genere di molecole primitive, diversamente tra loro riunite; le molecole totali sarebbero così in generale sempre formate da molecole parziali o atomi, sia che questi atomi siano di natura diversa tra loro, come nei corpi chimicamente composti, o parti similari di quelle molecole totali.

10. Le forze poi di attrazione o ripulsione tra le molecole integranti de' corpi debbono considerarsi non come agenti soltanto tra una molecola, e quelle che le sono immediatamente attigue, ma tra una molecola, e tutte quelle che le stanno attorno sino alla distanza a cui si estendono queste forze molecolari; la quale è bensì sempre insensibile, ma può comprendere tuttavia ancora un grandissimo numero di molecole, il diametro di queste molecole essendo esso medesimo piccolissimo relativamente alla loro distanza.

Ciò posto ecco più precisamente come si possa concepire la costituzione d'un corpo, considerandovi l'effetto di queste forze, seguendo in ciò le idee che il sig. Poisson ha esposte nella sua Memoria *sull'equilibrio e sul moto de' corpi solidi elastici e dei fluidi*, letta all'Accademia delle Scienze di Parigi li 12 ottobre 1829, e pubblicata nel 20° fascicolo del giornale della Scuola Politecnica, e di cui il signor Poisson ha dato egli stesso un estratto negli *Annales de Chimie et de Physique*, ottobre 1829, idee che egli ha ancora sviluppate posteriormente in un articolo della sua opera *Nouvelle théorie de l'action capillaire*, 1831.

Vi si ragiona nell' ipotesi che le forze ripulsive di cui le molecole sono animate, dipendano dalle quantità di calorico che attorno a loro ritengono per la loro attrazione sovra di esso, e da cui risulti l'attuale temperatura del corpo. Ma i ragionamenti potrebbero facilmente tradursi nell'ipotesi che la temperatura dipenda dal moto vibratorio più o men rapido degli atomi componenti le molecole integranti, e dalle impulsioni

che essa sarà definitivamente ripulsiva, od attrattiva in virtù delle forze che la compongono, il suo valore sarà l'eccesso della ripulsione sull'attrazione. Bisognerà però sottrarre ancora da quest'eccesso, se si considera il calorico come un fluido materiale, l'attrazione del calorico aderente ad m' sulla materia di m, e quella della materia di m' sul calorico aderente ad m, forze, che saranno proporzionali, la prima al prodotto mc', e la seconda a $m'c$. In questo modo il valor compiuto di R sarà $R=cc'\gamma-mm'\alpha-mc'\beta-m'c\beta'$; i coefficienti γ, α, β, β' essendo quantità positive. Il primo di questi coefficienti sarà indipendente dalla natura di m e di m', il secondo dipenderà dall'una e dall'altra, il terzo non dipenderà che dalla materia di m, e il quarto da quella di m'. Riunendo i tre ultimi termini del valore suddetto di R, che sono tutti negativi, ossia esprimono forze attrattive, mentre il primo che è positivo esprime una ripulsione, si potrà scrivere questo valore di R sotto la forma $R=Fr-fr$. Ciascuna di queste due funzioni Fr ed fr non avrà che valori positivi, la qualità negativa della seconda nel valore di R essendo già indicata dal segno negativo di cui vi è affetta; e questi valori decresceranno rapidissimamente, a misura che la variabile r si aumenterà, e diverranno insensibili per qualunque valor sensibile di r. Per un certo valore di questa distanza r si potrà avere $Fr=fr$, ed $R=0$; onde ne risulterà l'equilibrio tra queste molecole considerate separatamente; il segno di R sarà diverso al di qua e al di là di questo limite, cioè l'azione definitiva sarà attrattiva da una parte, e ripulsiva dall'altra. Questa forza R, relativa all'azione di due molecole isolate m ed m' è una quantità insensibile, ma per rappresentarla si possono concepire due masse A, B di grandezza qualunque e d'uno stesso volume che sarà preso per unità, di cui l'una avesse la densità ρ del corpo attorno di m, e l'altra la densità ρ', che il corpo ha attorno ad m', e che fossero tali che tutte le molecole dell'uno agissero per ipotesi su tutte le molecole dell'altro secondo direzioni parallele, e colla stessa intensità con cui m agisce sopra m'. E questa maniera di concepire le forze di cui si tratta, si può estendere anche ai corpi solidi, ne'quali le forze attrattive o ripulsive dipendano, secondo la particolar costituzione di questi corpi, di cui

come queste forze si possano calcolare relativamente alle diverse questioni che i corpi solidi o fluidi possono presentarci, quantunque non si conosca la natura della funzione φ della distanza r, ossia la legge a cui è sottoposta l'azione molecolare relativamente alla distanza, e ammettendo solo che essa divenga insensibile a distanza sensibile. Qui aggiungeremo soltanto che per l'equilibrio della molecola m si richiede che la risultante di tutte queste forze sia nulla, e ciò dee avverarsi per tutte le molecole d'un corpo che non tende a cangiare il suo stato.

11. Quell'equilibrio, che sopra abbiam supposto tra le forze attrattive, e le forze ripulsive che agiscono sulle molecole dei corpi, e che certamente dee ammettersi pe' corpi solidi, non ha però luogo generalmente in tutti i corpi, e in tutte le circostanze. Si possono principalmente distinguere i corpi a questo riguardo in due grandi classi. Negli uni la distanza delle molecole, epperò il volume del corpo ad una data temperatura è fissata a un dipresso, o da quell'equilibrio, o almeno dall'addizione di qualche forza estranea, quale sarebbe la pressione dell'atmosfera, in maniera che comunque venga ad accrescersi notabilmente questa forza estranea, non ne risultano che variazioni di poco riguardo nel volume di questi corpi, epperciò nella distanza delle loro molecole; tali sono i corpi *solidi*, e *liquidi* i quali differiscono altronde tra loro, in quanto le molecole de' primi hanno una posizione relativa invariabile, o almeno che non si può cangiare, se non da una forza assai grande, mentre quelle de' secondi scorrono quasi con intiera libertà le une sulle altre, e sono per così dire indifferenti a qualunque posizione tra loro. Questi corpi con un nome solo possono chiamarsi *inespansibili*.

La proprietà particolare de' corpi solidi a questo riguardo può spiegarsi osservando, che quando le due molecole m ed m' d'un corpo, che sopra abbiamo considerate, non sono abbastanza distanti l'una dall'altra, perchè la loro forma non abbia alcuna influenza nella loro mutua azione, quest'azione non sarà più diretta necessariamente, come sopra abbiamo supposto, secondo la linea MM' che riunisce i centri di gravità delle due molecole, e potrà anche accadere che essa non si riduca ad una sola forza, ma sia formata da più forze che agiscano sopra

punti diversi di ciascuna molecola, e tendano a farle prendere un moto di rotazione attorno a se stessa, oltre il moto di traslazione. Queste componenti saranno sempre funzioni della distanza r, che non avranno valori sensibili, se non pei valori insensibili di questa variabile; ma esse dipenderanno inoltre dagli angoli che farà la direzione della retta MM' relativamente a sezioni determinate delle molecole m, m'; cosicchè esse varieranno se una delle molecole viene a girare attorno all'altra, o sopra se stessa, senza che la distanza r dei loro centri di gravità si sia cangiata. Si concepisce allora che per l'equilibrio tra le molecole d'un corpo, che hanno tra loro una simil relazione si richiederà non solamente una distanza determinata tra i loro centri di gravità, ma ancora una certa posizione, la quale venendo a variarsi per un cangiamento di forma nel corpo; questo si romperà, o tenderà a prender la prima forma, ed a ristabilire così le molecole nella prima lor posizione.

Questo caso generale è quello de' corpi solidi; il caso particolare in cui l'azione molecolare si riduce alla forza R diretta secondo la linea MM' dei centri di gravità delle molecole, ha luogo ne'liquidi; e ciò può provenire o dalla distanza delle loro molecole che sarebbe più grande che nei solidi, o dalla forma di queste molecole che si scostasse meno dalla forma sferica.

Vi sono altri corpi in cui al contrario di quello che succede nei corpi inespansibili, sia solidi, sia liquidi, le forze attrattive non solamente non sono da loro stesse in equilibrio colle forze ripulsive dipendenti dalla diversa temperatura, ma sono anzi insensibili, e di niun effetto per la troppo grande distanza a cui le molecole già vi si trovano, cosicchè una forza estranea, come la pressione dell'atmosfera, od altra, può sola mantenere questi corpi ad una densità alquanto sensibile, dilatandosi essi, o condensandosi indefinitamente, epperciò allontanandosi, o ravvicinandosi le loro molecole secondo che sono più o meno compressi. Tal è l'aria della nostra atmosfera, e tali sono quelle sostanze che dai chimici diconsi *fluidi aeriformi* o *gaz*, di cui si sa infatti che la densità è sensibilmente proporzionale alla pressione per una data temperatura. Questi corpi possono chiamarsi, per opposizione ai primi, *corpi espansibili*.

Ma poichè abbiamo veduto che i corpi inespansibili si suddi-

vidono in *solidi*, e *liquidi*, abbiamo per ultimo risultato tre specie di corpi relativamente alle forze che animano le loro molecole, cioè *solidi*, *liquidi* e *gazosi*. Si potrebbe anche stabilirne altrimenti la classificazione, dividendo dapprima i corpi in *solidi*, di cui le parti hanno una posizione determinata, e *fluidi*, di cui le parti scorrono liberamente, e cangiano facilmente di posizione, e suddividendo poi questi ultimi in *fluidi inespansibili* o *liquidi*, che hanno una densità a un dipresso determinata ad una data temperatura, comunque si muti la pressione, finchè rimangono in questo stato, e *fluidi espansibili* od *aeriformi*, o *gaz*, la densità de' quali è sensibilmente proporzionale alla pressione a cui attualmente soggiacciono. Questi tre stati o forme sotto cui i corpi possono trovarsi si dicono gli *stati d'aggregazione* de' corpi. Nella meccanica si indicano le proprietà di queste tre specie di corpi relativamente alle forze esterne da cui possono essere sollecitati; ma oltrecchè nella meccanica si considerano ordinariamente questi tre stati nei diversi corpi come perfettamente distinti, mentre al contrario in natura i corpi passano in generale per graduazione dall'uno all'altro dei medesimi, presentando così stati intermedii che pur debbono considerarsi, si sogliono ancora considerare le proprietà che loro appartengono in questi tre stati, come risiedenti in una materia continua, o formata di elementi matematici attigui tra loro, mentre al contrario, come abbiamo veduto, essi sono realmente composti di piccole masse finite, sebbene di grandezza insensibile, disgiunte tra loro da vacui od intervalli considerevoli relativamente alla grandezza di quelle masse, sebbene anch'essi insensibili.

Inoltre nell'esaminare la maniera con cui i corpi agiscono gli uni sugli altri per esercitarvi una pressione, o comunicarsi reciprocamente i loro movimenti, si considerano nella meccanica i corpi di massa sensibile come in contatto tra di loro, mentre al contrario quelle distanze a cui, come sopra abbiamo detto, si tengono sempre le molecole della massa di un corpo in apparenza continua, in virtù delle forze da cui esse sono animate, hanno pur luogo tra le molecole estreme d'una massa e quelle dell'altra, e non vi è realmente in natura nè vero contatto, nè urto propriamente detto tra le molecole de' corpi ponderabili, ma solo

approssimamento a distanze abbastanza piccole, perchè vi si possano esercitare le forze loro proprie, e per cui agiscono le une sulle altre.

Appartiene alla fisica propriamente detta lo indagare le forze intrinseche da cui que'diversi stati dipendono in seguito a questa composizione de' corpi, di molecole disgiunte, e per cui gli uni possono esercitare azioni meccaniche sugli altri, e ad essa tocca ancora di ricercare più diligentemente la maniera con cui queste forze, e quelle estranee loro applicate si esercitano, onde ne risultino quelle stesse proprietà che la teoria meccanica ordinaria deduce da quella ipotetica costituzione che vi ammette. Questo procureremo di fare, per quanto si appartiene al nostro scopo, nei libri seguenti, trattando separatamente dei corpi in ciascuno dei tre stati sovra indicati, e seguendo in ciò le traccie del sig. Poisson, che il primo in diverse sue Memorie, e recentemente nella sua nuova *Teoria dell'azion capillare* ha data la conveniente estensione a questa maniera di trattare le questioni di meccanica che già La-Place avea applicata ad alcuna di esse, cioè relativamente alla vera costituzione fisica de'corpi. Dobbiamo però prima indicare ancora in questo libro in che maniera si possa determinare relativamente ai diversi corpi quel rapporto tra la parte materiale, e il volume da essi occupato, che dipende, come abbiamo veduto, dalla grossezza delle loro molecole, e dalla distanza a cui esse si trovano in virtù delle forze da cui sono animate, e che costituisce la loro *densità* o *peso specifico*.

CAPO SECONDO

Della determinazione della densità o peso specifico de' corpi (1).

§ 1.°

Considerazioni generali.

12. Quantunque le operazioni che si richieggono per la determinazione della densità o peso specifico de' corpi siano tutte fondate sui principii generali della meccanica, e ad essa possano riferirsi, tuttavia la connessione che questa proprietà esterna de' corpi ha colla loro intima costituzione, e il frequente uso che se ne fa nella fisica propriamente detta, rendono quasi indispensabile il richiamarle in questo trattato, tanto più che avremo poi occasione di applicarvi in seguito alcune correzioni dipendenti da altre proprietà che appartengono più specialmente al nostro oggetto. Ci limiteremo però qui a questo riguardo ai corpi solidi, e liquidi, rimandando quello che appartiene alla determinazione della densità dei corpi gazosi al libro in cui tratteremo specialmente della lor costituzione, come quella che richiede più particolari cognizioni sulle proprietà di questi corpi. Non si parla qui inoltre che della determinazione sperimentale di questa densità; non potremo entrare in qualche idea teorica sulla dipendenza di questa densità dalle altre proprietà conosciute de' corpi, se non nel seguito di questo trattato.

Trovare il peso specifico d'un corpo è propriamente trovare quale sia la quantità di materia contenuta in questo corpo sotto

---

(1) In questo capo ho seguito in gran parte l'esposizione del signor Biot nel suo *Traité de Physique*, facendovi solo quelle variazioni, e aggiunte che mi parvero convenire allo scopo di quest'opera.

un dato volume; questo suppone adunque che si possa misurare in primo luogo la quantità di materia, di cui è formato un corpo qualunque, in parti d'una data unità, e il mezzo di farlo ci è somministrato, come già abbiamo detto, dalla proprietà che hanno tutte le particelle materiali di esser *pesanti*, cioè di tendere con una certa forza verso il centro della terra; onde basta determinare il *peso* d'un corpo, cioè la risultante delle forze di gravità da cui sono animati tutti i punti materiali che lo compongono, prendendo per unità il peso d'un corpo dato, perchè questo peso si possa considerare come la misura della quantità di materia che esso contiene, prendendo per unità quella del corpo a cui si riferisce l'unità di peso.

La maniera la più naturale, e la più esatta di *pesare* un corpo è di opporlo ad un certo numero di unità di peso, in una macchina in cui questi due pesi agiscano di una maniera simile, aumentando o diminuendo il numero di unità finchè si ottenga l'equilibrio. Si riempie questa condizione sospendendo questi due pesi alle due estremità d'un vette sostenuto nel suo centro, e di cui le due braccia siano uguali, il che costituisce lo stromento notissimo sotto il nome di *bilancia*. L'uso di questo stromento, e in generale l'operazione di pesare i corpi si presenta frequentissimamente in tutte le sperienze fisiche, e richiede per l'esattezza de' risultati molte precauzioni, che non si adoperano negli usi ordinarii, e bilancie costrutte colla massima accuratezza e perfezione; non entrerò però in alcuna particolarità su quest'oggetto, che non è, per dir così, che incidente relativamente al nostro scopo, tanto più che l'ispezione oculare degli stromenti di questo genere costrutti dai migliori artefici, e la pratica di servirsene sono forse il miglior mezzo di giungere in breve tempo a adoperarli colla necessaria esattezza.

Supponendo dunque, che si sappia pesare esattamente un corpo, basterà conoscerne il volume espresso in un'unità qualunque per dedurne il suo peso specifico, ossia la densità, cioè il suo peso sotto ad un volume dato, e particolarmente sotto l'unità di volume; non si tratta che di dividere il peso osservato pel volume del corpo pesato, ossia pel numero di unità di volume che esso contiene. Così se si è preso per unità di

peso il *gramma*, e per unità di volume il *litro*, ossia decimetro cubo, si verrà a sapere qual è il peso in grammi, di un litro o decimetro cubo del corpo di cui si tratta.

13. Ordinariamente però si intende sotto il nome di *peso specifico*, o *densità* d'un corpo, il rapporto del suo peso specifico a quello dell'acqua ad una data temperatura, cioè il peso d'un volume qualunque di questo corpo, prendendo per unità il peso d'un ugual volume d'acqua a questa temperatura. Dico ad una temperatura data, poichè il volume, e quindi la densità dell'acqua variando colla temperatura secondo una legge diversa da quella con cui varia quella del corpo di cui si tratta, questo rapporto non è lo stesso se non ad una temperatura costante.

Vedremo a suo luogo che uno dei punti più fissi di temperatura ci è presentato dal ghiaccio che è attualmente in istato di liquefazione, e che questo punto del *ghiaccio fondente* si prende ordinariamente per punto di partenza dei gradi di temperatura negli stromenti con cui questa si misura, ossia ne'*termometri*, e vi si segna conseguentemente collo zero. A questa temperatura del ghiaccio fondente, ossia a 0° di temperatura, si suppone ordinariamente trovarsi l'acqua, colla densità della quale si paragona quella degli altri corpi per esprimerne il peso specifico nel senso indicato. Questo peso specifico è dunque allora rappresentato da un numero n, che esprime quante volte il peso della sostanza di cui si tratta uguaglia il peso dell'acqua sotto volume uguale, alla temperatura del ghiaccio fondente. Ma bisogna osservare, che supponendo il peso specifico d'un corpo determinato immediatamente in questa maniera, cioè comparativamente a quello dell'acqua, basterà conoscere il peso di questa, a quella temperatura fissa che si è adottata, sotto un' unità di volume, per dedurne subito quello del corpo suddetto sotto alla stessa unità, cioè il suo peso specifico preso nel primo senso. Così facendo uso del sistema metrico, il gramma che si è preso per unità di peso differisce pochissimo dal peso d' un centimetro cubo d' acqua alla temperatura del ghiaccio fondente, perchè appunto si è preso per fissar quest'unità il peso d'un centimetro cubo d'acqua distillata ad una temperatura poco diversa da quella del ghiaccio fondente, come vedremo trattando della dilatazione de' liquidi dal calore; onde

rebbe da un paragone fatto dal sig. Weber (Annali di Poggendorff n.° 4 del 1830) delle misure e pesi Inglesi con quelli del sistema metrico, che gli Inglesi hanno apprezzato il peso d'un dato volume d'acqua, ad una stessa temperatura, di $\frac{1}{2440}$ più grande che i Francesi, dal che seguirebbe che il peso di un centimetro cubo d'acqua a 0° sarebbe ancora un po' maggiore del gramma in vece di esserne un po' minore. Ma ciò non ha conseguenza notabile pel nostro oggetto, e fa vedere soltanto che si potrebbe anche prendere il peso di un centimetro cubo d'acqua a 0° per un gramma senza error considerevole: noi però ci atterremo per tutto al suddetto numero 0,999925 per l'uniformità dei calcoli. Esso potrà riguardarsi, se si vuole, come relativo ad un gramma ideale, a cui il gramma materiale dei campioni può essere più o meno prossimamente conforme.

14. Ciò posto per determinare sperimentalmente il peso specifico d'un corpo bisognerebbe pesare due volumi uguali l'uno d'acqua, l'altro di questo corpo, alla temperatura del ghiaccio fondente, e dividere il peso del secondo per quello del primo. Ma sarebbe difficile incontrare precisamente questa temperatura, nel tempo dell' operazione, e bisognerà supplirvi calcolando, per mezzo della legge della dilatazione dell' acqua per le variazioni di temperatura, il volume che l'acqua avrebbe avuto alla temperatura del ghiaccio fondente, da quello che avea alla temperatura in cui si è operato, e correggendo in conseguenza il rapporto trovato, onde avere così il rapporto del peso specifico del corpo a questa temperatura in cui si è operato, con quello dell'acqua alla temperatura del ghiaccio fondente; il qual rapporto si potrà poi anche ridurre a quello che avrebbe luogo pel corpo di cui si tratta, preso anch'esso alla temperatura del ghiaccio fondente, quando si conosca la legge della sua dilatazione per le variazioni di temperatura. Vi è inoltre una circostanza che rende necessaria una correzione ai pesi osservati dell'acqua, e del corpo, prima di farli entrare in questo rapporto: questi pesi si osservano nell'aria, che è un fluido pesante, come vedremo a suo luogo, quantunque assai raro, ed è noto il principio idrostatico, che un corpo immerso in un fluido, perde tanto del suo peso,

§ 2.

Determinazione della densità dei liquidi.

15. Per ottenere l' uguaglianza de' volumi di un liquido qualunque, e dell' acqua, di cui si vuole cercare comparativamente il peso, si adopera un fiasco con turacciolo di vetro aggiustato a smeriglio, che si riempie successivamente d'acqua, e del liquido. Si comincia a determinare esattamente il peso del fiasco vuoto: quindi si pesa similmente pieno d'acqua distillata, presa ad una temperatura conosciuta, e sottraendo il primo peso dal secondo si ha il peso apparente E dell'acqua che il fiasco contiene a questa temperatura. Allora si riempie il fiasco del liquido che si vuole esaminare, e di cui si osserva anche esattamente la temperatura, e si determina nella stessa maniera il peso apparente L del volume di questo liquido che è contenuto nel fiasco.

Se i due pesamenti si fossero fatti nel vacuo, e alla temperatura 0° il peso specifico del liquido sarebbe $\frac{L}{E}$; ma siccome questo non si vuole supporre, la via più semplice e più diretta per giungere al vero peso specifico è di riguardare il pesamento dell'acqua fatto nel fiasco, come tendente soltanto a determinare il suo volume, per esempio in centimetri cubi, dopo il che il pesamento del liquido darà immediatamente il peso d'un centimetro cubo del medesimo, per la temperatura a cui questo pesamento fu fatto. Vedremo infatti, quando tratteremo della dilatazione dell' acqua dal calore, come si possa ottenere il volume interno del fiasco, alla temperatura 0°, in centimetri cubi, dal pesamento dell' acqua fatto nel fiasco a qualunque temperatura, avuto riguardo alla dilatazione dell' acqua medesima, a quella del fiasco, e alla circostanza che il pesamento si è fatto nell'aria, e non nel vacuo.

Noteremo qui soltanto che se si volesse prescindere da quest' ultima circostanza, e si supponessero di più li pesamenti fatti alla temperatura stessa dello zero, si avrebbe questo volume in centimetri cubi dividendo il peso dell' acqua osservato E in

grammi pel numero 0,999925, che esprime il peso d'un centimetro cubo d'acqua alla temperatura zero. Ma in qualunque caso, chiamiamo V questo volume interno o capacità del fiasco alla temperatura 0°. Indicando con K la dilatazione cubica ossia aumento di volume del vetro per ogni grado del termometro centigrado, questo volume diverrà $V(1+Kt)$ alla temperatura t, in cui supporremo che il pesamento del liquido sia stato fatto, e tale sarà in conseguenza il volume del liquido pesato a questa temperatura. Ora per dedurre dal peso apparente che gli si è trovato, il suo peso assoluto, bisogna conoscere qual era il peso del volume d'aria, uguale a quella capacità $V(1+Kt)$ sotto la pressione, e alla temperatura in cui si è operato, poichè è chiaro che si avrà molto prossimamente il peso assoluto del liquido aggiungendo il peso di questo volume d'aria al peso apparente. Infatti questo volume è uguale a quello di cui il fiasco occupa il luogo, astrazion fatta dal volume della parte solida del fiasco, per cui la perdita di peso si faceva anchè nel pesamento del fiasco vacuo di liquido, epperò non influisce sulla differenza di peso tra il fiasco vacuo, e il fiasco pieno; o se si vuole considerare la cosa sotto un altro aspetto si può riguardare il fiasco come pieno d'aria nel primo caso e pieno di liquido nel secondo; allora la perdita di peso totale è uguale nei due pesamenti, ma bisogna aggiungere alla differenza il peso dell'aria contenuta nel fiasco vuoto, e che non appartiene al peso del fiasco. Vedremo a suo luogo come si possa ottenere l'espressione del peso d'un volume dato d'aria nelle circostanze in cui si opera; chiamando per ora A quello d'un centimetro cubo d'aria in quelle circostanze, il peso del volume $V(1+Kt)$ di cui si tratta sarà $A.V(1+Kt)$; e indicando con a questo peso, cioè supponendo $a=A.V(1+Kt)$, se L è il peso apparente del liquido che riempie il fiasco, $L+a$ sarà il suo peso assoluto, ridotto al vacuo, e basterà dividere questo peso pel volume $V(1+Kt)$ che esso occupa, per avere il peso d'un centimetro cubo del liquido alla temperatura t a cui si è operato; cioè chiamando ϖ questo peso, si avrà l'espressione $\varpi = \frac{L+a}{V(1+Kt)}$.

Ma se si vuole avere il peso d'un centimetro cubo dello

stesso liquido alla temperatura o°, bisogna conchiudere primieramente dal peso $L+a$ del liquido che riempie il fiasco alla temperatura t, quello del medesimo liquido che riempirebbe il fiasco alla temperatura del ghiaccio fondente, il che suppone, come già abbiamo accennato, che si conosca la legge della dilatazione di questo liquido dal calore. Rappresentiamo con (L) questo peso del liquido che riempirebbe il fiasco alla temperatura o°, quello del liquido contenuto nel fiasco alla temperatura t, a cui si è operato, sarà espresso da $\frac{(L)(1+Kt)}{1+\lambda}$, λ essendo supposto esprimere la dilatazione del liquido, contata da o°, sino alla temperatura t, prendendo per unità il volume primitivo alla temperatura o°; poichè il volume è cresciuto nel rapporto di 1 ad $1+Kt$, e la densità è decresciuta nel rapporto di 1 ad $\frac{1}{1+\lambda}$. Poichè dunque secondo l'osservazione questo peso si è trovato $L+a$, avremo l'equazione

$$\frac{(L)(1+Kt)}{1+\lambda}=L+a\ ,$$

dalla quale si deduce $(L)=\frac{(L+a)(1+\lambda)}{1+Kt}$. Non ci resta più adunque che a dividere questo peso (L) pel volume interno V del fiasco alla temperatura del ghiaccio fondente, e il quoziente sarà il peso d'un centimetro cubo del liquido a questa temperatura; cioè chiamando questo peso (ϖ), si avrà

$$(\varpi)=\frac{(L+a)(1+\lambda)}{V(1+Kt)}\ ,$$

espressione che non differisce da quella di ϖ, che pel fattore $1+\lambda$ che la moltiplica, come si sarebbe anche potuto stabilire direttamente. Dividendo poi questo valore di (ϖ) per 0,99992 5 si avrà il peso specifico del liquido a o° prendendo per unità quello dell'acqua pure a o°. Se si supponessero i pesamenti fatti alla temperatura zero, e si considerassero come fatti nel vacuo, si avrebbe $a=0$, $\lambda=0$, $t=0$, e la formola diverrebbe sem-

liquido più pesante, per esempio nell'acqua, esso non s' immergerà sino a questo tratto da se solo, e per farlo immergere bisognerà aggiunger pesi sullo scodellino F. I pesi da aggiungere saranno diversi, quando si vorrà far immergere lo stromento in un altro liquido sino a quel tratto.

Ora quando si conoscono questi pesi addizionali, e il peso proprio dello stromento, si può facilmente conchiuderne il rapporto del peso specifico de' due liquidi, per la temperatura a cui si opera.

Infatti sia P il peso assoluto dello stromento unitamente ai pesi addizionali necessarii per farlo immergere sino al tratto fisso T nell'acqua distillata alla temperatura 0^{o}, questo peso essendo ridotto al vacuo, ossia corretto dal peso dell'aria di cui occupa il luogo. In generale, secondo i principii dell'idrostatica, in un corpo galleggiante, il volume d'acqua occupato dalla parte immersa ha un peso uguale al peso del corpo; dunque il volume d'acqua uguale alla parte immersa dell'areometro peserà P grammi; e siccome alla temperatura 0^{o} ogni centimetro cubo d'acqua pesa gram. 0,999925, si vede che $\frac{P}{0,999925}$ esprimerà in centimetri cubi il volume della parte immersa a 0^{o} di temperatura, e che chiameremo (P). Conoscendo così per la temperatura 0^{o} il volume della parte costantemente immersa dell'areometro, il volume di questa stessa parte, a qualunque temperatura t, sarà $(P)(1+Kt)$, K indicando come sopra la dilatazione cubica del vetro per ogni grado del termometro. Supponiamo ora che s' immerga lo stromento in un liquido, di cui il centimetro cubo, preso alla temperatura del ghiaccio fondente, pesi (ϖ) grammi, e di cui la dilatazione da questo termine sino a t gradi sia λ. Un centimetro cubo di questo liquido, preso a quest'ultima temperatura, non peserà più (ϖ), ma $\frac{(\varpi)}{1+\lambda}$; e siccome lo stromento, immerso sino al tratto, occupa un numero $(P)(1+Kt)$ di questi centimetri, il peso totale del liquido cacciato da luogo sarà $\frac{(\varpi)(P)(1+Kt)}{1+\lambda}$. Ora questo peso è dato dall'osservazione, ed è uguale a $P+P'$, P essendo come sopra il peso dell'areometro aggravato dai pesi

dell'acqua pura, indicati da minori immersioni dello stromento. Per gli stromenti poi destinati ai liquidi più leggieri che l'acqua si fissa lo zero al punto d'immersione corrispondente alla soluzione salina, si segna 10° al punto superiore corrispondente all'acqua pura, e si continua questa graduazione ascendendo ancora, per esempio, sino a 40° o più, cosicchè i gradi seguano qui altrettante diminuzioni di peso specifico indicato da immersioni successivamente maggiori; onde per questi liquidi la porzione della graduazione da 0° a 10° non ha applicazione, e non serve che per fissare la grandezza dei gradi partendo da 10°. La figura qui sotto rappresenta le due scale riunite nella lor posizione relativa di corrispondenza.

Scala pei liquidi più pesanti che l'acqua.		*Scala pei liquidi più leggieri che l'acqua*	
		.	
		.	
		.	
		12	
		11	
Acqua pura	0	10	Acqua pura
	1	9	
	2	8	
	3	7	
	4	6	
	5	5	
	6	4	
	7	3	
	8	2	
	9	1	
Soluzione salina, 9 acqua 1 sale comune	10	0	
	11		
	12		
	.		
	.		
	.		

Gli stromenti così costrutti divengono comparabili, purchè si supponga che il sale adoperato nella soluzione salina sia di ugual purezza, e disseccamento, e l'operazione fatta ad un dato grado di temperatura lo stesso per tutti, e converrebbe poi solo farvi una correzione, quando si volessero adoperare ad una temperatura diversa da quella. Ma se si vogliono riferire le indicazioni di questi stromenti alla densità dei liquidi, prendendo per unità la densità dell'acqua, conviene sapere quale sia la densità della suddetta soluzione salina in quest'unità. Una determinazione precisa a questo riguardo negli stromenti, quali sono in uso, non è possibile, stante che nè Baumé, nè gli altri costruttori di simili stromenti hanno prese ed indicate le precauzioni necessarie per rendere questa densità costante relativamente ad essi tutti. Conviene dunque attenersi per questo punto ad una approssimazione, e per dare un esempio dell'applicazione del calcolo e delle formole di riduzione che si possono stabilire dalle indicazioni di questi stromenti all'espressione del peso specifico e reciprocamente, ammetteremo col sig. Bellani, che si è molto occupato in Italia della costruzione e perfezionamento di tali stromenti, che la densità della soluzione salina contenente 9 parti d'acqua e 1 di sale, sia 1,0733 prendendo per unità quella dell'acqua pura. Delezenne in una memoria sugli areometri pubblicata nel *Journal de Physique* di Blainville, aprile 1822, ha proposto una graduazione particolare dell'areometro, in cui prende per base il peso specifico d'una soluzione composta di 9 parti d'acqua ed 1 di cloruro di calcio puro che ha trovato essere 1,077, trascurando le altre cifre, a 0° di temperatura; ma questa non può essere la base della graduazione dell'areometro di Baumé, che non adoperava che sal cómune, e alla temperatura di 10° o 12°.

Ritenuta dunque l'indicazione del Bellani e occupandoci in primo luogo della scala relativa ai liquidi più pesanti che l'acqua, osserveremo che i 10 gradi dell'areometro corrispondono in questa scala a un aumento di 0,0733 nella densità dell'acqua, e ciascuno di questi gradi esprime una diminuzione del volume della parte immersa dello stromento, volume che è in ragione inversa del peso specifico del liquido. Per trovare adunque la corrispondenza tra le indicazioni dell'areometro in generale e i pesi

e fissando gli altri per interpolazione, senza riferirla per mezzo d'una formola al principio stesso che serve di base a questa graduazione; tale è, per esempio, quella rappresentata da una tavola che Nicholson ne ha costrutta nel suo *Giornale* inglese in aprile 1797, e che si trova pure riferita nel T. 23 degli *Annales de Chimie*. Questa ed altre simili tavole poco differiscono da quella che si potrebbe dedurre dalle nostre formole, e quando si volesse adottare come più esatta la corrispondenza data da alcuna di esse o pel grado 10, o per altri gradi, vi si potrebbe facilmente applicare lo stesso calcolo di cui abbiamo fatto uso, per dedurne formole analoghe. Per esempio, quanto alla graduazione indicata nella tavola di Nicholson si potrebbero stabilire immediatamente le formole su che il 40° grado dell'areometro pei liquidi più leggieri corrisponde, secondo quella tavola, al peso specifico 0,817, o che il grado 72° di quello pei liquidi più pesanti dell'acqua corrisponde al peso specifico 2; oppure si potrà da questi dati ricavare il valore della densità della soluzione che determina il grado 10, riguardando questo valore come l'incognita nelle formole sopra stabilite, e mettendovi i detti valori tra loro corrispondenti di G e di A od A'; densità che trovo essere 1,0746 per l'areometro dei liquidi più pesanti dell'acqua, e 1,0807 pei più leggieri; se ne dedurranno quindi le formole generali come sopra; e a tal fine ho lasciato in evidenza le basi del calcolo nelle suddette formole sino all'ultima loro trasformazione.

Del resto io ho supposto nell'applicazione di quelle formole che la soluzione composta di 9 parti d'acqua e 1 di sale si sia presa per determinare tanto la scala pei liquidi più leggieri dell'acqua, come pei più pesanti; questa però è una simplificazione introdotta posteriormente alla prima costruzione di Baumé. Questi non si serviva di una tal soluzione, se non pei liquidi più leggieri dell'acqua; per quelli più pesanti adoperava una soluzione composta di 85 parti d'acqua e 15 di sale, segnando 15° sul punto d'immersione ad essa corrispondente. Questa divisione non coinciderebbe con quella a cui avesse servito di base la prima soluzione, se non nella supposizione che le sostituzioni successive d'una centesima parte di sale ad una d'acqua nella soluzione corrispondessero ad uguali diminuzioni

d'immersione, o gradi dell'areometro, il che non è esatto; tuttavia la differenza non puo essere grande, e può riguardarsi come confusa colle altre inesattezze nella costruzione, onde la scala che ne risulta resti sensibilmente la stessa che quella calcolata sulla nostra supposizione, ora generalmente adottata. Altronde i diversi autori e costruttori di questi stromenti hanno introdotte molte altre piccole varietà nella loro costruzione, che ne rendono la graduazione alquanto diversa, non però al segno che non si considerino sempre questi stromenti come areometri di Baumé corretti a grado dei diversi autori; tale è per esempio l'areometro di Cartier, che fu per qualche tempo d'un uso comune in Francia.

Alcuni fisici hanno anche imaginato di graduare questi areometri in maniera che i loro gradi corrispondessero a porzioni determinate del peso specifico dell'acqua pura, di cui quello del liquido ne differisce, per esempio, a millesime ecc. Brisson propose il primo una tal graduazione, e diede regole per eseguirla, ed altri diedero costruzioni grafiche per quest'oggetto; secondo questo principio è costrutto l'areometro detto di Richter, di cui si fa frequente uso in Alemagna. Non mi tratterrò su queste sorta di stromenti, essendo sempre da preferirsi i metodi diretti per la determinazione dei pesi specifici, colle richieste correzioni, quali li abbiamo sopra indicati.

Quanto a quella specie di areometri che sono destinati ad indicare immediatamente le proporzioni di certe mescolanze, per esempio quelle dell'alcool e dell'acqua nello spirito di vino del commercio, per mezzo del loro peso specifico, essi non appartengono al nostro presente oggetto; avremo occasione di parlarne in altro luogo.

18. Hare e Meikle hanno proposto stromenti per determinare il peso specifico dei liquidi, fondati sopra un principio affatto diverso dei precedenti, cioè sulla maggiore o minor altezza delle colonne de' diversi liquidi che possono farsi equilibrio tra loro, o fare equilibrio ad una stessa pressione, qual è la pressione atmosferica, o una parte di essa. Il primo di questi autori ha dato al suo stromento il nome di *litrametro*, dal greco λίτρα, *libbra* o *peso*; il secondo quello di *sifone-idrometro*. V. *Philosoph. magaz.* agosto 1826, e settembre e ottobre 1828. Ma tali stromenti non furono finqui adottati nell'uso comune.

§ 3.°

Determinazione della densità dei corpi solidi.

19. Il procedimento che abbiamo adoperato (n.° 15) per trovare il peso specifico de' liquidi può ugualmente servire per trovar quello de' corpi solidi che non si sciolgono nell' acqua. Per questo basta che il corpo possa essere introdotto in un fiasco, od in qualunque altro vaso suscettibile di esser chiuso esattamente. Ma non è necessario che questo corpo sia in un solo pezzo, e può anche essere in polvere sottile. La maniera la più semplice di far la sperienza è la seguente.

Si comincia a determinare esattamente il peso apparente del corpo nell'aria, e si notano le indicazioni del barometro e del termometro al tempo del pesamento; quindi si riempie il fiasco o il vaso d' acqua distillata presa ad una temperatura conosciuta, e si pesa di nuovo il corpo col fiasco così riempiuto. Ciò fatto si apre il fiasco e vi s'introduce il corpo, che caccia una parte dell'acqua; quindi si chiude, avendo cura di non lasciare alcuna bolla d'aria nel suo interno. Si asciuga il fiasco esattamente, e si rimette sul piattello della bilancia; allora questo piattello si trova più leggiero, che quando si è pesato insieme il corpo ed il fiasco pieno d'acqua, di tutto il peso dell'acqua cacciata dal corpo. Vi si aggiungono i pesi necessarii per ristabilir l'equilibrio, e si conosce così il peso di quest'acqua. Da questo peso paragonato con quello apparente del corpo, si può calcolare il peso specifico del medesimo.

Se i pesamenti fossero fatti nel vacuo, e alla temperatura 0°, il risultato si presenterebbe immediatamente da se stesso; poichè sia S il peso del corpo, E quello del volume d'acqua che ha cacciato, $\frac{S}{E}$ sarebbe il peso specifico, riferito alla temperatura zero tanto del solido che dell'acqua; ma siccome i pesamenti non sono fatti nel vacuo, e comunemente son fatti ad una temperatura diversa dal 0°, bisogna applicare qui le convenienti riduzioni, che indicheremo fra breve.

Si può anche determinare E sospendendo il corpo ad un sottil crine, attaccato al piattello della bilancia che prende allora

mente all'acqua, secondo il metodo insegnato nel § 2.°. Si può cercar quindi il peso specifico del sale relativamente a quello di questo liquido, come si farebbe relativamente all'acqua; moltiplicando questi due numeri l'uno per l'altro, il loro prodotto esprimerà il peso specifico del corpo relativamente all'acqua.

Ma bisogna ora dare a questi metodi il lor compimento, introducendovi tutte le correzioni che le osservazioni richieggono per divenir esattamente comparabili. Cominciamo dal caso, in cui il corpo solido è pesato successivamente nell'aria, e in un liquido conosciuto. Supponiamo che i pesamenti siano fatti alla temperatura t, e che a questa temperatura il volume del corpo solido espresso in centimetri cubi sia V. Chiamiamo (s) il peso assoluto d'un centimetro cubo della sua sostanza, alla temperatura del ghiaccio fondente, e K la sua dilatazione cubica per un grado centesimale. Allora il peso d'un centimetro cubo di questo corpo alla temperatura t, sarà $\frac{(s)}{1+Kt}$, poichè la dilatazione de' corpi solidi nelle temperature ordinarie può essere riguardata come uniforme. Il peso totale del volume V sarà dunque $\frac{V(s)}{1+Kt}$. Sia A il peso d'un centimetro cubo d'aria nelle circostanze dell'operazione, da determinarsi secondo i principii che indicheremo a suo luogo; quello del volume V d'aria nelle stesse circostanze sarà AV. Finalmente chiamando (ϖ) il peso d'un centimetro cubo del liquido in cui il corpo si è pesato, alla temperatura del ghiaccio fondente, e λ la sua dilatazione da 0° a t, il peso di quello stesso volume V di questo liquido alla temperatura t sarà $\frac{V(\varpi)}{1+\lambda}$. Ora questi pesi sono appunto ciò che il corpo solido ha perduto, quando si è pesato successivamente nell'aria e nel liquido; cosicchè sottraendoli dal peso assoluto $\frac{V(s)}{1+Kt}$, si avranno i pesi apparenti che chiameremo S e S'. Questa considerazione dà immediatamente le due equazioni seguenti

$$\frac{V(s)}{1+Kt} - AV = S\,; \qquad \frac{V(s)}{1+Kt} - \frac{V(\varpi)}{1+\lambda} = S'\,.$$

la prima formola darebbe il peso d'un centimetro cubo di questo corpo; la seconda darebbe il suo peso specifico riferito all'acqua. Questa è un'approssimazione soventi ammessa; ma si vede qui in che essa consista, e quali cose vi si trascurino.

Generalmente quando si avrà il valor rigoroso di (s), si dividerà questo per 0,999925, peso d'un centimetro cubo d'acqua, alla temperatura del ghiaccio fondente, e il quoziente esprimerà il rapporto del peso del corpo e dell'acqua a volume uguale per questa temperatura.

Quando in vece di far uso della bilancia idrostatica si adopera un fiasco pieno d'un liquido conosciuto, in cui s'introduce il corpo solido dopo averlo pesato nell'aria, la formola diviene diversa, secondo la maniera con cui si opera. Supponiamo dapprima che si facciano tre pesamenti; 1.° quello del corpo solido; 2.° del fiasco pieno di liquido; 3.° del fiasco riempiuto dal corpo solido e dal liquido. Conserviamo le stesse denominazioni di sopra, ma indichiamo di più con V' la capacità del fiasco, alla temperatura in cui si opera; chiamiamo L il peso apparente del liquido, che esso rinchiude nella seconda sperienza, e P la somma totale dei pesi del liquido e del solido che esso contiene nella terza. Queste tre operazioni daranno le tre equazioni seguenti:

1.° Pesamento del corpo nell'aria,

$$\frac{V(s)}{1+Kt} - AV = S;$$

2.° Pesamento del fiasco pieno di liquido,

$$\frac{V'(\varpi)}{1+\lambda} - AV' = L;$$

3.° Pesamento del fiasco riempiuto dal liquido e dal corpo solido,

$$\frac{(V'-V)(\varpi)}{1+\lambda} + \frac{V(s)}{1+Kt} - AV' = P;$$

sottraendo la seconda equazione dalla terza V' dispare, e vi resta

$$\frac{V(s)}{1+Kt} - \frac{V(\varpi)}{1+\lambda} = P - L .$$

Aggiungendo a quest'equazione la prima $\frac{V(s)}{1+Kt} - AV = S$, si hanno le stesse due equazioni che abbiamo ottenute col primo metodo, in cui si sia cangiato solamente S' in $P - L$. Esse condurranno dunque ad una formola simile, e se ne dedurrà (s) nella stessa maniera, cioè si avrà

$$(s) = \frac{(1+Kt)\left[\frac{S(\varpi)}{1+\lambda} - (P-L)A\right]}{S-P+L} .$$

Se il liquido in cui il corpo s'immerge è l'acqua pura, questa formola diverrà

$$(s) = \frac{(1+Kt)\,[SB-(P-L)A]}{S-P+L} ,$$

B avendo la significazione sopra indicata. E se si volessero trascurare tutte le riduzioni, il peso specifico del corpo, che era precedentemente $\frac{S}{S-S'}$, diverrà qui $\frac{S}{S-P+L}$.

Veniamo finalmente alla maniera di operare che abbiamo indicata al principio di questo n.° Essa non differisce dalla precedente, se non in quanto, in vece di pesare il fiasco solo pieno di liquido, si pesa il medesimo unitamente al corpo solido. Sia allora M il peso del sistema del corpo e del fiasco pieno di liquido; si avrà qui,

1.° Pesamento del corpo nell'aria,

$$\frac{V(s)}{1+Kt} - AV = S .$$

2.° Pesamento del corpo, col fiasco pieno di liquido,

$$\frac{V(s)}{1+Kt} - AV + \frac{V'(\varpi)}{1+\lambda} - AV' = M.$$

3.° Pesamento del fiasco riempiuto dal liquido e dal solido,

$$\frac{(V'-V)(\varpi)}{1+\lambda} + \frac{V(s)}{1+Kt} - AV' = P.$$

Mettendo nella seconda equazione pei due primi termini il loro valore S dato dalla prima, essa diviene

$$\frac{V'(\varpi)}{1+\lambda} - AV' = M - S;$$

Allora sottraendola dalla terza, V' dispare, e vi resta

$$\frac{V(s)}{1+Kt} - \frac{V(\varpi)}{1+\lambda} = P - M + S;$$

si ha di più $\frac{V(s)}{1+Kt} - AV = S$; che sono le due equazioni trovate per la maniera precedente di operare, se non che L vi è cangiato in $M-S$. Esse condurranno dunque ancora allo stesso risultato, e si accorderanno anche colle prime cangiando solamente S' in $P-M+S$. Se si vogliono trascurare tutte le riduzioni, il peso specifico, che era pur ora $\frac{S}{S-P+L}$, diverrà qui $\frac{S}{S-P+M-S}$, ossia semplicemente $\frac{S}{M-P}$.

20. Si possono ancora determinare i pesi specifici de' corpi solidi per mezzo dell' areometro. Per questo si aggiunge all'areometro di Fareneith, inferiormente, una specie di picciola secchia metallica, minutamente traforata HH (fig. 3) che serve a contenere il corpo solido, quando esso si vuol pesare nell' acqua; la palla di vetro B piena di mercurio che dee tenerlo

ritto nel liquido s'annette sotto a questa secchia. Con questo stromento conosciuto sotto al nome di *areometro di Nicholson* si può in primo luogo pesare il corpo solido nell'aria, come si peserebbe in una bilancia. A tal fine si mette l'areometro in un vaso cilindrico, pieno d'acqua distillata, d'una temperatura conosciuta, e si aggiungono sul piattello superiore FF i pesi necessarii per farlo immergere sino al tratto T segnato sul suo collo; suppongo che si richieda per questo un numero N di grammi alla temperatura in cui si opera. Allora si tolgono questi pesi, e vi si sostituisce il corpo che si pone sul piattello FF. Se esso pesa più di N grammi, farà immergere l'areometro al di sopra del tratto T, e non si potrà pesare; ma se pesa meno di N grammi bisognerà aggiungere una certa quantità di grammi per finire di far immergere lo stromento, e il complemento di questi pesi a N grammi darà il peso apparente del corpo nell'aria, vale a dire, che se si sono dovuti aggiungere n grammi, il peso sarà $N-n$.

Tolgasi ora il corpo dal piattello FF, e pongasi nella secchia HH. Se esso è più pesante che l'acqua a volume uguale, esso farà ancora immergere l'areometro, ma d'una quantità minore che quando era nell'aria. Allora bisognerà aggiungere sul piattello più di n grammi, perchè lo stromento s'immerga sino al tratto T. Sia n' questo numero; $N-n'$ sarà il peso del corpo nell'acqua. Se si sottrae questo peso da quello del corpo nell'aria, si avrà il peso apparente nell'aria, d'un volume d'acqua uguale a quello del corpo. Questo peso sarà dunque $N-n-(N-n')$ ossia $n'-n$. Se si vogliono ridurre questi risultati alle denominazioni che abbiamo prima adottate, e in cui i pesi apparenti del corpo e dell'acqua a ugual volume erano rappresentati da S, ed S', si avrà qui $S=N-n$, $S'=N-n'$. Non vi resterà più che ad applicare ai numeri S ed S' le formole trovate superiormente, e se ne dedurrà ugualmente sia il peso specifico del corpo, sia il peso d'un centimetro cubo della sua sostanza. Se si vogliono trascurare tutte le riduzioni, il peso specifico sarà $\frac{S}{S-S'}$, ossia $\frac{N-n}{n'-n}$.

Per abbreviare l'operazione nel secondo pesamento si può lasciare sul piattello il numero n di grammi, che vi si era posto

nel primo, e contare solamente la quantità che vi si aggiunge, e che sarà immediatamente il valore di $n'-n$, ossia $S-S$. In fatti questa quantità aggiunta misura evidentemente la perdita di peso, che il corpo ha fatta nell'acqua.

Se il corpo fosse più leggiero che l'acqua, posto nella secchia metallica, esso non peserebbe su questa, onde l' operazione non potrebbe aver luogo. In questo caso si può rovesciare la secchia, come si vede nella stessa fig. 3 in $H'H'$, cosicchè il corpo posto al dissotto tenda a sollevare l'areometro. Ma siccome lo stromento solo richiede già un certo peso N per immergersi sino al tratto T, bisogna, per ottenere questa immersione nella circostanza di cui si tratta, caricarlo d'un peso n' più grande di N. Ciò non impedisce che le formole precedenti siano sempre applicabili nella stessa maniera, e senza alcun cangiamento; $n'-n$ indica sempre il peso apparente del volume d' acqua uguale a quello del corpo, e dividendo $N-n$ per $n'-n$ si avrà sempre il peso specifico apparente. Solamente in questo caso il numero $N-n'$ che esprime il peso del corpo nell'acqua diviene negativo, poichè il corpo tende ad elevarsi nell'acqua e non a discendervi.

Si può qui osservare che l'uso dell' areometro di Nicholson per determinare il peso specifico de' corpi solidi equivale a quello della bilancia *idrostatica*, ad una delle braccia della quale si sospende il corpo solido onde pesarlo successivamente nell'aria e nell'acqua, nel qual caso la perdita di peso fatta nell'acqua esprime il peso d'un volume d'acqua uguale a quello del corpo, da paragonarsi al peso di questo, ridotto al vacuo, come sopra si è spiegato; non altrimenti che per mezzo dell'areometro di Fareneith si ottiene essenzialmente lo stesso risultato che pesando uno stesso corpo solido sospeso alla bilancia idrostatica, successivamente nell'aria, nell'acqua, e in un liquido di cui si voglia determinare il peso specifico, e conchiudendo dal rapporto delle perdite di peso fatte dal corpo nell'acqua e nel liquido quello dei pesi d'uno stesso volume d'acqua e del liquido. Ma, come già abbiamo detto, i metodi diretti per la determinazione dei pesi specifici tanto de' liquidi che de' solidi sono sempre da preferirsi quando si vogliono risultati molto precisi; e solo nei casi

ordinarii l'uso degli areometri è più comodo che l'impiego di questi metodi.

21. Leslie si è servito di un mezzo particolare per determinare la densità della parte solida dei corpi molto porosi o pulverulenti, tra le particelle de' quali l'acqua penetra talvolta difficilmente, onde si potrebbe dubitare che il peso specifico ottenuto coi mezzi sopra indicati non fosse affetto da errore, proveniente da una porzioue degli interstizii non riempiuti dal liquido. Questo mezzo consiste nel determinare il volume degli interstizii che vi occupa l'aria contenutavi sotto la pressione ordinaria, giudicandone da quello che quest' aria prende quando la pressione è ridotta per esempio alla metà; il che si ottiene facendo comunicare il vaso che contiene la polvere di cui si tratta coll'estremità superiore d'un tubo, in cui sta sospesa una colonna di mercurio, onde l'aria dee prendere un volume doppio e svolgersene così un volume uguale a quello degli interstizii. Se ne conchiude il volume della materia solida, e paragonandone il peso con quello d'un ugual volume d'acqua, si ha il peso specifico di questa materia (*v. Journal of science* luglio 1826). Ma osserverò che i risultati ottenuti con questo mezzo potrebbero essere inesatti, se l'aria contenuta negli interstizii della polvere, o del corpo poroso vi fosse condensata dall' attrazione stessa del corpo, il che pare succedere ordinariamente, come vedremo a suo luogo. Del resto uno stromento fondato sullo stesso principio era già stato adoperato da Say, in Francia, sotto il nome di *stereometro* nel 1797 per determinare la densità della polvere da cannone, e descritto in quell'anno nel T. 23 degli *Annales de Chimie*

§ 4.°

Risultati sperimentali sulla densità de' diversi corpi.

22. Per compiere ciò che riguarda la determinazione della densità o peso specifico dei diversi corpi solidi o liquidi, aggiungerò qui una tavola delle densità che si sono trovate ai corpi che nello stato attuale della chimica si considerano come

semplici, particolarmente metallici, e ad alcune altre sostanze più conosciute e d'un uso generale nell' economia domestica e nelle arti. Appartiene poi alla chimica, alla mineralogia ecc. l'indicare le densità dei diversi composti particolari, che ciascuna di queste scienze considera. Quanto ai metalli ne ho specificata la densità ne' loro diversi stati, di cui ci occorrerà di parlare più particolarmente in appresso. Questa tavola è principalmente tratta da quella che ne ha dato Brisson nella sua opera *Pesanteur spécifique des corps*, *Paris*, 1787, eccettuate le sostanze che o non erano conosciute affatto, o solo imperfettamente conosciute nel tempo della pubblicazione di quell'opera; per queste ho riferite le densità quali si trovano indicate dai più recenti autori che se ne sono occupati. L'unità delle densità, nella tavola, è la densità dell'acqua alla temperatura 0°, supponendo pure le sostanze prese a un dipresso alla stessa temperatura.

Per l'iridio e l'osmio, metalli che sogliono accompagnare le miniere di platino, unitamente al palladio e al rodio, ho segnata in comune la densità che Breithaupt (Giornale di Schweigger-Seidel T. 9) ha trovata all' iridio nativo, ove l'iridio si presenta quasi puro con poco osmio; la densità dell'osmio pare doverne differir poco, considerando la densità delle diverse varietà di osmiuro d'iridio che la natura ci presenta, determinata da Rose (Giornale di Poggendorff, 1833, n.° 11 e 1835 n.° 2), e molto lontana dal vero era quindi la densità di circa 10 che Berzelius aveva trovata all' osmio, probabilmente da lui esaminato in istato assai poroso. Questi due metalli superano così in densità il platino, e ci presentano le sostanze più dense addì nostri conosciute.

Per la sostanza solida del carbone, cioè quale dee essere astrazione fatta dai pori che esso ci presenta nello stato in cui si ottiene dalla combustione dei vegetali, ho seguita la determinazione di Rumford (*Recherches expérimentales sur le bois et le charbon*, *Bibliothèque Britannique*, *décembre* 1812 e *janvier* 1813). Quella di Leslie che le darebbe una densità maggiore di quella del diamante, secondo il risultato ottenuto coll'istrumento di cui si è parlato nel numero precedente, pare affatto erronea.

Pel mercurio congelato ho indicato la densità che Biddle gli

Acciajo temperato . .	7,817
Stagno fuso	7,293
battuto o laminato	7,387
Piombo fuso	11,400
Zinco fuso	7,191
— battuto	7,861
Bismuto fuso	9,823
battuto	9,883
Antimonio fuso . . .	6,860
Arsenico fuso . . .	5,789
Nichel fuso	8,279
— battuto	8,666
Cobalto fuso	8,513
Mercurio liquido . .	13,598
— congelato . . .	15,612
Manganese	8,013
Molibdeno	8,611
Tunsteno	17,400
Tellurio	6,200
Selenio	4,310
Cadmio fuso	8,604
— battuto	8,694
Titanio	5,300
Uranio	9,000
Cromio	5,900
Iodio	4,948
Bromo liquido . . .	2,966
Potassio	0,865
Sodio	0,973

Sostanze semplici non metalliche.

Diamante	3,450
Carbone	1,570
Zolfo	2,000
Fosforo	1,770

Sostanze solide composte.

Ghiaccio	0,925
Vetro comune . . .	2,642
Cristallo di Francia. .	2,892
Flint-glass Inglese .	3,300 / 3,440
— di Francia. . .	3,179
— di Fraunhofer .	3,779
Rubino (alumina cristallizzata)	4,150
Cristallo di rocca (silicio cristallizzato) . . .	2,655
Gesso (solf. di calce cristallizzato)	2,332
Spato calcare (carbonato di calce cristallizzato)	2,720
Resine diverse . .	1,040 / 1,200
Cera bianca	0,969
Sevo	0,942
Sovero	0,240
Legni ordinarii . .	0,600 / 0,800
Legni pesanti . . .	0,900 / 1,400
Avorio	1,850

Liquidi.

Acqua distillata o di pioggia	1,000
Acqua di mare . . .	1,026
Alcool del commercio	0,900 / 0,837
Alcool rettificato . .	0,829
Alcool puro detto assoluto	0,792
Etere ordinario detto solforico.	0,716
Acido solforico concentrato	1,845
Olj essenziali leggieri	0,870 / 0,894
Olj essenziali pesanti	1,036 / 1,044
Olio d'oliva	0,915
— di lino	0,940

LIBRO SECONDO

DELLA COSTITUZIONE DE' CORPI SOLIDI IN PARTICOLARE

23. I corpi solidi ci presentano due specie di ricerche relativamente alla loro costituzione. Le prime riguardano la natura delle forze molecolari che li caratterizzano, e le proprietà che ne risultano nella loro sostanza, considerandone la massa in qualunque direzione indifferentemente. Le altre si riferiscono a certe forme regolari esterne, che questi corpi sogliono prendere quando dallo stato liquido passano lentamente al loro stato solido, il che si chiama *cristallizzazione*; forme che sono pure connesse con particolari proprietà ad esse relative, e che ci conducono ad alcune cognizioni sulla disposizione delle loro molecole, e sulle forze di cui sono dotate. Riguarderemo adunque i corpi sotto questi due aspetti nelle due sezioni in cui divideremo questo libro.

SEZIONE I.ª

DELLA NATURA DELLE FORZE MOLECOLARI CHE AGISCONO NE' CORPI SOLIDI IN QUALUNQUE DIREZIONE

CAPO PRIMO

Idea generale di queste forze, e delle proprietà che ne risultano ne' corpi solidi.

24. I corpi solidi, come già abbiamo osservato, hanno questo comune co' liquidi, che la distanza delle loro molecole è a un dipresso determinata dall'equilibrio tra le forze attrattive, e ripulsive che si esercitano tra le loro molecole, aggiunta però alle forze attrattive, quanto a' liquidi o almeno alla maggior parte di essi, una forza estranea che è necessaria come vedremo in seguito per mantenerli allo stato liquido; e cosicchè venendo ad esercitarvisi una pressione esterna, od a variare notabilmente quella già esistente, si varii bensì il volume del solido, o del liquido (finchè quest' ultimo rimane in questo stato), ma di una quantità assai piccola, e che è ben lontana da quella proporzionalità della densità colla pressione, che forma la legge di compressibilità dei corpi espansibili od aeriformi.

Ma i solidi differiscono essenzialmente dai liquidi, come abbiamo detto, perchè nei primi la posizione relativa delle molecole è determinata, od almeno non può esser cangiata che da una forza esterna assai grande, mentre ne' liquidi le molecole scorrono quasi liberamente le une sulle altre. Inoltre si osserva che ne'solidi l'adesione delle molecole tra loro è molto più grande che ne' liquidi. Conviene adunque in primo luogo esaminare d'onde procedano queste differenze, e quali siano le circostanze che caratterizzano particolarmente i solidi di cui

qui si tratta, relativamente alle forze da cui le molecole sono animate.

Già abbiamo indicata una principale cagione di questa differenza tra i solidi e i liquidi, cioè la minor distanza a cui le molecole dei solidi si trovano tra loro, avuto riguardo alla figura più o meno irregolare che esse possano avere, onde questa figura vi abbia, sulle forze molecolari di cui le molecole sono dotate, un' influenza, che non si esercita sulle molecole dei liquidi per la loro maggior distanza, o per la maggior prossimità della lor figura alla sferica. Si può infatti concepire che le molecole tendano quindi ne' solidi a rivolgere le une verso le altre certe faccie, o lati, o semplici punti particolari, e che quando si trovano in queste particolari posizioni relative, se ne vengano da una forza estranea alcun poco scostate mediante un cangiamento nella figura del corpo, esse tendano a ritornarvi in virtù delle loro forze molecolari medesime così inegualmente esercitate in diverse direzioni. Potrebbe anche supporsi che le molecole dei corpi siano di diversa natura nelle loro diverse parti, cosicchè vi siano in esse certi punti per cui si attraggono più o meno tra loro indipendentemente dalla distanza di essi punti, oppure anche punti opposti relativamente alla lor figura, e che si chiamerebbero *poli*, di cui gli uni abbiano tra loro una forza attrattiva, e gli altri una forza ripulsiva, onde la forza attrattiva non si eserciti tra le molecole, se non quando esse rivolgono le une alle altre i punti d'attrazione, e quest'attrazione divenga nulla, o si cangi in ripulsiva quando esse vengano a rivolgersi i loro punti o poli ripulsivi. Ma comunque la cosa succeda, purchè si ammetta questa disuguaglianza di attrazione tra le molecole secondo la loro relativa posizione, se da una forza esterna viene a cangiarsi quella posizione a cui corrisponde la massima attrazione, la forza attrattiva particolare dei diversi punti tenderà a ricondurvele, dopo alcune oscillazioni, il che dà luogo, come vedremo in seguito, a quella proprietà de' corpi solidi, che dicesi *elasticità*; ma se una forza più grande le scosta da quella posizione al di là d'un certo limite, quella particolar attrazione cesserà d'aver luogo, e allora in generale cesserà l'adesione, ossia il corpo si spezzerà, come accade infatti a molti corpi solidi quando si vogliono piegare

oltre quello che la lor natura il permette. Altri corpi solidi presentano in questa circostanza un altro fenomeno, che esamineremo in appresso, cioè quello d'un cangiamento stabile nella posizione relativa delle loro molecole. Quanto ai corpi liquidi si concepisce che la distanza delle loro molecole può esser tale, che vi abbia bensì ancor luogo una attrazione, ma che la figura delle molecole non vi abbia più alcuna influenza, cosicchè esse si attraggano allora indifferentemente da tutti i lati, appunto come ne' fenomeni astronomici quegli effetti che dipendono dalla figura particolare degli astri non rimangono sensibili, che ad una distanza molto minore di quella a cui si esercita l'attrazione generale di questi astri. Se poi non alla semplice figura si volesse attribuire quell'attrazion particolare che determina la posizione relativa delle molecole de' corpi solidi, ma a poli attrattivi, e ripulsivi, si potrebbe anche dire, che a una certa distanza maggiore la differenza di distanza di una molecola dai due poli opposti, attrattivo, e ripulsivo, dell' altra restando come infinitamente piccola relativamente alla distanza totale, le due azioni opposte divenute sensibilmente uguali in qualunque posizione della molecola, si neutralizzano, e si distruggono. Allora l'attrazione che può ancora osservarsi in certe circostanze ne' liquidi dovrebbe attribuirsi ad un'altra porzione della forza attrattiva, indipendente da questi poli, che nella teoria del calorico, considerato come causa del calore, potrebbe ridursi all' attrazione di ciascuna molecola ponderabile pel calorico che circonda le altre molecole, attrazione che, come abbiamo sopra fatto osservare, può anch'essa far parte in generale, secondo questa teoria, dell'azion molecolare de' corpi; e sarebbe anzi possibile che tale fosse in generale il caso de' liquidi, cioè che l'attrazione tra le loro molecole ponderabili fosse nulla, e ogni loro attrazione si riducesse a quella indicata, qualunque fosse la maniera con cui si volesse concepire l' influenza della figura delle molecole sulla loro posizione nello stato solido, potendosi allora supporre che la distanza delle molecole de' liquidi sia tale da render affatto insensibile quell'attrazione tra le molecole loro ponderabili. Ma questa supposizione non sarebbe forse applicabile alla teoria in cui si attribuiscono i fenomeni del calore al moto di vibrazione delle mo-

lecole. Per quello che riguarda i corpi solidi di cui qui si tratta, aggiungerò solo che l' idea di poli opposti che si neutralizzano ad una certa distanza potrebbe forse servire a render ragione di quella stessa rapidità del decrescimento della forza molecolare, che vi si osserva, e per cui l'attrazione fortissima nella natural situazione delle molecole d'un corpo solido diviene nulla ad una distanza alquanto maggiore, ma ancora insensibile; mentre ciascun polo potrebbe allora presentare un'attrazione o ripulsione soggetta ad una legge più semplice, e forse a quella stessa della ragione inversa dei quadrati della distanza che ha luogo generalmente nelle forze che partono da un centro.

25. Abbiamo detto che molti corpi solidi, se si piegano, o si obbligano in qualunque modo a cangiar forma al di là d'un certo limite, piuttosto che subire stabilmente questo cangiamento di forma, epperciò di situazion di molecole, si spezzano, cioè lasciano separarsi intieramente le loro molecole, e questi corpi diconsi perciò *fragili*; tali sono il vetro, le pietre in generale, l'acciajo temprato durissimo ecc. Non però così sempre accade la cosa: molti corpi solidi, e particolarmente i metalli più noti, quando la loro forma è alterata al di là del punto a cui si estende la forza che le molecole hanno di ritornare alla prima posizione, in vece di spezzarsi, permettono alle loro molecole, come già abbiamo accennato, di prendere stabilmente una posizione diversa da quella che prima aveano, e rimangono così sotto la nuova forma a cui la forza esterna gli ha ridotti; cosicchè possono stendersi, e prender diverse forme sotto ai colpi del martello, ridursi in lamine sottili quando si fanno passar a forza fra due cilindri, trarsi in fila, ecc. Questa proprietà utilissima ne' metalli per l'uso delle arti, a cagione della facilità che presenta di lavorarli, si chiama *duttilità* o *malleabilità*. Se questa facilità di cangiar forma fosse indefinita, i corpi che ne sarebbero dotati si potrebbero considerare quasi come *liquidi* molto imperfetti, poichè le molecole avrebbero in essi quella stessa indifferenza a qualunque mutua posizione, che distingue i liquidi, sebbene il cangiamento di situazione richiedesse qui una forza esterna che non si richiede pei liquidi; ma una circostanza particolare che si osserva nel voler ridurre i corpi, di cui si tratta, a diverse forme, e che limita di molto la loro

capacità di prenderle, ci obbliga a rinunziare a quest'idea, che non sarebbe altronde facilmente conciliabile colle relazioni che questi corpi ci presentano cogli altri corpi solidi e liquidi. Essa consiste in che nel battere, o comprimere in qualunque modo questi corpi per tale oggetto, essi divengono vieppiù duri, ed inflessibili, o come si suol dire *crudi*, finchè arrivano finalmente ad uno stato in cui non possono più in alcun modo cangiar forma stabilmente, ma si spezzano piuttosto, come i corpi fragili. In tale stato essi hanno anche un volume alquanto minore, epperciò una densità alquanto maggiore che nel loro stato naturale, come si può vedere nella tavola delle densità dei diversi corpi, e in diversi stati, che si trova al fine del libro primo. Il piombo parrebbe fare eccezione a questa regola dell'aumento di densità per la compressione, secondo le sperienze di Muskembroek, in cui la densità di questo metallo sottoposto alla filiera e al martello si è trovata al contrario minore che nello stato ordinario; Guyton-Morveau ha anche osservato questo fenomeno; ma egli ha poi fatto vedere che esso dee attribuirsi ad accidentali disgiunzioni di particelle che vi si formano, poichè operando in maniera che il metallo non potesse sfuggire per la sua mollezza all'effetto della compressione, ne ottenne sul piombo una condensazione come sugli altri metalli (*Memorie dell' Istituto*, *anno* 1809, e *Ann. de Chimie*, *T.* 71).

I metalli così induriti, e resi più densi non possono riacquistare la loro duttilità, che coll'esposizione ad un calor rovente e successivo raffreddamento, dopo la quale operazione per cui dicono *ricuocersi*, essi presentano anche di nuovo la loro densità primitiva. Abbiamo sull'azione della compressione esercitata sui metalli nella filiera, e nel laminatojo per aumentarne la densità, e sull'effetto della ricottura per ristabilirne la densità primitiva, sperienze recenti del sig. Baudrimont, pubblicate negli *Annales de Chimie et de Physique*, *septembre* 1835, dalle quali risulta: 1.° che il diametro dei fili metallici ottenuti colla filiera si aumenta, e la loro densità si diminuisce per la ricottura, come ciò dee essere per la distruzione dell'effetto della compressione nella filiera. 2.° Che facendo passare pel laminatojo fili metallici ottenuti colla filiera, la densità se ne accresce ancora sopra quella che la filiera loro avea data, sia che

così le sue prime qualità. Questi corpi duttili non differirebbero adunque dagli altri, se non in quanto sarebbero suscettibili di due stati diversi, in ciascuno de' quali le molecole avessero una posizione determinata, ma si fisserebbero nel secondo di essi ad una minor distanza, in cui troverebbero un nuovo equilibrio quando una volta da una forza esterna vi fossero state condotte. Forse questa minor distanza tra le molecole dell'ordine più composto è accompagnata, come per necessaria condizione, da un cangiamento di posizione nelle molecole d' un ordine più semplice, delle quali quelle siano la riunione.

Del resto quest' alterazione che mette un limite alla duttilità de' metalli potrebbe anche essere, per così dire, accidentale, ossia una conseguenza della forza estranea necessaria per cangiare la posizione in cui si trovano le molecole dei medesimi, cosicchè se quest' alterazione non succedesse le molecole dei corpi solidi duttili potrebbero indefinitamente scorrere e cangiar di posizione le une sulle altre, come ciò pare succedere in fatti ne' liquidi imperfetti, detti viscosi. La forza estranea richiesta per cangiar questa posizione dovrebbe essere allora analoga ad un fregamento tra le superficie di due corpi; ma resterebbe a determinarsi la natura di questa forza. Vi sono adunque ancora molti punti che ci sono affatto ignoti nella costituzione de' corpi.

26. Alcuni corpi presentano ancora un terzo stato d'equilibrio delle loro molecole, in cui in vece di esser queste più vicine tra loro che nello stato naturale, sono al contrario alquanto più rimote. Tale è il caso dell'*acciajo temperato*. L'acciajo non è altro che una combinazione particolare di ferro colla sostanza combustibile del carbone, la quale dai chimici si dice *carbonio*, ma in piccola quantità, cioè di una o due centesime del suo peso, e probabilmente una lega d' una piccola porzione di carburo di ferro di composizione determinata con una quantità molto maggiore di ferro. L'acciajo nel suo stato naturale è assai duttile; ma gode di questa proprietà che il ferro semplice non avea, che se dopo averlo arroventato s'immerge rapidamente nell'acqua per raffreddarlo, esso diviene meno flessibile, e si trova allo stato d'un corpo fragile o quasi fragile, secondo che più o men grande era il suo grado di calore quando

si è immerso nell'acqua. Questa operazione dicesi *la tempra* dell'acciajo, e ve ne sono diversi gradi corrispondenti ai diversi gradi di calore nel momento dell'immersione. Se l'acciajo temprato si riscalda, e si lascia quindi raffreddar lentamente, perde più o meno della durezza e fragilità che la tempra gli aveva comunicata, secondo il calore a cui si espone, e per cui si dice *ricuocersi*, e con un calore sufficiente rientra intieramente nel suo primiero stato di duttilità.

Si sogliono distinguere i diversi gradi di tempra prodotti dai diversi gradi di ricottura d'un acciajo prima temprato durissimo, per mezzo dei colori diversi che l'acciajo temprato e pulito prende quando si espone a questi diversi gradi di calore per ricuocerlo, e che provengono da una sottil pellicola d'ossido che va aumentando di spessore per l'accrescimento di calore, le lamine sottilissime di corpi trasparenti avendo questa proprietà di riflettere colori diversi, secondo il loro spessore. L'acciajo durissimo diviene successivamente per questi diversi gradi di ricottura *giallo di paglia*, *giallo dorato*, *purpureo*, *violaceo*, e finalmente *azzurro* che corrisponde al più basso grado di tempra.

Del resto questa proprietà di potersi temprare e divenir così più fragili e duri, per un rapido raffreddamento, appartiene anche ad alcune altre leghe del ferro con piccola quantità di diversi metalli. Così l'acciajo di qualità particolare che si fabbrica nelle Indie orientali, conosciuto sotto il nome di *wootz*, contiene piccole quantità de' metalli detti dai chimici *silicio* ed *aluminio*; Faraday ha indicata la maniera di imitarlo, e le stesse qualità del wootz si danno al ferro o all'acciajo unendovi piccolissime quantità di argento, del metallo detto rodio ecc.

Potrebbe taluno credere che anche in questo caso la durezza e la fragilità dipendesse da una più grande prossimità delle molecole prodotta da quel rapido raffreddamento; ma se così fosse il volume dell' acciajo temprato sarebbe minore di quello che avea avanti la tempra, e l' esperienza mostra il contrario, che ne è alquanto maggiore, epperciò la densità minore, come si può vedere nella Tavola delle densità dei corpi. Questo effetto pare adunque dipendere da che gli strati superficiali dell'acciajo rovente, che si pongono in contatto coll' acqua fredda, indurandosi avanti che la massa intiera sia interior-

mente raffreddata, formano una crosta o inviluppo più grande di quello che converrebbe poi a racchiudere la stessa massa condensata dal raffreddamento, onde le molecole di questa che successivamente si raffreddano siano costrette, per non romperne la continuità, a rimanersi ad una distanza maggiore di quella che richiederebbe l'equilibrio delle forze da cui sono animate nello stato naturale. Ma questo nuovo stato d'equilibrio è tale, chè per quanto poco le molecole ne vengano rimosse al di là del limite a cui si estende la facoltà di ritornarvi, in vece di prendere un'altra posizione da cui sono troppo rimote, intieramente si staccano, e il corpo si spezza.

Abbiamo un altro esempio di un simile stato sforzato nell'equilibrio delle molecole in quelle goccie di vetro, che ancor rammollite dal fuoco si lasciano cadere nell'acqua, e che dalla forma che prendono, e dal paese in cui dapprima furono fabbricate diconsi *lagrime bataviche*. Ma in queste l'equilibrio delle molecole interne che per l'induramento repentino della crosta esterna hanno dovuto prendere una maggior distanza, e una particolar posizione, è così instabile, che sebbene il ventre, o parte più grossa di queste lagrime resista senza rompersi anche a' colpi di martello, tuttavia se si rompe solo la punta della coda delle medesime, il tutto si stritola in minutissime parti, come se ciascuna molecola avesse bisogno dell'azione delle molecole vicine per mantenere la sua posizione, e tolta da luogo una sola di esse, le altre debbano necessariamente staccarsi. Così anche generalmente i vasi ordinarii di vetro, troppo rapidamente raffreddati dopo la loro fabbricazione, sono molto più fragili, o come si suol dire *crudi*, e scoppiano in pezzi più facilmente che allorquando sono stati lentamente raffreddati, oppure *ricotti* ad un calore minore a cui si ritengano per qualche tempo.

27. È cosa notabile che la prontezza del raffreddamento che produce gli effetti della tempra sull'acciajo e su quelle altre leghe del ferro di cui abbiamo parlato, non cagioni alcun cangiamento sensibile nell'oro, nello stagno, nel rame, e negli altri metalli semplici. Ma quello che è ancor più degno d'osservazione è che la stessa causa produce risultati inversi sulla lega che serve a fare una specie di tamburo solido di cui i Chinesi

si servono per produrre un forte suono, sotto il nome di *gong-gong* o *tam-tam*. Questa lega composta di 78 parti di rame, e 22 di stagno, secondo le osservazioni del signor Darcet, è fragile, e non malleabile quando dopo averla riscaldata sino all' incandescenza si lascia raffreddare lentamente nell'aria; mentre al contrario è alquanto flessibile, quando dopo averla così riscaldata s'immerge subitamente nell'acqua fredda, sebbene, secondo le recenti sperienze di Baudrimont, questa tempra dilati anche la lega di cui si tratta, come l'acciajo. Ciò fa sospettare in questa lega e forse nell'acciajo medesimo un cangiamento di combinazione o modo d'unione delle molecole che ha luogo inversamente in queste due sostanze, e di cui i metalli semplici non sono suscettibili. Nè la tempra dei metalli è il solo esempio di simili cangiamenti. Il signor Thenard ha osservato che il fosforo riscaldato sino a 60° centigr., e raffreddato lentamente all'aria, è bianco e trasparente, mentre se si raffredda rapidamente, gettandolo nell'acqua fredda, esso diviene nero, e opaco come il carbone, e si può farlo passare a piacimento quante volte si voglia dall'uno all' altro di questi stati. Questi effetti dipendono probabilmente da diversi stati d'equilibrio tra tutte le forze da cui le particelle sono animate; ma queste forze sono troppo poco conosciute perchè si possa teoricamente render ragione dei loro effetti, secondo le diverse circostanze in cui si pongono. Ad un simile cangiamento nel modo d'unione si può forse ugualmente attribuire la differenza nelle proprietà esterne che passa tra il diamante e il carbone, sostanze tra cui la chimica non ha potuto scoprire alcuna essenziale differenza di composizione. Si era pur creduto doversi riferire a un semplice cangiamento nella posizione delle molecole il fatto osservato dal signor Thénard, che il ferro e il rame esposti caldi ad una corrente di gaz ammoniaco vi divengono fragili, mentre questo gaz vi si scompone; ma il signor Savart ha trovato (*Annales de Chimie et de Physique*, *mars* 1828) che in questa circostanza i metalli aumentano alquanto di peso, e ritengono una porzione degli elementi dell' ammoniaca stessa, che ne altera le proprietà.

Del resto la chimica moderna ha fatto conoscere molti corpi principalmente composti, che sebbene presentino la stessa com-

posizione quanto alla natura e proporzione in peso dei loro elementi, possono però offrire proprietà fisiche ed anche azioni chimiche affatto diverse, il che non può provenire che dalla maniera diversa con cui le loro molecole semplici vi sono riunite e disposte per formarne le molecole integranti composte; questi corpi di proprietà diverse, e di identica composizione tra loro diconsi *isomeri*, cioè composti *delle stesse parti;* il carbonato di calce ordinario ossia spato calcare, e il minerale conosciuto sotto il nome di *arragonite* ne hanno presentato uno dei primi esempi. Avremo occasione di ritornare su questi corpi in questo stesso libro, e poi di nuovo quando ci occuperemo della costituzione de' corpi gazosi.

CAPO SECONDO

Della durezza e tenacità de' corpi.

28. Premesso così quanto occorreva a dirsi in generale sulla diversa maniera con cui i corpi solidi si diportano relativamente alle forze, che tendono a cangiarne la figura, od a romperli, conviene ora passare ad alcuna nozione più precisa sulle grandezze delle forze che si richieggono per produrre questi effetti ne' diversi corpi, e sulle leggi con cui vi progrediscono. In primo luogo osserveremo che la resistenza assoluta più o men grande che le parti de' corpi solidi oppongono alla loro intiera separazione dicesi *durezza*; ma sarebbe difficile trovare un mezzo sicuro e preciso di determinarne in ogni caso i diversi gradi. Sarebbe primieramente fallace in generale il giudicarne dalla maggiore o minore difficoltà di spezzare i corpi con colpi, per esempio, di martello; infatti oltre che questo mezzo non sarebbe di sua natura suscettibile d'un certo grado di precisione, egli è chiaro, che se il corpo è duttile, resisterà senza rompersi a' più forti colpi di martello, perchè le sue parti cangieranno la loro situazione relativa in vece di separarsi intieramente, come arriverà ad un corpo fragile anche molto più duro; così il vetro che si spezza sì facilmente al minimo urto

è forse più duro che il ferro, e gli altri metalli più noti che si stendono sotto al martello in vece di rompersi.

Il mezzo indicato sarebbe adunque tutto al più atto a darci una grossolana idea della maggiore o minor durezza di due o più corpi fragili. Pe' metalli duttili si è immaginato un altro mezzo di giudicare della maggiore o minor adesione delle loro parti, cioè quello di misurare il peso che è necessario di sospendere all'estremità inferiore d'un filo d'un medesimo diametro de' diversi metalli fissato per la sua estremità superiore, in una situazione verticale, perchè esso venga a rompersi; e la proprietà di cui questo peso ci somministra la misura si è detta *tenacità* de' metalli. Ma oltrecchè questo mezzo non può fornire risultati comparabili coll'adesione delle molecole de' corpi fragili, pare anche che la diversa duttilità de' metalli medesimi dee esercitarvi un'influenza che rende questi risultati più complicati, e impedisce che non si possano considerare come l'espressione della semplice coesione delle loro parti. Inoltre i risultati ottenuti da diversi autori relativamente ai diversi metalli più noti, presentano molta disparità sia per la maggiore o minor esattezza con cui le sperienze furono fatte, sia pel diverso stato di maggiore o minor purezza, di maggiore o minor compressione e rigidezza ecc., in cui i metalli possono trovarsi. Per esempio si è trovato che per produrre così la rottura d'una spranga di ferro, che è il più tenace de' metalli più noti, tirandola longitudinalmente, vi vogliono da 35 a 60 chilogrammi, secondo le diverse qualità del ferro, per ciascun millimetro quadrato della sezion trasversale della spranga, e pesi ancor maggiori pei fili di questo metallo tratti alla filiera.

Tuttavia perchè si abbia almeno qualche idea dell'ordine della tenacità dei diversi metalli riferirò qui i principali risultati ad essa relativi, e primieramente darò una tavola calcolata sulle sperienze di Muskembroek, e in cui questa tenacità è espressa prendendo per unità quella dal ferro d'Allemagna semplicemente fuso e non battuto, nel quale stato la tenacità è la minima per questo metallo; i risultati sono ridotti ad una sezione trasversale uguale, sulla base della proporzionalità alle sezioni, quando le sperienze furono fatte sopra spranghe di sezione diversa, e si è presa una media per que'metalli che hanno pre-

sentata qualche differenza poco notabile, secondo la loro diversa qualità.

Ferro fuso non battuto	1,0000
Oro fuso	0,2995
Argento fuso	0,5990
Rame fuso	0,3135
Stagno d'Inghilterra fuso	0,0875
Stagno di Malaca fuso	0,0471
Piombo fuso	0,0130
Antimonio fuso	0,0156
Zinco fuso	0,0412
Bismuto fuso	0,0458
Oro battuto	0,4863
Ferro lavorato alla fucina	1,0782
Rame battuto	0,5840
Acciajo non temprato	1,7520
Acciajo di tempra ordinaria	2,0215
Acciajo di tempra da rasojo	2,2461
Acciajo di tempra fortissima	1,6771
Lega di 5 o 6 parti di rame con una di stagno	0,5933

Si vede da questa tavola, 1.° che il ferro è il più tenace dei metalli, e il piombo il meno tenace tra i metalli duttili; 2.° Che i metalli battuti acquistano maggior tenacità, come si scorge nell'oro, nel ferro, nel rame; lo stesso accade ne' metalli tratti alla filiera; il piombo diviene per questa operazione tre volte più tenace secondo Muskembroek; 3.° Che certe leghe sono più tenaci che ciascuno de'metalli, di cui sono formate; 4.° Che l'acciajo non temprato ha maggior tenacità del ferro; 5.° Che la tempra sino ad un certo grado aumenta la tenacità dell'acciajo, ma spinta oltre ad un certo limite la diminnisce di nuovo.

Bisogna in generale osservare che questi risultati sono riferiti ad una sezione primitiva uguale del filo; ma se la materia del filo è più o meno duttile essa si allunga stabilmente più o meno e si restringe prima di rompersi, e se si riferisse quindi la

forza alla sezione attuale di ciascun filo avanti di rompersi, i corpi duttili si mostrerebbero più tenaci, e l'ordine dei metalli nella tavola ne potrebbe subire variazioni.

29. Guyton de Morveau (per passare a lavori più recenti su questa tenacità de' metalli) già nel T. 25 degli *Annales de Chimie* avea pubblicate sperienze sopra la tenacità dei diversi metalli più noti; le ripetè poi con maggior cura in appresso e ne pubblicò i risultati definitivi nelle *Mem. dell'Istituto di Francia* del 1809 e nel Tomo 71 degli *Annales de Chimie*. Egli trovò che le fila de' diversi metalli di 2 millimetri di diametro, il che dà una sezione di 3,1416 millimetri quadrati, sostengono, avanti di rompersi, i pesi seguenti in chilogrammi, cioè un filo di ferro 249,659; di rame 137,399; di platino 124,690; d'argento 85,062; d'oro 68,216; di zinco 49,790; di nichel 47,670; di stagno 15,740; di piombo relativamente alle dimensioni al punto di rottura 12,555, e relativamente al diametro preso avanti l'allungamento 5,633. Se si dividono i numeri relativi a questi diversi metalli per quello appartenente al ferro, onde paragonarne i risultati con quelli di Muskembroek, e se ne calcolano i pesi richiesti per rompere fili degli stessi metalli d'un millimetro quadrato di sezione, nella supposizione che questi pesi siano proporzionali alla grandezza della sezione, se ne può formare la tavola seguente, in cui la prima colonna esprime le tenacità dei diversi metalli prendendo per unità quella del ferro nello stato in cui fu adoperato da Guyton de Morveau, e la seconda quelle dei fili d'un millimetro quadrato di sezione, in chilogrammi.

Ferro	1,000		79,5 chil.
Rame	0,550		43,7
Argento	0,340		27,0
Oro	0,273		21,7 (1)
Platino	0,499		39,7 (1)
Zinco	0,199		15,8
Nichel	0,192		15,2
Stagno	0,063		5,0
Piombo	0,050	relativam. alle dimens. al punto di rottura	4,0
	0,023	relativamente alle dimensioni primitive	1,8

I metalli su cui Guyton ha operato erano alla maggior purezza possibile, e tratti alla filiera, e però alquanto indurati dalla compressione che vi avevano subita. Per lo stagno Guyton ha usato le precauzioni necessarie per evitare le rotture accidentali nel punto per cui il filo era sostenuto; pel piombo la distinzione indicata tra i due risultati ad esso relativi si è trovata necessaria pel grande ristringimento che questo metallo subisce avanti di rompersi. Del resto le differenze che la tavola di Guyton presenta da quella di Muskembroek possono in parte attribuirsi alla diversa purezza e stato diverso dei metalli adoperati. Quanto alla tenacità assoluta del ferro di 79,5 chilogr. per un filo di 1 millim. quadrato di sezione, essa sarebbe superiore alla massima di quelle che si attribuiscono al ferro ordinario in ispranga ne' diversi suoi stati.

3o. Più recentemente Tredgold ha fatte in Inghilterra altre sperienze sulla tenacità dei diversi metalli; egli però determinò non la trazione che fa rompere un filo di essi di una data

---

(1) Noterò qui che la tenacità dell'oro, e del platino sarebbero molto più grandi relativamente a quella del ferro, secondo le sperienze di Wollaston sui fili di questi metalli, cioè quella dell'oro $\frac{5}{6}$ e quella del platino $\frac{59}{60}$ della tenacità del ferro.

grossezza, ma quello al di là di cui il filo senza rompersi ancora comincia a presentare un'alterazione permanente, cioè tolto il peso non ritorna più alla prima lunghezza; e questa trazione sufficiente a produrre un allungamento che non può spingersi più oltre senza alterazione permanente si trova pei metalli duttili in generale tre, quattro, ed anche sei volte minore di quella a cui il filo si rompe. Infatti egli ha trovato che per una sezione d'un pollice quadrato inglese di ferro fuso, la forza di trazione di cui si tratta era di 15300 libbre inglesi *avoir du poids*. Riducendo il pollice inglese quadr. al millimetro quadrato, sulla base che il pollice lineare è di 25,4 millim. circa, e calcolando la libbra a chil. 0,4543 si trova che questa trazione corrisponde a quella di chil. 10,76 per un millimetro quadrato di sezione. Prendendo poi questa forza del ferro fuso per unità, quella dei diversi metalli, determinata nella stessa maniera da Tredgold, si trova quale è indicata nella prima colonna della tavola seguente; la seconda colonna esprime in chil. la forza che produce un'alterazione permanente in una spranga di un millimetro quadrato di sezione.

Ferro fuso	1,000	10,76 chil.
Ferro malleabile . .	1,120	12,05
Metallo dei cannoni .	0,650	6,99
Ottone	0,435	4,68
Zinco	0,365	3,93
Stagno fuso	0,182	1,96

L'opera di Tredgold su questo oggetto fu pubblicata in Londra in inglese nel 1824, e tradotta in francese sotto il titolo di *Essai pratique sur la force du fer de fonte, et sur celle des autres métaux*.

Posteriormente Tredgold (Trans. phil. 1824 e *Journal of science* 1825) esaminò più particolarmente l'effetto della tempra sull'acciajo per cangiare la sua tenacità, sia quanto alla forza necessaria per romperlo, sia a quella necessaria per produrvi un'alterazione stabile di forma. Egli trovò che per l'acciajo temprato al massimo grado di durezza la forza necessaria per produrre un'alterazione permanente sta a quella che cagiona la rottura come 1 : 1,66, e che nello stesso acciajo temprato men duro,

cioè al grado detto *giallo di paglia*, la prima forza sta alla seconda come 1 : 2,56; la prima forza è molto minore relativamente alla seconda nel ferro, e in generale nei metalli duttili, come si può scorgere dal confronto della tavola dei risultati di Tredgold con quella delle tenacità secondo Guyton; infatti quell' alterazione permanente è evidentemente una conseguenza della duttilità più o men grande, per cui le parti possono cangiar di posizione senza staccarsi; dee dunque richiedere una forza maggiore a misura che la duttilità è diminuita dalla tempra, e dovrebbe esser nulla, se la tempra togliesse all' acciajo ogni duttilità, ossia lo rendesse affatto fragile, poichè allora non sarebbe più esso suscettivo di alterazione di forma avanti di rompersi. Quanto al valore assoluto di queste forze, Tredgold lo calcolò, conformemente alle sue sperienze, nell'acciajo temprato durissimo, di 51000 libbre inglesi per una sezione di un pollice inglese quadrato per produrre l'alterazione permanente, e 85000 libbre per produrre la rottura; che corrisponderebbero la prima a chilog. 35,90 per una sezione d'un millimetro quadrato, e la seconda a chilogr. 59,83 per la stessa sezione; e quanto all'acciajo *giallo di paglia*, di 45000 libbre per l'alterazione permanente, e di 115000 libbre per la rottura, in una sezione d'un pollice quadrato, forze che corrispondono a chilog. 31,68, e 80,95 per una sezione d'un millimetro quadrato.

Si vede adunque che mentre la tempra rende l'acciajo più resistente ad una alterazione permanente avanti di rompersi, diminuisce la forza totale di coesione, con cui esso resiste alla rottura. Infatti l'acciajo affatto stemprato resisterebbe ancora di più alla rottura, poichè secondo un risultato di Rennie (Phil. Trans. 1818) la forza necessaria per romperlo è di 133000 libbre per pollice quadrato inglese, ossia ch. 93,62 per una sezione d'un millimetro quadrato. Questa è una conseguenza di quella sforzata posizione o tensione delle molecole, prodotta dalla tempra, e di cui sopra abbiamo parlato; secondo Muskembroeck però, come si è veduto nella tavola delle sue sperienze, questo indebolimento di coesione non sarebbe prodotto nell'acciajo che dai più forti gradi di tempra.

Alcune delle sperienze di Tredgold furono fatte non immediatamente per trazione d'un filo a cui si sospendesse un peso,

ma per mezzo del peso che si richiedeva per produrre o un'alterazione permanente, o la rottura in una spranga parallelepipeda del metallo da esaminarsi, di una data lunghezza e grossezza, appoggiata colle sue estremità a sostegni immobili, facendo agire questo peso sul punto di mezzo della spranga. Egli calcolava poi il risultato di queste sperienze colla formola seguente. Sia l la metà della lunghezza della spranga, b la sua larghezza, d la sua altezza o grossezza verticale, W il peso necessario per produrre sulla spranga un' alterazione di forma permanente, o per romperla, la forza che sarebbe richiesta per produrre quell'alterazione o la frattura per mezzo della trazione sopra un filo verticale di cui la sezione sia un' unità di lunghezza quadrata, espressa questa forza nella stessa unità di peso in cui si è espresso il peso W, sarà $\frac{3lW}{bd^2}$.

In generale i corpi solidi debbono presentare maggiore o minore resistenza alla flessione o alla frattura, secondo la loro forma e la maniera con cui vi agiscono le forze esterne; questo dà luogo ad un ramo di Meccanica applicata conosciuto sotto il nome di *Teoria della resistenza de' solidi*; ma questa teoria è estranea alla fisica propriamente detta, e non abbiamo qui parlato della formola di Tredgold da essa dedotta, se non come d'un mezzo per risalire alla coesione de' corpi presa in una maniera indipendente dalla loro figura, e dal modo con cui le forze estranee vi si applicano.

31. Anche il sig. Navier si è occupato di sperienze sulla resistenza di diversi metalli, principalmente in lamine, alla rottura cagionata da una tensione longitudinale, e ne ha riferiti i risultati negli *Annales de Chimie et Physique*, *novembre* 1826. Egli ha trovato per una media la tenacità del ferro laminato, rappresentata dal peso necessario per produrne la rottura, di 36 chilogrammi; quella del rame pur laminato di 21 chilogr.; e quella del piombo (dietro a sperienze fatte sopra lamine di 2 o 3 millimetri di spessore) di 1,33 chil. per millimetro quadrato di sezione. Egli ha osservato che generalmente il ferro comincia ad allungarsi sensibilmente in una maniera permanente per forze uguali a $\frac{2}{3}$ circa di quelle che producono la rottura,

il che darebbe, secondo le sue sperienze, 24 chil. circa pel peso richiesto a produrre quest'allungamento stabile sopra un millimetro quadrato di sezione, e così circa il doppio di quello indicato da Tredgold pel ferro malleabile; ciò dipende forse dalla forma di lamina sotto cui Navier l'ha esaminato, nella quale il ferro dovea essere stato indurato dalla pressione del laminatojo. L'allungamento stabile ebbe luogo pel rame con cariche uguali alla metà di quelle che producevano la rottura, e così con 10 $\frac{1}{2}$ chilog. per sezione d'un millimetro quadrato. Pel piombo esso si operò con forze un po' maggiori della metà di quelle producenti la rottura, e così di circa $\frac{3}{4}$ di chilogr. per la sezione d'un millimetro quadrato; e questo metallo si allungava poi, e si ristringeva di molto avanti di rompersi intieramente. Navier ha anche sperimentato sulla pressione interna, che una sfera cava di ferro laminato poteva sostenere avanti di rompersi, adoprando a ciò un torchio idraulico; e calcolando, secondo i principii della meccanica, la forza di trazione che da quella pressione ne dovea risultare per ogni verso, tangenzialmente alla superficie della sfera, ne conchiuse che la rottura vi avea luogo a un dipresso per una trazione per ogni verso uguale a quella che avrebbe rotta la lamina traendola solo longitudinalmente.

32. Quanto alla tenacità del ferro meritano ancora particolar menzione le ricerche fatte da Lagerhielm, insieme con quelle relative alla forza elastica di questo metallo, e di cui si parlerà in appresso, per commissione della Società metallurgica di Stoccolma, descritte in un'opera pubblicata a Stoccolma nel 1827, e di cui si trovano estratti in diversi giornali. Egli ha trovato che la trazione necessaria per produrre un allungamento stabile nel ferro, il grado d'allungamento che esso subisce partendo da questo limite avanti di rompersi, e la forza richiesta per operarne l'intiera rottura variano molto, com'è naturale, secondo la qualità del ferro, e particolarmente secondo che il ferro è più o meno indurato da precedente compressione o battitura; ma egli ha fatto quest'osservazione particolare, che l'allungamento stabile che la verga di ferro può prendere avanti di rompersi è in ragion inversa, secondo le sue sperienze, del

quadrato della forza richiesta per produrre un cominciamento di allungamento stabile; cioè che si accresce questo allungamento a misura che è minore la forza richiesta per produrlo (il che è una conseguenza naturale della maggior mollezza del ferro indicata da questa minor resistenza all'allungamento) e ciò non in ragion semplice, ma in ragion del quadrato di questa quantità, il che non si sarebbe preveduto *a priori*. Egli ha inoltre osservato nella rottura d'una verga di ferro un cangiamento notabile nella densità o peso specifico del ferro; cioè egli trovò che il peso specifico nel luogo in cui la verga si è rotta, e in cui per conseguenza essa ha subita la massima estensione, era minore che negli altri luoghi. Per una media tra diverse sperienze il peso specifico era nel ferro non esteso uguale a 7,821, e nei capi in cui si era fatta la rottura 7,777, il che forma una diminuzione di circa $\frac{1}{200}$ ossia 0,005. Questo pare essere una conseguenza di che, come il sig. Poisson ha dimostrato col calcolo, e secondo che vedremo qui appresso, la trazione d'una verga metallica nel limite stesso della elasticità perfetta, ossia avanti la produzione d' un allungamento stabile dee cagionare accrescimento di volume, la dimensione in lunghezza accrescendosi in maggior proporzione di quello che la sezion trasversale si diminuisca. Questa stessa circostanza si estende probabilmente anche al caso dell'allungamento stabile. Osserverò però che ciò non è contrario a quello che abbiamo detto della maggior durezza che i metalli duttili acquistano colla trazione alla filiera, non altrimenti che con altra compressione qualunque; poichè può concepirsi che il metallo nel luogo vicino alla frattura si trovi in uno stato affatto particolare, per cui le particelle situate in ciascuna sezione trasversale sono realmente ravvicinate, sebbene nella direzione della lunghezza esse siano più distanti che nello stato naturale, onde la densità media venga ad essere minore. Lagerhielm ha osservato che questa diminuzione di densità è alquanto più grande nel ferro molle che nel ferro indurato e crudo; egli la calcola a 0,00668 nel primo e a 0,00451 nel secondo..

33. Il signor Baudrimont nella già citata Memoria (*Annales de Chimie et de Physique, septembre* 1835) ha anche dati i

risultati delle sue sperienze sulla tenacità dei diversi metalli; egli ha trovato che i fili ricotti hanno minore tenacità che gli stessi fili dotati della rigidità che la filiera loro avea compartita. Così un filo di ferro che sosteneva 12 chilogr. di peso avanti di rompersi nello stato di rigidità, non ne sosteneva più che 5 chilogr. dopo essere stato ricotto. Un filo di rame che sosteneva 10 chil. nel primo stato, non ne sosteneva parimenti più che 5 nel secondo. La tenacità dell'oro pare diminuirsi ancora di più dalla ricottura. Questa è una conseguenza necessaria della maggior duttilità dei metalli ricotti, per cui cominciano a cangiar stabilmente di forma per una forza minore, e così diminuendosi di grossezza per la trazione medesima, si rompono poi facilmente per un piccolo aumento di forza di trazione. L'ottone, secondo le sperienze di Baudrimont è notabilmente più tenace del rame puro, e tiene il mezzo a questo riguardo tra il rame e il ferro.

Il signor Baudrimont ha determinata nella stessa Memoria la tenacità del metallo conosciuto sotto il nome di cadmio, il che non era ancora stato fatto; il risultato della sua sperienza fatta sopra un filo tratto alla filiera di 1,88 millim. di diametro darebbe 6,52 chilogr. per una sezione di un millimetro quadrato.

Pei fili di stagno o di piombo tratti alla filiera, i risultati di Baudrimont corrispondono ad una tenacità di chilogr. 2,55 pel primo di questi metalli, e 2,33 pel secondo, relativamente alla sezione d'un millimetro quadrato, presa nello stato primitivo del filo, il che sarebbe notabilmente meno di quello che ha trovato Guyton de Morveau.

34. La diversa forza assoluta assegnata ad alcuni metalli, e particolarmente al ferro da diversi sperimentatori, dee in parte attribuirsi, oltre alle diverse qualità dei metalli adoperati, alla diversa grossezza dei fili su cui le sperienze furono fatte, sia perchè i fili più piccoli sono maggiormente condensati ed indurati in tutta la loro sezione trasversale, come sovra abbiamo osservato, sia perchè l'allungamento stabile prodotto dalla trazione avanti la rottura può avere un' influenza diversa per determinare quindi la rottura nei fili di diversa grossezza. Infatti, secondo le sperienze di Séguin, pubblicate negli *Annales de Chimie et de Physique, janvier* 1824, la tenacità dei fili e spranghe

di ferro si è trovata tanto più grande, riferita a ciascun millimetro quadr. della sezione, quanto più questa sezione era piccola. Nei più piccoli fili, cioè di meno d'un mezzo millimetro quadrato di sezione, questa tenacità era per una media di circa 85 chil. per millimetro quadrato, e trovo, dietro alle altre sue sperienze che questa tenacità avrebbe diminuito d' un chilogramma per ciascun millimetro quadrato di aumento della sezione, cosicchè per una sezione di 25 millimetri quadrati, essa non sarebbe più che di circa $85 - 24{,}5 = 60^{ch},5$ per millimetro quadrato. Questa però non può essere che un'approssimazione applicabile solo sino ad un certo limite, la tenacità non diminuendo più sensibilmente quando il filo o spranga è giunta ad una certa grossezza; questo limite può fissarsi a circa 40 millimetri quadrati di sezione, in cui, secondo la nostra regola, si avrebbe 45 chilogrammi per la tenacità media del ferro per ciascun millimetro quadrato. Dufour ha trovati risultati analoghi per mezzo delle sue sperienze riferite nel 2.° vol. degli Atti della Società di Ginevra e nella *Bibliothèque Univers.*, *août* 1823.

35. I risultati che fin qui abbiamo arrecati riguardano principalmente la tenacità dei metalli; sperienze analoghe furono pur fatte da Tredgold, Bevan e da altri sulla tenacità di alcune pietre, legni, ed altre sostanze impiegate nelle costruzioni e nelle arti, che possono riguardarsi come sprovviste di duttilità, e che non sono in generale d' una tessitura abbastanza omogenea per interessare a questo riguardo la fisica propriamente detta. Riferiremo qui tuttavia, per servir di paragone tra queste classi di corpi duttili e fragili, i risultat che si hanno sulla tenacità del vetro. Quella che Eytelwein (*Handbuch der statick d. fest. Körp.*) gli attribuisce è tale che esso si rompe quando è teso secondo la sua lunghezza da un peso uguale alla pressione di 180 atmosfere sulla sua sezione trasversale. Questa pressione equivale a quella di 136800 millimetri di mercurio sulla stessa sezione; se dunque questa sezione è d'un millimetro quadrato, il peso di cui si tratta sarà quello di 136800 millimetri cubi di mercurio, che equivale a un dipresso a quello di $1^{kil},8$ d'acqua ossia a $1^{ch},8$.

Navier però all'occasione delle surriferite sperienze sulla tenacità dei metalli avendo anche esaminata quella del vetro in

tubi e in cilindri pieni, la trovò, per una media, di 2 $\frac{1}{2}$ chilogr. per millimetro quadrato di sezione. Questa forza del vetro non è dunque che di 2 o 3 chilogrammi, mentre quella del ferro, sotto la stessa sezione, è per lo meno, come abbiamo veduto, di 30 chilogrammi, e sarebbe forse ancor maggiore se non avesse il ferro alcuna duttilità, per cui cominciasse ad allungarsi avanti di rompersi intieramente. Nel vetro, secondo le sperienze del signor Ritchie sulla torsione de' fili di vetro, di cui parleremo in appresso, pare essere sensibilmente nulla la duttilità, cioè tornare esso alla prima figura qualunque sia la flessione che ha subita, sino al limite in cui si rompe.

La tenacità del marmo bianco, per dare un esempio anche della tenacità delle pietre, è, secondo Tredgold, di 1811 libbre per pollice quadrato inglese di sezione, che corrisponde a $1^{ch},27$ per millimetro quadrato di sezione, e così un poco minore di quella che abbiamo indicata pel vetro, secondo Eytelwein.

Aggiungerò ancora per dare un'idea del grado di tenacità del ferro e di altri metalli comparativamente a quella di sostanze usuali, che secondo Tredgold una corda di canapa d'un pollice inglese di circonferenza non dee caricarsi d'un peso maggiore di 200 libbre inglesi, per non rischiar di danneggiarla. Questo corrisponde a meno di 2 chilogrammi per millimetro quadrato di sezione, mentre si è veduto che un filo di ferro fuso di questa sezione di un millimetro quadrato può caricarsi almeno di 10 chilogrammi senza alterazione permanente, e un filo di ferro lavorato ne può portare ancor di più.

36. Noterò qui che in vece che abbiamo espresse in generale le tenacità assolute dei diversi corpi per mezzo del peso, sotto alla trazione del quale un filo o spranga di data sezione trasversale si rompe, si potrebbe anche esprimere questa tenacità in una maniera indipendente dalla considerazione delle sezioni del filo, indicando l'altezza d'una colonna d'un dato liquido di cui la pressione è equivalente alla forza di tensione che produce la rottura sopra una sezione qualunque. Se per esempio per questo liquido si prende l'acqua al massimo di densità, una tenacità espressa da un chilogramma per sezione d'un millimetro quadrato sarà rappresentata da una colonna d'un milione di milli-

metri cubi di volume, e così d'un milione di millimetri lineari, ossia di mille metri d'altezza; e quest'altezza resterà la medesima qualunque sia la sezione, onde la pressione equivalente ad una trazione di un numero qualunque di chilogrammi sopra un millimetro quadrato di sezione sarà quella dello stesso numero di chilometri d'altezza d'acqua sopra una sezione qualunque. Se si divide quest'espressione per 13,6 si avrà a un dipresso il suo equivalente in colonna di mercurio. Quest'ultima espressione, in cui siasi preso il metro per unità, si potrà anche ridurre in *atmosfere*, cioè in moltipli della pressione esercitata dall'atmosfera alla superficie della terra, dividendola per $0^{m},76$ che è il valore di questa pressione atmosferica in colonna di mercurio.

I fisici Inglesi si sono soventi serviti d'un'altra maniera ancora di esprimere la forza rappresentante la resistenza dei corpi a rompersi per trazione, indicando cioè la lunghezza d'una verga cilindrica o prismatica del corpo stesso che si considera, la quale esercitando col suo peso la trazione sopra quella stessa verga ne cagionerebbe la rottura; questa lunghezza fu da loro chiamata il *modulo della tenacità o coesione* del corpo a cui si riferisce. Ma una tale maniera di rappresentare la tenacità dei corpi è poco propria a dare immediatamente la misura di questa tenacità, poichè vi si fa entrare un elemento estraneo alla tenacità medesima, qual è quello della densità delle sostanze, e che varia per ciascuna di esse. Si può del resto facilmente ridurre questo *modulo* alla pressione d'una colonna d'acqua a cui equivale la forza di trazione che produce la rottura, moltiplicandolo per la densità di ciascuna sostanza, avente per unità quella dell'acqua, d'onde poi si potrà passare alle altre diverse maniere di esprimerla sovra indicate.

37. Debbo qui far menzione ancora, riguardo all'effetto della forza di trazione sui fili metallici, d'un lavoro contenuto in un'opera del signor Gerstner, pubblicata recentemente dal suo figlio in tedesco sotto il titolo di *Handbuch der mechanick*, e di cui si trova un estratto negli *Annalen der Physik* di Poggendorff, n.° 10 del 1832; parrebbe risultare dalle sperienze che egli riferisce, e che furono fatte su fili di ferro, che l'estensione stabile che precede la rottura del filo, non ha luogo soltanto, come fin qui si è creduto, quando la forza di trazione

è giunta ad un certo grado, che ha un rapporto determinato colla forza richiesta per produrre la rottura, ma comincia fin dalle più piccole trazioni, cosicchè l'allungamento qualunque prodotto da una data trazione sarebbe sempre composto di due parti, l'una che scompare quando si scarica di nuovo il filo di ferro dalla forza che ha prodotto l'allungamento, l'altro che è permanente, e per cui il filo dopo essere sottratto alla trazione si trova essersi più o meno allungato, secondochè maggiore o minore fu la trazione a cui è stato sottoposto. Se si carica di nuovo il filo, ma d'un peso minore di quello di cui esso è già stato prima caricato, non si produce più relativamente alla lunghezza attuale del filo scaricato, secondo le sperienze di Gerstener che, un allungamento transitorio, cioè che si distrugge scaricando di nuovo il filo, cosicchè questo ritorna alla lunghezza che avea avanti questa seconda trazione, in virtù della sua elasticità, conformemente a quello che, come vedremo in appresso, generalmente si crede aver luogo al di qua di un certo limite di trazione, e questo allungamento instabile è, come vedremo pure ammettersi, sensibilmente proporzionale alla forza di trazione; ma se si carica il filo d'un peso maggiore di quello di cui prima si era caricato, si produce di nuovo un allungamento stabile, che concorre coll' allungamento transitorio alla formazione dell'allungamento totale come prima. L'allungamento totale non è quindi esso medesimo proporzionale in alcun caso alla trazione, quando si riferisce alla lunghezza primitiva, poichè è formato da una parte proporzionale alla trazione, che è l'allungamento transitorio riferito alla lunghezza stabile del filo corrispondente a questa trazione, e di una parte che non lo è, e che altera questa proporzione, cioè quella parte che forma l' allungamento stabile medesimo. Secondo la formola empirica che Gerstner deduce dalle sue sperienze, chiamando e l'estensione o allungamento totale del filo, si ha per l'espressione della forza di trazione p necessaria per produrlo, $p = Ae - Be^2$, A e B essendo coefficienti da determinarsi colla sperienza, secondo la qualità del filo. Secondo quest'espressione p ha un *massimo* che corrisponde, come è facile di vedere, secondo la nota regola data del calcolo differenziale, ad $e = \frac{A}{2B}$, e che è esso medesimo uguale ad $\frac{A^2}{4B}$; quando l'e-

stensione è giunta a questo punto, l' equilibrio non può più aver luogo, poichè allora se si aumenta l'estensione si richiederebbe per l'equilibrio che la trazione p divenisse minore; si dee dunque allora rompere il filo, secondo la maniera teorica con cui Gerstner lo concepisce. Se si chiama E il massimo di e, cioè si faccia $E=\frac{A}{2B}$, e P il massimo valore di p, cioè si faccia $P=\frac{A^2}{4B}=\frac{A}{2}.E$, e s'introducano questi valori nell'espressione generale di p, se ne ottiene

$$\frac{p}{P}=\frac{e}{E}\left(2-\frac{e}{E}\right)=\frac{2e}{E}-\frac{e^2}{E^2},$$

espressione che rovesciata ci dà per e in funzione di $\frac{p}{P}$

$$e=E\left\{1-\sqrt{1-\frac{p}{P}}\right\} \text{ ossia } \frac{e}{E}=1-\sqrt{1-\frac{p}{P}}.$$

Osserverò qui che ammettendo questa relazione tra la tensione p e l'allungamento totale e, e ritenendo per altra parte il principio che l'allungamento transitorio riferito alla lunghezza attuale permanente del filo sia proporzionale alla tensione p, ne segue che l'allungamento permanente riferito alla lunghezza primitiva dee supporsi a un dipresso proporzionale al quadrato dell'allungamento totale prodotto dalla stessa tensione. Infatti se si prende per unità la lunghezza primitiva, e si chiami e l'allungamento totale in quest'unità come sopra, ed e' l'allungamento permanente che gli corrisponde nella stessa unità, l'allungamento transitorio riferito alla lunghezza attuale prodotta dall'allungamento permanente, e a cui la tensione è, per ipotesi, poporzionale, sarà $\frac{e-e'}{1+e}$. Si avrà dunque $p=A'.\frac{e-e'}{1+e}$, A' essendo un coefficiente costante. Ma per altra parte si ha $p=Ae-Be^2$; dunque $Ae-Be^2=A'\frac{e-e'}{1+e}$; ora e essendo una piccola quantità relativamente all'unità, si potrà scrivere, nel secondo membro, sol-

tanto $A'(e-e')$ senza cangiar notabilmente questa relazione ; si avrà dunque

$$Ae-Be^2=A'(e-e') \text{ ossia } (A-A')e-Be^2=-A'e'.$$

Ma A' non può essere che poco diverso da A, poichè $e-e'$ è poco diverso da e, e il termine Be^2 è anche piccolo relativamente ad Ae, poichè p non si scosta molto dalla proporzionalità ad e che sarebbe espressa da $p=Ae$; $A-A'$ è dunque una piccola quantità, cosicchè il termine $(A-A')e$ si può sopprimere nella relazione di cui si tratta; essa si riduce così a $-Be^2=-A'e'$, d'onde $e'=\frac{B}{A'}.e^2$ cioè e' proporzionale, come si è detto, al quadrato di e; e perciò anche prossimamente al quadrato della tensione, poichè la legge di questa tensione relativamente all'allungamento totale non differisce ella stessa di molto dalla proporzionalità a quest'allungamento totale.

Nei fili di ferro sottoposti da Gerstner alle sue sperienze, la rottura dovea farsi per un allungamento totale di $\frac{1}{85}$ della lunghezza del filo. L'allungamento stabile, a questo stesso limite, calcolato secondo le sue formole, dovea essere di circa la metà soltanto di questa quantità. Se si suppone prossimamente $e'=\frac{B}{A'}.e^2$, e si determina il coefficiente $\frac{B}{A'}$ secondo questa condizione, si ha $\frac{B}{A'}=\frac{e'}{e^2}=\frac{(85)^2}{2.85}=\frac{85}{2}=42,5$; cioè si sarebbe in generale avuto ne' fili di Gerstner $e'=42,5.e^2$. Così in uno dei risultati di Gerstner l'allungamento totale essendo di 0,0044 circa del filo, l'allungamento stabile fu di circa 0,00085. Ora il quadrato di 0,0044 è a un dipresso 0,000019: la nostra espressione darebbe quindi $e'=42,5.0,000019=0,00081$ circa, numero poco diverso. Secondo questa legge gli allungamenti stabili debbono essere nelle prime tensioni affatto piccoli, e non divenire alquanto sensibili, se non nelle tensioni prossime a quelle che producono la rottura. Così, per esempio, se si suppone il filo sottoposto ad una tensione atta a produrre soltanto la decima parte dell'allungamento totale a cui ha luogo la rot-

tura, cioè un allungamento di $\frac{1}{850}$, ossia circa 0,0012 della lunghezza primitiva, si avrà nel filo di Gerstner $e' = 42{,}5 . \frac{1}{(850)^2}$ $= \frac{42{,}5}{722500} = 0{,}00006$ circa della lunghezza primitiva. Questa piccolezza dell'allungamento permanente nelle tensioni ancora rimote dalla tensione che produce la rottura, spiegherebbe perchè si sia generalmente considerato dai fisici come nullo questo allungamento sino ad una certa tensione, e così si siano riguardati que' primi allungamenti come proporzionali alla tensione, e non permanenti; tuttavia siccome le sperienze accurate di molti fisici avevano stabilita questa proporzionalità, come vedremo in appresso, le sperienze di Gerstner dovrebbero essere confermate da più esatte osservazioni, prima di ammetterne i risultati. Altronde poichè, secondo le sperienze stesse di Gerstner, l'allungamento è proporzionale alla tensione ogni qual volta questa è inferiore a quella a cui il ferro fu prima sottoposto, ne segue che questo almeno in un certo stato presenta una tal proporzionalità, e in questo stato, prodotto da una tensione sofferta nel trarre i fili stessi alla filiera, potevano essere i fili adoperati dai fisici nelle indicate sperienze.

Debbo aggiungere che i risultati di Gerstner a questo riguardo pajono confermati da sperienze di Savart sulla torsione de' fili metallici di cui parleremo in appresso, e che secondo alcune sperienze del signor Vicat (*Annales de Chimie et de Physique*, *septembre* 1833) quando la tensione d'un filo di ferro, per esempio, è giunta a un certo punto in cui non è ancora che la terza o quarta parte di quella che altererebbe stabilmente il filo immediatamente, essa può tuttavia produrre un allungamento permanente, se si lascia agire sul filo per lungo tempo, questo allungamento accrescendosi proporzionalmente al tempo per cui dura la tensione, cosicchè forse per una durata sufficiente il filo finirebbe per rompersi anche a simili tensioni. Del resto sia che questa combinazione dell'allungamento permanente coll'allungamento transitorio cominci fin da principio della tensione, come Gerstner ha creduto osservarlo ne' suoi fili nel loro primitivo stato, o solo da un certo punto della medesima, come ciò avrebbe

luogo generalmente ne' fili metallici, secondo le sperienze della maggior parte de' fisici, e ne'fili già stati sottoposti ad una trazione superiore a quella a cui nuovamente si espongono, secondo quelle di Gerstner, la legge risultante da questa combinazione, la quale certamente ha luogo avanti la rottura de' fili, può infatti esser quella che determina finalmente la rottura quando la forza di trazione è giunta al massimo che essa dee presentare relativamente all' allungamento, conformemente all' idea di Gerstner; ma non bisogna credere che questa legge esprima la forza attrattiva relativamente alla distanza delle molecole, l'allungamento del filo risultando dalla complicazione dello scostamento delle molecole nella direzione longitudinale, del ravvicinamento delle medesime parallelamente alla sezione del filo, e della diminuzione del diametro di questa.

38. Aggiungerò qui relativamente alla tenacità dei metalli, che essa non varia sensibilmente per le variazioni di temperatura ordinaria dell'atmosfera, anzi nemmeno in tutto l'intervallo di temperatura da più gradi sotto allo zero del termometro sino alla temperatura dell' acqua bollente. Almeno ciò risulta pel ferro da sperienze del signor Dufour, riferite in una Memoria letta alla Società di Ginevra, e di cui si trova un estratto nella *Bibliothèque universelle*, *mars* 1823. In queste sperienze egli non ha trovato differenza notabile e costante nel peso necessario per rompere per trazione un filo di ferro di grossezza determinata, sia che lo circondasse d'un miscuglio frigorifico, che ne abbassava la temperatura sino a circa 20° *C* sotto allo zero, o d'acqua bollente contenuta in un vaso che il filo attraversava.

39. La tenacità de' metalli combinata colla facilità più o men grande, con cui le loro molecole possono cangiare stabilmente di posizione, modifica in diverse maniere l' idea della loro duttilità, quale l'abbiamo esposta nel Capo precedente. Vale a dire il grado di duttilità ne' diversi metalli, può prendersi in significazione diversa, secondo la maniera con cui si cerca di determinarlo, e su cui la tenacità influisce più o meno. Infatti la duttilità può considerarsi: 1.° come in ragione inversa della forza necessaria per fare scorrere le particelle le une sulle altre e cangiare così la loro posizione, e quindi la figura del corpo

in una maniera stabile. In questo senso la duttilità è la stessa proprietà, che nei corpi in cui essa è in più alto grado che nei metalli, prende il nome di mollezza, e ha per limite la fluidità perfetta in cui le molecole scorrono liberamente l'una sull'altra senza che si richiegga perciò altra forza che il peso delle particelle stesse. Si potrebbe cercar di determinare il grado di questa qualità ne' diversi metalli per mezzo della forza che si richiederebbe per trarne alla filiera de' fili d'una data grossezza, ma tra limiti tali da non rompersi per l'effetto della trazione medesima. In questo senso si troverebbe che lo stagno, per esempio, è uno dei più duttili tra i metalli ordinarii, poichè per esso si richiederebbe la minor forza per farlo passare nella filiera. 2.° Come relativa alla tenuità maggiore o minore dei fili a cui un metallo può ridursi colla trazione alla filiera. In tal caso la duttilità risulterebbe dalle due considerazioni della mollezza, e della tenacità, poichè un metallo per cui si richiegga maggior forza a farne scorrere le parti potrà tuttavia ridursi in fili più minuti senza rompersi, se la sua tenacità essendo più grande, la forza richiesta per far passare il filo alla filiera si trovi ancora inferiore a quella a cui il filo si rompe per la sua tenuità. In questo senso lo stagno, e il ferro presentano una duttilità poco diversa, perchè nel ferro la maggior tenacità compensa a un dipresso la maggior resistenza al cangiamento di figura, e l'oro sotto questo aspetto è riguardato come il più duttile de' metalli, perchè con una mediocre durezza riunisce una sufficiente tenacità per trarne fili sottilissimi 3.° Finalmente può farsi entrare in considerazione anche la proprietà per cui un metallo s'indura più o meno per la compressione, e la battitura, essendo in questo senso a parità delle altre considerazioni più duttile quel metallo che può estendersi di più senza acquistare quella rigidezza per cui cessa di estendersi.

Del resto possono adoperarsi per determinare queste diverse proprietà, oltre il procedimento della filiera per trar fili di diversa grossezza, anche il martello, o la compressione qualunque, come nelle arti in cui si conformano le lamine dei metalli in diversa maniera col batterle, o in quella del battiloro, per cui i metalli si riducono a foglie d'una grande sottigliezza; come anche la torsione, cioè osservando di quanto un filo di

determinata grossezza possa torcersi senza alterazione permanente o senza rottura ecc. Ma non si hanno ancora esperienze abbastanza precise per determinare separatamente il grado di ciascuna delle suddette proprietà pei diversi metalli. Ne vedremo però ancora alcuna cosa nel capo seguente.

4o. Quanto alla durezza propriamente detta o coesione delle molecole ne' corpi qualunque, il mezzo più usitato e forse il meno inesatto per giudicarne, sebbene non possa darci che un'idea dell'ordine che essi seguono a questo riguardo, e non una misura precisa del grado di questa qualità che essi posseggono, è di stimar più duro d'un altro quello che essendo conformato in punta, o tagliato ad angolo assai vivo, può intaccare la superficie di quest' ultimo e farvi una riga o leggier solco, mentre al contrario non potrà esso medesimo essere intaccato o scalfito da questo nelle medesime circostanze. Per questa ragione, per esempio, il diamante è riputato il più duro di tutti i corpi conosciuti, non essendovene alcuno che possa intaccarlo, cosicchè bisogna ricorrere alla polvere di diamante stesso, per lavorarlo e pulirlo sulla mola del lapidario. Così anche le pietre selciose sono più dure che l'acciajo temprato, poichè con esso scintillano, vale a dire ne raschiano delle particelle, che per la violenza dell'urto s'accendono. Il vetro, secondo questo mezzo d'esperienza, sarebbe più duro del ferro e dell' acciajo non temprato, o che non è all'ultimo grado di tempra, poichè facilmente si scalfisce la superficie del ferro con un pezzo di vetro, non così quella del vetro con una punta di ferro ecc. I mineralogisti si sono molto occupati di quest' ordine della durezza de' diversi minerali che loro fornisce uno de' caratteri importanti per la loro classificazione, ed hanno anche cercato di stabilirne diversi gradi. Ma questi gradi hanno sempre molto dell' arbitrario, poichè, come già si è detto, il mezzo impiegato non è atto a determinarli. Forse anche i corpi duttili non possono paragonarsi esattamente in questo modo coi corpi fragili; infatti si è veduto che il vetro il quale, secondo questo metodo di giudicare della durezza, sarebbe più duro del ferro e dell'acciajo non temprato, offre però molto minore resistenza alla separazione delle sue parti per trazione. L'attitudine che ha un corpo fragile a scalfire la superficie d' un corpo duttile non dipende

probabilmente che dall'acutezza degli angoli e degli spigoli che il corpo fragile conserva nella pressione, mentre la punta di un corpo duttile si rintuzza senza rompersi quando si fa agire sopra un corpo di cui le parti possono avere altronde minor aderenza tra loro, che quelle del corpo duttile.

Ecco quanto ai corpi fragili, quali sono la maggior parte dei minerali non metallici, la scala delle durezze che Mohs, mineralogista Tedesco, ha stabilita, riferendone i gradi ad alcuni minerali conosciuti, disposti in ordine tale che ciascuno di essi è scalfito da quello che lo segue, e scalfisce quello che lo precede.

1. Varietà meno dure di talco.
2. Gesso, ossia solfato di calce naturale cristallizzato.
3. Spato calcare; carbonato di calce cristallizzato.
4. Spato fluore, ossia fluoruro di calcio.
5. Apatite, ossia fosfato di calce naturale.
6. Feldispato, e particolarmente la specie detta dai più recenti mineralogisti *ortoclaso*.
7. Quarzo, o cristallo di rocca; silicia cristallizzata.
8. Topazio, e altre pietre preziose di minore durezza delle seguenti.
9. Corindone, che comprende il rubino ed altre pietre preziose durissime formate d'alumina cristallizzata.
10. Diamante.

La durezza dei diversi minerali si suole indicare con uno di questi numeri, o quando essa è intermedia tra due dei gradi a cui si riferiscono, si esprime per mezzo dei due numeri che rappresentano i gradi più prossimi, oppure anche con una frazione decimale aggiunta ad uno di essi per approssimazione. Così, per esempio, le varietà più dure del talco sono tra 1 e 2, e se ne indicherebbe la durezza con 1,5. Queste durezze 1 e 1,5 sono pure quelle a un dipresso che si possono attribuire al ghiaccio secondo le diverse circostanze in cui si è congelata l'acqua che l'ha formato. Lo zolfo ha una durezza poco diversa da quella del gesso segnata col n.° 2. La durezza dell'acciajo temprato può collocarsi tra 5 e 6, poichè il feldispato scintilla

con esso, cioè ne stacca particelle che si accendono, il che non può fare l'apatite; la durezza 5 di quest' ultimo minerale è a un dipresso quella del vetro.

CAPO TERZO

Dell'elasticità de' corpi solidi.

§ 1.°

Considerazioni generali.

41. La proprietà de' corpi solidi che presenta al fisico un oggetto più suscettibile di misure esatte, e un campo a ricerche assai curiose sulle leggi a cui essa va soggetta, è quella che, già sopra abbiamo accennata sotto il nome di *elasticità*; cioè quella proprietà per cui le molecole d'un corpo essendo alquanto scostate dalle loro situazione naturale per una mutazione indotta da una forza esterna nella forma del corpo, vi ritornano da loro medesime restituendo il corpo alla prima figura, subito che cessa l'azione della forza esterna. Così appunto quando si piega in arco una spranga d' acciajo le molecole poste nella concavità dell' arco sono costrette ad accostarsi alquanto più che nel loro stato naturale, al contrario quelle poste nella convessità debbono necessariamente allontanarsi, e le une e le altre debbono prendere una situazione relativa diversa da quella che aveano prima. Tendendo adunque tutte a ristabilirsi nella prima posizione e distanza, esse sforzano la spranga a riprendere la figura rettilinea subito che è cessata la forza che l'avea incurvata. Nella stessa maniera un globo d'avorio essendo spinto a forza contro un piano immobile viene a prendere per un momento la forma d'un elissoide appianato, il che non può succedere senza chè le molecole poste nella direzione dell'urto, e per conseguenza dell'asse minore dell'elissoide si ravvicinino, e quelle poste nella circonferenza del circolo massimo, di cui il piano è perpendicolare a questa direzione, si allontanino, a

cagion dell' accrescimento del suo diametro ; le une e le altre tendono a riprendere la prima distanza, e così a restituire al corpo la sua figura sferica subito che la forza impulsiva rimane distrutta dalla resistenza del piano, e da quella che le molecole medesime oppongono al cangiamento di distanza. Questa forza elastica appartiene non solamente ai corpi fragili, ma anche ai corpi duttili; vi è solamente tra loro questa differenza, che se lo scostamento delle molecole dalla loro natural posizione oltrepassa un certo limite , che è diverso secondo i diversi corpi , il corpo si spezza se è affatto fragile, cioè le molecole perdono intieramente la loro adesione, invece che se il corpo è più o meno duttile le molecole prendono allora stabilmente una nuova posizione , e il corpo cangia stabilmente di figura in virtù di quelle particolari attrazioni a cui le molecole vengono a soggiacere, come sopra si è spiegato.

42. Ma la restituzione del corpo alla prima figura, ossia delle molecole alla lor posizione naturale per la forza dell'elasticità, non può farsi se non per mezzo di oscillazioni o vibrazioni per cui esse vanno alternativamente al di là e al di qua di quella posizione. Imperciocchè questa forza elastica è una forza acceleratrice che agisce continuamente sopra ciascuna molecola scostata dalla sua posizione naturale finchè essa vi sia ritornata ; essa imprime adunque a ciascuna molecola una celerità sempre crescente sino a questo punto, e allora in virtù di questa celerità acquistata essa dee necessariamente continuare a muoversi scostandosi in senso opposto da quella stessa posizione a cui prima tendeva , finchè la forza elastica che torna allora ad esercitarsi abbia distrutta a poco a poco la celerità acquistata dalla molecola, la quale ritornerà allora verso la posizione naturale , e passerà di nuovo oltre quella per la stessa ragione , e così successivamente ; cosicchè queste oscillazioni durerebbero indefinitamente , se la resistenza dell'aria che il corpo dee necessariamente colpire in quegli alternativi cangiamenti di forma, prodotti dal moto vibratorio delle molecole, e forse anche qualche resistenza che si opponga all'interno movimento stesso delle parti non diminuisse successivamente l'ampiezza di queste oscillazioni , e non distruggesse finalmente ogni moto.

Ciò posto si presentano naturalmente due specie di ricerche relativamente alla forza elastica de' corpi. L'una riguarda l' equilibrio di questa forza con una forza estranea che tènga attualmente le molecole in una situazione diversa dalla naturale; l'altra, le leggi di quel moto d'oscillazione o di vibrazione che si eccita nel corpo elastico, quando venendo a cessare l'azione della forza esterna che avea alterata la forma del corpo, epperciò la natural situazione delle sue molecole, queste tendono a ritornarvi. La prima di queste ricerche ci presenta un'applicazione dei principii della statica, la seconda di quelli della dinamica.

§ 2.°

Dell' equilibrio dell'elasticità de' corpi colle forze estranee.

43. Quanto alla prima specie di ricerche, quello che interessa particolarmente la fisica propriamente detta è il sapere quale sia l'andamento o legge che segue la forza elastica relativamente al maggiore o minore allontanamento delle molecole dalla loro naturale distanza e posizione prodotto dai cangiamenti di figura e di dimensioni del corpo, o altrimenti quale sia quella che segue la forza estranea che dee fare equilibrio a questa forza elastica. Noi non conosciamo in alcun modo *a priori*, come già abbiamo detto, la legge dell'attrazione o ripulsione che risulta dalle diverse forze attrattive, e ripulsive di cui le molecole sono animate, relativamente alla distanza, e da cui quella delle forze di cui si tratta dee necessariamente dipendere. Abbiamo però a questo riguardo, e tra certi limiti, risultati sperimentali di diversi autori, de' quali altri si riferiscono all'allungamento che soffrono i corpi elastici, tirati longitudinalmente da una forza estranea, e ad alcuni altri cangiamenti di forma, che sono con quello strettamente connessi, altri alla torsione che i cilindri o fila di diversi corpi, principalmente metallici, subiscono quando la forza estranea agisce in una direzione tangenziale alla sezione trasversale di questi cilindri. I risultati di queste sperienze hanno dato luogo a considerazioni teoriche, con cui si è cercato di

stabilire almeno per mezzo di certe ipotesi le leggi dei cangiamenti di figura e dimensione de' corpi elastici in generale, operati da forze estranee; e il sig. Poisson ha poi anche cercato di stabilire queste leggi *a priori* risalendo ai principii dell'azion molecolare in una maniera più rigorosa. Esporrò in primo luogo que' risultati delle sperienze, e quelle considerazioni con cui si è cercato di generalizzarne le leggi, e passerò quindi ad indicare i principii più rigorosi a cui il signor Poisson ha riferiti quegli stessi risultati.

ARTICOLO PRIMO

Risultati sperimentali, e considerazioni teoriche ad essi relative.

A. *Dell'allungamento o raccorciamento de' fili e spranghe, e della flessione delle lamine.*

44. Una delle principali serie di sperienze della prima delle due specie di cui abbiamo parlato è dovuta a S'gravesande, e il loro risultato generale è che l'allungamento delle fila o verghe metalliche è proporzionale all'accrescimento di tensione ossia della forza che trae queste fila o verghe longitudinalmente.

Darò qui un' idea delle sue sperienze a questo riguardo, seguendo in parte l'esposizione che ne ha fatta il sig. Biot nel suo *Traité de Physique*.

Questo fisico tendeva orizzontalmente il filo o lamina elastica di cui stringeva quindi le estremità per mezzo di due morse fisse, in guisa che la sua forma era sensibilmente rettilinea. Sospendeva quindi nel mezzo della sua lunghezza in un piattello di bilancia diversi pesi che facevano prendere al filo o lamina la forma di una linea rotta, abbassando il suo punto di mezzo d'una quantità Cc (fig. 4) che si può chiamare la *freccia* di questa linea rotta. Misurava poi questa freccia per mezzo d'un indice annesso ad una carrucola attorno a cui si avvolgeva una catenella annessa in C, e che era tesa da un piccolo peso, come si vede

nella figura, col quale artifizio si rendevano più sensibili le minime variazioni di questa quantità; ne concludeva quindi col calcolo l'allungamento della linea ACB relativamente alla linea AB, e lo paragonava coll'accrescimento di tensione del filo o lamina, che calcolava pur anche dai pesi che agivano sopra il suo punto di mezzo. Per dare un' idea della maniera di far questi calcoli entreremo in qualche particolarità sulle sperienze stesse. L' autore v' impiegò dapprima una corda metallica, di quelle che si adattano agli istromenti di musica. La lunghezza di questa corda compresa tra i due punti fissi era di 34 pollici e mezzo, e questa lunghezza pesava 24 grani. Egli diede a questa corda tre gradi di tensione diversi, che egli non misurò, ma che si possono dedurre come vedremo dalle circostanze delle sperienze stesse. Sospese quindi nel mezzo di questo filo sul piattello altronde equilibrato diversi pesi, cioè di 1, 2, 3, 4, ecc. dramme, e ciascuna volta osservava la lunghezza delle freccie. Questi pesi debbono essere aumentati dell' effetto del peso della corda stessa nella direzione verticale, e quest'effetto può considerarsi come uguale alla metà del peso totale della medesima; poichè le due metà AC, CB essendo quasi orizzontali, e ciascuna potendosi riguardare come appoggiata ai punti A, C, e B, C, ne segue che ciascun di questi punti sostiene la metà del peso di ciascuna di esse, e il punto C sostiene per conseguenza due di queste metà, e così la metà della corda intiera, ossia 12 grani, o riducendo in frazione di dramma, un quinto o 0,2 di dramma, cosicchè se P è il numero di dramme sospese al punto di mezzo della corda, il peso totale di cui questo punto sarà caricato si troverà essere $P+0,2$.

Ciò posto, vediamo in primo luogo come si può determinare la tensione che soffre ciascuna metà della corda, nella direzione longitudinale, da questo peso annesso al suo punto di mezzo, unito alla forza con cui dapprima la corda è stata tesa. Per tale oggetto osserveremo che la tensione totale delle due metà dee esser tale, che essendo scomposta secondo Cc essa sia uguale al peso $P+0,2$, poichè dee fare equilibrio a questo peso. Per eseguire questa scomposizione bisogna, secondo le regole della statica, moltiplicare questa tensione di ciascuna metà della corda, che chiameremo T, e che agisce nella direzione

AC o CB pel cosseno dell'angolo che essa forma colla direzione Cc. Questo cosseno è qui espresso da $\frac{Cc}{AC}$ oppure $\frac{Cc}{CB}$, (poichè è chiaro che Cc sarebbe il cosseno dell'angolo indicato in un circolo che avesse per raggio AC o CB), ossia da $\frac{F}{R}$, chiamando F la lunghezza della freccia Cc, e R la lunghezza di una delle metà della corda. Avremo dunque per determinar T, riunendo le tensioni delle due metà, l'equazione

$$\frac{2TF}{R}=P+0{,}2\ ,$$

d'onde si deduce

$$T=\frac{(P+0{,}2)R}{2F}\ ,$$

espressione, che sarà intieramente conosciuta quando avremo determinato R, cioè la lunghezza della metà della corda metallica prolungata dall'aumento di tensione, il che dobbiamo fare in secondo luogo.

Per questo osserveremo che chiamando $2L$ la lunghezza primitiva AB della corda o lamina, ACc, e BCc saranno triangoli rettangoli in cui si avrà l'ipotenusa R per mezzo della formola $R^2=L^2+F^2$, ossia $R=\sqrt{L^2+F^2}$. E siccome la freccia è sempre affatto piccola relativamente alla lunghezza L, possiamo sviluppare questo valore di R, dopo averlo messo sotto la forma $R=L\left(1+\frac{F^2}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, in una serie molto convergente, ordinata secondo le potenze ascendenti di $\frac{F^2}{L^2}$, applicandovi la forma del binomio; e limitandoci a due soli termini otterremo con sufficiente esattezza $R=L+\frac{F^2}{2L}$, cosicchè l'allungamento di ciascuna metà della corda o lamina è espresso sensibilmente da $\frac{F^2}{2L}$, e per conseguenza l'allungamento delle due metà ossia della

corda intiera, da $\frac{F^2}{L}$. Converrebbe ora sostituire questo valore $L+\frac{F^2}{2L}$ in vece di R nell'espressione di T sopra trovata; ma nel nostro caso si può anche senza errore notabile mettere semplicemente in quella espressione L in vece di R, cioè la lunghezza primitiva della corda in vece di quella che si trova avere dopo l'allungamento, trascurando così il termine $\frac{F^2}{2L}$, onde quella tensione diviene semplicemente $T=\frac{(P+0{,}2)L}{2F}$, o mettendo in vece di L il suo valore numerico $\frac{34{,}5}{2}$ ossia 17,25, $T=\frac{(P+0{,}2).8{,}625}{F}$. Ma l'espressione trovata di R, e quindi dell'allungamento della corda o lamina è altronde necessaria pel nostro scopo, unitamente a quella di T. Facciamone l'applicazione ad una delle sperienze di S'gravesande. Avendo data alla corda una prima tensione trovò che sospendendo al punto di mezzo della medesima un peso di 3 dramme, compreso l'effetto del peso della corda, la lunghezza della freccia era di 0,04 di pollice, e che sospendendovi un peso di 36 dr. in tutto la freccia diveniva di 0,4 di pollice. Mettendo i valori relativi alla seconda carica nelle nostre formole, in vece di $P+0{,}2$, ed F, troviamo $T=\frac{36.8{,}625}{0{,}4}=776{,}25$ dramme, ed $\frac{F^2}{L}=\frac{(0{,}4)^2}{17{,}25}=0{,}00927536$, cosicchè l'allungamento è di 0,00927536 di pollice sopra 34,5 pollici di lunghezza primitiva. Questo allungamento però è prodotto non dalla tensione intiera T, ma dall'aumento di tensione per la sospensione delle 36 dramme nel mezzo della corda, e per conoscere quale sia questo aumento bisogna cercare a determinare la tensione primitiva che il filo avea in questa sperienza, e che S'gravesande non ha misurata direttamente, e sottrarla quindi dalla tensione totale T. A tal fine ci serviremo della prima freccia 0,04 prodotta dal peso di sole tre dramme, dietro l'osservazione che S'gravesande ha fatta, che in generale quando la lunghezza

della freccia non eccedeva 0,04 di pollice, gli accrescimenti delle freccie eran proporzionali agli accrescimenti de' pesi. Segue in fatti da quest'osservazione, che la tensione non si varia, ed è sempre la medesima sensibilmente che la tensione primitiva per qualunque peso aggiunto al dissotto di questo limite, poichè risulta dall'espressione generale stessa di T sopra stabilita che questa quantità dipende dal rapporto tra i pesi, e le lunghezze della freccia, e che perciò non cangia, se i pesi, e le freccie vengono a cangiarsi proporzionalmente. La nostra espressione di T applicata al caso della prima freccia 0,04 prodotta dal peso di 3 dramme dee dunque darci sensibilmente una tensione uguale alla tension primitiva, e avremo così per questa tensione $T=\frac{3.8,625}{0,04}=646,875$ dr.; sottraendo questa tensione primitiva dalla tensione totale sopra trovata relativa alla seconda carica della corda, troviamo la differenza di dr. 129, 375 per l'aumento di tensione, che ha prodotto l'allungamento di 0,00927536 di pollice sopra la lunghezza primitiva 34, 5 poll. Avendo poi S'gravesande data una tensione più forte alla corda tra le due morse, la quale, per una sperienza ed un calcolo simile a quello che abbiamo fatto per la prima tensione, si deduce essere stata di 1380 dramme, trovò che per produrre una freccia di 0,4 di pollice, cioè uguale a quella prodotta dalla seconda carica nella prima sperienza, vi abbisognava una carica di 70 dramme nel mezzo della corda; onde si avea in questo caso per la tensione totale $T=\frac{70.8,625}{0,4}=1509,375$, e per l'aumento di tensione prodotto dalle 70 dramme, $1509,375-1380=129,375$ dr., come nella prima sperienza. In una terza sperienza in cui la tensione primitiva sempre calcolata come sopra era di 1725 dramme, trovò che per produrre ancora la stessa freccia si richiedeva un peso di 86 dramme, onde la tensione totale era $T=\frac{86.8,625}{0,4}=1854,375$, e l'aumento di tensione $1854,375-1725=129,375$, come nelle due prime sperienze. Vale a dire che tutte le tensioni iniziali hanno dovuto essere aumentate della stessa quantità per produrre una freccia di lunghezza uguale, epperciò un allungamento uguale della

corda, che in queste sperienze era sempre di poll. 0,00927536. Avendo S'gravesande provato molte altre tensioni, ne ottenne sempre lo stesso risultato.

Adoperando poi in vece della corda metallica una lamina d'acciajo, di quelle che servono a fare le molle degli orologi, della stessa lunghezza di poll. 34,5 e del peso di 67 grani, trovò ancora con esperienze e calcoli simili, che l'aumento di tensione necessario per produrre la stessa freccia di 0,4 di pollice, epperò il medesimo allungamento, era sempre lo stesso per qualunque tensione primitiva che si fosse data alla lamina, sebbene questo aumento fosse qui d'un valore diverso da quello che avea luogo per la corda metallica, cioè di circa 1380 dr., in vece di 129,375.

45. Segue adunque in generale da queste sperienze, come l'abbiamo annunziato, che « quando una corda o lamina metallica è tirata nella direzione della sua lunghezza da una forza qualunque T, se si aumenta questa forza d'una certa quantità t, il nuovo allungamento prodotto da t è sempre il medesimo, qualunque fosse quella tensione primitiva T » purchè però la forza t sia abbastanza piccola, perchè, sopprimendola, la corda o lamina ritorni esattamente alla lunghezza che avea sotto la tensione T, ossia la lunghezza della medesima non sia alterata in una maniera stabile dalla sofferta trazione.

In altri termini, secondo queste sperienze « gli accrescimenti della lunghezza della corda, o lamina metallica sono proporzionali agli accrescimenti di tensione » od anche, partendo dallo stato naturale, in cui non vi era ancora tensione « gli accrescimenti delle lunghezze della corda o lamina sono proporzionali alle tensioni a cui essa si sottopone ».

Osserverò qui che questa legge della proporzionalità che l'esperienza ci presenta prossimamente tra l' allungamento d'un filo o spranga metallica e la forza di trazione che lo produce, e che come vedremo si estende pure al raccorciamento relativamente ad una forza comprimente, si può rappresentare colla formola $\rho = (\rho) + \frac{\Pi}{K}$, (ρ) essendo la densità primitiva della sostanza, quando la pressione, o trazione è nulla, Π la pressione attuale, che prende un valor negativo quando si cangia

in trazione, ρ la densità che ha la sostanza sotto questa pressione considerando la condensazione, o la rarefazione come semplicemente lineare, cioè come prodotta dal semplice avvicinamento o scostamento degli strati trasversali nella direzione in cui la forza estranea si esercita, e K un coefficiente costante. Questa legge suppone che la differenziale della pressione è proporzionale anch'essa alla differenziale della densità; poichè differenziando la suddetta equazione, abbiamo $d\rho = \frac{d\Pi}{K}$. Ora considerando la cosa teoricamente, come osservò Laplace in una sua Memoria sulla legge della densità degli strati della terra, letta all'Accademia di Parigi, sarebbe naturale il credere che al contrario i corpi solidi resistano tanto più alla compressione, quanto più essi sono già compressi (e lo stesso si può dire della resistenza alla rarefazione per l'allungamento), cosicchè il rapporto della differenziale della pressione a quella della densità in vece di esser costante cresca colla densità medesima: la funzione più semplice che possa rappresentare questo rapporto è la prima potenza della densità moltiplicata per una costante; si potrebbe dunque supporre con Laplace, che, sebbene la vera legge della compressibilità de' solidi ci sia ignota, essa sia rappresentata per approssimazione dall'equazion differenziale

$$d\Pi = 2K\rho\, d\rho \ ,$$

che per mezzo dell'integrazione ci dà $\Pi = K\rho^2 - K(\rho)^2$, (ρ) essendo come sopra la densità naturale; ossia

$$\rho^2 = (\rho)^2 + \frac{\Pi}{K} \ ,$$

equazione secondo la quale non gli accrescimenti di densità $\rho - (\rho)$, ma quelli de' quadrati delle densità $\rho^2 - (\rho)^2$ sarebbero proporzionali alle pressioni Π. Si può però osservare, che $\frac{1}{K}$ essendo secondo la sperienza un numero generalmente assai piccolo, per le pressioni ordinarie, quest'equazione che si può mettere sotto la forma

$$\rho = \sqrt{(\rho)^2 + \frac{\Pi}{K}},$$

si confonde sensibilmente con

$$\rho = (\rho) + \frac{\Pi}{2K(\rho)},$$

che rientra nella legge indicata dalla sperienza; e vedremo in seguito che anche considerazioni più rigorose sulla natura delle forze molecolari ci conducono per approssimazione a quest' ultima legge pei piccoli allungamenti o raccorciamenti.

Ho detto che la condensazione o rarefazione non poteva supporsi aver luogo relativamente a queste leggi che nella sola dimensione secondo cui la forza estranea si esercita; questa è una conseguenza della natura de' corpi solidi, di cui le parti non possono scorrere l'una sull'altra; e se l'accorciamento o l'allungamento è accompagnato da un aumento o diminuzione della sezion trasversale, per l'imperfezione della solidità, questo è un accidente che si trascura nelle leggi indicate. Esse non riguardano dunque, per quanto appartiene al nostro presente oggetto, che la compressione, o dilatazione lineare. Se la forza si supponesse agire ugualmente in tutte le direzioni sopra una porzione per esempio sferica di un corpo solido, e queste leggi stesse avessero luogo in tutte tre le dimensioni dello spazio, se ne potrebbe dedurre geometricamente il cangiamento di volume, o quello di densità relativamente alla forza comprimente, o dilatante. Ma delle due relazioni che qui abbiamo indicate, l'una non è stata dedotta che da sperienze le quali, oltre al non estendersi che tra molto ristretti limiti in cui tutte le relazioni possibili si confondono con essa, riguardano un fenomeno complesso, poichè il filo allungato per trazione si ristringe realmente nella sua sezione, e acquista una particolare disposizione di molecole, di cui si è fatta astrazione, onde non potrebbe estendersi questa legge, almeno quanto ai valori assoluti, a ciascuna delle tre dimensioni quando la forza vi agisse ugualmente per ogni lato; e l'altra non è che affatto ipotetica, e come una delle più semplici per le pres-

sioni crescenti più rapidamente che l'avvicinamento delle molecole. Vedremo poi in appresso come le considerazioni teoriche sovra accennate, sulla natura delle forze molecolari, possano condurre a determinare per approssimazione queste relazioni nelle diverse circostanze di applicazione della pressione, o della trazione.

46. Le sperienze di S'gravesande or ora descritte potrebbero servire anche a determinare la forza elastica assoluta de'diversi metalli che vi si sono impiegati per la materia del filo o della lamina, cioè la tensione che si richiede per produrre un dato allungamento in un filo o lamina di cui sia data l'area della sezione trasversale; non avendo però questo autore indicata d'una maniera precisa la qualità e la grossezza dei fili, e delle lamine su cui ha istituite le sue sperienze, esse non potrebbero esser impiegate a questa determinazione che per mezzo di calcoli fondati sopra elementi congetturali. Ma altri autori si sono occupati di questa determinazione direttamente, con esperienze fatte a tal fine, le quali hanno altronde confermata la legge indicata dalle sperienze di S'gravesande.

Riferirò qui in primo luogo particolarmente due risultati di questo genere che pajono fondati sovra sperienze assai esatte, relativi alla forza elastica dei due metalli generalmente di maggior uso nelle arti, cioè del ferro e dell'ottone. Il primo si deduce dalle sperienze contenute in una memoria *Sopra la resistenza del ferro* del signor Dulau, di cui si trova un estratto negli *Annales de Chimie et de Physique* (ottobre 1819), ed è che una spranga o verga di ferro si allunga di una dieci-millesima parte quando si aumenta di 2 chilogrammi il peso sostenuto da un millimetro quadrato della sua sezione trasversale, senzachè la diversa qualità del ferro influisca notabilmente a tale riguardo. Questa regola si estende sino al limite in cui la tensione divien tale da allungare d'una maniera stabile la spranga o filo metallico. Lo stesso Dulau ha poi trovato che la posizione di questo limite dipendeva molto dalla diversa qualità del ferro, corrispondendo da $\frac{1}{4}$ di millimetro sino ad un millimetro intiero d'allungamento per metro, cioè da 0,00025 sino a 0,001 di allungamento prendendo per unità la lunghezza primitiva.

Questi allungamenti sono prodotti, secondo l' indicata regola, da tensioni di 5 a 20 chilogrammi per ogni millimetro quadrato di sezione trasversale, e quindi si scorge, dietro a quello che si è detto nel n.° 28, che il peso o tensione che produce quest'effetto è $\frac{1}{7}$ almeno, e $\frac{1}{3}$ al più del peso o tensione capace di rompere il filo o spranga di ferro.

Quanto all' ottone, secondo una sperienza di Borda, una spranga d'un metro di lunghezza di questo metallo si allungherebbe di 0,000000774 di metro circa per l'azione d'un peso uguale al suo. Supponendo la sezione di questa spranga d'un millimetro quadrato, questo peso sarebbe, giusta il peso specifico dell'ottone, circa 8,4 gram.; un tal peso adunque si richiederebbe per produrvi l'allungamento suddetto, il che ci dà 1085 grammi, ossia 1,085 chilogr. pel peso che si richiederebbe per un allungamento di 0,0001. Questo peso sta a quello di 2 chil. che gli corrisponde pel ferro come 1 a 1,85 circa; tale sarebbe adunque il rapporto tra la forza elastica dell'ottone, e quella del ferro.

47. Egli era da supporsi, conformemente a ciò che abbiamo detto al n.° 45, che il raccorciamento d'una spranga metallica per una pressione esercitata sopra di essa nella direzione della sua lunghezza, al dissotto del limite a cui questa pressione può cangiare stabilmente la lunghezza della spranga, dovesse seguire la stessa legge che l'allungamento prodotto dalla tensione, cioè essere proporzionale alla pressione medesima, e le sperienze di alcuni autori, e specialmente quelle del già citato sig. Dulau confermarono infatti questo risultato. Anzi si può ammettere, senza scostarsi sensibilmente dal vero, che la forza di trazione assoluta necessaria per produrre un dato allungamento sopra una spranga d'una data sostanza, e di una data sezione trasversale, è la stessa che la forza di pressione assoluta che si richiede per produrre un uguale accorciamento nella stessa spranga; cosicchè i numeri che abbiamo indicati riguardo al ferro ed all'ottone, per le forze necessarie ad allungare d'una dieci-millesima parte le spranghe di questi metalli d'un millimetro quadrato di sezione, debbono pure esprimere quelle necessarie per raccorciar le stesse spranghe d'una dieci-

millesima parte colla pressione. Infatti le particelle nello stato naturale de' corpi trovandosi in equilibrio, è naturale il supporre che si richiegga una stessa forza per cangiare d'una quantità infinitamente piccola la distanza a cui questo equilibrio ha luogo, sia in più, sia in meno. Quindi reciprocamente le sperienze fatte sul raccorciamento de' solidi per la pressione ci esprimeranno anche il loro allungamento per una forza uguale di trazione. Per esempio, secondo sperienze fatte in Inghilterra, il vetro si comprime di una millionesima parte della sua lunghezza, pel peso d'una colonna della sua stessa sostanza, e della medesima sezione trasversale, alta 10 piedi inglesi, cioè 3,048 m., il che avuto riguardo al peso specifico del vetro equivale a un peso di 7,6 grammi, ossia 0,0076 chilogr. quando la sezione è d'un millimetro quadrato, e ci dà 0,76 chilogr. pel peso che si richiederebbe secondo queste sperienze per comprimere della dieci-millesima parte una verga di vetro di un millimetro quadrato di sezione, e un ugual peso si richiederebbe, secondo quello che abbiamo detto, per allungarla di altrettanto; onde la forza elastica del vetro starebbe a quella del ferro come 0,76 a 2, ossia come 1 a 2,63 circa.

48. I fisici Inglesi si servono in generale per esprimere la forza con cui i diversi corpi resistono all'allungamento per trazione, o all'accorciamento per compressione, d'una denominazione, di cui dobbiamo qui indicare la significazione. Essi chiamano *modulo d'elasticità* d'una sostanza qualunque il peso necessario per raddoppiare per trazione la lunghezza d'una verga di quella sostanza, ossia per allungarla d'una quantità uguale alla sua lunghezza primitiva, supponendo la sezione di questa verga data, ed uguale per esempio ad un'unità di superficie; e questo peso sarebbe pur quello che si richiederebbe per ridurre a zero la lunghezza di questa verga per compressione longitudinale della medesima, nell'ipotesi che la sua resistenza all'accorciamento restasse sempre la stessa sino a questo punto, ossia che gli accorciamenti successivi fossero sempre proporzionali alle addizioni successive di peso. Chiamano poi *altezza del modulo d'elasticità* la lunghezza di una colonna o verga della sostanza medesima di cui si tratta, e della stessa sezione trasversale, che si richiederebbe per formare questo peso del modulo, altezza che diviene indipendente da questa sezione medesima.

Questa maniera di esprimere l' elasticità o rigidezza d' un corpo, ossia la sua resistenza alla trazione o alla compressione, è analoga a quella che si adopera pure dai fisici Inglesi, come abbiamo veduto, per esprimere la tenacità o coesione sotto il nome di *modulo di coesione*, se non che quanto all' elasticità conviene inchiudervi un elemento di più, che relativamente alla coesione, cioè la quantità dell' allungamento od accorciamento, che si è presa uguale, come si è detto, alla lunghezza primitiva della verga. Così per esempio, poichè secondo le sperienze di Dulau una spranga di ferro si allunga d'una dieci-millesima parte della sua lunghezza per una sezione di un millimetro quadrato, col peso di 2 chilogrammi, si richiederebbe un peso dieci mille volte maggiore, cioè di 20000 chilogr. per allungare questa spranga di una quantità uguale alla sua lunghezza primitiva; questo peso di 20000 chilogr. sarà dunque il *peso del modulo di elasticità* del ferro, quando si riferisca al millimetro quadrato preso per unità di superficie. Questo peso è quello di 20000 litri d' acqua al massimo di densità, ossia di 20000 milioni di millimetri cubi di quest'acqua; per formarlo sopra una sezione d'un millimetro quadrato si richiederebbe dunque una colonna d' acqua di 20 milioni di metri d'altezza; se questa colonna, in vece d'essere d'acqua, fosse essa medesima di ferro, di cui la densità è circa 7 $^1/_2$ volte maggiore di quella dell'acqua, dovrebbe essa avere, per produrre la stessa pressione, un'altezza 7 $^1/_2$ volte minore, cioè di circa 2600000 metri; questa sarà dunque l'*altezza del modulo d'elasticità* del ferro espressa in metri secondo le sperienze di Dulau. Tredgold però ed altri fisici Inglesi non attribuiscono al modulo d'elasticità del ferro che un'altezza un po' minore, cioè suppongono che si richiegga un po' meno di 2 chilogr. per produrre in una spranga di ferro d'un millimetro quadrato di sezione un allungamento d'una dieci-millesima parte della sua lunghezza. Riducendo per esempio alle misure metriche le indicazioni di Tredgold nel suo *Saggio pratico sulla forza del ferro*, quest'altezza del modulo d'elasticità del ferro non sarebbe che di 2300000 metri circa, e il peso necessario per allungare d'una dieci-millesima parte la verga d'un millimetro quadrato di sezione si supporrebbe così di 1 $^3/_4$ chil.

L'impiego però di questo modulo per rappresentare la forza elastica dei corpi ha lo stesso difetto, che già abbiamo annotato per l'espressione analoga relativa alla tenacità o coesione, quello di rinchiudere un elemento estraneo alla forza che si vuol misurare, cioè il peso specifico della sostanza, ed è più conveniente di attenersi all' indicazione del peso necessario per allungare una verga di data sezione, d'una frazione determinata della sua lunghezza, o se si vuole d'una quantità uguale a questa lunghezza medesima, e così per raddoppiarne la lunghezza primitiva; oppure di esprimere la forza di cui si tratta in una maniera indipendente dalla sezione, per mezzo dell'altezza di un liquido, come mercurio o acqua, ovvero pel numero di atmosfere, di cui la pressione equivale alla forza che produrrebbe quest'allungamento.

49. Riferirò qui l'elasticità dei diversi metalli quale è indicata da Tregdold nella citata opera, e da altri fisici, riducendone l'espressione al numero di chilogrammi necessario per allungare d'una dieci-millesima parte una verga di un millimetro quadrato di sezione.

Ecco in primo luogo la tavola dei risultati di Tredgold; vi ho posto allato i numeri che se ne deducono per l'elasticità dei diversi metalli prendendo per unità l'elasticità del ferro fuso.

Ferro fuso	chil.	1,293	1,00
Ferro malleabile	»	1,750	1,35
Acciajo	»	2,038	1,58
Stagno fuso	»	0,324	0,25
Metallo dei cannoni (8 di rame, 1 di stagno)	»	0,694	0,54
Ottone fuso	»	0,628	0,49
Zinco fuso	»	0,962	0,75 .

Tredgold indica così per l'acciajo un'elasticità (che è pur quella che Young gli ha attribuita) poco diversa da quella che Dulau assegna al ferro malleabile, il quale secondo Tredgold, come già si è accennato, avrebbe una forza alquanto minore. Secondo Lagerhielm però l'elasticità dell'acciajo e del ferro malleabile sarebbe la stessa. Quanto all'ottone, alla sua elasticità allo stato risultante dalla fusione, quale Tredgold l' ha trovata, aggiungerò quella che Lagerhielm ha calcolata, secondo quello che a suo luogo

indicheremo, per mezzo delle sperienze di Savart e Chladni sul tuono reso dall'ottone tirato alla filiera nelle sue vibrazioni sonore, cioè 1,026 chil., e così notabilmente superiore a quella dell'ottone fuso, e poco diversa da quella indicata da Borda.

Bevan (*Phil. Magaz. n. ser. vol.* 3) ha trovato, pel rame, e per l'oro in fili, moduli di elasticità, che danno pel peso in chilogr. necessario per produrre un allungamento di una dieci-millesima per una sezione d'un millimetro quadrato, circa 1,21 chil. pel primo, e 0,82 ch. pel secondo; la lega d'oro, e di rame adoperata nelle monete inglesi ha, secondo le sue sperienze, un'elasticità a un dipresso corrispondente per una regola d'alligazione alla proporzione in cui questi due metalli vi sono contenuti.

Tredgold ha anche esaminata l'elasticità del marmo bianco; essa è, secondo la sua indicazione, di ch. 0,177 per l'allungamento di una dieci-millesima in una sezione di un millimetro quadrato, ossia 0,13 di quella del ferro fuso.

Abbiamo già veduto che l' elasticità del vetro si è trovata espressa nella stessa maniera da ch. 0,760, che vale 0,59 dell' elasticità del ferro fuso di Tredgold; e ciò si accorda a un dipresso col risultato che Lagerhielm ha pur dedotto dalle sperienze di Chladni sul tuono reso dal vetro nelle sue vibrazioni, che ridotto in misure metriche darebbe ch. 0,723. Secondo le sperienze però di Colladon e Sturm fatte per trazione all'occasione delle loro ricerche sulla compressibilità dei liquidi, questa elasticità del vetro sarebbe un po' maggiore, cioè si richiederebbe un peso di ch. 0,94 per allungare una verga di vetro di un millimetro quadrato di sezione di una dieci-millesima; poichè a questo corrisponde la trazione uguale al peso d'una atmosfera sulla sezione della verga, che essi hanno trovato produrvi un allungamento di 11 dieci-millionesime.

Bevan (*Phil. Trans.* 1826, part. 3) ha cercato a determinare l'elasticità del ghiaccio per mezzo della flessione, che un parallelepipedo di ghiaccio intagliato nella crosta di ghiaccio sopra uno stagno d'acqua, e lasciato solo unito alla crosta per una estremità, provava da un peso posto all' altra estremità. Egli ne fissò l'altezza del modulo a 2100000 piedi inglesi, ossia 640000 metri, che calcolando il peso specifico del ghiaccio

a 0,9 di quello dell'acqua, danno una colonna corrispondente d'acqua di 576000 metri, ossia di 576 milioni di millimetri; questi per una sezione d' un millimetro quadrato formano altrettanti millimetri cubi, ossia 576 litri d'acqua, e così ch. 576 circa di peso; questo peso allungherebbe dunque una verga di ghiaccio di questa sezione di una quantità uguale alla sua lunghezza, e ch. 0,0576 od a un dipresso ch. 0,058 l'allungherebbero della dieci-millesima parte. L'elasticità del ghiaccio sarebbe quindi 0,045 circa di quella del ferro fuso.

50. Se si paragonano le forze elastiche dei diversi metalli indicate dalla tavola qui sopra colle forze necessarie per produrre un'alterazione permanente in un filo degli stessi metalli, secondo la tavola datane al num.° 30, dietro alle sperienze di Tredgold, se ne dedurrà l'allungamento che un filo di ciascun metallo può prendere avanti di subire quell'alterazione permanente. Così per esempio abbiamo veduto che il ferro fuso d'un millimetro quadrato di sezione sostiene 10,76 ch., avanti di subire quell'alterazione; dividendo questo peso per 1,293, che è quello per cui questo filo si allunga secondo Tredgold d'una dieci-millesima parte, si avrà 8,32 pel numero di dieci-millesime di cui un filo di ferro fuso si allunga avanti di presentare la suddetta alterazione, cioè quest'allungamento sarà di 0,000832 ossia di $\frac{1}{1200}$ della lunghezza primitiva. Facendo un calcolo simile per gli altri metalli contenuti nelle due tavole, si avrà per la loro estensibilità avanti di subire l' alterazione stabile della loro forma, la tavola seguente, conforme alle indicazioni di Tredgold medesimo:

Metalli	Estensibilità	
	in parti della lunghezza primitiva	*prendendo per unità quella del ferro fuso*
Ferro fuso	$\frac{1}{1200}=0,000832$	1,00
Ferro malleabile . .	$\frac{1}{1400}=0,000714$	0,86
Stagno	$\frac{1}{1600}=0,000625$	0,75
Metallo dei cannoni .	$\frac{1}{960}=0,001042$	1,25
Ottone fuso	$\frac{1}{1333}=0,000750$	0,90
Zinco fuso	$\frac{1}{2480}=0,000403$	0,50 .

Abbiamo veduto più sopra che pel marmo bianco la tenacità, cioè il peso che esso sostiene avanti di rompersi, poichè questa sostanza non è suscettibile di estensione permanente, è, secondo Tredgold, di ch. 1,27 per una sezione d'un millimetro quadrato. Poichè dunque, come abbiamo detto, secondo lo stesso Tredgold, questa sostanza si allunga d'una dieci-millesima della sua lunghezza sotto la stessa sezione per una forza di 0,177 ch., la sua estensibilità avanti di rompersi sarà di

$$\frac{1,27}{0,177\,.\,10000}=0,000717=\frac{1}{1394}\,,$$

come lo indica in fatti Tredgold.

Pel vetro, come sopra si è detto, la forza che produce un allungamento d'una dieci-millesima, per la stessa sezione suddetta del filo, è ch. 0,76, mentre la sua tenacità è di ch. 1,8; dunque la sua estensibilità sarà

$$\frac{1,8}{0,76\,.\,10000}=0,000234=\frac{1}{4273}\,.$$

Quanto all'acciajo temprato abbiamo veduto più sopra che secondo le sperienze di Tredgold la forza necessaria per produrre una alterazione permanente in un filo d'acciajo temprato durissimo, d'un millimetro quadrato di sezione, è di ch. 35,9, o in numero rotondo 36 ch. Per altra parte secondo quello che abbiamo già indicato la forza elastica dell'acciajo non si cangia per la tempra, cosicchè possiamo applicare anche all' acciajo temprato la forza elastica adottata da Tredgold conformemente a Young, per cui un filo d'acciajo della suddetta sezione si allunga d'una dieci-millesima parte per un peso di ch. 2,038, o prossimamente di 2 chilogr. Avremo dunque l' allungamento prodotto avanti la permanente alterazione, di

$$\frac{36}{2 \cdot 10000} = 0,0018 ,$$

ossia $\frac{1}{556}$ della lunghezza primitiva, cosicchè l'estensibilità di quest'acciajo durissimo sarebbe più del doppio di quella del ferro fuso, che è, come abbiamo veduto, 0,000832. Nell'acciajo temperato *giallo di paglia* la forza, che produce un'alterazione permanente per una sezione d'un millimetro quadrato, è, come abbiamo veduto, secondo le sperienze di Tredgold, di circa 32 ch.; avremo dunque per l'allungamento che precede quest'alterazione $\frac{32}{2 \cdot 10000} = 0,0016$, ossia di $\frac{1}{625}$, frazione un po' minore che per l' acciajo durissimo, ma ancora quasi doppia di quella relativa al ferro fuso. Tredgold non ha indicato il peso che produce un'alterazione permanente nell'acciajo affatto stemprato; ma paragonando l'estensibilità dell'acciajo ai due gradi indicati di tempra, si vede che la tempra tende ad aumentare l'estensibilità dell' acciajo nel senso in cui qui la prendiamo, il che è una conseguenza necessaria dell'aumentare che essa fa la forza necessaria per produrre un'alterazione permanente, lasciando all'acciajo la stessa forza elastica ossia resistenza all'allungamento, onde quell'alterazione stabile, o la rottura immediata, che finalmente ne prenderebbe il luogo per una tempra che fosse supposta togliere all'acciajo ogni duttilità, non succede che per l'applicazione d'una forza atta a pro-

durre un maggior allungamento non permanente. Del resto è probabile, dietro alla piccola differenza di forza necessaria a produrre l'alterazione permanente, e quindi di estensibilità nel senso indicato fra i due gradi di tempra di cui si è parlato, che anche l'acciajo affatto stemprato oppone una resistenza più grande all'alterazione permanente, ed ha una maggior estensibilità che il ferro sia fuso, sia malleabile.

51. Lagerhielm, nel lavoro già citato relativamente alla tenacità del ferro, si è anche occupato dell' elasticità di questo metallo, e di alcuni altri; egli ha confermato, che tutte le qualità di ferro, al di qua del limite della sua alterazione permanente hanno un'uguale elasticità, sebbene il limite di questa alterazione varii secondo la sua qualità; e che l' acciajo temprato in particolare ha la stessa elasticità, al dissotto di questo limite, che l'acciajo non temprato. Egli ha creduto osservare che l'estensione del ferro, che generalmente si considera, al di qua del suddetto limite, come proporzionale alla forza di trazione è alquanto più piccola nell'approssimarsi al limite medesimo, di quello che dovrebbe essere secondo questa proporzione, il che si può attribuire all' induramento che ne risulta nella sua sostanza. Quanto alla forza elastica assoluta del ferro, quella del ferro in verghe calcolata sui risultati di Lagerhielm, ed espressa col numero di chilogrammi di peso, per cui un filo d'un millimetro quadrato di sezione si allunga d'una diecimillesima parte, è di ch. 2,103, e così poco diversa da quella che Dulau attribuisce al ferro malleabile, in vece che Tredgold non assegna questa forza di circa 2 chilogr. che all' acciajo, e ne dà una alquanto minore, come si è veduto, al ferro malleabile. Lagerhielm ha trovato inoltre che la forza elastica del rame, rappresentata nella stessa maniera è di ch. 1,348, e così $^2/_3$ circa di quella del ferro in verghe, e poco diversa da quella che Tredgold attribuisce al ferro fuso; che quella dell' argento è 0,870 ch., e così circa $^4/_5$ soltanto di quella del ferro in verghe; e quella del piombo è 0,232 ch., cioè circa dieci volte minore di quella del ferro in verghe.

52. Le sperienze relative alla determinazione della forza elastica o rigidezza dei corpi non furono tutte fatte dai diversi autori direttamente per trazione; ma soventi per mezzo della

flessione d'una verga parallelepipeda appoggiata per le due sue estremità a sostegni fissi e caricata d'un peso nel suo mezzo. Tredgold si serve, per dedurre da questa flessione il peso del modulo d'elasticità, della formola $\frac{2l^3w}{bd^3\delta}$, nella quale l è la semilunghezza della verga tra i due appoggi, d il suo spessore verticale, b la sua larghezza, δ la flessione osservata, ossia il suo abbassamento nel punto di mezzo, e w il peso che l'ha prodotta; vedremo in appresso i principii su cui questa formola è fondata. Per dare un esempio dell'uso di questa formola l'applicheremo alle sperienze di Dulau, di cui sopra abbiamo parlato, e da cui è dedotto il risultato che abbiamo riferito sulla forza elastica del ferro. Egli avea trovato che una spranga di ferro parallelepipeda di metri 0,2 di larghezza, e m. 0,02 di spessore posata sopra due appoggi distanti tra loro 2 metri, prendeva, sotto un peso di 160 chilogr. applicato alla metà della sua lunghezza, una freccia di m. 0,01. Abbiamo dunque qui, prendendo per unità lineare il metro, e per unità di peso il chilogramma,

$$l=1\,;\quad b=0{,}2\,;\quad d=0{,}02\,;\quad w=160\,;\quad \delta=0{,}01\,.$$

Quindi il peso necessario per allungare una verga di ferro di un metro quadrato di sezione trasversale, d'una quantità uguale alla sua lunghezza primitiva, ossia il peso del modulo d'elasticità per questo caso, sarebbe espresso da

$$\frac{2.160}{0{,}2(0{,}02)^3.0{,}01}=\frac{320}{0{,}000000016}=20000000000 \text{ chilogr.};$$

il peso necessario per produrre lo stesso allungamento in una verga d'un millimetro quadrato di sezione sarà la millionesima parte di quello, cioè 20000 ch., e quello che non produrrebbe sopra la stessa verga, che un allungamento della diecimillesima parte della sua lunghezza sarà di 2 chil., come l'abbiamo sopra indicato.

53. Alcune sperienze di Pictet (*Biblioth. Britann.* mars 1816) sulla compressione longitudinale di spranghe di ferro, mentre

confermano che anche i raccorciamenti prodotti da questa pressione sono proporzionali alle forze comprimenti, come gli allungamenti lo sono alle forze di trazione, hanno fatto vedere che cessata la compressione, sebbene al di qua del limite di un'alterazione permanente, si richiede un certo tempo perchè le spranghe raccorciate ritornino affatto alla lunghezza primitiva; e lo stesso probabilmente accadrebbe nell'allungamento prodotto dalla trazione. Anche il sig. Baudrimont ha osservato che il diametro dei fili metallici tratti alla filiera, si aumentava dopo alcun tempo per la lenta restituzione delle loro molecole alla situazione da cui la compressione sofferta nella filiera le avea scostate indipendentemente da un cangiamento stabile di forma.

Ma più estese e precise a questo riguardo sono le sperienze di W. Weber pubblicate nel Giornale scientifico di Gottinga, e negli *Annali* di Poggendorff, 1835, e a cui diedero luogo le sue ricerche sull'elasticità dei fili di seta. Egli ha trovato che oltre l'allungamento prodotto istantaneamente in un filo elastico dall'applicazione d'una forza di trazione, havvi realmente un allungamento ulteriore che si aumenta, a misura che continua la trazione, prima rapidamente, poi sempre più lentamente finchè esso giunga al suo limite sensibile; e così pure quando si fa cessar la trazione, si distrugge bensì istantaneamente una porzione dell'allungamento da quella prodotto, ma un'altra porzione non ne svanisce che dopo un certo tempo, e collo stesso successivo rallentamento. E il sig. Gauss comunicò a Weber una legge che soddisfà prossimamente alle sperienze del medesimo, sul progressivo rallentamento di questa porzione di allungamento per la trazione, o di raccorciamento successivo dopo la cessazione della trazione. Questa legge consiste in che, il residuo di allungamento o raccorciamento che resta ancora a farsi, in un istante qualunque dopo quello dell'applicazione, o dell'annullamento della trazione è inversamente proporzionale al tempo che è trascorso sino a quest' istante, partendo da un altro istante, il quale dee determinarsi per ciascun filo dalla sperienza, unitamente al coefficiente di quella proporzionalità. Questa circostanza ha luogo più o meno sensibilmente nei diversi corpi elastici, ed è particolarmente molto notabile relativamente ai corpi elastici organici, come il legno, i capelli ecc.;

e ad essa si può attribuire in parte la diminuzione successiva delle vibrazioni dei corpi elastici, per esempio di quelle prodotte per torsione in un filo teso verticalmente (indipendentemente dalla resistenza che l'aria vi oppone), pel traslocamento alternativo del centro d'oscillazione che ne risulta; e dalla diversa qualità dei corpi, a tale riguardo, dipende forse la loro attitudine, più o meno grande a produrre il suono colle loro vibrazioni. Del resto questa proprietà dei corpi elastici non dee confondersi colle alterazioni permanenti che possono essere in essi prodotte da una forza sufficiente, e che, secondo le sperienze di Gerstner (n.° 37), sarebbero anche prodotte in maggior o minor grado ne' metalli da qualunque forza, a cui essi non siano stati prima sottoposti.

54. Determinata poi la legge dell'allungamento, e del raccorciamento d'un corpo elastico per la tensione, e per la pressione, od anche stabilita solo ipoteticamente questa legge o alcuna sua condizione, se ne possono dedurre matematicamente le conseguenze che ne dipendono relativamente ai cangiamenti di forma, che un corpo dee subire da forze estranee applicate al medesimo in diverse maniere.

I matematici si sono in particolare occupati della natura della curva, che un filo elastico naturalmente rettilineo dee presentare quando è piegato da forze estranee applicate alle sue estremità; hanno determinate le proprietà geometriche particolari di questa curva, che è trascendentale, e le han dato il nome di *curva elastica*. Si è anche cercato, partendo dalle stesse leggi, la maniera secondo cui una spranga rettilinea o curvilinea di corpo elastico, dee piegarsi pel proprio peso, e per una forza estranea applicata nel mezzo della sua lunghezza ecc. Queste ricerche sono curiose per le applicazioni matematiche che esse presentano, e possono esser vantaggiose all' architettura, ed alle arti; ma appunto perchè fondate sopra quelle leggi considerate come ipotetiche, cosicchè i ragionamenti non cesserebbero d' esser giusti quand' anche le leggi stesse, epperciò le lor conseguenze non avessero luogo in natura, escono dal dominio della Fisica propriamente detta, e rientrano in quello della Meccanica. Basta alla prima di queste scienze, pel suo scopo, di verificare colla sperienza quale tra

le varie leggi ipotetiche che si possono stabilire riguardo all'allungamento e al raccorciamento de' corpi elastici abbia sensibilmente luogo ne' corpi elastici della natura, in dipendenza delle forze che animano le molecole di cui sono composti, e questo appunto abbiam fatto qui sopra dietro alle sperienze di S'gravesande e di altri. Debbo però riferire almeno i risultati che si sono ottenuti con que' calcoli, relativamente alla flessione delle lamine, e verghe elastiche, coll'indicazione dei principii che si sono seguiti nell'applicazione della legge dell'elasticità dei fili per trazione alla resistenza di questi corpi a tale flessione; risultati che si sono trovati sensibilmente conformi alla sperienza, e che reciprocamente, secondo gli stessi principii, possono servire alla determinazione della resistenza dei corpi alla trazione longitudinale, come già l'abbiamo accennato (n.° 52), per mezzo di sperienze fatte sulla flessione delle verghe; tanto più che questi risultati si collegano poi anche colla teoria del moto di vibrazione delle stesse verghe, di cui dovremo parlare a suo luogo. Approfitteremo per tal oggetto principalmente dell'esposizione che il sig. Poisson fa di tali risultati, e dei calcoli su cui sono fondati nella nuova edizione del suo Trattato di Meccanica pubblicata nel 1833.

55. Si chiama *lamina elastica* un parallelepipedo rettangolo di un piccolo spessore che si curva nella sua lunghezza, cosicchè il suo volume si trova compreso tra due superficie cilindriche, di cui gli spigoli, ossia linee generatrici, sono uguali alla sua larghezza. Questa dimensione può avere una grandezza qualunque; dividendola per mezzo di piani molto approssimati e perpendicolari alla sua direzione, la lamina sarà spartita in verghe elastiche rettangolari. Giacomo Bernoulli ha determinato il primo la figura della lamina elastica in equilibrio, per mezzo delle seguenti riflessioni.

Consideriamo una lamina elastica *incastrata* ad una delle sue estremità, cioè fermata in maniera che l'uno de' due piccoli rettangoli che la terminano perpendicolarmente alla sua lunghezza non possa prendere alcun movimento. Supponiamo che venga essa piegata nella sua lunghezza per mezzo d'una forza applicata all'altra sua estremità, e che sarà la sola che agisca sulla lamina. Perchè questa prenda una figura cilin-

drica, come or ora si è detto, converrà che essa sia terminata alla sua estremità libera da un rettangolo inflessibile, nel mezzo di cui si applicherà la forza data in un piano perpendicolare alla lunghezza della lamina. Tutte le sezioni longitudinali ossia perpendicolari a questa larghezza saranno uguali: una di esse è rappresentata nella fig. 5, e le curve AB, $A'B'$ sono le sezioni delle due superficie cilindriche della lamina, che ne formano le due faccie piane nel suo stato naturale. Si suppone che tutti i punti che appartenevano nello stato naturale ad una stessa perpendicolare a queste due faccie sono ancora situati, dopo che la lamina è stata piegata, sopra una stessa normale alle due superficie cilindriche, il che è infatti conforme a ciò che si osserva nel suo cangiamento di figura. Ne risulta che se MM' è una normale alla curva AMB, essa sarà pur anche perpendicolare ad $A'M'B'$, e conterrà così tutti i punti della lamina che erano primitivamente situati sopra una delle perpendicolari alle due sue faccie, cosicchè se la curva CND rappresenta uno dei filetti longitudinali della lamina nel suo stato naturale, questo filetto taglierà ad angolo retto in N la normale MM'. Sia m un punto della curva AMB infinitamente vicino ad M; conduciamo la normale mnm' alle tre linee AMB, CND, $A'M'B'$, che le tagli in m, n, m'; i prolungamenti di MNM' ed mnm', si incontreranno in un punto O, che sarà il centro comune di curvatura di queste tre curve nel luogo che si considera. Chiamiamo ρ il raggio di curvatura del filetto medio, cioè ugualmente lontano da AMB, e da $A'M'B'$; questo filetto è rappresentato nella figura da ab, ed il suo raggio di curvatura ρ da Op o Oq; sia σ la parte pq di questo filetto compresa tra le due normali MNM' e mnm'; u la distanza pN o qn del filetto qualunque CND al filetto medio, e σ' la lunghezza di Nn; considerando questa distanza u come positiva o come negativa secondo che CND si trova relativamente al filetto medio dalla parte della convessità AMB della lamina come nella figura, o dalla parte della sua concavità $A'M'B'$, il raggio di curvatura NO di CND sarà uguale a $\rho+u$, e le lunghezze infinitamente piccole σ' e σ saranno tra loro come $\rho+u$ e ρ, onde si avrà

$$\sigma' = \frac{\sigma(\rho + u)}{\rho} = \sigma + \frac{u\sigma}{\rho} .$$

I filetti longitudinali nell' incurvarsi avranno subite piccolissime estensioni o contrazioni diverse gli uni dagli altri, e le lunghezze σ' e σ che erano prima uguali saranno divenute disuguali. Chiamiamo γ la loro lunghezza primitiva, e facciamo

$$\sigma = \gamma(1 + \delta) , \quad \sigma' = \gamma(1 + \delta') ,$$

δ e δ' essendo piccolissime frazioni positive o negative, secondo che il filetto medio, ed il filetto CND si saranno allungati o raccorciati. La frazione $\frac{u}{\rho}$ è anche supposta piccolissima; se dunque si trascura il prodotto di δ per $\frac{u}{\rho}$ si avrà $\delta' = \delta + \frac{u}{\rho}$, poichè a ciò si ridurrà allora l'equazione

$$\sigma' = \sigma\left(1 + \frac{u}{\rho}\right) , \text{ ossia } \gamma(1 + \delta') = \gamma(1 + \delta)\left(1 + \frac{u}{\rho}\right) ,$$

o semplicemente

$$1 + \delta' = (1 + \delta)\left(1 + \frac{u}{\rho}\right) ;$$

il che mostra che quando il filetto medio non avrà cangiato di lunghezza, cioè quando si avrà $\delta = 0$, i filetti situati dalla parte della convessità saranno tutti allungati, e i filetti situati dalla parte della concavità, per cui u e per conseguenza $\frac{u}{\rho}$ è quantità negativa, si saranno tutti raccorciati, gli uni e gli altri proporzionalmente alla loro distanza u dal filetto medio. Ciò posto rendiamo invariabile la forma di ciascuna delle due parti della lamina che corrispondono ad $AMM'A'$ e $Bmm'B'$, e che chiameremo per abbreviare H e K, cioè consideriamo queste due parti nella loro forma attuale in istato d'equilibrio, come corpi per mezzo di cui le forze esterne si esercitano sulle forze molecolari, che le sollecitano l' una relativamente

all'altra nel luogo della loro congiunzione. La parte II sarà immobile, come ritenuta dall' incastramento in AA'; la parte K sarà tirata verso H, o ne sarà respinta dalla tendenza della parte intermedia $Mmm'M'$ a riprendere il suo stato naturale e a ridivenire uno strato di spessore costante γ. Il filetto qualunque Nn di questo strato tenderà a contrarsi o a dilatarsi, secondo che sarà stato allungato o raccorciato, cioè secondo che la quantità δ' sarà positiva o negativa; la parte K sarà dunque tirata nel primo caso, e spinta nel secondo, nel luogo di questo filetto, da una forza applicata al punto n. Si suppone che questa forza è proporzionale alla quantità δ', e normale a mnm' come se questo filetto Nn fosse isolato, e conformemente a quello che abbiamo veduto accadere in una verga tratta longitudinalmente, secondo l'esperienza. Adottando questa ipotesi, rappresenteremo per $\alpha\delta'$ la forza di cui si tratta riferita all' unità di superficie, e conseguentemente per $\alpha\delta'\lambda du$, la forza normale esercitata sull'elemento trasversale della superficie di K che corrisponde al punto n, e che è un parallelogramma rettangolo avente λ e du per suoi lati, α essendo una costante dipendente dalla materia della lamina, e λ la larghezza della lamina, cosicchè λdu è l'area di quest'elemento. Se dunque si esprime per 2ε lo spessore della lamina, e si rappresenta con T la forza totale che tirerà o spingerà K secondo che essa sarà positiva o negativa, forza risultante dalla riunione delle forze dello stesso genere che agiscono su tutti gli elementi simili della sezion della lamina, si avrà

$$T=\alpha\lambda\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta' du\ ,$$

integrale, che preso così tra i limiti $+\varepsilon$ e $-\varepsilon$ comprende tutto lo spessore della lamina. Mettendo per δ' il suo valore $\delta+\frac{u}{\rho}$, ed eseguendo l'integrazione, si trova, trascurando un termine in cui $\frac{u^2}{\rho}$ entra come fattore, $T=2\alpha\lambda\varepsilon\delta$. Oltre questa forza tendente ad approssimare K ad H, o ad allontanarnelo,

le forze esercitate sopra gli stessi elementi λdu della superficie di K normalmente alle medesime tenderanno a far girare K attorno all'asse che passa pel filetto medio, essendo applicate ciascuna come ad un braccio di leva u, i filetti frapposti tra K ed H tendendo ad allungarsi da una parte del filetto medio, e ad accorciarsi dall' altra ; il momento di ciascuna di queste forze sarà espresso da $u.\alpha\delta'\lambda du$, e chiamando μ il loro momento totale, si avrà pure

$$\mu = \alpha\lambda\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta' u\,du\ ,$$

e si troverà, facendo come sopra $\delta' = \delta + \frac{u}{\rho}$, ed eseguendo l' integrazione tra i limiti indicati, $\mu = \frac{2\alpha\lambda\varepsilon^3}{3\rho}$.

Quindi si vede 1.° che la forza T che tende a contrarre o dilatare uno strato qualunque della lamina è proporzionale all'estensione positiva o negativa del filetto medio, e indipendente dalla sua curvatura, cosicchè se la forza esterna fosse applicata longitudinalmente alla lamina per comprimerla, o per allungarla, senza incurvarla, dovrebbe essa essere semplicemente proporzionale all'accorciamento od allungamento della lamina, conformemente al principio sperimentale da cui siamo partiti. 2.° Che il suo momento μ per far girare una porzione della lamina relativamente all'altra, cioè per far raddrizzare la lamina, quando essa è stata incurvata, è al contrario indipendente da questa estensione e in ragion inversa del raggio di curvatura, in ciascun luogo della sua lunghezza. 3.° Che la materia, e la larghezza della lamina restando le stesse, il valore di T è proporzionale al suo spessore, e quello di μ al cubo di questa dimensione, per variazioni date nella lunghezza e nella forma della lamina.

Quando il filetto medio non ha cangiato di lunghezza, cioè quando si ha $\delta = 0$, in conseguenza della maniera con cui la forza che ritiene la lamina piegata è applicata alla sua estremità, si ha $T = 0$; le forze parallele che tirano o spingono K si riducono a due forze uguali e contrarie, ma non direttamente opposte, le quali per conseguenza non tendono a dare

alcun moto di traslazione a K, ma di cui il momento relativamente all'asse trasversale perpendicolare a queste forze è espresso da μ. Questa quantità μ è ciò che si chiama il *momento dell'elasticità*, ed è proporzionale, come già abbiamo detto, in ciascun punto, alla curvatura della lamina, cioè in ragion inversa del raggio di curvatura del suo filetto medio.

Per formare ora le equazioni d'equilibrio della lamina, è facile vedere in primo luogo che la forza T è costante in tutta la lunghezza della lamina, e per conseguenza uguale nello stato d'equilibrio alla componente della forza data, che agisce alla sua estremità libera, nella direzione che la lamina ha a quest' estremità. La dilatazione δ a cui T è proporzionale sarà anch'essa costante, proporzionale a questa forza, e positiva o negativa, secondo che questa forza tenderà ad allungare od a raccorciare i filetti longitudinali, e quando sarà essa stata determinata coll' esperienza sulla lamina incurvata, potrà servire a determinare il valore della costante α relativa alla materia della lamina. Infatti rappresentando per ϖ un peso equivalente alla forza che tira la lamina alla sua estremità libera nella direzione della sua lunghezza, cioè alla suddetta componente, in questa direzione, delle forze che vi sono applicate, e per ω l'area di ciascuna sezione trasversale della lamina che qui sopra era $2\lambda\varepsilon$, si avrà $T=\varpi=2\alpha\lambda\varepsilon\delta=\alpha\omega\delta$, δ essendo l'estensione osservata prendendo per unità la lunghezza primitiva della lamina, d'onde $\alpha=\frac{\varpi}{\omega\delta}$. Ma questa determinazione si farà nella maniera più semplice applicando la forza estranea ad una lamina o spranga sospesa verticalmente, tirandola longitudinalmente (nel qual caso ϖ è questa stessa forza intiera) come si pratica ordinariamente.

Ma per determinare la figura della lamina incurvata, nello stato d'equilibrio, bisogna considerare il momento della forza che tende a far girare la parte K della lamina attorno all'asse che passa per ciascun punto della sua lunghezza, ed esprimere che la forza applicata all'estremità libera della lamina dee fare equilibrio a questo momento. Condotti pel punto A nel piano del filetto medio due assi rettangolari Ax ed Ay di cui il primo sia tangente alla curva AMB, e rappresenti la direzione della

lamina nel suo stato naturale, e il secondo sia rivolto nella direzione della sua concavità, siano x ed y le coordinate riferite a questi due assi, d'un punto qualunque del filetto medio, come p; a e b quelle della sua estremità libera, cioè del punto b della figura che noi prenderemo pel punto d'applicazione della forza data che tiene la lamina in equilibrio; P, Q le componenti di questa forza secondo i prolungamenti di a e b. Considerando, come sopra, un asse perpendicolare al piano della figura nel punto a cui appartengono le coordinate x ed y, ed una sezione perpendicolare al filetto medio, che passi per questo stesso punto, si richiederà per l'equilibrio della parte della lamina compresa tra questa sezione, e l'estremità libera, che il momento μ aggiunto ai momenti delle forze P e Q relativamente allo stesso asse dia una somma uguale a o, avuto riguardo alle direzioni in cui queste forze tendono a far girare questa parte della lamina. Si troverà così $\mu + P(b-y) - Q(a-x) = o$. Sostituendo nel valore di μ sopra determinato, in vece del raggio di curvatura ρ, la sua espressione generale conosciuta quale si ha prendendo x per variabile indipendente ossia dx per differenziale costante, sostituendo quindi questo valore di μ nell' equazione or ora trovata, e facendo, per abbreviare,

$$\frac{2}{3}\alpha\lambda\varepsilon^3 = \beta ,$$

ne risulterà, per l'equazione differenziale della curva formata dalla lamina elastica in equilibrio,

$$\beta \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \{ Q(a-x) - P(b-y) \} \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

ove il radicale di secondo grado, che forma l'ultimo fattore del secondo membro è considerato come positivo. Quest'equazione differenziale essendo del secondo ordine, il suo integrale conterrà due costanti arbitrarie che si determineranno colle condizioni $y = \varepsilon$, e $\frac{dy}{dx} = o$ quando $x = o$, cioè per la parte

incastrata della lamina, dove la curvatura è nulla; alla prima delle quali condizioni si potrà surrogare $y=o$ a cagione della piccolezza di ε cioè del mezzo spessore della lamina. Facendo quindi $x=a$, $y=b$ in quest'integrale, si avrà un'equazione in a e b, che si unirà a quella pure tra a e b che risulterà dalla lunghezza data della lamina. Si avranno allora le due equazioni necessarie per determinare queste due incognite a e b, e la *curva elastica* propriamente detta sarà compiutamente determinata.

56. Se la lamina invece di essere incastrata è intieramente libera alla sua estremità A, bisognerà, per mantenerla in equilibrio, applicare a quest'estremità una forza di cui le componenti siano uguali e contrarie a P e Q, per impedire il moto di traslazione della lamina. Supponendo che l'estremità corrispondente del filetto medio sia il punto d'applicazione di questa forza, bisognerà di più che la risultante di P e Q venga a passare per questo punto, cioè che i loro momenti relativamente a questo punto si annullino tra loro, affinchè la lamina sollecitata da tutte queste forze esterne non abbia alcun moto di rotazione, il che richiederà che si abbia $Qa=P.(b-\varepsilon)$, a e $b-\varepsilon$ essendo le braccia di leva di queste due forze. Quest'equazione basterà, senza l'applicazione delle forze contrarie a P e Q quando la lamina sarà ritenuta da un asse fisso che passi per quest'estremità del filetto medio, e sia diretto secondo la sua larghezza. Se poi la lamina fosse semplicemente posata sopra un piano perpendicolare alla sua lunghezza, bisognerà di più, e per equivalente della prima condizione sovra indicata, che il fregamento contro al piano, o un'altra forza impedisca la lamina di sdrucciolarvi sopra. In questo caso in cui la lamina non è più incastrata, la direzione del suo piano tangente in A, che era Ax per la lamina incastrata, non sarà più conosciuta; se si pone sempre in questo punto A l'origine delle coordinate x ed y, si avrà ancora $y=\varepsilon$, o molto prossimamente $y=o$ quando $x=o$; ma non si avrà l'altra equazione $\frac{dx}{dy}=o$. La direzione dell'asse Ax sarà in questo caso quella data della forza P, e all'equazione $\frac{dx}{dy}=o$ si sostituirà, per la determinazione delle

costanti arbitrarie l'equazione sovra indicata relativa ai momenti delle forze P e Q, che si potrà ridurre senza errore sensibile, a cagione della piccolezza di ε, a $Qa=Pb$.

57. Supponiamo, per ritornare al caso in cui la lamina è incastrata ad una delle sue estremità, che si abbia $P=0$, cosicchè la lamina sia piegata da una forza Q perpendicolare alla direzione primitiva, come, per esempio, quando si sospendesse all'estremità libera della lamina incastrata in direzione orizzontale un peso dato Q, l'equazione sovra stabilita della curva della lamina, si ridurrà a

$$\frac{\beta}{Q}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=(a-x)\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Facendo per abbreviare $\frac{\beta}{Q}=c^2$, essa può mettersi sotto la forma

$$\frac{c^2\cdot\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=a-x;$$

quest'equazione dà, colla sua prima integrazione, sotto la condizione che $\frac{dy}{dx}=0$ quando $x=0$,

$$\frac{2c^2\cdot\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}=2ax-x^2,$$

d'onde si deduce

$$dy=\frac{(2ax-x^2)\,dx}{\sqrt{4c^4-(2ax-x^2)^2}}.$$

Quest'espressione, a cagione che c è in generale una quantità assai considerevole, si può ridurre a

$$dy = \frac{(2ax - x^2)dx}{2c^2},$$

trascurando $(2ax - x^2)^2$ relativamente a $4c^2$ nel denominatore; che integrata ci dà

$$6c^2y = 3ax^2 - x^3,$$

o rimettendo il valore di c, e quindi quello di β,

$$4a\lambda\varepsilon^3 y = (3ax^2 - x^3)Q,$$

per l'equazione della curva. La lamina supponendosi poco scostata dalla direzione orizzontale, l'ascissa a della sua estremità libera potrà prendersi per la sua lunghezza, e l' ordinata b della stessa estremità sarà il suo più grande scostamento. Facendo come sopra $2\varepsilon\lambda = \omega$, l'equazione trovata in x ed y ci darà per conseguenza in a e b,

$$a\omega\varepsilon^2 b = a^3 Q, \quad \text{ossia} \quad b = \frac{a^3 Q}{a\omega\varepsilon^2}.$$

Ne risulta dunque, che la natura della lamina restando la stessa, la quantità b di cui ella si piegherà sarà proporzionale al peso Q, ed al cubo della lunghezza a, e in ragione inversa del quadrato del suo spessore, e dell'area ω della sua sezione trasversale; cosicchè se la sezione trasversale fosse un quadrato avente 2ε per lato, la flessione, poste le altre cose uguali, sarebbe in ragione inversa della 4.ª potenza di questo lato.

Se nel valore trovato di b si sostituisca per $a\omega$ il suo valore $\frac{\varpi}{\delta}$, dato dall' equazione sopra stabilita $\varpi = a\omega\delta$, e si

chiami h l'allungamento totale $a\delta$ della lamina prodotto da un peso ϖ che la traesse longitudinalmente, si avrà

$$b = \frac{h a^2 Q}{\varepsilon^2 \varpi}.$$

Se si suppone $\varpi = Q$, il che cangia quest'espressione in

$$b = \frac{h a^2}{\varepsilon^2}, \quad \text{ossia} \quad \frac{b}{h} = \frac{a^2}{\varepsilon^2},$$

se ne conchiuderà che se uno stesso peso applicato all'estremità libera d'una lamina elastica agisce successivamente nella direzione della sua lunghezza, e perpendicolarmente alla medesima, l'altra estremità in quest'ultimo caso essendo stabilmente incastrata, l'estensione h e la flessione b, supposte assai piccole relativamente alla sua lunghezza a, saranno tra loro come i quadrati dello spessore, e della lunghezza della lamina. Si vede inoltre che per mezzo di quest'espressione si può determinare indirettamente h, e quindi l'estensione δ della lamina riferita all'unità di lunghezza coll'osservazione della flessione b d'una lamina di data lunghezza e spessore, come sopra si è annunziato. E qui dee osservarsi, che queste formole possono applicarsi alla depressione prodotta nel mezzo d'una lamina elastica posata sopra due sostegni in direzione orizzontale, e di cui la metà della lunghezza fra i due sostegni sia a, purchè si prenda pel peso Q la metà soltanto del peso che produce questa depressione, poichè infatti ciascuna metà di questa lamina potrà allora considerarsi come incastrata in direzione orizzontale nel punto di mezzo della lunghezza totale, e piegata all'insù dalla metà del peso adoperato, applicata a ciascuna delle sue estremità. Se dunque si chiama P questo peso totale sostenuto nel punto di mezzo della lamina, a la semi-lunghezza della lamina, e b la depressione o freccia dell'abbassamento nel punto di mezzo, si avrà

$$b = \frac{a^3 P}{2 a \omega \varepsilon^2} = \frac{h a^2 P}{2 \varepsilon^2 \varpi},$$

a, ω, ε ed h avendo le stesse significazioni di sopra, onde se si è osservato in una lamina in questo caso la freccia b per un peso P, si avrà

$$\varpi = \frac{h a^3 P}{2 b \varepsilon^2} = \frac{a^3 P \delta}{2 b \varepsilon^2}$$

pel peso ϖ che produrrebbe un allungamento totale $a\delta$ in una lamina della stessa sezione, e della lunghezza a, ossia che produrrebbe un allungamento δ in questa lamina, prendendo per unità la sua lunghezza, e $\frac{a^3 P \delta}{2 b . \varepsilon^2 . \omega}$ pel peso che produrrebbe lo stesso allungamento in una lamina di cui la sezione fosse l'unità di superficie. Se 2ε essendo, come si è supposto, lo spessore della lamina, L fosse la sua larghezza, si avrebbe $\omega = 2\varepsilon L$, e quindi quest' espressione diverrebbe $\frac{a^3 P \delta}{4 b L \varepsilon^3}$; e se si facesse $2\varepsilon = E$, essa si cangierebbe in $\frac{2 a^3 P \delta}{b L E^3}$; e quella della forza che produrrebbe un allungamento uguale alla lunghezza primitiva, sarebbe $\frac{2 a^3 P}{b L E^3}$. Quest' espressione si accorda con quella di cui Tredgold si è servito per determinare il peso del modulo di elasticità, di cui si è parlato al n.° 52, per mezzo di esperienze sulla flessione nel caso indicato, cioè $\frac{2 l^3 w}{b d^3 \delta}$, osservando che in essa l, w, δ, b, d sono le quantità che qui abbiamo chiamate a, P, b, L, E.

58. Fra i casi in cui la lamina è solamente appoggiata per una delle sue estremità contro ad un piano, e non incastrata, consideriamo ora quello in particolare, in cui la lamina in situazione verticale sia posata sopra un piano orizzontale colla sua estremità inferiore A, e sia caricata d' un peso dato alla sua estremità superiore B. Si può concepire uno stato d'equilibrio, in cui la lamina rimanesse rettilinea nella sua lunghezza, qualunque fosse il peso di cui fosse caricata; ma quest'equilibrio sarà in generale instabile. Supponiamo dunque che la lamina si pieghi da una parte qualunque sotto questo carico,

incurvandosi, ma d'una piccola quantità, cosicchè niuno de' suoi punti si allontani molto dalla verticale, e che in tutta la sua lunghezza la tangente della curva che essa forma nel suo stato d'equilibrio faccia un piccolissimo angolo colla verticale. La fig. 6 rappresenta diverse forme che essa può offrire in questo stato. Prendiamo per assi delle x e delle y la verticale Ax in direzione contraria a quella della gravità, e l'orizzontale Ay. La quantità $\frac{dy}{dx}$ sarà, per ipotesi, molto piccola; e ne trascureremo il quadrato nell'equazione generale sopra stabilita della curva elastica. Si avrà inoltre $Q=0$, poichè la forza che agisce all'estremità B è verticale. In virtù dell'equazione $Qa=Pb$, che come abbiamo veduto ha luogo in generale quando la lamina non è incastrata, ne seguirà $b=0$, ed è chiaro infatti, che l'estremità B non può scostarsi dalla verticale formata dalla lamina nel suo stato naturale, e siccome il peso P agirà nella direzione da B verso A, bisognerà cangiar il segno di questa forza nell'equazione generale che la supponeva diretta all'opposto. Così quest'equazione diverrà semplicemente

$$\frac{\beta}{P}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=-y,$$

che rappresentando, per abbreviare, il valore di β, cioè

$\frac{1}{3}\alpha\omega\epsilon^2$ con $\frac{c^2}{\pi^2}.P$, prende la forma $c^2.\frac{d^2y}{dx^2}=-\pi^2y$.

Integrando quest'equazione in maniera da soddisfare alla condizione che si abbia $y=0$ quando $x=0$, si avrà successivamente

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\pi K}{c}.\cos\frac{\pi x}{c}, \text{ e } y=K\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{c},$$

K essendo una costante arbitraria che dee esser nulla o piccolissima relativamente a c, poichè y e $\frac{dy}{dx}$ sono supposte piccole

quantità. Quando si avrà $K=0$, il che è una delle soluzioni possibili, poichè K è arbitrario, la lamina elastica resterà diritta poichè allora $y=0$, e la sua lunghezza AB sarà soltanto alcun poco diminuita per la pressione del peso P. Quando il coefficiente K non sarà nullo la lamina si piegherà; al punto B si avrà $x=a$, e $y=b=0$; bisognerà dunque che si abbia, secondo la nostra espressione generale di y, $\operatorname{sen}\frac{\pi a}{c}=0$, e per conseguenza $\frac{a}{c}=i$, ossia $a=ic$, i essendo un numero intiero qualunque; di tal forma dee dunque essere il valore di a, ossia di AB; vale a dire i casi soli possibili della flessione della lamina sono quelli in cui la distanza a tra un'estremità e l'altra del filetto medio soddisfà a questa condizione. Questa circostanza restringe pure, ed assoggetta ad una corrispondente condizione il valore di K che prima si era considerato come arbitrario. Infatti se si chiama l la lunghezza della lamina, la differenziale dell'arco d'una curva essendo in generale $\sqrt{dx^2+dy^2}$, si avrà nel nostro caso

$$l=\int_0^a \sqrt{dx^2+dy^2}=\int_0^a \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\cdot dx$$

$$=\int_0^a \sqrt{1+\frac{\pi^2K^2}{c^2}\cos^2\frac{\pi x}{c}}\cdot dx,$$

sostituendo cioè a $\frac{dy}{dx}$ il suo valore sopra trovato per la curva della lamina; sviluppando il radicale, e trascurando nello sviluppamento la 4.ª potenza di $\frac{K}{c}$ e le altre superiori, ed eseguendo quindi l'integrazione tra i limiti indicati, si ottiene

$$l=\left(1+\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2K^2}{c^2}\right)a;$$

e mettendo per a il suo valore secondo la sovra stabilita condizione, si ha

$$l=\left(1+\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2K^2}{c^2}\right)ic\ ,$$

d'onde si deduce

$$K=\frac{2c}{\pi}\sqrt{\frac{l}{ic}-1}\ .$$

Così il coefficiente K sarà nullo (il che accadrà quando $ic=l$, ossia $i=\frac{l}{c}$) o tale da soddisfare a questa formola, essendo i espresso da $i=1$, $i=2$, ecc., senza poter presentare valori intermedii. Ma questi valori di i debbono inoltre esser tali da non rendere il valore indicato di K immaginario. Quindi 1.° finchè l sarà minore di c, cioè di

$$\pi\sqrt{\frac{\beta}{P}}\ ,\quad \text{ossia di}\quad \pi\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{a\lambda\varepsilon^3}{P}}\ ,$$

l'espressione di K essendo immaginaria per qualunque valore intiero di i, a cominciare da $i=1$, non si potrà prendere K diverso da 0; la lamina non potrà essere piegata dal peso P, e la sola supposizione possibile d'equilibrio sarà quella della lamina che si mantiene rettilinea, onde questo caso d'equilibrio che è instabile, quando ve ne sono altri possibili, sarà allora stabile. 2.° Se si suppone che l divenga maggiore di c, o perchè siasi accresciuta la lunghezza della lamina, o perchè siasi diminuita la quantità c con accrescere il peso P, il valore di K diverso da zero, e che corrisponde ad $i=1$ comincierà ad essere reale, e la lamina potrà essere piegata, e fare equilibrio in questo stato al peso che la comprime. Per vedere qual è la natura dell'inflessione che corrisponde a questo caso supponiamo $l=c(1+F)$, prendendo per F una piccola frazione, senza che il valore di K non sarebbe più piccolissimo relativamente a c, e $\frac{dy}{dx}$ non essendo più una piccola quan-

tità, come sopra abbiamo supposto, la nostra analisi non sarebbe più applicabile; si avrà allora per $i=1$, ossia $a=c$,

$$K=\frac{2c}{\pi}\sqrt{\frac{c(1+F)}{c}-1}=\frac{2c}{\pi}\sqrt{F}=\frac{2a}{\pi}\sqrt{F}.$$

L'equazione della curva darà dunque

$$y=\frac{2a}{\pi}\sqrt{F}.\ \frac{\operatorname{sen}\pi x}{a},$$

espressione che non può divenire zero, se non facendo $x=0$, o $x=a$, e non per alcun valore intermedio di x; la curva non taglierà dunque la verticale tra i due punti A e B, e non presenterà così che un solo arco, come nel primo caso della figura qui sopra. 3.° Il rapporto $\frac{l}{c}$ continuando a crescere, se esso viene a superar 2, il valore di K che corrisponde ad $i=2$ diverrà anch'esso reale, e la lamina potrà prendere una figura diversa dalla precedente. Facendo $l=2c(1+F')$, essendo F' una piccola frazione, avremo per $i=2$, ossia $a=2c$,

$$K=\frac{2c}{\pi}.\sqrt{F'}=\frac{a}{\pi}\sqrt{F'},$$

d'onde risulterà

$$y=\frac{a}{\pi}\sqrt{F'}.\frac{\operatorname{sen}2\pi x}{a},$$

valore che diviene nullo non solo per $x=0$, e per $x=a$, ma ancora per $x=\frac{1}{2}a$; dunque in questo caso la curva taglierà la verticale nel mezzo di AB, cioè formerà due archi uno da una parte, e l'altro dall'altra della verticale, come nel secondo caso della figura citata. 4.° Continuando così si vede che se l supera alquanto ic, i essendo un numero qua-

lunque intiero, cosicchè indicando con Φ una piccola frazione, si abbia $l=ic(1+\Phi)$, si potrà prendere $a=ic$, il che darà

$$K=\frac{2c}{\pi}\sqrt{\Phi}=\frac{2a}{i\pi}\sqrt{\Phi}\text{, e }y=\frac{2a}{i\pi}\sqrt{\Phi}.\ \text{sen}\ \frac{i\pi x}{a},$$

equazione d'una curva che taglierà la retta AB in un numero $i+1$ di punti equidistanti, compresi in essi A e B, e formerà un numero corrispondente di archi alternativi al di qua e al di là della medesima.

Così l'equilibrio potrà aver luogo nei diversi casi che abbiamo indicati sia senza curvatura della lamina, sia con una curvatura formante due, tre, ecc. archi al di qua e al di là della verticale, secondo che $\frac{l}{c}$ supererà d'alcun poco i numeri 1, 2, 3, ecc. Il primo caso sarà esso solo possibile quando l sarà minore di c, e non sarà stabile che in questa supposizione.

S'intende sotto il nome di *forza d'una molla* o lamina elastica, supposta verticale per fissare le idee, il più gran peso che essa può sostenere in equilibrio stabile, senza piegarsi. Questo peso è determinato dall'equazione $c=l$, che a cagione di

$$c=\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}\alpha\omega\varepsilon^2}{P}}\text{, ossia }c^2=\frac{1}{3}\pi^2.\frac{\alpha\omega\varepsilon^2}{P}\text{, ci dà }P=\frac{\pi^2\alpha\omega\varepsilon^2}{3l^2},$$

d'onde si vede, che tutto il resto rimanendo uguale, la forza d'una molla è in ragion inversa del quadrato della sua lunghezza. Se la molla è un parallelepipedo rettangolo, come fin qui abbiamo supposto, si vede pure che se si prova a piegarlo relativamente alle diverse sue faccie, la sua forza sarà proporzionale al quadrato dello spessore perpendicolare alla faccia che si vuol piegare, che è quello che abbiamo indicato con 2ε. Ne risulta pure che a lunghezza uguale la forza della molla, quando si supponga le sua sezione un quadrato, sarà proporzionale alla 4.ª potenza del lato di questo quadrato, poichè ω è già in questo caso, non altrimenti che ε^2 proporzionale alla seconda potenza di questo lato.

Osserverò qui che la forza d' una molla nel senso indicato non segue relativamente alla lunghezza la stessa proporzione che quando se ne giudicasse dal peso necessario per abbassarne l'estremità libera d'una data quantità supponendola incastrata all'altra estremità, e in direzione orizzontale; poichè, secondo la formola $\alpha\,\omega\,\varepsilon^2\,b = a^3\,Q$ sopra stabilita per questo caso, si avrebbe

$$Q = \frac{\alpha\,\omega\,\varepsilon^2\,b}{a^3},$$

ove supponendo dato l'abbassamento b, Q è bensì ancora proporzionale ad $\omega\varepsilon^2$, ma è in ragione inversa del cubo della lunghezza che qui è rappresentata da a invece del quadrato soltanto della lunghezza.

Quanto alla forza assoluta P richiesta per far piegare la lamina verticale, si calcolerà mettendo nell' espressione sovra indicata di P il valore di α che si deduce sia dall'estensione h della medesima quando si trae longitudinalmente, sia dalla flessione stessa b che vi produrrebbe un peso ϖ applicato alla sua estremità quando essa è incastrata in direzione orizzontale. Ora secondo quello che sopra si è veduto, a cagion di $\alpha\delta = h$, e $a = l$, questi valori sono

$$\alpha = \frac{\varpi\,l}{\omega\,h}, \quad \alpha = \frac{\varpi\,l^3}{\omega\,\varepsilon^2\,b};$$

per conseguenza si avrà

$$P = \frac{\pi\,\varpi\,\varepsilon^2}{3\,l\,h}, \quad \text{ovvero} \quad P = \frac{\pi\,\varpi\,l}{3\,b}.$$

Reciprocamente si potrà anche dedurre dalla forza P della molla nel senso indicato, questo valore di α, che sarà

$$\alpha = \frac{3\,l^2\,P}{\pi^2\,\omega\,\varepsilon^2},$$

e quindi per mezzo delle formole indicate, l'estensione h, e la flessione b prodotte da un peso ϖ, come ciò si può anche fare immediatamente, dalle due espressioni suddette di P.

59. Le considerazioni relative alla *lamina elastica* si estendono facilmente ad una *verga elastica* qualunque; e particolarmente ad una verga rettilinea di grossezza uniforme e di natura omogenea, cilindrica o prismatica, di sezione qualunque. Ma mi dispenserò dall'entrare ne' particolari del calcolo relativo a questa estensione, che non riguarda più che le ulteriori conseguenze matematiche dei principii fisici sopra supposti sull'elasticità; dirò solo che per quest'ultimo caso si trova che le formole restano le stesse che per la lamina elastica, ossia verga parallelepipeda, nelle quali però si sia sostituita alla quantità ε^3 la quantità $\frac{3}{\omega}\int_{-k'}^{k} \nu u^2 du$, ove u è la distanza ab (fig. 7) d'un punto qualunque della sezione trasversale della verga da una linea che passa pel punto a centro di gravità di questa sezione e nel piano della medesima perpendicolarmente al piano in cui si dee fare l'inflessione della verga; ν la doppia ordinata cd che corrisponde a questa distanza u, appartenente alla linea che forma il contorno della sezione, onde $ud\nu$ viene a rappresentare l'elemento $dghc$ della sezione; e K, K' sono i valori estremi ae, af di u, a cui dee estendersi l'indicato integrale; il valore di questo dipende necessariamente dalla natura di quella sezione. Si avrà dunque in generale per la quantità b di cui una verga dee piegarsi per un peso Q quando essa è incastrata orizzontalmente nell'estremità opposta a quella a cui si applica questo peso, e pel peso P richiesto per far piegare la lamina quando essa ne è caricata alla sua estremità superiore, stando appoggiata verticalmente sopra un piano,

$$b = \frac{l^3 Q}{3\alpha \int_{-k'}^{k} \nu u^2 du}, \quad P = \frac{\pi^2 \alpha}{l^2} \int_{-k'}^{k} \nu u^2 du .$$

Se, per esempio, la sezione normale è un quadrato di cui il lato sia 2ε, e si tratti di piegare la molla in guisa che due

delle sue opposte faccie divengano superficie cilindriche, si avrà $K=K'=\varepsilon$, $\nu=2\varepsilon$, quantità costante, e

$$\int_{-k'}^{k} \nu u^2 du = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} 2\varepsilon u^2 du = 2\varepsilon \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u^2 du = 2\varepsilon . \frac{2\varepsilon^3}{3} = \frac{4\varepsilon^4}{3};$$

quindi

$$b = \frac{l^3 Q}{4\alpha\varepsilon^4}, \quad P = \frac{4\pi^2\alpha\varepsilon^4}{3l^2},$$

espressioni in cui ricadono quelle sovra trovate per la lamina elastica facendo in queste $\omega=(2\varepsilon)^2=4\varepsilon^2$, come ciò ha luogo nella nostra verga di sezione quadrata. Se la sezione della verga fosse un circolo di cui il raggio fosse K, si avrebbe

$$K'=K, \quad \nu=\sqrt{K^2-u^2};$$

si troverebbe quindi

$$\int_{-k'}^{k} \nu u^2 du = \frac{\pi K^4}{2},$$

onde

$$b=\frac{4l^3 Q}{3\alpha\pi K^4}, \quad P=\frac{\pi^2\alpha K^4}{4l^2}.$$

Se si suppone l'area della sezione trasversale uguale nei due casi della verga quadrata, e della verga cilindrica circolare, cosicchè si abbia $4\varepsilon^2=\pi K^2$, si vede che la forza P della molla, che ha luogo nel primo caso supera quella che corrisponde al secondo nella ragione di $\pi:3$ (1).

---

(1) Si noterà che in tutta questa teoria della flessione delle lamine o verghe si è fatta astrazione da forze variabili qualunque che fossero applicate ai diversi punti della loro lunghezza, e perciò anche dalla forza di gravità da cui tutte le loro molecole sono sollecitate, cioè dal peso delle lamine o verghe medesime. Non farò qui menzione che d'un risultato particolare che il calcolo dà, relativamente ad una lamina o verga di gros-

60. Si sono estese le ricerche teoriche, del genere di quelle indicate relative alla lamina elastica, e alla verga elastica; anche alle *lastre* o piastre elastiche considerate nelle loro tre dimensioni, partendo sempre dagli stessi principii; ma i risultati di queste ricerche non avendo finquì alcuna applicazione immediata alle proprietà fisiche dei corpi, ci asterremo dal trattarne. Osserveremo però che lo stesso non si può dire del moto vibratorio di queste lastre, che succede quando, dopo avere fatta lor cangiar forma per mezzo di forze estranee, si lasciano a loro medesime; la teoria di queste vibrazioni, non altrimenti che quella delle lamine e verghe elastiche, è collegata colla teoria de' suoni, e dovremo occuparcene sino ad un certo punto in seguito a quella delle vibrazioni delle corde e membrane tese, e di quella delle verghe elastiche, nell' articolo ove tratteremo in generale delle vibrazioni de' corpi elastici, e de' suoni che ne risultano.

61. Del resto i calcoli che abbiamo indicati per la determinazione dell'effetto delle forze applicate ad una lamina elastica sono fondati, come abbiamo veduto, sulla supposizione, che per ciascun filetto della medesima, la forza con cui esso tende a riprendere la sua lunghezza naturale, in ciascun punto, quando esso è allungato o raccorciato, sia proporzionale al suo allungamento, o raccorciamento, come ciò ha luogo sensibilmente, secondo la sperienza, nel caso di trazione o pressione longitu-

---

sezza uniforme incastrata ad una delle sue estremità, in direzione orizzontale, quando si ha riguardo alla sua gravità. La flessione o abbassamento della sua estremità libera, prodotta dal suo proprio peso, è uguale a $\frac{3}{8}$ dell' abbassamento che vi sarebbe prodotto da un peso uguale a quello della verga, sospeso a quest'estremità (v. Poisson, *Traité de Mécanique liv.* 3.^me^). Quanto all'allungamento o raccorciamento prodotto in una verga in situazione verticale, sospesa per la sua estremità superiore, o appoggiata per la sua estremità inferiore, dal peso della medesima, è chiaro che esso dee esser la metà di quello che vi produrrebbe un peso uguale che agisse sopra di essa longitudinalmente per trazione o per pressione; poichè l'azione del peso della verga sulle sue diverse sezioni è nulla ad una delle estremità, e va crescendo uniformemente sino all'altra, in cui si esercita per intiero.

dinale d'una verga rettilinea. Questa condizione, relativamente alla lamina incurvata da forze ad essa applicate trasversalmente, si esprime anche altrimenti dicendo che la forza con cui le molecole di uno qualunque dei filetti posti verso la convessità tendono a ravvicinarsi, e quelle d'un filetto posto verso la concavità tendono ad allontanarsi debba essere proporzionale all'*angolo di contingenza* della curvatura del filetto medio, cioè all'angolo che un elemento di questo, nel punto che si considera, fa coll'elemento precedente prolungato, angolo che è esso medesimo inversamente proporzionale al raggio di curvatura. Infatti, per la piccolezza che sempre si suppone alla curvatura, l'allontanamento, o l'avvicinamento che l'incurvarsi della lamina produce tra le molecole de' suoi filetti è proporzionale a quest'angolo di contingenza, ossia in ragione inversa del raggio di curvatura; e abbiamo veduto (n.° 55) che realmente l'indicata supposizione ci conduce ad ammettere il momento della forza che tiene la lamina incurvata, in ragion inversa del raggio di curvatura del suo filetto medio. Ora questa supposizione non è rigorosa, potendo i diversi filetti, per l'azione delle molecole degli uni sopra quelle degli altri, offrire a tal riguardo una legge diversa da quella di un filetto isolato, o che fa parte d'una verga rettilinea allungata o raccorciata solo longitudinalmente. Vedremo però in seguito che anche i risultati a cui Poisson fu condotto dalle considerazioni più rigorose, che egli ha applicate a quest'oggetto, si accordano sensibilmente con quelli fondati sulla condizione qui ammessa.

B. *Della torsione de' fili o cilindri di materia solida.*

62. Passiamo ora alle leggi relative alla forza di torsione de' fili metallici. Su questo punto abbiamo le sperienze e i calcoli di Coulomb, che se n'è particolarmente occupato (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, 1784). Queste sperienze consistono nel torcere d'un certo numero di gradi un filo verticale metallico, in maniera da far percorrere questo numero di gradi ad un ago leggiero od indice annesso ad un cilindro verticale sospeso al filo (v. fig. 8), e a contare il numero di oscillazioni in un tempo dato, che fa quest'indice quando il filo essendo abbandonato a se

stesso tende a riprendere il suo stato naturale, secondo quello che si è detto nel n.° 41; poichè secondo i principii della meccanica si può da questa rapidità delle oscillazioni dedurre la forza che le produce, cioè la forza elastica di torsione del filo, da paragonarsi quindi cogli angoli di torsione. Per tale oggetto, prima di indicare i risultati di queste sperienze di Coulomb dobbiamo esporre, seguendo anche qui le traccie del signor Biot, alcune idee teoriche sopra la maniera di agire, e la legge probabile di questa forza di torsione e sopra il modo di calcolarla per mezzo delle suddette oscillazioni. Queste ultime considerazioni divengono qui necessarie come un mezzo per la determinazione delle leggi di questa forza, sebbene dobbiamo poi, come già abbiamo accennato (n.° 42), occuparci più specialmente in seguito delle oscillazioni de' corpi elastici.

63. Per concepire in primo luogo l' effetto della torsione, e la maniera con cui un filo metallico che l' ha subita tende a ritornare al suo stato naturale, si osserverà che se il cilindro rappresentato nella fig. 9 viene a torcersi da una forza estranea applicata alla circonferenza della sua base, tutte le molecole contenute per esempio nella linea verticale BA saranno traslocate, in maniera che la molecola M verrà in m, M_1 in m_1, M_2 in m_2, ecc.; ciascuna di queste molecole fa forza per ritornare sulla linea in cui si trova la molecola che le è immediatamente superiore, cosicchè lo sforzo totale del filo per distorcersi risulta dagli sforzi di tutte le molecole contenute nella linea BX, e in tutte le altre linee che si possono concepire nel filo metallico di cui si tratta. Supponiamo ora che si raddoppi l'angolo di torsione ACX, lo scostamento di ciascun punto dalla sua posizione primitiva, cioè la sua distanza alla verticale del punto immediatamente superiore diverrà doppia. Ora secondo ciò che le sperienze di S'gravesande ed altri ci hanno mostrato sulla natura de'corpi elastici, quando le molecole contigue sono state scostate d'una piccola quantità le une dalle altre, la loro tendenza a riprendere le lor posizioni d'equilibrio è proporzionale alla quantità di cui sono state scostate. Lo sforzo adunque di ciascun punto m, m_1, m_2, ecc. per rimettersi nella verticale del punto immediatamente superiore diverrà doppio; e in generale la forza di torsione che ne risulterà sarà proporzionale

all'arco totale di torsione AX, per una data lunghezza di filo; cioè la forza che bisognerà applicare all' estremità d' un raggio uguale all'unità di lunghezza per fare equilibrio a questa torsione sarà espressa da nX, X essendo l'arco di torsione, ed n la forza che bisognerebbe applicare all' estremità dello stesso raggio quando l'arco di torsione fosse uguale all' unità di lunghezza. Se si volesse prendere per unità degli archi il grado, si osserverà che chiamando X^o il numero di gradi corrispondente all'arco X, e π rappresentando al solito il rapporto del diametro alla circonferenza, ossia la lunghezza della semi-circonferenza di un circolo di cui il raggio sia l'unità, si avrà la proporzione $180^o : X^o :: \pi : X = \frac{\pi X^o}{180}$, onde l'espressione della forza suddetta diverrà in questo modo $\frac{\pi n X^o}{180}$. E se si volesse che questa forza fosse applicata all' estremità d' un vette d'una lunghezza uguale ad R in vece di esserlo all'estremità del raggio 1, bisognerà ridurla nel rapporto di 1 ad R, in guisa che essa diverrà $\frac{\pi n X^o}{180 . R}$.

Quindi adunque si vede, che la forza di torsione è proporzionale per ciascuna molecola all'arco X^o che le resta in ciascun momento a percorrere per giungere alla posizione d'equilibrio. Ora è un principio generale di meccanica, che tutti i moti di oscillazione prodotti da forze assoggettate ad una simil legge godono della proprietà del *tautocronismo*, cioè di farsi in tempi uguali; le oscillazioni adunque che il filo metallico farà nel distorcersi quando sarà abbandonato a se stesso saranno tutte di ugual durata od *isocrone*, quantunque la loro ampiezza debba andar diminuendo per le resistenze che vi si oppongono, e che finalmente distruggono questo moto di oscillazione. E se si chiama M la massa d'un corpo sospesa al filo, e considerata come riunita in un solo punto, R la sua distanza costante all'asse del filo, e T il tempo di una di queste oscillazioni, si ha per una formola di meccanica, che noi dobbiamo qui supporre nota e dimostrata, $T = \pi \left(\frac{R^2 M}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$. Le molecole del

corpo sospeso al filo non sono realmente riunite in un solo punto; ma una simil formola avendo luogo per tutte le molecole, sebbene con valori assoluti diversi, si dimostra, coi principii della meccanica relativi a simili casi, che i punti che avrebbero da lor soli maggior celerità accelerando il moto degli altri, e questi ritardando alquanto i primi, il moto del corpo è lo stesso, che se tutta la sua massa M fosse concentrata in un solo punto di cui il quadrato della distanza all'asse del filo fosse $\frac{\int r^2 dm}{M}$, (dm essendo un elemento qualunque della massa, di cui la distanza all'asse sia r, e il segno $\int$ indicando l'integrale della quantità $r^2 dm$ esteso a tutta la massa), ossia per cui si avesse $R^2 = \frac{\int r^2 dm}{M}$; in guisa che sostituendo questo valore invece di R^2 nella formola sopra riferita, il tempo T d'una oscillazione sarà $T = \pi \left(\frac{\int r^2 dm}{n} \right)^{\frac{1}{2}}$. La quantità $\int r^2 dm$ si ottiene colle regole del calcolo integrale quando si conosce la forma del corpo sospeso; essa è ciò che si chiama il suo *momento d'inerzia* relativamente all'asse da cui si contano le distanze r. Entrerò qui (ad uso di quelli fra i lettori, a cui non fossero famigliari queste applicazioni) ne' particolari del calcolo relativo al caso della fig. 8, nel quale il corpo è un cilindro circolare di cui l'asse è verticale, e coincide col prolungamento del filo. Chiamiamo M la massa del cilindro, ed a il raggio della sua circonferenza. Facendo passare per l'asse di questo cilindro due piani formanti tra loro un angolo infinitamente piccolo dx, e tagliandoli con un terzo piano condotto orizzontalmente all'altezza d'un punto qualunque che vi si voglia considerare, si formerà nell'interno del cilindro un settore circolare ACB. Prendendo sopra CA una distanza qualunque CM espressa da r, ed un'altra infinitamente poco diversa da quella, CM' che sarà $r+dr$, e descrivendo con questi due raggi gli archi MN, $M'N'$, il quadrilatero $MNN'M'$ considerato come rettilineo avrà per super-

fra il prodotto di MM' ossia dr per MN ovvero rdx, cioè sarà espresso da $rdrdx$, e potremo prendere per elemento solido del cilindro il piccolo parallelepipedo elevato sopra questa base, e di cui l'altezza sia $PM=dz$, il che darà $dm=rdrdzdx$. Sostituendo dunque questo valore in $\int r^3 dm$ si avrà $\int r^3 drdzdx$, espressione da integrarsi relativamente alle tre variabili r, z, x. L'integrazione che si riferisce ad r dà il fattore $\frac{1}{4}r^4$, e quest'integrale dee estendersi per tutta la grossezza del cilindro, epperciò da $r=0$ ad $r=a$; si avrà dunque primieramente $\int r^3 dm=\frac{a^4}{4}\int dzdx$. L'integrale relativo a z dovrà prendersi per tutta l'altezza del cilindro che supporremo $=h$; esso darà dunque il fattore h, nel valore di $\int r^3 dm$. Finalmente l'integrale relativo ad x dee esser preso in tutto il contorno della circonferenza, cioè da $x=0$ sino ad $x=2\pi$. Verrà dunque $\int r^3 dm=\frac{\pi h a^4}{2}$. Ora chiamando M la massa del cilindro, rappresentata dal suo volume, si ha $M=\pi a^2 h$; dunque definitivamente $\int r^3 dm=\frac{Ma^2}{2}$. Per conseguenza si ha allora $T=\pi\left(\frac{Ma^2}{2n}\right)^{\frac{1}{2}}$. Questo appunto è il caso delle sperienze di Coulomb, che dobbiamo fra breve esaminare.

Per ridurre questa formola in numeri bisogna conoscere la costante n, che conviene particolarmente al filo di cui si fa uso; si dovrà dunque determinare questa costante con una prima sperienza, osservando il tempo T delle oscillazioni d'una massa conosciuta M, poichè allora liberando n dalla formola $T=\pi\left(\frac{Ma^2}{2n}\right)^{\frac{1}{2}}$, si avrà $n=\frac{M\pi^2 a^2}{2T^2}$.

64. Per l'uso più comodo ed immediato di queste formole, poichè la maniera più semplice che abbiamo di paragonare le masse è quella di pesarle, è bene introdurvi i pesi de' corpi

in vece delle masse M, per scegliere quindi l'unità di peso che si vorrà. Per questo chiamiamo g la forza acceleratrice della gravità, misurata dalla celerità totale che essa imprimerebbe ad un punto materiale sopra cui agisse per un'unità di tempo; allora gM sarà il peso della massa M, e indicandolo con P si avrà $P=gM$, ossia $M=\frac{P}{g}$. Sostituendo questa espressione in vece di M nelle formole precedenti, esse divengono

$$T=\pi\left(\frac{Pa^2}{2gn}\right)^{\frac{1}{2}}=\pi a\sqrt{\frac{P}{2gn}}, \qquad n=\frac{P\pi^2a^2}{2gT^2}.$$

Il valore di g è conosciuto dalla Meccanica; esso è in metri 9,8088; in piedi di Parigi 30,196; in pollici 362,352; in linee 4348,224, prendendo per unità di tempo il secondo sessagesimale. Si impiegherà adunque quello di questi valori che corrisponderà all'unità di lunghezza in cui si sarà espresso il raggio a.

65. Queste formole teoriche essendo così stabilite passiamo ad applicarle alle sperienze di Coulomb. Esse furono fatte con fili d'ottone e di ferro tratti alla filiera, e a cui sospendeva cilindri verticali di 19 linee di diametro. La lunghezza de' fili era in generale di 9 pollici, e la grossezza varia. La prima e la più generale osservazione che queste sperienze ci presentano è che al dissotto d'un certo limite di torsione, in cui il filo non ritornava più alla sua forma primitiva, le oscillazioni erano perfettamente isocrone, d'onde segue, secondo le idee teoriche che abbiamo premesse, che la forza con cui le molecole scostate dalla lor naturale posizione dalla torsione tendono a ritornarvi è proporzionale alla torsione medesima, ossia all'angolo che la misura, epperò al loro stesso scostamento, legge affatto analoga a quella che abbiamo veduto risultare dalle sperienze di S'gravesande sull'allungamento de' fili metallici per la trazione longitudinale, e che già avevamo preveduto dover adattarsi pur anche alla torsione. Quanto agli altri risultati particolari di queste sperienze, li riferiremo a un certo numero di punti, e non daremo relativamente a ciascun risultato, per maggior brevità, che le particolarità delle sperienze principali sulle quali può essere stabilito.

66. Il primo risultato è che la quantità n è costante per ciascun filo, qualunque sia il peso P del cilindro che vi è sospeso, come altronde ciò è conforme alle nostre idee teoriche. Perchè questa costanza di n abbia luogo, bisogna che impiegando successivamente masse cilindriche di lunghezza diversa, ma di cui il raggio a sia sempre il medesimo, i quadrati de' tempi delle oscillazioni siano proporzionali a queste masse, affinchè il rapporto $\frac{P}{T^2}$, che è allora il solo elemento variabile nell' espressione di n, non cangi di valore. Bisogna, per esempio, che i tempi siano doppi quando i pesi sono quadrupli. Questo infatti si verifica nelle sperienze di Coulomb, nelle quali pel medesimo filo si sono impiegati pesi d'una mezza libbra, e di due libbre, di cui il secondo è quadruplo del primo. Così per un filo di ferro indicato col n.° 12 il tempo di 20 oscillazioni è stato di 120″ nel primo caso, e di 242″ nel secondo, numeri che sono tra loro molto prossimamente come 1 a 2. Per un altro filo di ferro più grosso, indicato col n.° 7 i tempi analoghi ne' due casi sono stati 42″ e 85″, numeri de' quali il secondo è ancora molto prossimamente doppio del primo. Questa costanza della quantità n in un medesimo filo, a cui si sospendono successivamente diversi pesi, ci mostra che la trazione esercitata sulle molecole nella direzione della lunghezza del filo non altera sensibilmente la reazione di torsione, con cui esse tendono a ritornare alla loro situazione di equilibrio verticale che ciascun peso traente ha loro data. Tuttavia ciò dee avere un limite, e infatti Coulomb ha trovato che aumentando di molto il peso del cilindro, si osserva finalmente una diminuzione nel valore del coefficiente n, vale a dire che la reazione di torsione del filo s'indebolisce. Ma probabilmente questo non ha luogo se non quando il peso è abbastanza grande per alterare stabilmente la lunghezza e il diametro del filo.

67. Vediamo ora in secondo luogo quali siano le leggi che segue il valore di n nelle sperienze di Coulomb, secondo la natura del filo, la sua lunghezza e la sua grossezza, servendoci della formola $n = \frac{P\pi^2 a^4}{2gT^2}$. Quanto alle lunghezze citeremo due sperienze fatte con un filo d'ottone n.° 7, di due lunghezze

che erano tra loro come 1 a 4, cioè di 9 e di 36 pollici. Il peso del cilindro era lo stesso ed uguale a 2 libbre. I tempi impiegati a far 20 oscillazioni furono 110″ per la prima lunghezza di filo, e 221″ per la seconda, vale a dire come 1 a 2, ossia in ragione delle radici quadrate delle lunghezze, d' onde segue, secondo la formola citata, che i valori di n pel medesimo filo debbono essere in ragion inversa di queste lunghezze; molte altre prove che Coulomb ha tentate hanno confermato questo risultato. La forza di torsione d'un filo di dato diametro per un angolo di torsione uguale è dunque tanto più piccola quanto è più grande la lunghezza del filo; nè ciò dee parere strano, poichè la torsione reale è in questo caso essa medesima necessariamente tanto minore pel filo più lungo; si può infatti, per esempio, un filo di doppia lunghezza considerare come formato da due fili di cui ciascuno, supponendo lo scostamento delle molecole proporzionale alla loro distanza dal punto di sospensione, non ha che la metà dell'angolo di torsione osservato all'estremità del filo totale, dovendosi l'angolo di torsione della seconda parte del filo riferire alla posizione delle ultime molecole della prima.

68. Supponendo quindi le lunghezze uguali, ma le grossezze diverse, si trova che i tempi delle oscillazioni sono in ragion inversa dei pesi de' fili, supposti della medesima sostanza. Prenderemo per esempio tre esperienze fatte con fili di ferro, sotto una tensione di 2 libbre; essi sono indicati coi n.i 12, 7, ed 1, e il loro peso per una lunghezza di 6 piedi era di 5, 14, e 56 grani. I tempi impiegati per 20 oscillazioni furono 242″, 85″, e 23″. Ora se i tempi T sono in ragione inversa de' pesi de' fili per una lunghezza di 6 piedi, epperciò per una lunghezza uguale qualunque, il prodotto di questi pesi per T dee esser uguale. Effettuando questo prodotto pe' tre fili si trova pel n.° 12 il numero 1210, pel n.° 7 il numero 1190, e pel n.° 1 il numero 1288. Questi numeri si approssimano molto, come si vede, all' uguaglianza, e le loro differenze possono senza difficoltà attribuirsi agli errori delle osservazioni. I tempi delle oscillazioni sono adunque, come abbiamo annunziato, in ragion inversa de' pesi de' fili a lunghezza uguale. Ma questi pesi sono essi medesimi proporzionali ai quadrati de' diametri

de' fili; i tempi delle oscillazioni sono adunque in ragion inversa di questi quadrati; e siccome la costante n, secondo la formola, è in ragione inversa de' quadrati de' tempi, essa sarà dunque proporzionale alla quarta potenza de' diametri de' fili, e per conseguenza al quadrato delle aree delle sezioni trasversali de' medesimi.

69. Posti questi risultati sull'influenza della lunghezza, e della grossezza del filo sopra il valore di n per un filo di materia data, possiamo calcolare quale sarebbe il valore di n per una lunghezza e diametro qualunque, e in particolare per una lunghezza e diametro uguali all' unità di lunghezza, in un dato metallo per cui si abbiano sperienze di questo genere, e considerare così la forza di torsione de' diversi metalli ridotti a circostanze uguali, ossia la *rigidezza* naturale di questi metalli. Infatti chiamando D il diametro d'un filo qualunque, L la sua lunghezza, si avrà generalmente, secondo quello che abbiamo veduto $n = \frac{\mu D^4}{L}$, μ essendo un coefficiente costante che si riduce ad n quando $D=1$, $L=1$, e che misura per conseguenza questa rigidezza sotto l'unità di lunghezza e di diametro. Si osserverà che se si sostituisce quest'espressione di n in quella sovra stabilita della forza necessaria per torcere un filo di X°, applicandola ad una leva di lunghezza R, cioè $\frac{\pi n X^\circ}{180 R}$, essa diverrà $\frac{\pi \mu D^4 X^\circ}{180.LR}$, cosicchè chiamando questa forza F si avrebbe per l' espressione del suo momento $FR = \frac{\pi \mu D^4 X^\circ}{180.L}$; questo è il momento di forza richiesto per torcere di X° un filo di lunghezza L, di diametro D, e di cui la rigidezza sia espressa da μ. Reciprocamente se si indica con E questo momento si avrà $\frac{X^\circ}{180} = \frac{EL}{\pi \mu D^4}$ per l'espressione dell'angolo di torsione prodotto da un dato momento in questo filo. Dall'indicata espressione di n in funzione di μ, D ed L si può dedurre quella di μ, ossia della rigidezza del metallo in funzione di n, e delle stesse quantità D, L; cioè $\mu = \frac{nL}{D^4}$. Con questa espressione

quando si sarà determinato n per esperienza in un filo di cui siano date la lunghezza e la grossezza, si potrà calcolare il valore di μ relativamente alla specie di metallo di cui il filo è composto. Applichiamo questo calcolo alla sperienza di cui ci siamo già serviti, sul filo di ferro n.° 12, teso da un cilindro verticale del peso di 2 libbre di Francia di cui il raggio è di $9\frac{1}{2}$ linee, e di cui 20 oscillazioni si fanno in 242″; e per questo calcoliamo prima il valore assoluto di n per questo filo, in vece che finqui ci siamo contentati di semplici rapporti a questo riguardo. Adoperando qui la formola $n=\frac{P.\pi^2a^2}{2gT^2}$, nella quale si prenda per unità di peso la libbra, il che da $P=2$, per unità di lunghezza la linea, e quindi $a=9,5$, per unità di tempo il secondo sessagesimale, e così $T=\frac{242''}{20}=12'',1$, impiegando anche per g il valore in linee che è 4348,2, ed osservando che si ha $\pi=3,14159$, si troverà $n=\frac{1\text{ libbr.}}{714,7}$. Vale a dire, supponendo che l'arco di torsione di questo filo, misurato sopra un circolo d'una linea di raggio, fosse uguale ad una linea di lunghezza, bisognerebbe, per tenerlo in equilibrio, impiegare un peso di circa $\frac{1}{715}$ di libbra che agisse perpendicolarmente, ed orizzontalmente sull'estremità d'un braccio di leva d' una linea di lunghezza. E se si volesse torcere questo medesimo filo di X° con una forza che vi agisse per mezzo d'un vette di lunghezza R, si dovrebbe per conseguenza applicare perpendicolarmente all'estremità di questo una forza

$$\frac{\pi n X^\circ}{180.R}=\frac{\pi.X^\circ}{180.715.R}.$$

Se, per esempio, $X^\circ=360^\circ$, ed $R=12$ linee, questa forza sarà $\frac{2.3,14159}{715.12}$, ossia $\frac{1\text{ libb.}}{1366}$, che equivale a un dipresso a $6\frac{1}{2}$ grani; tale è dunque il peso che converrebbe fare agire

perpendicolarmente all'estremità d'un vette di 12 linee per torcere questo filo d'una circonferenza intiera. Conoscendo ora il valore di n per questo filo di cui è nota pur anche la lunghezza L, non si tratta più che di sapere il suo diametro D, per poter calcolare il valore di μ colla formola $\mu = n.\frac{L}{D^4}$. Ora si ottiene facilmente questo diametro quando si conosce il peso del filo sotto una lunghezza data, e il peso specifico della sostanza; così partendo dai dati che il filo di ferro di cui si tratta pesava 5 grani per 6 piedi di lunghezza, e che il piede cubico di ferro pesa circa 540 libbre di Francia, si trova che il diametro di questo filo dovea essere di circa $\frac{1}{15}$ di linea. La lunghezza impiegata nelle sperienze di torsione è 9 pollici ossia 108 linee; si ha così

$$\mu = \frac{nL}{D^4} = \frac{1}{715}.\frac{108}{\left(\frac{1}{15}\right)^4} = \frac{(15)^4.108}{715} = 7646{,}9 .$$

Questo è dunque il valore di μ in libbre di Francia, cioè la forza che bisognerebbe applicare all'estremità d'un vette d'una linea di lunghezza per torcere d'un arco d'una linea di lunghezza un filo di ferro che avesse una linea di lunghezza, ed una linea di diametro, supponendo che questo filo potesse torcersi così senza cangiare stabilmente di forma. Per qualunque altro filo poi della stessa natura, ma di cui il diametro sarà D, e la lunghezza L, si avrà

$$n = 7646{,}9.\frac{D^4}{L} .$$

Per calcolare similmente la rigidezza de' fili d'ottone ci serviremo d'una sperienza di Coulomb sopra un filo di questo metallo, indicato col n.° 12. Questo filo era parimenti teso dal peso di 2 libbre, che avea la forma di cilindro di 9,5 linee di raggio; il tempo in cui questo filo faceva 20 oscillazioni era di 442", epperciò la durata di ciascuna oscillazione $\frac{442''}{20}$ ossia

22″,1. Abbiamo dunque qui $a=9,5$; $P=2$ libb., $T=22,1$. Sostituendo questi numeri nell' espressione generale di n, e chiamando n' il suo valore per questo filo d'ottone, troviamo $n'=\frac{1 \text{ libb.}}{2384,2}$. Questo valore di n' è minore di quello di n che conviene al filo di ferro n.° 12, nella proporzione di 3,34 ad 1; la forza necessaria per torcere il nostro filo d'ottone di 360°, e che agisse sopra di esso con un vette di 12 linee, sarebbe adunque anche più piccola nello stesso rapporto, cioè uguale a grani $\frac{6,5}{3,34}$, ossia a circa 2 grani. Si dovrebbe ora calcolare il diametro D, partendo da che la lunghezza di 6 piedi di questo filo pesava 5 grani, come quella del filo di ferro dello stesso numero; ma siccome il peso specifico dell' ottone è poco diverso da quello del ferro, si può supporre che questo filo d'ottone avea in conseguenza molto prossimamente lo stesso diametro che quel filo di ferro, cioè $\frac{1}{15}$ di linea. Allora il rapporto 3,34 ossia $3\frac{1}{3}$ circa è anche quello de'coefficienti μ e μ', che convengono al ferro ed all'ottone. Quindi la rigidezza naturale dell'ottone μ' espressa dalla forza di torsione d'un filo d'una linea di diametro, e d'una linea di lunghezza, per un arco di torsione d'una linea, e applicata ad un vette pur d'una linea, sarà in libbre di Francia $\frac{7646,9}{3\frac{1}{3}}$ ossia 2317 libbre circa; e per fili di ferro, e d'ottone qualunque di dimensioni e di lunghezze uguali, le rigidezze di torsione saranno come $3\frac{1}{3}$ ad 1; vale a dire che torcendo il filo di ferro d'un circolo si avrà la stessa reazione di torsione, che torcendo il filo d'ottone di $3\frac{1}{3}$ circoli, supponendo che la loro forma non sia alterata stabilmente da una simile torsione; o altrimenti per archi di torsione uguali la reazione è nel ferro uguale a 3 volte e un terzo quella dell' ottone; e questo stesso rapporto di forza elastica tra i due metalli avrebbe dovuto verificarsi a un dipresso nei fili di ferro e

d'ottone, quali Coulomb gli ha adoperati, per qualunque altra maniera con cui se ne fossero scostate le molecole d'una quantità uguale dalla loro situazione naturale, per esempio, per la trazione longitudinale, sempre al dissotto del limite del cangiamento stabile di forma. È però osservabile che il rapporto tra le forze elastiche così considerate non è lo stesso che quello che avea luogo tra le coesioni assolute degli stessi metalli, almeno quali risulterebbero dalla loro tenacità, cioè dal peso necessario per romperne fili d'un medesimo diametro colla trazione longitudinale, poichè il filo di ferro n.° 12, come Coulomb ha sperimentato, si rompeva sotto un peso di 60 oncie, e quello d'ottone dello stesso n.°, sotto un peso di 35 oncie; il rapporto di questi pesi è di 1,71 ad 1, mentre quello delle forze elastiche di torsione ha un valore a un dipresso doppio. Del resto questi rapporti di rigidezza e di tenacità del ferro e dell'ottone, quali risulterebbero dalle sperienze di Coulomb, e particolarmente quello della rigidezza, sono notabilmente diversi da quelli che loro sono stati assegnati da altri autori, e di cui si è parlato precedentemente.

70. L'ampiezza delle oscillazioni d'un filo che ha subito una torsione al di qua del limite in cui vi ha cangiamento stabile nella sua forma, sebbene queste oscillazioni siano sempre isocrone, conformemente ai nostri principii teorici, va diminuendo, come negli altri casi analoghi (n.° 42), finchè il filo abbia ripreso il suo stato d'equilibrio. Coulomb si è assicurato che questa diminuzione non è in questo caso sensibilmente dovuta alla resistenza dell'aria; poichè avviluppando i cilindri metallici sospesi ai fili con lunghi cilindri di carta dello stesso diametro, la diminuzione non è stata notabilmente più rapida, sebbene la resistenza dell'aria dovesse allora esser più grande. Questa diminuzione progressiva delle ampiezze sembra dunque dipendere, come già l'ho accennato nel n.° citato, dalla difficoltà che le molecole del metallo provino a cangiar così momentaneamente di posizione le une relativamente alle altre, conformemente anche alle osservazioni di Weber (n.° 52), difficoltà che rende la loro elasticità imperfetta, anche al dissotto del limite della trasformazione stabile, se non che potrebbe forse anche in parte attribuirsi al fregamento delle molecole del filo

nel punto di sospensione. Comunque sia, Coulomb ha cercato di determinare la legge di questa imperfezione, secondo i diversi gradi di torsione, osservando quante oscillazioni si richiedessero perchè l'ampiezza diminuisse di 10°, partendo da torsioni, e per conseguenza da ampiezze iniziali diverse, ed ha trovato così che al dissotto d'un angolo di torsione o ampiezza iniziale di 45° la rapidità della diminuzione così determinata era molto prossimamente proporzionale a quest'angolo stesso di torsione o ampiezza iniziale. Ma al dissopra dell'angolo di torsione di 45° questa legge diveniva inesatta, e la diminuzione era più rapida di quello che questa legge avrebbe richiesto.

Un filo d' ottone simile presentò a Coulomb la stessa legge di diminuzione nell' ampiezza delle oscillazioni, se non che la diminuzione assoluta per le torsioni corrispondenti era men rapida, il che pare indicare una maggior perfezione nell'elasticità dell'ottone che del ferro, quantunque la forza elastica del ferro, per un uguale scostamento delle molecole sia maggiore che quella dell'ottone, come sopra si è veduto.

71. I risultati precedenti sono relativi alla supposizione che le particelle metalliche dopo aver terminato le loro oscillazioni ritornino alla stessa posizione di riposo in cui si trovavano avanti che si torcesse il filo; ma se si torce il filo al di là d'un certo limite questo ristabilimento non ha più luogo, a cagione del cangiamento stabile, già più volte accennato, che ne deriva nella posizione relativa delle molecole. Allora il *centro di reazione*, come Coulomb si esprime, si trova *traslocato* dopo la torsione, cioè lo stato d'equilibrio a cui il filo si fissa dopo le oscillazioni non si trova più corrispondere al punto di prima, ma ad un altro distante da quello di più gradi, od anche di più circonferenze di circolo. Il limite al di là di cui quest'effetto cominciava a divenir sensibile pe' fili di ferro n.° 12 e n.° 7 della lunghezza di 9 pollici era 180° di torsione ugualmente; ma pel filo di ferro n.° 1, molto più grosso, questo limite era assai più ristretto, cioè di soli 45°, la lunghezza essendo sempre di 9 pollici. Pe' fili d'ottone indicati rispettivamente coi medesimi numeri, e di cui la grossezza dovea differir poco da quelli di ferro corrispondenti, questo limite era più rimoto, cioè di 360° pe' numeri 12 e 7, e 50° pel n.° 1,

cosicchè l' ottone quantunque meno elastico del ferro per un' eguale scostamento di molecole, al dissotto del limite della trasformazione stabile, ha però una più grande estensione, per dir così, di elasticità, cioè è suscettibile d'uno scostamento più grande delle molecole senza che esse cessino di ritornare in virtù dell'elasticità alla loro posizione, in vece di cangiarla stabilmente.

Coulomb ha poi anche fatto alcune esperienze sulle leggi di questa traslocazione del centro di reazione a misura che la torsione progredisce oltre al limite in cui essa comincia a manifestarsi. Così nel filo di ferro n.° 1 di 6 pollici e 6 linee di lunghezza, per una torsione di 180° ossia d'una mezza circonferenza, la traslocazione del centro di reazione si trovò di 8°, in guisa che la distorsione del filo lasciato a se medesimo fu di 180—8°, ossia 172° in vece di 180° di cui avrebbe dovuto distorcersi per ritornare alla prima situazione. Torcendo di nuovo il filo di una circonferenza intiera, a partire dalla nuova situazione del centro di reazione, si ebbe una nuova traslocazione del medesimo di 5o°, cosicchè la traslocazione intiera per 368° di torsione fu di 58°, e la quantità di cui il filo tornò verso la posizione d' equilibrio da cui si è partito in questa seconda torsione, fu di 360°—5o°, ossia di 310°, e così molto più grande che nella prima torsione per cui si era partito dalla posizione naturale. Continuando sempre a torcere il filo, partendo dalle nuove situazioni successive del centro di reazione, e sempre d'un numero crescente di circonferenze si pervenne ad una traslocazione totale di questo centro di 22 circonf. +298°; ma la quantità di cui il filo ritornava verso la posizione da cui si partiva in ciascuna torsione successiva andava aumentando, e dopo l' ultima torsione, che avea prodotta la totale traslocazione suddetta, questa quantità si trovò di una circonferenza intiera +120°. Coulomb chiama questa quantità *estensione della reazione del filo* dopo ciascuna torsione, ed è chiaro infatti che essa indica una maggior lontananza del limite di scostamento delle parti dalla situazione naturale in cui attualmente si trovano, al quale comincia una nuova trasposizione stabile delle molecole. Poichè dunque questa estensione di reazione va crescendo a misura che il filo ha già subita una

torsione stabile più forte, ossia una più grande traslocazione del suo centro di reazione, ne segue che questa modificazione aumenta l'estensione dell'elasticità del filo; e ciò è naturale poichè la posizione primitiva delle molecole del filo non può esser così alterata senza una forte compressione delle medesime, che mette il metallo in quello stato particolare di maggior densità e durezza, di cui si è parlato nel n.° 25, e che lo fa passare dalla qualità d'un corpo duttile a quella d'un corpo fragile, in cui finalmente l'estensione di reazione elastica ha luogo sino a quel cangiamento nella posizione delle molecole in cui cessa ogni adesione, e il corpo si spezza. Ed infatti avendo voluto Coulomb continuare a torcere di più circonferenze il filo di cui si tratta, già spinto al suddetto grado di torsione stabile, esso si spezzò.

Coulomb ha fatta una simile sperienza sopra un filo d'ottone del medesimo numero (epperò a un dipresso della medesima grossezza) e della stessa lunghezza, pel quale, come si è detto, il limite della torsione senza traslocamento del centro di reazione era alquanto maggiore che pel filo di ferro, cioè di 5o°. I fenomeni che si presentarono furono simili, ma bisognò torcere questo filo d'una quantità più considerevole per traslocare il centro di reazione d' una ugual quantità. L'estensione di reazione aumentò anche qui a misura che il centro di reazione si traslocava, ma l'estensione totale di essa, a cui il filo d'ottone pervenne, fu più grande che pel filo di ferro, cioè di 2 circonf. + 6o° in vece di 1 circonf. + 120°, ed essa ebbe luogo quando la traslocazione fu di 32 circonf. + 20°. Volendo poi spingere la torsione più oltre il filo si ruppe. Da tutti questi risultati riuniti si conferma quello che già abbiamo osservato, che le molecole del filo d'ottone possono senza cangiare stabilmente i loro punti di contatto, oscillare attorno alla loro posizione d'equilibrio in una estensione molto più grande che le molecole del filo di ferro, e che per conseguenza l'elasticità dell' ottone è in questo senso, come anche per la qualità indicata nel n.° 70, più perfetta che quella del ferro, sebbene la forza necessaria per iscostare d'una quantità uguale le molecole senza alterarne stabilmente la posizione, sia più grande pel ferro che per l'ottone. Forse però questa maggior estensione dell' elasticità dell' ottone non è che

una conseguenza della inferiorità stessa della sua intensità, la forza più grande che conviene adoperare per la torsione del ferro non potendo a meno di comprimere nel medesimo tempo le molecole, e farle cadere nella sfera di quelle particolari attrazioni che determinano un cangiamento stabile di posizione.

72. Coulomb ha fatto anche alcune sperienze comparative sulla torsione dello stesso filo in diverso stato di durezza prodotto dalla compressione. Paragonò in particolare i risultati della torsione del filo d'ottone n.° 1 dopo essere stato ricotto, e così liberato da quell' effetto della compressione che dovea aver subito nel passare per la filiera, con quelli relativi al medesimo filo non ricotto. Nel primo circolo di torsione questo filo ricotto non aveva che una estensione di reazione di 5o°, vale a dire, che il centro di reazione si traslocava in maniera che restava a 5o gradi soltanto di distanza dall'ampiezza di torsione che gli si era data. Ma continuando a torcerlo questa estensione di reazione aumentava, cosicchè quando questo filo si ruppe, il che non accadde se non dopo che ebbe subita una torsione totale di 140 circonferenze, la sua estensione di reazione dovea essere di circa 520° ossia 1 circonf. + 160°, e così non molto inferiore a quella che lo stesso filo non ricotto avea acquistato avanti di rompersi, che era 2 circonf. + 20°. Quindi si vede che la torsione sola dà dell'elasticità al filo d' ottone come la compressione nella filiera, ma però in un grado alquanto minore. Nel filo ricotto la coerenza o tenacità era anche considerevolmente indebolita; esso poteva appena sostenere un peso di 12 libbre, mentre avanti di essere ricotto esso ne sosteneva 22 al momento della rottura. Ma questo può in parte essere attribuito alla stessa maggior duttilità. Quanto poi alla forza di torsione del filo ricotto al dissotto del limite della traslocazione del centro di reazione, essa era la medesima che nel filo non ricotto, poichè sospendendovi gli stessi pesi, le oscillazioni erano ne' due casi di uguale durata, il che fa vedere che la compressione che rende i metalli meno duttili, cioè meno suscettibili di cangiare stabilmente la posizione delle loro molecole, ravvicinando queste molecole, e mettendole in certe situazioni particolari, non altera sensibilmente la forza con cui esse resistono ad un uguale scostamento dalla loro situazione attuale

al dissotto del limite della trasposizione stabile, forse perchè il cangiamento di distanza prodotto dalla compressione non è abbastanza grande perchè ne risulti un cangiamento sensibile nell'attrazione tra le molecole. Questo risultato è altronde conforme a quello che già abbiamo osservato nel riferire le sperienze di S'gravesande ed altri, sulla forza elastica de' fili e delle spranghe metalliche, che la forza elastica del ferro, sotto al limite della flessione permanente, non cangia sensibilmente nelle diverse qualità di questo metallo. Coulomb si è anche assicurato con esperienze di quest' ultimo genere, che la forza elastica dell'acciajo temprato, e dello stesso acciajo non temprato, o che è stato ricotto dopo la tempra, al dissotto del limite, in cui quest'ultimo si piegava stabilmente, era la medesima, e che l'acciajo non temprato differiva solamente da quello temprato, in quanto esso per una forza molto minore di quella che si richiedeva per rompere l'acciajo temprato al grado atto a fornire una buona molla, si piegava stabilmente, in vece che la medesima spranga temprata al suddetto grado non poteva piegarsi stabilmente avanti di rompersi. È però notabile che ad un grado più forte di tempra la forza necessaria per rompere la spranga diveniva minore, e a un dipresso uguale a quella che produceva la flessione stabile dell' acciajo non temprato, il che s'accorda con quello che abbiamo veduto risultare dalle sperienze di Muskembroeck, e di altri fisici.

73. Aggiungerò qui a quest'esposizione de' risultati delle sperienze di Coulomb sulla forza di torsione de' fili metallici, che il medesimo autore ha fatta un'applicazione felicissima di questa forza, e del principio che essa è proporzionale all' angolo di torsione, alla costruzione d'uno stromento che può servire a misurare in generale tutte le piccole forze. Questo stromento è essenzialmente formato d'un filo metallico verticale attaccato per la sua estremità superiore ad un punto fisso, e che alla sua estremità inferiore tesa da un piccolo peso porta un ago od indice orizzontale. Quando si vogliono apprezzare piccole forze, si fanno queste agire sull' estremità dell' ago, e si misura la loro intensità dall'angolo di cui esse lo scostano dal suo punto di riposo, e di cui per conseguenza torcono il filo metallico. Coulomb ha dato a questo stromento il nome di

bilancia di torsione. Affinchè l'agitazione dell'aria non alteri il moto dell'ago, esso è rinchiuso in un recipiente cilindrico di vetro, e il filo è anche contenuto in un tubo di vetro, alla sommità del quale si adatta un quadrante diviso, che può girare con un ruvido fregamento attorno al tubo. La tenaglietta che sostiene il filo porta un indice orizzontale, che percorre questo quadrante, e che essendo collocato sopra il punto zero della sua divisione nota il punto di partenza degli angoli di torsione. Finalmente una divisione circolare applicata orizzontalmente attorno al recipiente di vetro misura la traslocazione dell'ago sospeso al filo, epperciò l'angolo di torsione stesso. Tutto quest'apparecchio è rappresentato nella fig. 10. Si danno al filo ed all'ago lunghezze e grossezze diverse secondo l'oggetto che altri si propone. Se si vogliono misurare piccolissime forze, e dare una grande sensibilità all'apparato bisogna impiegare fili lunghi e tenui; poichè, come abbiamo veduto, la forza di torsione è inversamente proporzionale alle lunghezze de' fili, e direttamente alle potenze quarte de' loro diametri. I lunghi fili hanno ancora questo vantaggio che si possono torcere d'un maggior numero di gradi senza che la loro elasticità ne sia alterata. Bisogna inoltre impiegare i metalli di cui l'elasticità è la meno imperfetta quanto all'estensione. A questo riguardo abbiamo veduto che l'ottone è molto superiore al ferro, e di questo metallo appunto Coulomb si serviva ordinariamente nella costruzione di questo stromento. Si fa un frequente uso di questo apparato nelle esperienze relative al magnetismo, e all'elettricità. A noi basta di averne indicata la costruzione, come un'applicazione della legge della forza di torsione che abbiamo stabilita. Aggiungerò qui che il signor Ritchie ha sostituito con vantaggio ai fili metallici, nella costruzione di un simile stromento, fili di vetro sottilissimi che ha trovato potersi torcere anche a molti giri, tornando sempre alla lor primitiva situazione, senza alterazione permanente, e ne ha fatto applicazioni analoghe a quelle di Coulomb (v. *Trans. filos.* 1830, parte 2.ª e *Journal of R. Institution*, *oct.* 1830, oppure *Biblioth. univ.*, *oct.* 1830 *et janvier* 1831).

74. Le sperienze di Coulomb furono fatte, come si è veduto, sopra fili di piccolo diametro, e tesi da un peso. Si poteva

dubitare se si sarebbero ottenuti risultati analoghi operando sopra verghe abbastanza grosse per poterle torcere, mentre esse si mantenessero rettilinee per la semplice rigidezza della loro sostanza. Ma sperienze posteriori a quelle di Coulomb hanno dimostrato che le formole indicate sono anche applicabili a questo caso. Così Dulau, all'occasione delle sperienze di cui già abbiamo parlato sulla resistenza del ferro determinata per forze di trazione o di inflessione, si è anche occupato di sperienze sulla forza di torsione del medesimo metallo in verghe cilindriche, e ha trovato che la resistenza che simili verghe oppongono alla torsione è, come quella dei fili di Coulomb, in ragione inversa della lunghezza, e in ragione diretta della quarta potenza del diametro. Quanto alle forze assolute egli trovò che una verga cilindrica di 1 metr. di lunghezza e di metr. 0,01 di diametro si torce alla sua estremità libera di 1° sessagesimale per l'azione d'un peso di 22 chilogrammi applicato alla circonferenza della verga. Per paragonare questo risultato con quello dedotto dalle sperienze di Coulomb (n.° 69), secondo il quale si ha 7647 pel numero di libbre di Francia in peso che bisognerebbe applicare all'estremità d'un vette della lunghezza d'una linea, per torcere d'un arco d'una linea pur di lunghezza un filo di ferro che avesse anch'esso una linea di lunghezza, e una linea di diametro, si osserverà che la circonferenza d'un circolo avente un raggio di una linea, ossia un diametro di 2 linee, è di 2π linee, π essendo il rapporto tra la circonferenza e il diametro; un grado sessagesimale di questo circolo avrà dunque una lunghezza in linee espressa da $\frac{2\pi}{360}$ ossia $\frac{\pi}{180}$; per aver quindi la forza corrispondente alla torsione d'un grado nelle stesse circostanze, e nelle stesse unità di sopra, converrà moltiplicare il numero 7647 per $\frac{\pi}{180}$ ossia per $\frac{3,1416}{180}$, il che dà 133,4 libbre, ossia 65,30 chilogr.; ma se in vece di supporre questo peso applicato a un vette d'una linea si dee esso applicare ad un vette della lunghezza d'un mezzo centimetro, come nelle sperienze di Dulau, osservando che una linea equivale a 2,256 millim., ossia a centim. 0,2256, e per conseguenza a 0,4512 mezzi centimetri, bisognerà prendere questi pesi in

ragione inversa delle lunghezze del vette, e così si avrà nel nostro caso 65,3.0,4512, ossia 29,46 chilogr. per la forza richiesta a torcere un filo che avesse una linea di lunghezza e una linea di diametro; ma poichè nelle sperienze di Dulau la lunghezza era d'un metro, e il diametro di 0,01 metr., e una linea equivale a metr. 0,002256, ossia il metro è $\frac{1}{0,002256}$ linee, e 0,01 metr. per conseguenza $\frac{1}{0,2256}$ linee, converrà dividere il numero di chilogr. 29,46 per $(0,2256)^4$ e moltiplicarlo per 0,002256, il che dà 25,66 chilogrammi, numero poco diverso da 22 che Dulau ha osservato.

75. Anche il signor Savart fece sperienze sulla forza di torsione del ferro, e di alcuni altri metalli in verghe mantenute rettilinee dalla sola loro rigidità, e le estese dalle verghe cilindriche anche a quelle di sezione triangolare e rettangolare (*Annales de chimie et de physique*, *août* 1829). Egli si servì per queste sperienze di spranghe in posizione orizzontale, e fisse ad una delle loro estremità in una morsa, mentre l'altra era appoggiata contro al vertice d'un piccolo cono d'acciajo immobile; quest'ultima estremità era abbracciata da un foro quadrato o rettangolare fatto in una leva d'acciajo, alla estremità della quale agiva il peso destinato a produrre la torsione, e i gradi di questa si misuravano per mezzo d'un lungo ago annesso alla verga, e che li segnava sopra un arco di circolo.

Il risultato generale di queste sperienze fu che qualunque sia la figura della sezione trasversale delle verghe, gli archi di torsione per le verghe di sezione uguale e simile sono direttamente proporzionali al momento della forza che le torce, e alla loro lunghezza, e che per conseguenza i momenti delle forze necessarie per produrre uno stesso grado di torsione sono in ragione inversa delle loro lunghezze, e gli archi di torsione per un dato momento di forza di torsione proporzionali direttamente alle lunghezze, come già per le verghe cilindriche risultava dalle sperienze di Coulomb e di Dulau. Quanto alle verghe di sezioni trasversali simili tra loro, qualunque ne fosse la figura, Savart trovò che a lunghezze uguali delle verghe, gli archi di torsione prodotti da un dato momento di forza sono in ragion

inversa della 4.ª potenza delle dimensioni lineari omologhe della sezione, ossia che i momenti delle forze necessarie per produrre uno stesso grado di torsione sono direttamente proporzionali a questa quarta potenza delle dimensioni della sezione, non altrimenti che per le verghe cilindriche questi momenti sono proporzionali alla quarta potenza dei diametri. Questa legge si estende anche a verghe di cui le sezioni siano rettangoli molto allungati, cosicchè esse presentino la forma di lamine o tavole.

Per le verghe poi di sezioni rettangolari non simili tra loro, Savart ha trovato che supponendo l'elasticità della loro sostanza uniforme in tutte le direzioni, gli archi di torsione per uno stesso momento di forza sono in ragione inversa del prodotto dei cubi delle due dimensioni trasversali diviso per la somma dei loro quadrati, ossia che i momenti delle forze richieste per un arco di torsione dato sono in ragione diretta di questo stesso quoziente. Si osserverà che questa legge comprende, come caso particolare, quella relativa alle verghe di sezione rettangolare simile; poichè, secondo questa legge, se le dimensioni di una delle verghe sono A, B, e quelle dell'altra a, b, i momenti delle forze richieste per produrre un dato arco di torsione, saranno tra loro $:: \frac{A^3 B^3}{A^2 + B^2} : \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$; ora nel caso delle sezioni simili si ha $a = nA$, $b = nB$, n essendo un numero qualunque; il secondo termine di quel rapporto diviene adunque $\frac{n^6 A^3 B^3}{n^2 (A^2 + B^2)}$, che sta al primo come $\frac{n^6}{n^2}$, ossia n^4 ad 1, cioè in ragione della quarta potenza delle dimensioni omologhe. Se la larghezza della lamina fosse molto grande relativamente allo spessore, gli archi di torsione per un dato momento di forza sarebbero, secondo l'indicata legge, sensibilmente in ragion inversa della larghezza e del cubo dello spessore, trascurando cioè il quadrato della minore dimensione relativamente al quadrato della maggiore, poichè allora $\frac{A^2 + B^2}{A^3 B^3}$ si riduce per esempio ad $\frac{A^2}{A^3 B^3}$ ossia $\frac{1}{AB^3}$. Quindi per larghezze uguali gli archi di torsione saranno semplicemente in ragion inversa del cubo dello spessore, e per uguali spessori in ragion inversa della semplice larghezza: e i

momenti delle forze per archi di torsione dati saranno direttamente proporzionali a queste due quantità, la lunghezza essendo sempre supposta costante.

76. Il signor Savart ha anche indicato i valori assoluti delle forze di torsione per le verghe di dimensioni e di figure determinate su cui ha sperimentato, formate di diverse sostanze, e si potrebbero, per mezzo de' suoi risultati paragonati sia tra loro, sia con quelli di Coulomb e di Dulau sulle verghe cilindriche, determinare il rapporto delle forze di torsione per le verghe di ciascun metallo di diversa figura di sezione, cioè di quelle a sezione cilindrica, triangolare e rettangolare; ma queste relazioni sono più interessanti per la Meccanica che per la Fisica a cui questo trattato appartiene. Si potrebbero anche paragonare i diversi risultati ottenuti con verghe di metalli diversi, onde confermare o modificare i rapporti delle loro rigidezze dati dalle sperienze più dirette, e quali sopra li abbiamo riferiti. Ma mi limiterò a questo riguardo a notare i risultati che Savart istesso ha dedotti dalle sue sperienze riguardo alla rigidezza di ciascun metallo ne' due stati in cui si pongono i metalli per un lento o rapido raffreddamento. Quanto ai metalli semplici come il ferro, il rame ed il platino, egli ha trovato che il raffreddamento più o men rapido dopo la loro liquefazione od incandescenza non avea alcuna influenza sensibile sopra la loro forza elastica quale è indicata dalla loro forza di torsione. Altrimenti sta la cosa per le leghe o metalli composti. Così nell'acciajo fuso, dopo un raffreddamento lento, e dopo un raffreddamento subitaneo da cui dovea risultare tempra del medesimo, egli ha trovato le forze di torsione in circostanze simili nel rapporto di 2873 a 2680, ossia a un dipresso di 29 a 27 o di 15 a 14, numeri però di cui la differenza non è molto notabile, ed ha potuto sfuggire ad altre sperienze sopra riferite, secondo le quali si è ammesso che la tempra non altera sensibilmente la forza elastica dell'acciajo, mentre qui si vede che essa la diminuirebbe d' alcun poco. Così pure in un filo d'ottone Savart ha trovato che, mentre la forza di torsione nel medesimo raffreddato lentamente era rappresentata da 368,5, quella che avea dopo un raffreddamento subitaneo era soltanto di 355,8, cioè diminuita nel rapporto di circa 29 a 28. La di-

minuzione di forza elastica pel raffreddamento rapido fu ancora molto più notabile per le verghe fatte colla lega dei *tam-tam*, di cui già abbiamo parlato; questa forza dopo un raffreddamento lento stava a quella dopo un raffreddamento subitaneo, come 380 a 300, ossia come 19 a 15, cioè in un rapporto un po' più grande che quello di 6 a 5. Abbiamo veduto che il raffreddamento rapido produce in questa lega, quanto alla duttilità, un effetto inverso di quello che produce sull' acciajo, cioè ne diminuisce la fragilità, ossia dà alla lega, che è fragile dopo un lento raffreddamento un certo grado di duttilità; si vede però che la diminuzione di forza elastica è indipendente da questa diversità d'effetti relativamente alla fragilità e duttilità, ed ha luogo ugualmente nell'acciajo e nella lega di cui si tratta, sebbene in grado molto maggiore in quest' ultima.

Questa diminuzione di forza elastica nel rapido raffreddamento delle leghe pare doversi attribuire alla meno perfetta adesione delle particelle, che nel raffreddamento non hanno avuto tempo di prendere le une relativamente alle altre la loro naturale posizione. Secondo una sperienza del signor Savart sopra un filo d'ottone l'induramento stesso cagionato dalla compressione e dalle battiture produrrebbe un effetto analogo a quello del rapido raffreddamento, cioè di diminuire alquanto la forza elastica relativamente a quella che lo stesso filo avea dopo un lento raffreddamento, in vece che, secondo le sperienze degli altri fisici, quest'induramento non aumenterebbe, nè diminuirebbe la forza elastica; ma questo risultato di Savart è forse prodotto da qualche circostanza accidentale nella sua sperienza.

Aggiungerò qui che Savart ha trovato in generale nelle sue sperienze sulla torsione de' fili metallici, che per quanto piccola sia la forza che torce la verga, questa comincia sempre a torcersi in una maniera permanente per poter quindi reagire come se fosse perfettamente elastica, e che se si aumenta la forza, e quindi la torsione non permanente, si opera una nuova torsione permanente e così successivamente, il che si accorderebbe coi risultati che Gerstner ha ottenuti, come sopra abbiamo veduto, nelle forze di trazione applicate ai fili metallici. Savart ha anche osservato che se si lascia agire la forza di tor-

sione per molte ore, l'arco di torsione si aumenta, ma d'una quantità che decresce gradatamente.

77. Anche il signor Bevan, Inglese, ha fatto sperienze sulla forza di torsione; ma esse si riferiscono particolarmente a quella delle diverse sorta di legno, e interessano quindi piuttosto la Meccanica applicata alle arti, che la Fisica propriamente detta. Ne fece però alcuna anche sui metalli, e debbo qui indicare la maniera con cui egli ne ha espressi i risultati nelle *Trans. filosof.* del 1829, parte 1.ª Egli chiama in generale *modulo di torsione* la forza in unità di peso, che bisognerebbe applicare ad un vette d'un' unità di lunghezza perpendicolare all' asse d' un prisma quadrato di una data sostanza, di un' unità lineare di lunghezza, e d'un'unità lineare pur di lato, per produrvi una torsione anch'essa d'un'unità lineare misurata all'estremità di quel vette. Egli stabilisce poi, che per una verga prismatica quadrata di lunghezza l, di lato d, e di cui la sostanza abbia per modulo di torsione T, applicandovi una forza w all'estremità d'un vette di lunghezza r, la torsione δ espressa dalla quantità lineare percorsa dall'estremità di questo vette, sarà rappresentata dalla formola

$$\delta = \frac{r^2 l w}{d^4 T},$$

la quale dà reciprocamente

$$w = \frac{d^4 . \delta . T}{r^2 l}$$

per la forza necessaria a torcere la stessa verga nelle indicate circostanze della quantità δ. Se si fa $r = 1$, cioè si suppone la forza applicata ad un vette avente un'unità lineare di lunghezza, e si conta anche δ sul circolo descritto dall'estremità di questo vette, si ha semplicemente

$$w = \frac{d^4 . \delta . T}{l},$$

il che si accorda con quello che già abbiamo ammesso nelle verghe di sezione simile tra loro, dietro alle sperienze di Coulomb e di Savart, che questa forza per una data sostanza è in ragion diretta della quantità della torsione, e della quarta potenza delle dimensioni omologhe della sezione, e in ragion inversa della lunghezza. Questa formola relativa alla supposizione di

$r=1$ avrebbe pur luogo quando la torsione δ si esprimesse in gradi della circonferenza descritta dal vette, purchè si intendesse pel modulo di torsione la forza necessaria per produrre la torsione di 1° nella verga prismatica quadrata di lunghezza, larghezza, e spessore uguali all'unità lineare.

Bevan ha trovato per modulo di torsione del ferro lavorato e dell'acciajo nelle sue sperienze 1779090, per quello del ferro fuso 951600, e per quello del metallo delle campane 818000, prendendo per unità lineare il pollice inglese, e per unità di peso la libbra *avoir du poids*; ora il pollice $=25{,}4$ millim., e la libbra $=0{,}453$ chilogr.; se dunque si vogliono avere i moduli corrispondenti prendendo per unità il metro, e il chilogramma, moduli che indicheremo in generale con T', bisognerà fare, nella formola

$$w=\frac{d^4.\delta.T}{r^2 l},$$

le sostituzioni

$$w=\frac{T'}{0{,}453}; \quad d^4=\frac{1}{(0{,}0254)^4}, \quad \delta=\frac{1}{0{,}0254},$$

$$r^2=\frac{1}{(0{,}0254)^2} \quad l=\frac{1}{0{,}0254},$$

e per conseguenza

$$\frac{d^4\delta}{r^2 l}=\frac{1}{(0{,}0254)^3},$$

e si otterrà

$$T'=\frac{0{,}453}{(0{,}0254)^3}.T=702\,T \text{ circa},$$

cioè bisognerà moltiplicare per 702 ciascuno dei moduli sovra indicati nelle misure inglesi per avere i moduli corrispondenti nelle nuove unità. Così quello del ferro e dell' acciajo diverrà 1249063507, quello del ferro fuso 668099328, e quello del metallo delle campane 574301440. Questi moduli sono sempre relativi all'arco di torsione espresso in misura lineare; se si vogliono riferire questi moduli a un grado sessagesimale di tor-

sione converrà moltiplicare que'numeri per $\frac{3,1416}{180}$, ossia per 0,01745, il che darà 21796157 pel ferro, e l'acciajo, 11658333 pel ferro fuso, e 10021560 pel metallo delle campane. Allora la formola generale, relativa al modulo, indicando con x^0 i gradi di torsione, sarebbe semplicemente, secondo quello che precede,

$$w = \frac{d^4 . x^0 . T'}{r l},$$

poichè con questo viene essenzialmente a sostituirsi a δ nella formola generale relativa a T' preso nel primo senso il suo valore $\frac{\pi}{180} . r . x^0$ in funzione di x^0.

78. Se si vogliono paragonare questi valori assoluti dei moduli di torsione de' metalli di cui abbiamo parlato, secondo le sperienze di Bevan, alle forze assolute di torsione che si sono dedotte dalle sperienze di Coulomb e di Dulau per le verghe cilindriche, si osserverà che secondo Bevan la forza di torsione d'una verga di sezione quadrata, come sopra, è uguale a quella d'una verga cilindrica della stessa sostanza di cui la sezione abbia un diametro di $\frac{1}{7}$ più grande del lato della sezione della verga quadrata. Così i moduli suddetti di torsione che si riferiscono ad una sezione quadrata di un metro di lato saranno pur quelli di una verga cilindrica di ciascun metallo relativi ad una sezione di 1 metro $+\frac{1}{7}$ ossia 1,143 metr. circa di diametro, le altre condizioni restando le stesse. Siccome nelle verghe cilindriche la forza di torsione cresce come le quarte potenze dei diametri, per ridurre questi moduli ad una verga d'un metro di diametro bisognerà dividerli per $(1,143)^4$, cioè per 1,706. Così pel ferro e l'acciajo il modulo ridotto in questa maniera prendendo per misura della torsione 1° sessagesimale sarà $\frac{21796157}{1,706}$, ossia 12776176. Si avrà dunque in generale per l'espressione della forza w in chilogrammi applicata ad un vette r, necessaria per torcere d'un grado una verga cilindrica di

ferro o d'acciajo di diametro d e di lunghezza l, il tutto espresso in metri, $w = \frac{d^4}{rl} . 12776176$. Se si fa d=0,01 metr., l=1, r=0,005 metr., come nell'esperienza di Dulau sopra riferita, si trova w=25,55 chilogr., numero poco diverso da quello osservato da Dulau, e che si accorda ancor più da vicino con quello di 25,66 chilogr. che si sarebbe avuto calcolando per mezzo delle sperienze di Coulomb.

Secondo il signor Bevan il modulo di torsione determinato come sopra relativamente alla torsione espressa in unità lineare, è per ciascuna sostanza circa $\frac{1}{16}$ del suo modulo d'elasticità, e questo rapporto dee sussistere qualunque siano le unità che si adottano per le lunghezze e pei pesi. Ciò dà luogo ad un'altra comparazione dei risultati di Bevan sulla torsione con quelli di altri autori sull'elasticità o rigidezza di diversi metalli per trazione precedentemente riferiti. Così, per esempio, il modulo di torsione 1 249063507 preso come sopra relativamente al metro e al chilogramma pel ferro e l'acciajo, suppone un numero 16 volte maggiore, cioè 19985016112 pel modulo di elasticità, cioè pel numero di chilogrammi che si richiederebbe per allungare per trazione una spranga di ferro o d'acciajo d'un metro quadrato di sezione d'una quantità uguale alla sua lunghezza primitiva; ciò corrisponde a 19985 chilogr. per una spranga di un millimetro quadrato di sezione, e a 1,9985 chilogr., cioè a un dipresso 2 chilogr. per allungare la stessa spranga d'una diecimillesima soltanto della sua lunghezza, il che s'accorda coi risultati indicati a suo luogo per l'elasticità del ferro e dell'acciajo. Pel ferro fuso il modulo di torsione stabilito da Bevan si troverebbe corrispondere secondo un calcolo analogo a 1,07 chil. circa pel peso richiesto ad allungare d'una diecimillesima un filo di 1 millimetro quadrato di sezione, numero un po'minore di quello indicato da Tredgold. Quanto al metallo delle campane il modulo di torsione di Bevan corrisponde a 0,92 chilogr. circa per l'elasticità di questo metallo espressa nella stessa maniera.

79. Le leggi della torsione de' fili elastici che abbiamo indicate dietro alle sperienze di Coulomb, Dulau, ecc., e le considerazioni che esse ci fornirono, possono anche, come quelle

relative alla flessione delle verghe, dedursi immediatamente da principii teorici fondati sull'estensibilità delle loro fibbre o filetti proporzionale alla trazione, quale l'esperienza l'ha indicata pei fili metallici, e per mezzo di certe ipotesi sussidiarie, non altrimenti che l'abbiamo veduto per la flessione; ma questa deduzione non potendo essere rigorosa, ci atterremo alle indicate considerazioni, e vedremo poi in seguito come queste leggi si possano riferire ai principii più immediati della teoria dell'azione molecolare che formano l'oggetto dell'articolo seguente.

ARTICOLO SECONDO

Considerazioni teoriche del sig. Poisson per cui si deducono le leggi dell'elasticità dei corpi solidi dalla natura dell'azione molecolare.

80. Le considerazioni teoriche, e l'analisi ad esse relativa, di cui dobbiamo qui dare un'idea, furono esposte dal sig. Poisson nella sua Memoria già citata al n.° 7 *sull'equilibrio e sul moto dei corpi elastici*, letta all'Accademia di Parigi nel 1828, di cui si trova il preambolo negli *Annales de chimie et de physique*, fascicolo di aprile dello stesso anno, e che fu poi pubblicata nelle *Memorie dell'Accademia di Parigi*, T. 8.

I matematici che si erano occupati avanti il sig. Poisson delle diverse questioni di meccanica relativamente ai corpi solidi e fluidi, le aveano trattate in una maniera astratta, facendo ipotesi particolari sulla natura di ciascuna specie di corpi a cui si dovevano applicare le leggi generali dell'equilibrio, e del moto. Il dedurre rigorosamente da queste ipotesi, per mezzo dell'analisi, le leggi che ne erano la conseguenza formava l'oggetto della *meccanica analitica*. Poisson, come già sopra abbiamo accennato, ha cercato di elevare accanto a questa una meccanica, che egli chiama *Meccanica fisica*, in cui si procura di ridurre tutto alle azioni molecolari, che trasmettono da un punto all'altro l'azione delle forze estranee date, e sono l'intermezzo del loro equilibrio, cosicchè non si abbia più alcuna ipotesi speciale da fare per applicare i principii generali della meccanica a questioni particolari. Così, per esempio, si è ve-

duto, che relativamente alla lamina elastica, il *momento di elasticità* per flessione si è stabilito sopra l'ipotesi che ciascun filetto dello spessore della lamina eserciti una forza proporzionale al suo allungamento od accorciamento, come ciò ha luogo secondo la sperienza per un filo isolato, allungato per trazione, o raccorciato per compressione; ma si tratta di dedurre questo momento di elasticità per flessione dalle azioni tra le molecole considerate in tutto lo spessore della lamina, e determinare così la sua espressione senza alcuna ipotesi. E appunto nella citata Memoria Poisson si è proposto specialmente di formare le equazioni dell' equilibrio e del moto delle lamine, e più generalmente delle verghe e delle lastre elastiche, partendo dalla considerazione delle mutue azioni delle loro molecole; e per mezzo di queste considerazioni egli è giunto in fatti a trovare col calcolo le leggi di quest'equilibrio che già si erano dedotte da que' principii ipotetici di cui abbiamo parlato, e che si erano già paragonate colle sperienze, e inoltre alcuni risultati che non erano ancora conosciuti, e che furono poi confermati posteriormente dalla sperienza.

Non appartiene al nostro scopo di seguire tutto l'andamento dei ragionamenti e dell' analisi del sig. Poisson; ma dobbiamo almeno indicare i principii da cui è partito, e le conseguenze a cui è giunto per far vedere in che modo le idee che possiamo farci della costituzione de' corpi considerati come riunioni di molecole, e quali la fisica ce li rappresenta, valgano a render ragione di tutti i fenomeni che essi ci offrono.

I ragionamenti del sig. Poisson sono riferiti all' ipotesi del calorico ritenuto attorno alle molecole ponderabili, in maggior o minor quantità, secondo la loro temperatura; ma come già abbiamo osservato in altra occasione, sarebbe facile tradurli o modificarli relativamente alla teoria delle vibrazioni calorifiche.

81. Consideriamo un corpo di forma e materia date, di cui tutti i punti sono sottoposti alla loro mutua azione molecolare; supponiamo che forze date cangino la sua forma, e producano piccoli scostamenti od avvicinamenti tra le sue molecole; si tratta di determinare in grandezza e in direzione, in questo nuovo stato, l'azione esercitata da una parte del corpo su cia-

scun punto della superficie che la termina, e che divide questa parte dal rimanente del corpo. Indichiamo (fig. 11) con x, y, z le tre coordinate rettangolari Aa ossia cb, Ac ossia ab, e bM d'un punto qualunque M di questo corpo nel suo stato primitivo; siano quindi $x+u$, $x+v$, $x+w$, ciò che esse divengono dopo il cangiamento di forma prodotto dalle forze date, e consideriamo u, v, w come funzioni di x, y, z, che convengono a tutti i punti del corpo. Siano $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$ le coordinate primitive cu' ossia $cb+ba'$, ac' ossia $ab+bc'$ e $b'M'$ ossia $bM+d'M'$ d'un punto M' compreso nella sfera d'attività di M, e $x+x'+u'$, $y+y'+v'$, $z+z'+w'$ le coordinate di questo stesso punto M' dopo il cangiamento di forma. Le quantità u', v', w' sono ciò che divengono le quantità u, v, w quando si sostituiscono nei valori di queste, in vece di x, y, z di cui esse sono funzioni, le quantità $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$, e siccome le variabili x', y', z' sono per ipotesi molto piccole, possiamo rappresentare u', v', w' in funzione di u, v, w, e di x', y', z' per mezzo degli sviluppi conosciuti delle funzioni di cui le variabili subiscono accrescimenti, e in cui non conserveremo che le loro prime potenze; cioè avremo

$$u'=u+x'\frac{du}{dx}+y'\frac{du}{dy}+z'\frac{du}{dz}$$

$$v'=v+x'\frac{dv}{dx}+y'\frac{dv}{dy}+z'\frac{dv}{dz}$$

$$w'=w+x'\frac{dw}{dx}+y'\frac{dw}{dy}+z'\frac{dw}{dz}.$$

Conduciamo pel punto M tre nuovi assi rettangolari in una posizione qualunque relativamente ai primi. Siano x_1, y_1, z_1 le coordinate primitive, cioè avanti il cangiamento di forma, del punto M' relativamente a questi assi, cioè le linee Ma_1, Mc_1 e b_1M'. Avremo, secondo i noti principii per la trasformazione degli assi, $x'=ax_1+by_1+cz_1$; $y'=a'x_1+b'y_1+c'z_1$, $z'=a''x_1+b''y_1+c''z_1$, i nove coefficienti a, b, c, a' ecc. es-

sendo i cosseni degli angoli che gli assi delle $x_{,}$, $y_{,}$, e $z_{,}$ fanno con quelli delle x, y, z, i quali cosseni hanno tra loro relazioni conosciute. Consideriamo un altro punto M_{1} (fig. 11 e 12) situato sull'asse delle $z_{,}$ positive ad una piccola distanza da M, che rappresenteremo con $\zeta_{,}$. Le coordinate del punto M' nella direzione delle $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, che relativamente al punto M erano $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, saranno relativamente al nuovo punto M_{1}, $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}-\zeta_{,}$; questo cangiamento consistendo in un semplice trasporto dell'origine di esse coordinate, sull'asse delle $z_{,}$, della quantità $\zeta_{,}$, cosicchè, come si vede dalla figura 12, le coordinate di cui si tratta del punto M' relativamente al punto M_{1} preso ora per origine, sono $M_{1}a_{,,}=Ma_{,}$, $M_{1}c_{,,}=Mc_{,}$ ed $M'b_{,,}=M'b_{,}-M_{1}M=M'b_{,}-\zeta_{,}$. Se dunque chiamiamo φ, ψ, θ relativamente al punto M' e al punto M_{1} ciò che divengono le linee che erano x', y', z' relativamente allo stesso punto M' e al punto M, cioè le linee $b_{,,,}a_{,,,}$, $b_{,,,}c_{,,}$, e $d_{,,,}M'$ nella figura, avremo

$$\varphi=ax_{,}+by_{,}+c(z_{,}-\zeta_{,})$$

$$\psi=a'x_{,}+b'y_{,}+c'(z_{,}-\zeta_{,})$$

$$\theta=a''x_{,}+b''y_{,}+c''(z_{,}-\zeta_{,}),$$

non cangiando cioè nelle espressioni sovra stabilite di x', y', z' se non $z_{,}$ in $z_{,}-\zeta_{,}$. Se chiamiamo ora $u_{,}$, $v_{,}$, $w_{,}$ i piccoli cangiamenti delle coordinate del punto M_{1}, come avevamo indicato con u, v, w quelli del punto M, pel cangiamento di figura, ritenendo come sopra u', v', w' per indicare i cangiamenti corrispondenti delle coordinate di M', avremo, mettendo nei valori di u', v', w' sopra trovati $u_{,}$, $v_{,}$, $w_{,}$ in vece di u, v, w, e φ, ψ, θ in vece di x', y', z',

$$u'=u_{,}+\varphi\frac{du}{dx}+\psi\frac{du}{dy}+\theta\frac{du}{dz}$$

$$v'=v_{,}+\varphi\frac{dv}{dx}+\psi\frac{dv}{dy}+\theta\frac{dv}{dz}$$

$$w'=w_{,}+\varphi\frac{dw}{dx}+\psi\frac{dw}{dy}+\theta\frac{dw}{dz},$$

ossia, facendo $u'-u_1=\varphi'$, $v'-v_1=\psi'$, $w'-w_1=\theta'$, avremo

$$\varphi'=\varphi\frac{du}{dx}+\psi\frac{du}{dy}+\theta\frac{du}{dz}$$

$$\psi'=\varphi\frac{dv}{dx}+\psi\frac{dv}{dy}+\theta\frac{dv}{dz}$$

$$\theta'=\varphi\frac{dw}{dx}+\psi\frac{dw}{dy}+\theta\frac{dw}{dz}$$

per le espressioni delle differenze delle traslocazioni dei due punti M_1 ed M' nel cangiamento di figura. Rappresentiamo ora con r la distanza primitiva M_1M' del punto M_1 al punto M', e con r' la distanza di questi punti dopo il cangiamento di figura del corpo, r sarà la diagonale d'un parallelepipedo di cui, φ, ψ, θ saranno i lati, e r' quella d'un parallelepipedo di cui i lati saranno divenuti $\varphi+\varphi'$, $\psi+\psi'$, $\theta+\theta'$, onde avremo

$$r^2=\varphi^2+\psi^2+\theta^2,\quad r'^2=(\varphi+\varphi')^2+(\psi+\psi')^2+(\theta+\theta')^2,$$

formole, che, avuto riguardo alle equazioni note che hanno luogo tra i nove cosseni a, b, c, a' ecc., che entrano nelle espressioni di φ, ψ, θ, e quindi in quelle di φ', ψ', θ', si troveranno ridursi a

$$r^2=x_1^2+y_1^2+(z_1-\zeta_1)^2$$

$$r'^2=r^2+2\varphi\varphi'+2\psi\psi'+2\theta\theta'+\varphi'^2+\psi'^2+\theta'^2.$$

L'azione primitiva di M' sopra M_1 sarà fr, cioè una funzione ignota della distanza r tra questi due punti, ma sottoposta alla condizione di divenir insensibile per ogni valor sensibile di r; essa diverrà fr' nel secondo stato del corpo; la riguarderemo come attrattiva o come ripulsiva secondo che essa sarà positiva o negativa; ciò posto le componenti parallele agli assi delle x, y, z, dell'azione di M' sopra M_1 e tendenti ad aumentare le coordinate del punto M_1, saranno

$$\frac{\varphi+\varphi'}{r'}fr', \quad \frac{\psi+\psi'}{r'}fr', \quad \frac{\theta+\theta'}{r'}fr',$$

poichè $\varphi+\varphi'$, $\psi+\psi'$, $\theta+\theta'$ sono i lati del parallelepipedo, nelle direzioni delle tre coordinate, del quale r' è la diagonale. Prendendo la somma di ciascuna di queste quantità estesa a tutti i punti M' che corrispondono a valori positivi o negativi di x_1, ed y_1, e solamente a valori negativi di z_1, si avranno le componenti, nelle direzioni degli stessi assi, dell'azione esercitata sul punto M_1 dalla parte del corpo che era primitivamente terminata dal piano delle x_1, y_1, z_1, e che si trova relativamente a questo piano dalla parte delle z_1 positive, ossia dalla parte opposta a quella in cui abbiamo considerato il punto M_1, cioè che si trova nelle nostre figure al dissotto del piano $Ma_1b_1c_1$. Prendendo quindi di nuovo la somma di ciascun risultato di questo genere estesa a tutti i punti M_1, che corrispondono a valori positivi di ζ_1, e moltiplicando queste nuove somme pel numero di molecole contenute in una superficie ω abbastanza piccola perchè i loro valori non cangino sensibilmente in tutta la sua estensione, questi prodotti esprimeranno le componenti dell'azione totale di questa stessa parte del corpo sul cilindro contenuto nell'altra parte del medesimo, e avente per base la porzione ω della superficie che separa queste due parti del corpo, e di cui il punto M fa parte. Se si rappresenta con α l'intervallo medio delle molecole del corpo attorno al punto M, e se le dimensioni di questa superficie ω, sebbene piccolissima, sono supposte molto grandi relativamente a questo intervallo medio, si potrà prendere $\frac{\omega}{\alpha^2}$ pel numero di molecole compreso in ω. Le componenti di cui si tratta, rispettivamente parallele agli assi delle x, y, z, saranno allora

$$\omega\Sigma\frac{\varphi+\varphi'}{\alpha^2 r'}fr', \quad \omega\Sigma\frac{\psi+\psi'}{\alpha^2 r'}fr', \quad \omega\Sigma\frac{\theta+\theta'}{\alpha^2 r'}fr',$$

le caratteristiche Σ esprimendo somme relative alle quattro variabili x_1, y_1, z_1, ζ_1, ed estendendosi a tutti i punti M' e M_1, i primi in tutta l'estensione della parte del corpo che si trova

relativamente al piano delle $x_{,}y_{,}$ dalla parte delle $z_{,}$ negative, e i secondi in tutta l'estensione del cilindro perpendicolare a questo piano, e che ha ω per base, compresi questi punti nella sfera d'attività del punto M. Indicheremo per abbreviare queste somme colle lettere $P_{,}^{1}$, Q, R, cosicchè le tre componenti di cui si tratta, saranno espresse da ωP, ωQ, ωR. Le somme P, Q, R sono, dopo il cangiamento di forma, le componenti dell'azione d'una parte del corpo sull' altra riferita all'unità di superficie, e relativa al punto M della loro superficie di separazione; la loro risultante è la pressione che avrebbe luogo sopra una superficie presa per unità, se in tutti i suoi punti l'azione del corpo fosse la stessa che nel punto M. Ma questa forza non è, come ciò ha luogo nei fluidi, normale alla superficie su cui si esercita, e per uno stesso punto M essa varia in direzione e in grandezza colla direzione di questa superficie.

82. Si tratta ora di ottenere i valori delle somme Σ che esprimono le tre componenti, o di ridurle quanto sarà possibile. Ma non richiedendosi più qui che artifizii analitici permessi dalla natura delle forze che si considerano, non indicherò che i risultati di queste riduzioni, rimandando alla citata Memoria del signor Poisson, per l'andamento dei ragionamenti, e dell' analisi su cui gli ha fondati.

In primo luogo φ, ψ, θ, e φ', ψ', θ' essendo funzioni di $\zeta_{,}-z_{,}$ cosicchè le somme che formano le espressioni di P, Q, R sono per questo riguardo doppie, cioè relative ai diversi valori dell'una e dell'altra di queste quantità $\zeta_{,}$ e $z_{,}$, il sig. Poisson trova che queste somme doppie possono ridursi a somme semplici relative ai diversi valori della sola quantità ζ con cui si rappresenti la quantità $\zeta_{,}-z_{,}$, purchè si dia per fattore a ciascuna delle quantità sottoposte alla sommazione, per l'espressione di P, Q, R, questa stessa quantità ζ divisa per α, onde i valori suddetti di P, Q, R prenderanno la forma

$$P=\Sigma\frac{(\varphi+\varphi')\zeta}{\alpha^3 r'}fr',\quad Q=\Sigma\frac{(\psi+\psi')\zeta}{\alpha^3 r'}fr',\quad R=\Sigma\frac{(\theta+\theta')\zeta}{\alpha^3 r'}fr',$$

ove la caratteristica Σ non indicherà più, in vece di una somma quadrupla relativa ad $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ e $\zeta_{,}$, che una somma tripla

relativa ad $x_{,}, y_{,}$, e ζ, e la somma relativa a quest'ultima quantità dovrà prendersi da $\zeta = \alpha$ sino a $\zeta = \infty$.

Il signor Poisson trova quindi che si può cacciare da queste espressioni r' cioè la distanza tra i punti $M_{,}$ ed M' che ha luogo dopo il cangiamento di figura, ed introdurvi in vece la distanza r che questi stessi punti avevano nello stato naturale, essendo per approssimazione

$$\frac{1}{r} fr' = \frac{1}{r} fr + \frac{\varphi\varphi' + \psi\psi' + \theta\theta'}{r} \cdot \frac{d \cdot \frac{1}{r} fr}{dr} ;$$

il che cangia i valori di P, Q, R in

$$P = \Sigma \frac{(\varphi + \varphi')\zeta}{\alpha^3 r} fr + \Sigma (\varphi\varphi' + \psi\psi' + \theta\theta') \frac{\varphi\zeta}{\alpha^3 r} \cdot \frac{d \cdot \frac{1}{r} fr}{dr} ,$$

$$Q = \Sigma \frac{(\psi + \psi')\zeta}{\alpha^3 r} fr + \Sigma (\varphi\varphi' + \psi\psi' + \theta\theta') \frac{\psi\zeta}{\alpha^3 r} \cdot \frac{d \cdot \frac{1}{r} fr}{dr} ,$$

$$R = \Sigma \frac{(\theta + \theta')\zeta}{\alpha^3 r} fr + \Sigma (\varphi\varphi' + \psi\psi' + \theta\theta') \frac{\theta\zeta}{\alpha^3 r} \cdot \frac{d \cdot \frac{1}{r} fr}{dr} ,$$

sopprimendo nel 2.° termine di ciascuna di queste espressioni i secondi termini φ', ψ', θ' del fattore di ζ delle espressioni precedenti, poichè questi termini dovendosi moltiplicare per φ', ψ', θ' contenuti nell'altro fattore qui introdotto, diverrebbero quantità dell'ordine di quelle che si trascurano nella approssimazione su cui questa riduzione è fondata. Le somme Σ contenute in queste espressioni sono ora somme triple, relative alle tre quantità variabili $x_{,}$, $y_{,}$, ζ, di cui ζ vi entra esplicitamente, e $x_{,}$, $y_{,}$ con ζ stesso sono contenute implicitamente nelle quantità φ, φ', ψ, ψ', θ, θ' e r che tutte sono funzioni di queste tre variabili; ma possiamo cangiare queste tre variabili in altre polari di cui una sia r stesso, poichè se in-

dichiamo con β l'angolo che fa r coll'asse delle ζ, e con γ l'angolo che fa la projezione di r sul piano delle $x_1 y_1$ coll'asse x_1, avremo

$$\zeta = r\cos\beta, \quad y_1 = r\sin\beta\sin\gamma, \quad x_1 = r\cos\beta\cos\gamma,$$

valori, che sostituiti nelle espressioni di φ, ψ, θ, φ', ψ', θ' faranno prendere, come è facile verificarlo, alle quantità comprese sotto al segno Σ la forma $p\,Fr$, rappresentando con p una funzione intiera di seni, e cosseni di β e di γ, che sono unitamente ad r le nuove variabili, e con Fr una funzione di r della stessa specie che fr, di cui i valori sono insensibili per ogni valor sensibile della variabile, e che inoltre è uguale a zero pel valor particolare zero di r, cioè rappresentando con Fr il prodotto di fr per una quantità che diviene nulla quando $r = 0$. Ciò posto le somme di cui si tratta si comporranno di parti a cui si potrà dare, per distinguere le tre sorta di somme che esse rinchiudono, la forma $\Sigma\,[(\Sigma\Sigma p)\,Fr]$, il Σ esteriore alla parentesi corrispondendo alla variabile r, e potendo estendersi, giusta la natura della funzione Fr, sino ad $r = \infty$, e li due altri Σ riferendosi alle variabili β e γ.

83. La doppia somma indicata dai Σ sotto la parentesi può ora cangiarsi in un integrale doppio per mezzo delle considerazioni seguenti. Descriviamo dal punto M come centro (fig. 13), e con un raggio Ma uguale ad r una superficie sferica; dividiamo questa superficie in un gran numero di parti, come $abcd$, abbastanza piccole perchè si possa riguardare in ciascuna di esse la quantità p come sensibilmente costante, sebbene essa sia funzione di β e γ che variano colla posizione di r, e indichiamo con $s r^2$ una di queste parti, cosicchè s sia un coefficiente indipendente da r, esprimente la grandezza d'una piccola parte di una superficie sferica descritta sullo stesso centro M con un raggio $= 1$, e corrispondente alla parte $s r^2$ della suddetta superficie di raggio r. Il valore di $\Sigma\Sigma p$ relativo alle molecole comprese in questa porzione $s r^2$ di superficie sarà il prodotto di p e del numero di queste molecole; per questo numero si potrà prendere $\frac{s r^2}{a^2}$, indicando con a la distanza

media tra due molecole consecutive nella sfera d'azione di M, se come lo supporremo dapprima r è molto grande relativamente a questa distanza media delle molecole. In questa maniera la doppia somma $\Sigma\Sigma p$ relativa a tutta la mezza superficie situata da una parte del piano delle x,y, che è quella posta a destra nella nostra figura, avrà per valore $\frac{r^2}{a^2}\Sigma\Sigma ps$, questa nuova somma estendendosi a tutte le parti s della mezza superficie che ha 1 per raggio. Ora a cagione della piccolezza di queste parti si potrà cangiare s nell'elemento di quest'ultima superficie, che si può considerare come un rettangolo avente per le due sue dimensioni $d\beta$ e $\operatorname{sen}\beta d\gamma$ (come è facile vedere dalla figura in cui si è segnato l'angolo β che il raggio r fa coll'asse delle ζ, e l'angolo γ che la projezione del raggio r sul piano delle x,y, fa coll'asse delle x,) e che sarà per conseguenza espresso da $\operatorname{sen}\beta d\beta d\gamma$; e i segni Σ in segni d'integrazione, cosicchè, avuto riguardo ai limiti relativi alla mezza superficie della sfera, si avrà

$$\Sigma\Sigma ps=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi} p\operatorname{sen}\beta d\beta d\gamma,$$

π indicando, al solito, il rapporto della circonferenza al diametro, e riferendosi i limiti 0, e $\frac{1}{2}\pi$ alla variabile β, e i limiti 0 e 2π alla variabile γ. Si avrà dunque per la doppia somma dimandata

$$\Sigma\Sigma p=\frac{r^2}{a^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi} p\operatorname{sen}\beta d\beta d\gamma.$$

Questo risultato richiede in vero che r sia un moltiplo molto considerevole della distanza media α tra due molecole consecutive, onde la piccola porzione di superficie sferica sr^2 che abbiamo considerata sia pure abbastanza estesa per comprendere un gran numero di molecole, poichè altrimenti il numero di queste molecole contenuto in tale porzione potrebbe non

essere proporzionale al quadrato di a, come abbiamo supposto. Ora questa condizione non può aver luogo pei valori di r più piccoli, e che apparterrebbero a superficie sferiche formate dalle molecole più vicine al punto M che si considera, all'intorno di esso, valori che pure dovrebbero a rigore essere compresi nella terza sommazione relativa ad r che resta ora a fare delle quantità $\Sigma\Sigma p$, ossia $\frac{r^2}{a^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi} p \operatorname{sen}\beta d\beta d\gamma$ moltiplicate per Fr. Ma siccome abbiamo veduto che la funzione fr, da cui si forma Fr, vi è moltiplicata per r, o per una funzione di r che si annulla per $r = 0$, i valori di $\Sigma\Sigma pFr$ relativi a valori poco considerevoli di r saranno molto piccoli, purchè fr non sia una funzione tale che il valore ne divenga sommamente grande per questi piccoli valori di r, o piccole distanze delle molecole tra cui si considera l'azione, come ciò avverrebbe se il rapido decrescimento che abbiamo supposto aver luogo per l'accrescimento di r, onde l'azione divenga insensibile a qualunque distanza sensibile, cominciasse a manifestarsi fin dalle più piccole distanze. Questa circostanza supporremo qui non aver luogo, cioè alla condizione già ammessa per la funzione fr, che essa divenga insensibile a distanza sensibile, aggiungeremo quest' altra, che il raggio d' attività delle molecole sia molto grande relativamente agli intervalli che le separano, cosicchè ciascuna molecola estenda la sua azione sopra un gran numero di strati di molecole che la circondano, e che la rapida diminuzione di quest' azione non accada se non quando la distanza è divenuta la somma d'un grandissimo numero di questi intervalli, non soffrendo per le distanze minori che un decrescimento secondo una legge ordinaria. Abbiamo veduto al n.° 7 un esempio di funzione, che per la sua forma soddisferebbe a questa condizione. Supponiamo adunque che la funzione fr della distanza, che rappresenta l'azione molecolare sia una funzione di simil genere, sebbene la forma reale ce ne sia affatto ignota; i valori di Fr relativi alle molecole più vicine al punto M potranno trascurarsi nella somma di cui si tratta come prodotti dalla moltiplicazione di quelli di fr non grandissimi per una funzione molto piccola di r;

onde la supposizione che abbiamo fatta di r molto grande relativamente ad α in tutti i termini di questa somma, per poter esprimere ciascuno di essi per un doppio integrale, sarà ammessibile, e si avrà così

$$\Sigma[(\Sigma\Sigma p)Fr]=\Sigma\frac{r^2}{\alpha^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi} p\,\mathrm{sen}\,\beta\,d\beta\,d\gamma\,Fr$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi} p\,\mathrm{sen}\,\beta\,d\beta\,d\gamma.\Sigma\frac{r^2}{\alpha^2}Fr.$$

Sarà poi permesso di comprendere o trascurare a piacimento in questa somma i più piccoli valori di r, poichè la parte della medesima che vi si riferisce non altera la somma intiera; supporremo dunque che essa si estenda da $r=0$ sino ad $r=\infty$, quest'ultima supposizione essendo anch'essa permessa dalla natura di questa legge, per cui l'azione diviene insensibile a distanza sensibile.

84. Ciò posto, cercando i valori particolari di p per ciascuna delle espressioni così ridotte alla forma suddetta, che entrano ne' valori sopra stabiliti di P, Q, R, per mezzo della sostituzione reale dei valori di x_1, y_1, ζ in funzione di r, β, γ nelle espressioni di φ, ψ, θ, φ', ψ', θ', ed eseguendo secondo le regole ordinarie le integrazioni che rimarranno indicate in queste espressioni, si troveranno i valori definitivi seguenti di P, Q, R:

$$P=-K\left(c+\frac{du}{dx}c+\frac{du}{dy}c'+\frac{du}{dz}c''\right)$$

$$-k\left(3.\frac{du}{dx}c+\frac{du}{dy}c'+\frac{du}{dz}c''+\frac{dv}{dx}c'+\frac{dv}{dy}c+\frac{dw}{dx}c''+\frac{dw}{dz}c\right)$$

$$Q=-K\left(c'+\frac{dv}{dx}c+\frac{dv}{dy}c'+\frac{dv}{dz}c''\right)$$

$$-k\left(3.\frac{dv}{dy}c'+\frac{dv}{dx}c+\frac{dv}{dz}c''+\frac{du}{dx}c'+\frac{du}{dy}c+\frac{dw}{dy}c''+\frac{dw}{dz}c'\right)$$

$$\mathfrak{t} = -K\left(c'' + \frac{dw}{dx}c + \frac{dw}{dy}c' + \frac{dw}{dz}c''\right)$$

$$-k\left(3.\frac{dw}{dz}c'' + \frac{dw}{dx}c + \frac{dw}{dy}c' + \frac{du}{dx}c'' + \frac{du}{dz}c + \frac{dv}{dy}c'' + \frac{dv}{dz}c'\right),$$

ove si è fatto per abbreviare

$$\frac{2\pi}{3}\Sigma\frac{r^3}{a^5}fr = K, \quad \frac{2\pi}{15}\Sigma\frac{r^5}{a^5}\cdot\frac{d\frac{1}{r}fr}{dr} = k,$$

e bisogna richiamarsi che c, c', c'' sono i cosseni degli angoli che la normale alla superficie di separazione delle due parti del corpo di cui una agisce sull'altra faceva primitivamente cogli assi delle x, y, z; che questa normale è condotta pel punto della stessa superficie a cui corrispondono le componenti P, Q, R di quest'azione; e finalmente che essa è situata al di fuori della parte del corpo che esercita l'azione, e contenuta in quella su cui si esercita (1).

Se si fa coincidere questa normale con una parallela all'asse delle z, cosicchè la superficie di separazione delle due parti del corpo avanti al suo cangiamento di forma sia un piano parallelo a quello delle xy, si avrà $c=0$, $c'=0$, $c''=1$, e se si indicano con P_1, Q_1, R_1 i valori di P, Q, R, in questo caso, essi saranno

---

(1) Nella Memoria già citata *sull' equilibrio e sul moto dei corpi solidi elastici e dei fluidi*, letta in ottobre del 1829, e che si trova nel 2° fasc. del Giornale della Scuola politecnica (vedi anche *Bulletin* di Ferussac, juin 1830), Poisson giunge per un'altra via alle stesse equazioni, nelle quali suppone più semplicemente

$$K = \frac{1}{6\varepsilon^3}\Sigma rfr \quad \text{e} \quad k = \frac{1}{30.\varepsilon^3}\Sigma r^3\frac{d\frac{fr}{r}}{dr},$$

ε essendo l'intervallo medio delle molecole; valori a cui si ridurrebbero quelli indicati di K e k, facendovi $a^5 = \varepsilon^5 = \varepsilon^3 . r^2 . 4\pi$.

$$P_1 = -K.\frac{du}{dz} - k\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right),$$

$$Q_1 = -K.\frac{dv}{dz} - k\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right),$$

$$R_1 = -K.\left(1 + \frac{dw}{dz}\right) - k\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + 3.\frac{dw}{dz}\right).$$

Nel caso in cui la normale alla superficie di separazione sarà parallela all'asse delle y, e per conseguenza la superficie stessa di separazione parallela al piano delle xz, si avrà $c=0$, $c'=1$, $c''=0$, e indicando con P_2, Q_2, R_2 i valori di P, Q, R in questo caso, ne risulterà

$$P_2 = -K.\frac{du}{dy} - k\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right),$$

$$Q_2 = -K.\left(1 + \frac{dw}{dy}\right) - k\left(\frac{du}{dx} + 3.\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right),$$

$$R_2 = -K.\frac{dw}{dy} - k\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right).$$

Finalmente se questa normale è parallela all' asse delle x, e per conseguenza la superficie di separazione delle due parti del corpo parallela al piano delle yz, e se si indicano allora con P_3, Q_3, R_3 i valori di P, Q, R, avremo $c=1$, $c'=0$, $c''=0$, e quindi

$$P_3 = -K.\left(1 + \frac{du}{dx}\right) - k\left(3\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right),$$

$$Q_3 = -K.\frac{dv}{dx} - k\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right),$$

$$R_3 = -K.\frac{dw}{dx} - k\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right).$$

paragonando questi valori particolari colle espressioni generali di P, Q, R, se ne conchiuderà

$$P = P_1 c'' + P_2 c' + P_3 c ,$$

$$Q = Q_1 c'' + Q_2 c' + Q_3 c ,$$

$$R = R_1 c'' + R_2 c' + R_3 c ;$$

risultati che si sarebbero anche potuti stabilire con ragionamento diretto.

85. Le componenti dell' azione molecolare in ciascun punto essendo espresse dalle formole precedenti, si formeranno colle regole ordinarie della statica le equazioni d'equilibrio del corpo dopo il suo cangiamento di forma prodotto da forze date applicate a ciascuno de' suoi punti. Si concepisca a tale oggetto avanti al cangiamento di forma del corpo un parallelepipedo rettangolo (fig. 14) di cui M sia l'apice d'uno degli angoli solidi, e l, l', l'' siano i tre spigoli rispettivamente paralleli agli assi delle x, y, z, dimensioni che si suppongono piccolissime, onde l'azione del corpo sopra i diversi punti di ciascuna delle faccie del parallelepipedo non varii sensibilmente in tutta la sua estensione, ma tuttavia tali che il raggio d'attività delle molecole ne sia una piccolissima parte, affinchè si possa trascurare relativamente all'azione intiera del corpo sopra ciascuna faccia la parte che corrisponde ai punti di cui le distanze agli spigoli sono minori di questo raggio; l'azione del corpo che corrisponderà, per esempio, alla faccia parallela al piano delle xy e soggiacente al punto M, faccia di cui l'area è rappresentata da ll', avrà per componenti $P_1 ll'$, $Q_1 ll'$, $R_1 ll'$ dopo il cangiamento di forma. Per la faccia opposta queste componenti saranno rispettivamente

$$P_1 ll' + \frac{dP_1}{dz} ll'l'' , \quad Q_1 ll' + \frac{dQ_1}{dz} ll'l'' , \quad R_1 ll' - \frac{dR_1}{dz} ll'l'' ;$$

aggiungendo cioè a ciascuna componente precedente la sua variazione per l'intervallo l'' nella direzione delle z, variazione

che a cagione della piccolezza di l'' si suppone proporzionale a quella che corrisponderebbe all' intervallo differenziale dz. Queste componenti relative alle due faccie del parallelepipedo che abbiamo considerate esercitando la loro azione in direzione opposta, l'azione totale risultante dall'azione su queste due faccie avrà semplicemente per componenti

$$-\frac{dP_1}{dz}ll'l'', \quad -\frac{dQ_1}{dz}ll'l'', \quad -\frac{dR_1}{dz}ll'l'',$$

e ragionando nella stessa maniera sulle altre faccie opposte due a due, e rappresentando con λ il volume $ll'l''$ del parallelepipedo, le forze che provengono dall'azione che sul parallelepipedo si esercita dal rimanente del corpo, saranno

$$-\frac{dP_1}{dz}\lambda, \quad -\frac{dQ_1}{dz}\lambda_1^1, \quad -\frac{dR_1}{dz}\lambda,$$

$$-\frac{dP_2}{dy}\lambda, \quad -\frac{dQ_2}{dy}\lambda, \quad -\frac{dR_2}{dy}\lambda,$$

$$-\frac{dP_3}{dx}\lambda, \quad -\frac{dQ_3}{dx}\lambda, \quad -\frac{dR_3}{dx}\lambda.$$

Quelle della prima linea verticale agiranno parallelamente agli assi delle x, quelle della seconda parallelamente agli assi delle y, e quelle della terza parallelamente agli assi delle z, e tutte saranno dirette nel verso delle coordinate primitive.

Per altra parte indicando con X, Y, Z le componenti delle forze date che agiscono sopra ciascun punto del parallelepipedo e che possono supporsi costanti, e le stesse che al punto M, per tutta l'estensione del medesimo (queste componenti parallele agli assi delle x, y, z, tendenti ad aumentare queste coordinate e riferite all'unità di massa), e chiamando ρ la densità del corpo al punto M, e sensibilmente la stessa in tutta l'estensione del parallelepipedo, le componenti delle forze date che agiscono sulla massa del parallelepipedo saranno $X\rho\lambda$, $Y\rho\lambda$,

$Z\rho\lambda$. Ciò posto per l'equilibrio del parallelepipedo bisognerà che si abbiano queste tre equazioni

$$\left.\begin{aligned} X\rho &= \frac{dP_1}{dz} + \frac{dP_2}{dy} + \frac{dY_3}{dx}, \\ Y\rho &= \frac{dQ_1}{dz} + \frac{dQ_2}{dy} + \frac{dQ_3}{dx}, \\ Z\rho &= \frac{dR_1}{dz} + \frac{dR_2}{dy} + \frac{dR_3}{dx}, \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

sopprimendo il fattore λ comune a tutti i termini delle forze sovra espresse; esse sono, come si vede, le stesse che se si fossero supposte le dimensioni del parallelepipedo infinitamente piccole, ipotesi che non si poteva prender per base dell'analisi trattandosi d'un corpo formato di molecole che non sono contigue, ma alle conseguenze della quale siamo così nondimeno condotti dalla considerazione di queste molecole discontinue, mediante le approssimazioni che abbiamo ammesse.

86. Le equazioni così stabilite esprimono le relazioni richieste perchè il parallelepipedo, che abbiamo considerato, non possa avere alcun moto di traslazione. Per l' equilibrio di questo parallelepipedo si richiederebbe ancora che si avesse riguardo ai momenti delle forze che lo sollecitano e che debbono distruggersi, perchè esse non lo facciano girare in alcuna direzione; ma il signor Poisson dimostra, nella citata Memoria, che le equazioni che ne risultano sono identiche, cioè si verificano per loro stesse giusta i valori sovra indicati delle componenti delle forze molecolari nelle direzioni delle x, y, z, cosicchè non ne risulta alcuna ulterior condizione; onde le tre equazioni sopra stabilite bastano per assicurare l'equilibrio del parallelepipedo che abbiamo considerato nell'interno del corpo.

Ma indipendentemente da queste tre equazioni comuni a tutti i punti del corpo, ve ne sono altre che non hanno luogo se non alla sua superficie. Per istabilirle collochiamo il punto M (fig. 15) ad una distanza insensibile dalla superficie, ma che sia tuttavia uguale o superiore al raggio d'attività delle molecole. Per questo

punto conduciamo avanti il cangiamento di forma una normale alla superficie, e un piano perpendicolare a questa normale. Sia ω l'area della sezione fatta nel corpo da questo piano: le dimensioni di ω saranno ancora insensibili, ma molto grandi relativamente alla sua distanza dalla superficie; si potranno per conseguenza prendere ωP, ωQ, ωR per le componenti dell'azione che sopra la parte compresa tra questa sezione, e la superficie esercita il rimanente del corpo dopo il cangiamento di figura, e nei valori di P, Q, R, che sopra abiamo stabiliti in generale, c, c', c'' saranno i cosseni degli angoli che la perpendicolare a questo piano faceva primitivamente cogli assi delle x, y, z, la qual perpendicolare incontrerà la superficie in un punto che chiameremo M_1.

Supponiamo che altre forze date siano applicate alla superficie; siano X_1, Y_1, Z_1 le loro componenti relative al punto M_1 riferite all'unità di superficie, parallele agli assi delle x, y, z, e tendenti ad aumentare le coordinate del loro punto d'applicazione. Indichiamo con ω_1 la porzione di superficie che termina la piccola porzione di corpo, che consideriamo, cosicchè le forze esteriori che le corrispondono abbiano per valori $\omega_1 X_1$, $\omega_1 Y_1$, $\omega_1 Z_1$, la variazione delle forze X_1, Y_1, Z_1 potendo trascurarsi in questa piccola estensione di superficie. Si potranno anche trascurare le altre forze date che agiscono su tutti i punti interni di questa stessa porzione, stante la piccolezza del suo volume relativamente alla sua superficie; si avrà in conseguenza per l'equilibrio di questa porzione del corpo

$$\omega_1 X_1 + \omega P = 0\,, \quad \omega_1 Y + \omega Q = 0\,, \quad \omega_1 Z_1 + \omega R = 0\,,$$

o semplicemente

$$X_1 + P = 0\,, \quad Y_1 + Q = 0\,, \quad Z_1 + R = 0\,,$$

osservando che ω_1 non differisce sensibilmente da ω, e dividendo le equazioni per ω. Mettendo per P, Q, R i valori sovra stabiliti in funzione di P_1, Q_1, ecc., queste equazioni divengono

$$\left.\begin{aligned} X_1 + P_1 c'' + P_2 c' + P_3 c = 0 \\ Y_1 + Q_1 c'' + Q_2 c' + Q_3 c = 0 \\ Z_1 + R_1 c'' + R_2 c' + R_3 c = 0 \end{aligned}\right\} \text{(B)}$$

Le coordinate del punto M non differiscono sensibilmente da quelle di M_1, nè i cosseni c, c', c'' da quelli degli angoli che fa la normale in M_1 alla superficie del corpo. Se dunque si indicano con x_1, y_1, z_1 le tre coordinate d'un punto qualunque M_1 della superficie del corpo, si potranno in queste equazioni considerare P_1, P_2, ecc., come pure le forze date X_1, Y_1, Z_1 come funzioni di x_1, y_1, z_1 non altrimenti che le forze P_1, P_2, ecc. relative all'interno del corpo, e le forze applicate al medesimo erano funzioni delle coordinate x, y, z del punto M relativamente al quale si consideravano, e sostituire per c, c', c'' i loro valori in funzione di queste variabili, che si dedurranno dall'equazione della superficie del corpo. Se il corpo rinchiudesse nel suo interno uno o più spazii vacui, queste equazioni dovrebbero aver luogo per le superficie che li terminano, come per la superficie esterna del corpo.

Queste equazioni (B) unite alle equazioni (A) esprimono tutte le condizioni necessarie, e sufficienti per l'equilibrio del corpo, cioè dovranno perciò le equazioni (A) verificarsi per ciascun punto dell'interno, e le equazioni (B) per ciascun punto della superficie.

87. Da queste equazioni relative all'equilibrio di ciascun punto si possono derivare quelle relative a una porzione qualunque finita del corpo. Sia per questo dm l'elemento differenziale della massa della porzione di corpo che si vuol considerare, cosicchè si abbia $dm = \rho dx dy dz$, ρ essendo sempre la densità nel luogo corrispondente a quest'elemento; moltiplichiamo la prima delle equazioni (A) per $dx dy dz$, poi integriamo i suoi due membri, estendendo gli integrali a tutta questa porzione del corpo; avremo

$$\int X dm = \iiint \left(\frac{dP_1}{dz} + \frac{dP_2}{dy} + \frac{dP_3}{dx} \right) dx dy dz.$$

Per fissare le idee supponiamo che il piano delle xy sia orizzontale e l'asse delle z verticale, e diretto all'insù, come ciò è rappresentato nelle nostre figure qui sopra. Se si mette il primo termine del triplo integrale che forma il secondo membro di quest'equazione sotto la forma $\iint dx\,dy \int \frac{dP_1}{dz} dz$, e si indicano con (P_1) e $[P_1]$ i valori di P_1 relativi ai due punti della superficie che hanno la stessa projezione orizzontale, per ciascun valore di x ed y, cioè (P_1) pel punto superiore, e $[P_1]$ pel punto inferiore, che sono i due limiti tra cui dee prendersi l'integrale $\int \frac{dP_1}{dz} dz$, il valore di quest'ultimo integrale sarà $(P_1) - [P_1]$, e si avrà così

$$\iiint \frac{dP_1}{dz} dx\,dy\,dz = \iint (P_1)\,dx\,dy - \iint [P_1]\,dx\,dy .$$

Il primo termine di quest'integrale doppio dovrà estendersi a tutti i punti superiori, e il secondo a tutti i punti inferiori al piano delle xy nella porzione di corpo che si considera.

Se indichiamo con γ il cosseno dell'angolo che fa in un punto qualunque della superficie la parte esteriore della normale alla superficie in questo punto coll'asse delle z positive, e con ds l'elemento differenziale di questa superficie, avremo $dx\,dy = \gamma ds$ od $= -\gamma ds$, secondochè si tratterà dei punti superiori per cui γ sarà positivo, o degli inferiori per cui questo cosseno sarà negativo. Per conseguenza la differenza dei due integrali doppii si ridurrà ad un solo integrale semplice esteso alla superficie intiera, cioè si avrà semplicemente

$$\iiint \frac{dP_1}{dz} dx\,dy\,dz = \int \gamma P_1 ds .$$

Si troverà nella stessa maniera

$$\iiint \frac{dP_2}{dy} dx\,dy\,dz = \int \beta P_2 ds ,$$

e $$\iiint \frac{dP_3}{dx} dx\,dy\,dz = \int \alpha P_3 ds ,$$

chiamando β ed α i cosseni degli angoli che fa la parte esteriore della normale in un punto qualunque della superficie cogli assi delle y e delle x positive. Ne risulterà dunque

$$\int X dm = \int (\gamma P_1 + \beta P_2 + \alpha P_3) ds ;$$

e operando nella stessa maniera sulle due altre equazioni (A), se ne conchiuderà

$$\int Y dm = \int (\gamma Q_1 + \beta Q_2 + \alpha Q_3) ds ,$$

$$\int Z dm = \int (\gamma R_1 + \beta R_2 + \alpha R_3) ds .$$

Queste tre equazioni sono relativamente a una porzione qualunque finita del corpo ciò che erano le equazioni (A) relativamente ad un elemento infinitamente piccolo della sua massa.

Se una parte della superficie di questa porzione appartiene alla superficie stessa del corpo, γ, β, α saranno la stessa cosa che c'', c', c nelle equazioni (B) che esprimono le condizioni dell'equilibrio alla superficie, cosicchè moltiplicando queste per ds, e prendendone gli integrali, esse diverranno

$$\int X_1 ds = -\int (\gamma P_1 + \beta P_2 + \alpha P_3) ds ,$$

$$\int Y_1 ds = -\int (\gamma Q_1 + \beta Q_2 + \alpha Q_3) ds ,$$

$$\int Z_1 ds = -\int (\gamma R_1 + \beta R_2 + \alpha R_3) ds ;$$

riunendo queste equazioni a quelle or ora dedotte dalle equa-

zioni (A), e osservando, che in queste gli integrali, che formano i secondi membri, si estendevano a tutta la superficie della porzione che si considera, interna ed esterna, mentre in quelle dedotte dalle equazioni (B) essi comprendono solo le parti della superficie esterne o libere, cosicchè, sottratti questi dai primi, rimangono gli integrali relativi alla porzione interna della superficie di cui si tratta, cioè a quella per cui la porzione del corpo, che si considera, è separata dal rimanente, si avranno, per esprimere le condizioni dell'equilibrio delle forze tanto interne che esterne colle azioni molecolari, le equazioni

$$\int X dm + \int X_1 ds = \int (\gamma P_1 + \beta P_2 + \alpha P_3) ds,$$

$$\int Y dm + \int Y_1 ds = \int (\gamma Q_1 + \beta Q_2 + \alpha Q_3) ds,$$

$$\int Z dm + \int Z_1 ds = \int (\gamma R_1 + \beta R_2 + \alpha R_3) ds,$$

ossia

$$\left.\begin{aligned} \int X dm &= \int (\gamma P_1 + \beta P_2 + \alpha P_3) ds - \int X_1 ds, \\ \int Y dm &= \int (\gamma Q_1 + \beta Q_2 + \alpha Q_3) ds - \int Y_1 ds, \\ \int Z dm &= \int (\gamma R_1 + \beta R_2 + \alpha R_3) ds - \int Z_1 ds, \end{aligned}\right\} \quad (C)$$

ove i primi integrali dei secondi membri corrisponderanno alle porzioni sole di superficie della parte del corpo che si considera tracciate nel medesimo, e i secondi a quelle appartenenti alla sua superficie libera.

Il signor Poisson fa vedere che quando invece di considerare una porzione soltanto del corpo, si considerasse il corpo intiero, nel qual caso tutta la superficie sarebbe libera, queste equazioni (A), (B), (C) si ridurrebbero alle equazioni che i principii generali della statica danno per l'equilibrio d'un corpo

sollecitato da forze estranee qualunque, e dove non si ha d'uopo di considerare le azioni molecolari, sebbene per mezzo loro le forze estranee agiscano sul corpo stesso e tra loro.

Per altra parte le equazioni (A), (B) convengono anche allo stato primitivo del corpo, cioè in cui esso non fosse sollecitato da alcuna forza estranea; per applicarle a questo caso particolare basta fare nei valori di P_1, P_2 ecc., sovra indicati, $u=0$, $v=0$, $w=0$, e sopprimere nelle equazioni (A) e (B) tutte le forze date, interne od esterne. Cioè si avranno $R_1=Q_2=P_3=-K$, e le sei altre quantità P_1, Q_1 ecc. nulle; le tre equazioni (A) si ridurranno semplicemente a

$$\frac{dK}{dx}=0\,,\quad \frac{dK}{dy}=0\,,\quad \frac{dK}{dz}=0\,,$$

e le tre equazioni (B) ad una sola, $K=0$; in conseguenza delle tre prime equazioni K è una costante, che è nulla in virtù dell'ultima. Rimettendo dunque per K ciò che questa lettera rappresenta, e sopprimendo il fattor costante $\frac{2\pi}{3\alpha^5}$, si avrà $\Sigma r^3 fr=0$. Così nello stato del corpo, che si può considerare come il suo stato naturale, cioè in cui non è sottoposto che alla mutua azione delle sue molecole, dovuta alla loro attrazione e al calore, gli intervalli che le separano debbono essere tali che quest' equazione abbia luogo per tutti i punti del corpo, cioè che la somma delle azioni fr di tutte le molecole circondanti sopra ciascuna molecola che si considera, moltiplicate pel cubo della distanza di ciascuna delle prime molecole a quest'ultima, sia nulla, gli uni di questi prodotti distruggendo gli altri che agiscono in direzione opposta (1).

Si dee osservare col sig. Poisson che se si potessero trasformare le somme espresse dalle lettere K e k in integrali, come

---

(1) Secondo l'altra espressione di K stabilita dal sig. Poisson nella suddetta Memoria del 20.° fasc. del Giornale della Scuola politecnica, e indicata qui sovra nella nota al n.° 84, si avrebbe semplicemente nello stato naturale, come l'autore lo dimostra colà direttamente, $\Sigma rfr=0$.

potrebbe farlo credere la circostanza che r cresce in ciascuna di esse per piccolissime differenze uguali ad α, il valore di k diverrebbe lo stesso che quello di K preso negativamente. Infatti per questa trasformazione si dovrebbe moltiplicare sotto al segno Σ per $\frac{dr}{\alpha}$, e surrogare a questo segno quello dell' integrazione $\int$, il che darebbe

$$K=\frac{2\pi}{3}\int_0^\infty \frac{r^3}{a^6} fr\,dr\,, \quad k=\frac{2\pi}{15}\int_0^\infty \frac{r^5}{a^6} d.\frac{1}{r} fr\,.$$

Se si integra per parti quest'espressione di k, avendo riguardo ai due limiti tra cui l'integrazione dee farsi, e alla natura della funzione fr, si troverà che essa diviene

$$k=-\frac{2\pi}{3}\int_0^\infty \frac{r^3}{a^6} fr\,dr=-K\,,$$

come si è detto; ne risulterebbe dunque che il valore di k si annullerebbe con quello di K, il che non è ammessibile. Questo fa vedere che le somme rappresentate da queste lettere K, e k sono del numero di quelle che non possono essere cangiate in integrali, il che, come il signor Poisson ha dimostrato, può accadere in molti casi, anche quando si suppongono piccolissime le differenze della variabile. Non si può far vedere *a priori* che tale debba essere in particolare il caso delle somme di cui si tratta, relative alla funzione fr, poichè si ignora la forma di questa funzione; ma esso è in generale quello di molte funzioni che come fr crescono rapidissimamente per l'accrescimento della variabile, ed in esso si trova, per esempio, la forma di funzione che sopra si è indicato poter soddisfare alle condizioni a cui è sottoposta la funzione fr. Il valore di k non sarà dunque nullo nello stato naturale del corpo, come lo è quello di K. Questo valore di k in tale stato del corpo, dipenderà dalla natura e dal calore del medesimo; esso potrà essere rappresentato dal peso d'un cilindro di materia conosciuta avente per

base l'unità di superficie, e un'altezza conveniente, e dovrà esser dato per ciascun corpo in particolare e per ciascun grado di temperatura.

Le forze P_1, Q_1, R_1, P_2 ecc., e per conseguenza quelle P, Q, R, cioè le forze che esprimono l'azione d'una parte del corpo sull'altra nello stato naturale, saranno però tutte nulle, le loro espressioni sovra stabilite essendo formate di termini di cui gli uni hanno K per fattore, e gli altri contengono solo k moltiplicato per coefficienti differenziali di u, v, w, che sono nulli in questo stato. Quindi si vede che quando un corpo è nel suo stato naturale, cioè non è compresso, nè dilatato da alcuna forza, come quando è posto nel vacuo, e si fa astrazione anche dal suo peso, non solamente ciascuna molecola è in equilibrio nel suo interno e alla sua superficie, ma la risultante delle azioni molecolari è separatamente nulla dai due lati opposti di ciascuna piccola parte del corpo; e ciò è una conseguenza necessaria della supposizione che l'equilibrio abbia luogo indipendentemente da ogni forza estranea; poichè se si considera, per esempio, un solo filetto composto d'una serie di molecole, le porzioni piccolissime del medesimo, ma più grandi che il raggio d'attività delle molecole, poste a ciascuna delle sue estremità, non debbono certamente essere attratte, nè respinte dal resto del filetto, altrimenti si richiederebbe una forza applicata a ciascuna delle estremità per ritenerle; ma per la stessa ragione ciascuna di queste porzioni non dee esercitare alcuna azione sopra un'altra porzione piccolissima immediatamente vicina, e così successivamente, onde le azioni molecolari che hanno luogo dai due lati d'una qualunque di queste piccole parti in tutta la lunghezza del filetto saranno separatamente nulle. In questo stato le distanze che separano le molecole debbono esser tali, che questa condizione sia riempiuta, avuto riguardo alle loro mutue attrazioni, e alla ripulsione calorifica che si dee pure comprendere tra le azioni molecolari. Per quanto duro e solido per conseguenza sia un corpo, la forza che si oppone alla separazione delle sue parti è nulla nello stato che qui consideriamo; essa non comincia a nascere se non quando cerchiamo di operar questa separazione, e cangiamo così alcun poco la distanza delle molecole.

88. Supponiamo, per applicare le formole precedenti a un caso particolare, atto a mettere in evidenza la natura della quantità k nei diversi corpi, che le forze interne, cioè applicate ai punti della massa del corpo, X, Y, Z siano nulle. ma che il corpo sia sottoposto all'azione di forze esterne normali alla sua superficie in ciascun punto di questa. Sia N la forza relativa al punto M_1, e di cui le componenti sono X_1, Y_1, Z_1 nella direzione degli assi delle coordinate, riguardando questa forza data come positiva o negativa, secondo che agisce da fuori in dentro, o da dentro in fuori, cioè secondo che essa tende a comprimere o a dilatare il corpo. Richiamandoci che abbiamo considerato come positive le forze X_1, Y_1, Z_1 tendenti ad aumentare le coordinate positive x, y, z, cioè che agiscono da dentro in fuori, al contrario di quello che ora supponiamo per N, avremo

$$X_1 = -Nc\,, \quad Y_1 = -Nc'\,, \quad Z_1 = -Nc''\,,$$

c, c', c'' essendo i cosseni degli angoli che la parte esterna della normale al punto M_1 fa cogli assi delle x, y, z, come nell'equazione (B) relativa alla superficie. Supponiamo inoltre la forza N costante, cioè la stessa per tutti i punti della superficie, e il corpo omogeneo e sferico; si soddisferà necessariamente alle equazioni (A) e (B), ammettendo che il corpo sia per tutto e in tutte le direzioni ugualmente compresso o dilatato, non essendovi ragione per cui la compressione o dilatazione debba variare da un punto all'altro. Così la distanza r compresa tra due punti vicini M e M', essendo divenuta r' dopo il cangiamento di forma del corpo, si avrà $r' = r - r\delta$, indicando con δ una quantità indipendente dalla direzione della retta MM', e dalle coordinate x, y, z del punto M, e che sarà positiva o negativa, secondochè vi sarà compressione o dilatazione. Avuto riguardo ai valori di r e r', cioè

$$r=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,,$$

$$r'=\sqrt{(x'+u'-u)^2+(y'+v'-v)^2+(z'+w'-w)^2}$$

$$=\sqrt{\left\{\left(x'+x'.\frac{du}{dx}+y'.\frac{du}{dy}+z'.\frac{du}{dz}\right)^2\right.}$$

$$+\left(y'+x'.\frac{dv}{dx}+y'.\frac{dv}{dy}+z'.\frac{dv}{dz}\right)^2$$

$$\left.+\left(z'+x'.\frac{dw}{dx}+y'.\frac{dw}{dy}+z'.\frac{dw}{dz}\right)^2\right\},$$

questa condizione $r'=r-r\delta$ non può verificarsi se non supponendo $\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dy}=\frac{dw}{dz}=-\delta$, e tutte le altre differenziali parziali $\frac{du}{dy}$, $\frac{dv}{dx}$, ecc. uguali a zero, come è facile verificarlo.

Per altra parte tutti i valori di r attorno a ciascun punto del corpo essendosi cangiati proporzionalmente nel divenire r' ossia $r-r\delta$, K, che era nullo nello stato naturale, dovrà ancora rimaner tale nel nuovo stato d'equilibrio, e il valore di k che apparteneva al corpo nel primo stato, potrà considerarsi come costante anche nella compressione o dilatazione del corpo, trattandosi sempre di piccoli cangiamenti di distanza delle molecole.

Ciò posto sostituendo i valori suddetti delle differenziali parziali di u, v, e w nelle espressioni generali sovra stabilite di P_1, Q_1, R_1, P_2 ecc., e facendo $K=0$, ne risulterà $R_1=Q_2=P_3=5k\delta$, e le sei altre quantità P_1, Q_1 ecc. saranno nulle; in conseguenza le equazioni (A) diverranno $\frac{d.K\delta}{dx}=0$, $\frac{d.K\delta}{dy}=0$, $\frac{d.K\delta}{dz}=0$, e saranno così effettivamente soddisfatte, poichè δ è una costante, per ipotesi, in tutta l'estensione del corpo, e tale è pur anche k a cagione dell'omogeneità del medesimo. Per mezzo poi degli stessi valori le equazioni (B) diverranno $-Nc=-5k\delta c$, $-Nc'=-5k\delta c'$, $-Nc''=-5k\delta c''$, che si riducono ad

una sola, $5k\delta = N$. Quindi si vede che k è una quantità essenzialmente positiva, poichè δ dee sempre essere dello stesso segno che la forza N comprimente o dilatante. Nelle differenti materie, δ sarà, per una data forza N, in ragione inversa di k, considerato come una quantità costante quale sopra si è detto potersi supporre, cosicchè k sarà come la misura della resistenza della materia alla compressione o dilatazione, e in ciascuna materia in particolare δ varierà (nella stessa ipotesi di k costante) proporzionalmente ad N, cioè la distanza delle molecole, e per conseguenza ciascuna dimensione del corpo subirà un accrescimento o diminuzione proporzionale alla forza dilatante o comprimente che agisce su tutta la superficie del medesimo; avrà dunque luogo in questo caso, relativamente a ciascuna dimensione, ciò che si ammette generalmente, dietro alle sperienze, per le dilatazioni o compressioni ordinarie, in virtù di una forza che agisce in una sola direzione, supponendo il corpo inestensibile nelle altre. Secondo la nostra analisi questo succederebbe indefinitamente per qualunque dilatazione o compressione, il che non è senza dubbio conforme al vero; ma bisogna richiamarsi che questa analisi è fondata sopra approssimazioni che non avrebbero più luogo per cangiamenti di distanza delle molecole che fossero al di là di certi limiti, e non si potrebbe più inoltre supporre allora in particolare k costante nei diversi gradi di compressione o dilatazione, come abbiamo fatto. Si noterà pure che i nostri risultati suppongono che si possa trascurare il cangiamento d'azione che dee provenire dallo svolgimento o assorbimento di calorico nella compressione o dilatazione, o che questo svolgimento o assorbimento faccia esso medesimo compensazione approssimata alla variazione che k subirebbe.

Secondo l'indicata legge della compressione o dilatazione, il volume del corpo essendo supposto V nel suo stato naturale, diverrà $V(1-3\delta)$ per l'azione della forza N, e se si determina colla sperienza la sua variazione per una forza conosciuta, se ne conchiuderà per mezzo dell'equazione precedente $5k\delta = N$ il valore di k relativo alla materia e alla temperatura del corpo, e che potrà poi sostituirsi nelle equazioni generali sopra stabi-

bilite pel corpo sollecitato nei diversi suoi punti da forze qualunque.

89. Debbo qui aggiungere che, secondo quello che il sig. Poisson fa osservare e dimostra nella sua Memoria sull'equilibrio e sul moto de' corpi solidi elastici e dei fluidi (20.° fascicolo del *Journal de l'École polytechnique*, e *Annales de chimie et de physique*, *octobre* 1829), qualunque sia la legge con cui si supponga variare la somma che abbiamo chiamata k, e che qui abbiamo supposta costante, come pure quella indicata con K, e che abbiamo supposta nulla in tutti gli stati del corpo, come dee esserlo quanto ai corpi solidi nello stato naturale, la pressione normale, nel caso in cui il corpo è ugualmente compresso in tutte le direzioni, pressione che nelle supposte simplificazioni abbiamo trovata espressa da $5k\delta$, δ essendo la diminuzione della distanza o intervallo medio delle molecole, avente per unità la distanza che corrisponde allo stato naturale, può sempre rappresentarsi quando gli intervalli delle molecole sono piccolissimi relativamente al loro raggio di attività, e per qualunque sorta di corpo, da una serie convergente della forma

$$a\rho^2 + b\rho^{\frac{2}{3}} + c + d\rho^{-\frac{2}{3}} + \text{ecc.}$$

in funzione della densità ρ del corpo; serie nella quale il terzo termine e i seguenti pajono dover essere insensibili relativamente ai due primi, cosicchè se si chiama p la pressione uguale per ogni verso che corrisponde alla densità ρ, si avrà $p = a\rho^2 + b\rho^{\frac{2}{3}}$, a, e b essendo coefficienti, che non dipenderanno se non dalla materia del corpo, e dalla sua quantità di calorico; onde per uno stesso corpo, se la densità viene a cangiare in maniera che la quantità di calorico non varii, questi coefficienti non varieranno nè anch'essi. I corpi solidi e (astrazione fatta dalla loro vaporizzazione) anche i liquidi potendo conservare il loro stato senza il soccorso d'alcuna pressione esterna, bisogna che il valore di p possa esser nullo per un valor conveniente di ρ, il che richiede che i coefficienti a e b siano di segno contrario. Indicando con α questo valor particolare della densità, e supponendo che ρ divenga $\alpha(1+\beta)$ per

una pressione data P, β essendo una piccolissima frazione di cui si trascurerà il quadrato, si avranno, per determinare questi coefficienti a e b per una data sostanza, le due equazioni

$$o = a a^2 + b a^{\frac{2}{3}},$$

$$P = a a^2 (1+\beta)^2 + b . a^{\frac{2}{3}} (1+\beta)^{\frac{2}{3}}$$

$$= a a^2 (1 + 2\beta) + b a^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{2}{3}\beta\right),$$

d'onde

$$a = \frac{3P}{4 a^2 \beta}, \quad b = \frac{-3P}{4 a^{\frac{2}{3}} . \beta};$$

cosicchè l'espressione generale di p diviene

$$p = \frac{3}{4} \cdot \frac{P}{\beta} \left(\frac{\rho^2}{a^2} - \frac{\rho^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} \right) = \frac{3}{4} \frac{P}{\beta} \left\{ \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{2}{3}} \right\},$$

ossia, facendo $a = 1$, semplicemente

$$p = \frac{3}{4} \cdot \frac{P}{\beta} \left(\rho^2 - \rho^{\frac{2}{3}} \right).$$

Se continuando a supporre la densità naturale $= 1$, si prende pure 1 per la distanza ossia intervallo delle molecole nello stesso stato, e si esprime con δ, come sopra, la diminuzione di questo intervallo prodotta dalla pressione p, si avrà $\rho = \frac{1}{(1-\delta)^3}$, e l'espressione di p, relativamente a δ, sarà

$$p = \frac{3}{4} \cdot \frac{P}{\beta} \left\{ (1-\delta)^{-6} - (1-\delta)^{-2} \right\}.$$

Se p, e per conseguenza δ è poco considerevole, quest'espressione diviene approssimativamente

$$p=\frac{3}{4}\cdot\frac{P}{\beta}\{(1+6\delta)-(1+2\delta)\}=\frac{3}{4}\cdot\frac{P}{\beta}\cdot 4\delta=\frac{3P}{\beta}\cdot\delta,$$

e coincide allora con quella sopra trovata di N, per mezzo delle approssimazioni che avevamo introdotte nel calcolo, cioè $5k\delta$, facendo in questa $5k=\frac{3P}{\beta}$, ossia $k=\frac{3}{5}\cdot\frac{P}{\beta}$; questo valore di k è quello che si sarebbe infatti immediatamente trovato coll'esperienza per una sostanza data, poichè se δ' rappresenta il valore di δ per la pressione P che produce una condensazione β, si avrà prossimamente $\delta'=\frac{\beta}{3}$, onde la formola $5k\delta=N$ sarebbe divenuta $5k\frac{\beta}{3}=P$, ossia $k=\frac{3}{5}\cdot\frac{P}{\beta}$. Reciprocamente facendo nell'espressione $N=5k\delta$,

$$(1-\delta)^3=\frac{1}{\rho},\quad\text{ossia}\quad 1-\delta=\frac{1}{\rho^{\frac{1}{3}}},$$

e quindi

$$\delta=1-\frac{1}{\rho^{\frac{1}{3}}}=1-\rho^{-\frac{1}{3}},$$

essa diviene, relativamente a ρ,

$$N=5k\left(1-\rho^{-\frac{1}{3}}\right)=5k\left\{\frac{\rho^{\frac{1}{3}}-1}{\rho^{\frac{1}{3}}}\right\},$$

e, a cagione che ρ si suppone pochissimo diverso dall'unità, si riduce per approssimazione a $N=5k\left(\rho^{\frac{1}{3}}-1\right)$, cioè all'espressione che si dedurrebbe dalla supposizione che in questo caso di pressione d'una sfera, uguale in tutte le direzioni, la conden-

sazione lineare, quale si avrebbe per la medesima pressione applicata ad una sola direzione, quando il corpo fosse inestensibile nelle altre, sia proporzionale a questa pressione. Infatti se ρ esprime la densità totale prendendo per unità la densità primitiva, $\rho^{\frac{1}{3}}$ sarà quella dovuta all'avvicinamento delle molecole in una sola dimensione, e $\rho^{\frac{1}{3}} - 1$ per conseguenza la condensazione in questa dimensione. Del resto si osserverà che a cagione della piccolezza che si suppone alla condensazione di cui si tratta, la quantità $\rho^{\frac{1}{3}} - 1$ si riduce prossimamente a $\frac{1}{3}(\rho - 1)$, e così l'espressione di N o di p a $5\frac{k}{3}(\rho - 1)$, k ritenendo sempre il valore sovra indicato, onde la pressione diviene anche proporzionale alla condensazione cubica. Ma l'espressione suddetta di p, relativamente sia a ρ, sia a δ, che, rappresentando per brevità il coefficiente costante $\frac{3}{4} \cdot \frac{P}{\beta}$ con A, prende la forma

$$p = A(\rho^2 - \rho^{\frac{2}{3}}) = A\left\{(1-\delta)^{-6} - (1-\delta)^{-2}\right\},$$

è quella che si dee ammettere come teoricamente più rigorosa, e per compressioni o dilatazioni più estese, quando si supponga che non abbia luogo alcuno svolgimento, nè assorbimento di calorico, cioè che la temperatura si varii in maniera che la quantità di calorico resti costante. Poisson fa osservare, anche a questo riguardo, l'impossibilità di ridurre le somme d'azioni di cui si tratta, e che sopra abbiamo espresse con k e K a semplici integrali; poichè se si fosse ridotta ad un integrale la somma da cui egli ha dedotto il valore della pressione,

$$a\rho^2 + b\rho^{\frac{2}{3}} + c + d\rho^{-\frac{2}{3}} + \text{ecc.}$$

nel nostro caso, essa non avrebbe presentato, che il primo termine $a\rho^2$, quantità che non può annullarsi per un valore dato e finito della densità ρ, come ciò dee avvenire ne' corpi solidi, e che in generale non può darci un grande accrescimento di pressione corrispondente a un piccolo aumento della densità ρ, come l'osservazione ce lo presenta pure per gli stessi corpi; biso-

gna per questo che la pressione sia rappresentata da due termini di segno contrario, di cui i valori siano molto grandi relativamente alla loro differenza, la quale dovrà divenire nulla per valori finiti de' due termini, condizione a cui soddisfa realmente l'espressione che abbiamo trovata.

Il sig. Poisson fa vedere nella citata Memoria, che il valor negativo, quale abbiamo veduto dover essere pei corpi solidi quello del secondo termine dell' espressione generale suddetta della pressione, suppone che l'attrazione definitiva tra due molecole, cioè la funzione della distanza, che esprime l'eccesso dell'attrazione di queste due molecole sulla ripulsione del loro calorico, debba esser negativa, cioè divenire una ripulsione definitiva al dissotto d'un certo limite della distanza di queste molecole, esser nulla a questo limite, ed essere al dissopra soltanto di quel limite definitivamente un'attrazione, cioè un vero eccesso della forza attrattiva delle molecole sopra la forza ripulsiva del loro calorico; questo adunque dee succedere nei corpi solidi, e in essi per conseguenza può avvenire, che l'attrazione mutua delle molecole si estenda oltre la ripulsione calorifica, e la prima possa ancora essere sensibile a distanze in cui la seconda sia già intieramente scomparsa.

Ma limitandoci qui al valore approssimato della pressione, che più sopra abbiamo trovato nel caso della sfera che abbiamo considerato, cioè $5k\delta$, osserveremo che con questo valore, in quel caso particolare, le equazioni sovra stabilite, che esprimono i valori delle componenti delle azioni molecolari, P, Q, R, divengono

$$P=5k\delta c\,,\quad Q=5k\delta c'\,,\quad R=5k\delta c''\,,$$

che sono i valori delle risultanti d'una forza $5k\delta$ perpendicolare alla superficie di separazione delle due parti del corpo che si considerano in queste espressioni, d'onde si conchiude che in questo caso l'azione d'una parte del corpo sull'altra, ossia la risultante delle forze P, Q, R è normale alla superficie di separazione, e per tutto uguale a $5k\delta$, ossia alla forza esterna N; risultato simile a quello che presentano i liquidi ed i fluidi elastici in conseguenza della proprietà che hanno di trasmettere ugualmente per ogni verso le pressioni esercitate alla loro su-

perficie, mentre nei corpi solidi elastici ciò non ha luogo generalmente. Se δ è nullo, cioè se il corpo si trova nel suo stato naturale, le forze P, Q, R sono pur nulle, conformemente a ciò che si è detto in generale di sopra pei corpi in questo stato.

90. Il sig. Poisson ha poi applicate le formole generali sopra stabilite ai corpi di diversa forma, e sottoposti a forze in varia guisa su loro adoperate, ed ha ottenuto in parte gli stessi risultati che già si erano dedotti da considerazioni teoriche meno rigorose, congiunte con ipotesi particolari, e che già erano stati trovati conformi alla sperienza, in parte risultati che non erano ancora stati stabiliti, e che le sperienze hanno pure confermati in appresso. Questi risultati riguardano principalmente le lamine e verghe elastiche, compresse o tirate o piegate da forze longitudinali, o di torsione, o applicate trasversalmente, e sono gli uni relativi all'equilibrio di cui qui si tratta di questi corpi, e gli altri ai movimenti di vibrazione dei medesimi. Non seguirò qui il sig. Poisson in queste applicazioni delle formole che non offrono più che difficoltà analitiche; debbo però indicare il valore assoluto dell'allungamento o raccorciamento di una verga cilindrica o prismatica per una data forza di trazione o compressione che egli ha stabilito dietro alle formole generali, relativamente alla quantità k che entra in queste formole, onde paragonarlo con quello sopra indicato della dilatazione o contrazione lineare prodotta nelle dimensioni d'una sfera dilatata o compressa da ogni parte con una forza uguale. Chiamando α questo allungamento o raccorciamento d'una verga di cui la lunghezza sia l, e la sezione trasversale sia ω, in virtù d'una forza ϖ, egli trova $\alpha = \frac{2l\varpi}{5k\omega}$. Se dunque la sezione ω fosse uguale all'unità di superficie, si avrebbe semplicemente

$$\alpha = \frac{2l\varpi}{5k} \quad \text{ossia} \quad \frac{\alpha}{l} = \frac{2\varpi}{5k};$$

cioè l'allungamento o raccorciamento lineare per l'unità di lunghezza è uguale a $\frac{2\varpi}{5k}$, ϖ essendo la forza di trazione, o di compressione sull'unità di superficie; questo risultato è lo stesso che ha luogo per l'allungamento d'una corda elastica. Si è veduto che

la dilatazione o compressione lineare sull' unità di dimensione nel caso della sfera dilatata, o compressa da ogni parte con una forza N sull'unità di superficie, è $\delta = \frac{N}{5k}$; la variazione della dimensione lineare longitudinale nel caso della verga tirata o compressa in questa sola direzione è dunque doppia di quella prodotta dalla stessa forza sull'unità di superficie, nel caso della sfera dilatata o compressa da ogni parte. Questa differenza di effetto nell' applicazione delle forze dipende da che nel caso della sfera compressa da ogni parte, l'allungamento o raccorciamento che la forza dilatante o comprimente tenderebbe a produrre in una qualunque delle dimensioni è in parte controbilanciato da quello che tende pure a prodursi nelle due dimensioni perpendicolari alla prima, in vece che nel caso della verga tirata o compressa longitudinalmente le dimensioni perpendicolari alla lunghezza soffrono al contrario una variazione opposta alla prima, e di cui la possibilità contribuisce alla produzione di questa. E la relazione tra queste due sorta di variazioni, nel caso della verga, forma appunto uno de' principali risultati nuovi a cui Poisson è stato condotto, relativamente all'equilibrio delle verghe e lamine elastiche, e che debbo qui riferire coll'indicazione delle sperienze con cui fu confermato (il che formerà il complemento di quello che già ho esposto nell'articolo precedente) riservandomi di riferire i risultati relativi al moto di vibrazione, nell'articolo in cui tratterò del moto dei corpi elastici. Ecco dunque questo risultato quale il signor Poisson medesimo lo espose nel tom. 36 degli *Annales de Chimie et de Physique*, *décembre* 1827.

Sia a la lunghezza d'un filo di corpo elastico che abbia per tutto la stessa grossezza ; sia b l'area della sezione normale alla sua lunghezza, e per conseguenza ab il suo volume. Supponiamo che gli si faccia subire, per mezzo d'una forza di trazione longitudinale, una piccola estensione, cosicchè la lunghezza ne divenga $a(1+\alpha)$, α essendo una piccola frazione ; nello stesso tempo il filo si assottiglierà, e se indichiamo con $b(1-\beta)$ ciò che diviene l'area della sezione normale, β essendo pure una piccola frazione, il suo nuovo volume sarà a un dipresso $ab(1+\alpha-\beta)$. Ora secondo la teoria dei corpi elastici,

di cui abbiamo sopra esposti i principii, si dee avere $\beta = \frac{1}{2}\alpha$, cioè la diminuzione della sezione del filo prendendo per unità la sua sezione primitiva dee essere la metà dell' allungamento del filo prendendo similmente per unità la lunghezza primitiva. Sostituendo questo valore di β nell'espressione suddetta del volume si ha $ab\left(1 + \frac{1}{2}\alpha\right)$, d'onde risulta che per l'estensione α d'un filo elastico sull'unità di lunghezza, il suo volume si trova aumentato secondo la ragione di $1 + \frac{1}{2}\alpha$ all' unità, e la sua densità per conseguenza diminuita in una ragione inversa di quella. Ora questo risultato si accorda perfettamente con una sperienza che il sig. Cagniard-La-Tour comunicò all'Accademia di Parigi, circa lo stesso tempo in cui il signor Poisson annunziò il suo lavoro, e di cui ecco la descrizione. Egli prese un filo d'ottone che immerse verticalmente in un tubo pieno d'acqua; la parte del filo così immersa avea 2^{m}, 03 di lunghezza; la sua estremità inferiore toccava il fondo del tubo. Sollevò egli il filo senza estenderlo, cosicchè questa estremità si trovava a 6 millimetri sopra al fondo, ed osservò che l'acqua si abbassava nel tubo di 5 millimetri, cosicchè una lunghezza d'acqua di 5 millim. nel tubo rappresentava il volume d'una lunghezza di 6 millimetri del filo. Attaccò quindi l'estremità del filo al fondo del tubo, poi l'allungò di 6 millimetri per mezzo d'una trazione longitudinale; la sua grossezza ne fu diminuita, e l'acqua si abbassò nel tubo di 2^{mm},5, ossia della metà del primo abbassamento; se ne conchiude che in virtù dell'allungamento il volume del filo si è accresciuto, poichè se il volume fosse rimasto uguale a quello primitivo, l'acqua avrebbe dovuto abbassarsi a un dipresso della stessa quantità che quando si sollevava il filo senza tirarlo, essendosi ora estratta dal tubo una porzione di questo volume uguale a quella che se n'era estratta allora, astrazion fatta dall' assottigliamento di questa stessa porzione estratta, che si può trascurare. Ma l'abbassamento dell'acqua non essendo stato che la metà di quello che prima si era osservato, ne segue che ha avuto luogo un accrescimento di volume uguale a un dipresso a quello corrispon-

dente all'altra metà, cioè uguale alla metà del volume della porzione tratta fuori del tubo, e che ne rappresenta l'allungamento, conformemente al risultato teorico del sig. Poisson.

Quanto alle membrane e alle lastre, il signor Poisson trova coll' applicazione delle sue formole, che per una forza stessa ϖ applicata in ogni direzione dei raggi all'orlo d'una membrana, o d'una lastra circolare piana, e relativa all'unità di superficie della sezione presa perpendicolarmente alla superficie della membrana o lastra, l'allungamento lineare sta a quello che sarebbe prodotto dalla stessa forza applicata all'unità di superficie della sezione d'una corda o verga, nella direzione longitudinale, come 3 a 4, cosicchè la stessa forza applicata successivamente alla superficie d'una sfera, al contorno d'una membrana, e alle estremità d'una corda produce dilatazioni lineari che stanno tra loro come i numeri 2; 3; 4, la quantità k dipendente dalla materia essendo supposta la stessa nei tre casi. La relazione poi tra l'allungamento nella direzione del raggio della membrana o lastra circolare, e la diminuzione del suo spessore analoga a quella tra l'allungamento della corda o verga, e la diminuzione del suo diametro, quale la stabilisce Poisson, è la seguente. Sia b l'area d'una lastra di corpo elastico di grossezza uniforme a in tutta la sua estensione; supponiamo che si estenda questa superficie ugualmente per ogni verso con forza di trazione, e che essa divenga $b(1+\beta)$, β essendo una piccola frazione; la grossezza ne diminuirà nello stesso tempo, e indicheremo con $a(1-\alpha)$ ciò che essa diverrà, α essendo pure una piccolissima frazione, e il volume che era ab si cangerà a un dipresso in $ab(1+\beta-\alpha)$. Ora secondo la teoria del sig. Poisson si avrà $\alpha=\frac{1}{3}\beta$; per conseguenza il volume si accrescerà nella ragione di $1+\beta-\frac{1}{3}\beta$, ossia di $1+\frac{2}{3}\beta$ all'unità. Ma questo risultato sarebbe meno facile a verificarsi che il precedente colla sperienza.

Quanto alla torsione delle verghe cilindriche il sig. Poisson ha trovato, applicandovi la sua teoria generale, che chiamando ε il raggio della sezione d'una di queste verghe, l la sua lun-

ghezza, E il momento della forza applicata alla sua estremità, in un piano perpendicolare alla sua lunghezza, per torcerla, ψ l'arco di torsione che ne risulta, espresso in parti del raggio preso per unità, si ha $\psi = \frac{2El}{\pi k \varepsilon^4}$ (ove k è la costante dipendente dalla natura della sostanza della verga, e che già si è introdotta nelle formole relative alla trazione longitudinale); il che s'accorda, come si vede, colle leggi che abbiamo dedotte dalle sperienze di Coulomb sull'influenza della lunghezza e del diametro della verga a questo riguardo. Quanto al valore assoluto di questa torsione, se si fa $E = \varpi r$, cioè si suppone la forza ϖ applicata al vette r per produrla, si avrà

$$\psi = \frac{2\varpi r l}{\pi k \varepsilon^4}.$$

Quindi se α è l'allungamento della stessa verga che sarebbe prodotto da una forza di trazione uguale a ϖ, osservando che la sezione della verga che avevamo indicata con ω è qui $\varepsilon^2\pi$, si avrà, secondo l'espressione di questo allungamento sopra stabilita,

$$\frac{\psi}{\alpha} = \frac{\frac{2\varpi r l}{\pi k \varepsilon^4}}{\frac{2 l \varpi}{5 k \varepsilon^2 \pi}} = \frac{5r}{\varepsilon^2},$$

ovvero, facendo $r = \varepsilon$, ed esprimendo ψ nella stessa unità di ε ed l, $\psi = 5\alpha$, col che si accorda prossimamente il risultato che si potrebbe dedurre dalle ricerche sperimentali di Bevan, riferite al n.° 78.

I risultati teorici del sig. Poisson sulla torsione delle verghe furono poi estesi dal sig. Cauchy, dalle verghe cilindriche alle verghe di sezione rettangolare (*Exercices de Mathématique* e *Bulletin de Ferussac*, *juin* 1829), e le sperienze del sig. Savart, quali sopra le abbiamo riferite su tal punto (n.° 75), non sono che una verificazione di questi risultati così generalizzati.

91. In tutti i calcoli di cui abbiamo parlato in quest'articolo, tendenti a render ragione dell' equilibrio tra le molecole dei corpi, sia nel loro stato naturale, sia nel caso di applicazione

di forze estranee si sono lasciate indeterminate le funzioni della distanza tra le molecole che le forze attrattive e ripulsive loro appartenenti debbono presentare, ammettendo solo che le leggi di queste forze relativamente alla distanza fossero tali che esse decrescessero rapidissimamente ad una certa piccolissima distanza, onde devenire insensibili a qualunque distanza sensibile, come la natura della costituzione de' corpi sembrava richiederlo. Pare però difficile di rendersi ragione *a priori* d'una legge di questa specie tra una molecola e l'altra immediatamente, essendo naturale il pensare che una forza qualunque proveniente da un punto debba seguire nella sua intensità la ragione inversa dei quadrati delle distanze da questo punto, cioè dell' estensione delle superficie sferiche descritte attorno a questo punto preso per centro, con raggi successivamente più grandi. Ora vi sarebbe una considerazione per mezzo di cui si potrebbero ricondurre queste leggi di decrescimento rapidissimo a quella della ragione inversa dei quadrati delle distanze; essa consisterebbe nel riguardare le forze di cui si tratta come esercitate non immediatamente da una molecola ponderabile sull'altra, ma tra le molecole ponderabili e un'infinità di molecole del fluido imponderabile come calorico od etere, che altronde dobbiamo tra loro supporre e che formino attorno ad esse, condensandovisi più o meno, atmosfere che si sovrappongono e si penetrano vicendevolmente, cosicchè la legge dell' attrazione e ripulsione apparente che ne risulta tra le molecole ponderabili sia dipendente dalla legge di distribuzione e posizione delle diverse molecole di questo fluido tra loro, e relativamente alle molecole ponderabili stesse. Abbiamo veduto infatti che nella supposizione che la temperatura de' corpi dipenda dalla maggiore o minore quantità del fluido particolare detto *calorico* frapposto tra le loro molecole, si dee concepire attrazione di queste pel medesimo, in virtù della quale esse lo condensino e rattengano attorno a loro, e quindi attrazione tra una molecola ponderabile, e il calorico che circonda l'altra, e che nello stesso tempo si dee ammettere una forza ripulsiva tra le molecole del calorico, per cui esso resiste, come fluido elastico, alla compressione, e che esercitandosi pure tra l'atmosfera di questo fluido che circonda una molecola e quella che circonda un'altra pro-

duce una ripulsione apparente fra le molecole ponderabili stesse. Nell'ipotesi poi che la temperatura dipenda semplicemente dalle vibrazioni più o men rapide delle molecole ponderabili, e d'un fluido detto *etere* in cui siano immerse, queste molecole debbono pur condensare attorno a se questo fluido per cui si suppongano avere un'attrazione, mentre le molecole stesse dell'etere, come fluido elastico, debbono essere dotate di una forza ripulsiva, onde nascerebbero ugualmente forze attrattive e ripulsive apparenti tra le molecole dei corpi ponderabili, le quali solo in questo caso sarebbero indipendenti dalle variazioni di temperatura, questa non aumentando la distanza delle molecole che per la somma di impulsioni reciproche che risulterebbero dal moto più o men rapido di vibrazione. Si può dunque cercare, in qualunque delle due ipotesi, se ammettendo tra le molecole de' corpi ponderabili immerse in un fluido elastico indefinito, e quelle di questo fluido, un'attrazione in ragion inversa dei quadrati delle distanze, e tra le molecole di questo fluido stesso una ripulsione che segua pure la stessa legge, non ne potrebbero risultare infatti, in virtù della distribuzione del fluido attorno alle molecole ponderabili, forze attrattive e ripulsive apparenti tra le molecole ponderabili, quali la costituzione dei corpi ci obbliga a supporvi.

Questo ha tentato di fare recentemente il sig. Mossotti in una sua Memoria intitolata: *Sur les forces qui régissent la constitution intérieure des corps, apperçu pour servir à la détermination de la cause et des lois de l'action moléculaire*, *Turin* 1836.

Oltre le forze di cui abbiamo parlato, egli ha pure ammessa una forza ripulsiva tra le molecole stesse ponderabili de' corpi, anch'essa in ragion inversa dei quadrati delle distanze, quale Œpinus era stato condotto a supporla per ispiegare la distribuzione del fluido elettrico sulla superficie dei corpi elettrizzati, e le loro attrazioni e ripulsioni apparenti nell'ipotesi d'un solo fluido in essi condensato o rarefatto; e stabilisce in generale tra tutte queste diverse forze quelle relazioni che gli sono suggerite dall'analogia che egli crede poter esistere tra le forze molecolari, e quelle attrazioni e ripulsioni elettriche.

Ciò posto chiamando g la forza acceleratrice, cioè riferita alle unità di massa, che costituisce l'attrazione tra gli atomi dell'etere e

la materia delle molecole ponderabili, f la forza acceleratrice di ripulsione tra gli atomi dell'etere, forza che si suppone per altro uguale alla forza g, e γ la forza suddetta di ripulsione tra la materia delle molecole ponderabili, presa ciascuna di queste forze all'unità di distanza; x, y, z le coordinate del centro di una qualunque delle molecole ponderabili supposte sferiche; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, ecc. quelle dei centri delle altre molecole ponderabili del corpo, e r_1, r_2, ecc. le distanze dei centri di queste molecole dal centro della prima; ϖ la densità supposta uniforme, e v il volume della prima molecola, e ϖ_1, v_1, ϖ_2, v_2, ecc. le stesse quantità per le altre molecole; k una costante dipendente dalla natura dell'etere, e che determina la sua densità q sotto una data pressione o forza elastica ε, in maniera che si abbia $\varepsilon = \frac{1}{2} k q^2$; q la densità che l'etere dee prendere alla superficie della prima molecola, e che si suppone essere pur quella che esso avrebbe prossimamente in tutto lo spazio occupato dalla molecola, se la materia di questa non ne lo escludesse, e q_1, q_2, ecc. le quantità corrispondenti relativamente alle altre molecole, il sig. Mossotti, con un'analisi fondata sui principii della meccanica ed approssimazioni che la piccolezza da esso attribuita alle molecole per rapporto alla loro distanza pare permettere, e facendo per abbreviare $\alpha = \sqrt{\frac{4\pi f}{k}}$, trova richiedersi per l'equilibrio della suddetta prima molecola, le tre equazioni seguenti:

$$g v (q + \varpi) \Sigma v_n (\varpi_n + q_n)(1 + \alpha r_n) e^{-\alpha r_n} \cdot \frac{x_n - x}{r_n^3} - (g - \gamma) \varpi v \Sigma \varpi_n v_n \cdot \frac{x_n - x}{r_n^3} = 0,$$

$$g v (q + \varpi) \Sigma v_n (\varpi_n + q_n)(1 + \alpha r_n) e^{-\alpha r_n} \cdot \frac{y_n - y}{r_n^3} - (g - \gamma) \varpi v \Sigma \varpi_n v_n \cdot \frac{y_n - y}{r_n^3} = 0,$$

$$g v (q + \varpi) \Sigma v_n (\varpi_n + q_n)(1 + \alpha r_n) e^{-\alpha r_n} \cdot \frac{z_n - z}{r_n^3} - (g - \gamma) \varpi v \Sigma \varpi_n v_n \cdot \frac{z_n - z}{r_n^3} = 0.$$

In queste equazioni le somme Σ debbono estendersi a tutti i termini cogli indizi 1, 2, 3, ecc., rappresentati in generale dall'indizio n, cioè a tutte le molecole ponderabili del corpo, eccettuata quella di cui si considera l'equilibrio. La quantità q ha per valore approssimato, secondo i calcoli del sig. Mossotti,

$$q = \frac{q_0 + \frac{4\pi}{3k} g \varpi \delta^3}{1 + \frac{4\pi}{3k} f \delta^3},$$

chiamando q_0 la densità che l'etere avrebbe nel luogo dello spazio indefinito in cui il corpo si trova, per cause indipendenti dalla presenza di questo, e δ il semidiametro della molecola di cui si cerca l'equilibrio; e le quantità q_n relative alle altre molecole hanno espressioni simili, mettendo alle quantità ϖ e δ gli indizi corrispondenti.

I primi membri di queste equazioni rappresentano rispettivamente le forze da cui la molecola che si considera è animata in generale nelle direzioni delle tre coordinate, e che debbono esser nulle per l'equilibrio, ed è facile dedurre da ciò a cui queste espressioni si ridurrebbero quando il corpo non fosse formato che di due sole molecole, che dovrebbe esistere tra queste nella direzione della linea che unisce i loro centri, un' azione reciproca rappresentata da

$$g\, v(\varpi + q) v_1(\varpi_1 + q_1) \frac{(1 + \alpha r^2) e^{-\alpha r_1}}{r_1^2} - (g - \gamma) v \varpi . v_1 \varpi_1 . \frac{1}{r_1^2},$$

le lettere senz'indizio riferendosi ad una delle molecole, e le lettere coll'indizio 1 all'altra molecola, e r_1 indicando la distanza del centro di questa dal centro di quella.

Il primo termine di quest'espressione affetto da segno positivo si trova rappresentare, per la maniera con cui le equazioni sono state stabilite, una forza ripulsiva, ed offre il carattere che abbiamo veduto doversi attribuire alle forze molecolari, cioè di decrescere rapidamente, e divenire insensibili

a distanza sensibile, in virtù del fattore esponenziale $e^{-\alpha r_1}$, dove α è una grandissima quantità dietro alla sua significazione $\sqrt{\frac{4\pi f}{k}}$, avuto riguardo alla natura delle azioni molecolari, onde la forza ripulsiva di cui si tratta, diviene appunto una funzione del genere di quelle indicate dal sig. Poisson come atte a soddisfare a questa condizione (n.° 7); il fattore

$$g\,v(\varpi + q)v_1(\varpi_1 + q_1)$$

dell'espressione di questa forza dipende dalla densità dell'etere che forma le atmosfere delle due molecole, sovrapposte e penetrantisi vicendevolmente in virtù della forza attrattiva g della materia ponderabile per l'etere, esercitata dalle masse $v\varpi$ e $v_1\varpi_1$ di queste due molecole e opposta alla forza ripulsiva tra le molecole dell'etere, e avendo riguardo alla diminuzione di forza ripulsiva tra le molecole dell'etere (equivalente ad un aumento di forza attrattiva delle molecole ponderabili per l'etere) per la sottrazione delle masse vq, v_1q_1 d'etere escluse dagli spazi occupati dalle molecole ponderabili.

Quanto all'altro termine $-(g-\gamma)\,v\varpi.v_1\varpi_1.\frac{1}{r_1^2}$, esso rappresenta, per mezzo del suo segno negativo, una forza attrattiva che è, come si vede, in ragione diretta del prodotto delle masse delle due molecole ponderabili $v\varpi$, $v_1\varpi_1$, e in ragione inversa del quadrato della loro distanza, ed esso esprime l'effetto della gravitazione universale che ha luogo a qualunque distanza, γ essendo, secondo il sig. Mossotti, alquanto minore di g, cosicchè la forza acceleratrice della gravità, $g-\gamma$ sarebbe assai piccola relativamente alla forza g d'attrazione delle molecole per l'etere.

Ad una piccolissima distanza il primo termine dee supporsi molto più grande del secondo, cosicchè la forza tra le due molecole sarà definitivamente ripulsiva; ma questo termine decrescendo rapidissimamente coll'aumentarsi la distanza r_1, mentre l'altro non decresce che in ragione inversa del quadrato della distanza, le due forze contrarie diverranno uguali ad una di-

stanza ancora insensibile, come richiede l'equilibrio del corpo nel suo stato naturale; per una distanza maggiore continuando la prima forza a decrescere molto più rapidamente che la seconda, questa prevalerà, e si opporrà all'ulteriore allontanamento delle molecole, come la prima si opponeva al loro avvicinamento. Quest'eccesso della forza attrattiva sulla ripulsiva, da cui risulterà la resistenza del corpo all'allungamento per trazione crescerà sino ad una distanza maggiore, ma sempre insensibile delle molecole, ove avrà luogo il suo massimo, il quale si trova, per la regola ordinaria del calcolo differenziale applicata all'espressione totale della forza definitiva, corrispondere alla distanza r_1 determinata dall'equazione

$$-g\,\nabla(\varpi+q)\nabla_1(\varpi_1+q_1)(1+\alpha r_1+\frac{1}{2}\alpha^2 r_1^2)e^{-\alpha r_1}$$
$$+(g-\gamma)\nabla\varpi.\nabla_1\varpi_1=0.$$

Se si aumenta ancora più oltre la distanza, la forza attrattiva totale andrà diminuendo finchè il primo termine della sua espressione divenendo insensibile non rimarrà più che la forza espressa dal secondo termine, cioè quella che rappresenta l'attrazione Neutoniana. Se una forza estranea applicata per trazione al corpo considerato come formato di due sole molecole, giunge a portar queste alla suddetta distanza del massimo d'attrazione, essa basterà pure per aumentare ulteriormente questa distanza senza che la forza attrattiva rimanente possa più farle equilibrio, e il corpo si spezzerà, onde questa distanza corrisponde al limite della *coesione* del corpo. Cose analoghe si diranno d'un corpo composto d'un numero qualunque di molecole, applicandovi le espressioni generali delle forze rappresentate dalle somme indicate con Σ nelle equazioni dell'equilibrio sopra riferite.

Secondo questi risultati adunque delle ipotesi e dei calcoli del sig. Mossotti le forze molecolari che appartengono alla costituzione de' corpi, dipendenti da forze assoggettate alla ragione inversa dei quadrati delle distanze, si ridurrebbero definitivamente a due, di cui una sola, ripulsiva, presenterebbe il carattere che abbiamo attribuito in generale alle forze molecolari, di decrescere rapidissimamente coll'aumento della di-

stanza, mentre l'altra che sarebbe la gravitazione universale stessa seguirebbe definitivamente la legge della ragione inversa dei quadrati delle distanze. Osserverò a tale riguardo, che in virtù di questa legge l'attrazione dovuta alla gravitazione, che a distanza sensibile tra le molecole è troppo piccola per essere comparabile con quella dello stesso genere che su loro esercita la massa del globo terrestre, cioè col loro peso, non potrebbe divenir capace di fare equilibrio alla forza ripulsiva, e produrre la coesione in un corpo, opponendosi allo scostamento delle sue molecole, se non in ragione della grande densità che si dovrebbe attribuire alle molecole stesse relativamente a quella d'un corpo qualunque di volume sensibile, in conseguenza della piccolezza che loro si suppone per rapporto alla loro distanza, conformemente all'idea che Laplace avea già suggerita su questo punto.

Questa forza della gravitazione sarebbe rappresentata, secondo il sig. Mossotti, dalla piccola differenza $g-\gamma$ che egli suppone tra la forza di attrazione g delle molecole ponderabili per l'etere, e la forza di ripulsione γ da lui ammessa tra le molecole ponderabili stesse, per distanze e masse uguali all'unità. Se non si volesse ammettere l'esistenza di quest'ultima forza, e si facesse in conseguenza $\gamma=0$, la gravità non sarebbe essa medesima, secondo le altre supposizioni, e l'analisi del sig. Mossotti, che l'effetto dell'attrazione g delle molecole d'un corpo per l'etere condensato in virtù di quest'attrazione stessa attorno alle molecole dell'altro, questa forza g rimanendo sola sensibile a distanza sensibile, mentre la forza ripulsiva tra le due quantità d'etere contenute ne' due corpi non sarebbe più sensibile a tale distanza.

In generale le diverse supposizioni su cui il sig. Mossotti ha fondata la sua analisi, dedotte da considerazioni relative alle attrazioni e ripulsioni dei corpi elettrizzati, nell'ipotesi di un solo fluido elettrico, condensato o rarefatto alla loro superficie, possono incontrare difficoltà ad essere ammesse, come realizzate nelle forze molecolari; ma il lavoro del sig. Mossotti ci presenta un primo saggio di applicazioni del calcolo a questioni di questo genere, che potrebbe servir d'esempio a calcoli fondati sopra altre ipotesi che si credessero più conformi alla natura di queste forze.

§ 3.

Del moto di vibrazione od oscillazione prodotto dalla forza elastica ne' corpi solidi, e del suono che ne risulta.

92. Passiamo ora all'altra specie di ricerche sulla forza elastica de' corpi, cioè a quelle che si riferiscono direttamente alle oscillazioni o vibrazioni per cui i corpi elastici de' quali la forma, epperciò la posizione delle parti è stata cangiata momentaneamente da una forza estranea, tendono a riprendere la loro prima forma. Già abbiamo indicata la ragione meccanica di queste oscillazioni. L'investigare le loro leggi appartiene anche essenzialmente alla meccanica, e non alla fisica propriamente detta; poichè queste leggi non altrimenti che quelle dell'equilibrio de' corpi elastici (n.° 54) possono riguardarsi come semplici conseguenze matematiche dei principii generali della meccanica applicati alla supposizione dell'esistenza della forza elastica, e alla maniera di agire che le si attribuisce. Dobbiamo soltanto avvertire che queste leggi del moto de' corpi elastici sono state sino a quest'ultimi tempi, anch'esse, come quelle del loro equilibrio, fondate sopra le condizioni ipotetiche sulla natura de'corpi elastici, considerati come formati di una sostanza continua, delle quali abbiamo parlato trattando del loro equilibrio. Il sig. Poisson nelle sue Memorie sull'equilibrio, e sul moto de' corpi elastici più volte citate, avendo riferito le leggi dell'equilibrio di questi corpi a considerazioni più rigorose sulla natura della forza elastica nei corpi composti, come essi sono, di molecole disgiunte, agli stessi principii riferì pure le leggi del loro moto; ma per questo non si sono richieste ulteriori considerazioni sulla natura dei corpi elastici. Egli è noto infatti che, secondo i principii della dinamica, dalle equazioni una volta stabilite sull'equilibrio d'un sistema qualunque si passa a quelle del moto dello stesso sistema per mezzo di calcoli intieramente dipendenti dai principii stessi della meccanica generale, senz' altra difficoltà che quelle che l'analisi stessa può presentare. Potremmo qui dunque prescindere dall'occuparci delle leggi di queste vibrazioni, ri-

guardandole come semplici deduzioni dalle considerazioni relative alla costituzione de' corpi elastici. Tuttavia siccome dovremo poi esaminare in appresso alcune modificazioni di queste leggi che hanno una relazione più intima colla costituzione reale de' corpi, e coi cangiamenti che le variazioni di temperatura vi cagionano, ed altronde la teoria di queste oscillazioni si lega colla teoria del suono, che è prodotto da vibrazioni analoghe da esse comunicate all'aria che circonda i corpi solidi vibranti, e di cui molti punti son connessi colla costituzione de' corpi, e cadono nella sfera della fisica propriamente detta, sebbene anche questa teoria del suono che dicesi *Acustica* appartenga propriamente, e per la ragione stessa di sopra, alla meccanica, ci conviene riferire almeno i risultati che si stabilirono, sia colle sperienze, sia col calcolo, relativamente alle leggi delle oscillazioni de' corpi elastici, e indicarne la connessione colla natura de' suoni che esse producono, e lo stesso faremo poi riguardo alle vibrazioni dell'aria, e in generale de' fluidi aeriformi (per compire così la teoria della produzione, e della propagazione del suono per quanto il nostro scopo il richiede) quando tratteremo della costituzione particolare di questi fluidi.

93. E per dare in primo luogo un'idea generale della relazione che esiste tra le vibrazioni de' corpi elastici, e il suono che esse producono, relazione che bisogna conoscere per apprezzare la rapidità delle oscillazioni medesime quando essa è troppo grande perchè il numero delle oscillazioni in un dato tempo si possa contare direttamente, osserveremo che il suono comincia a prodursi quando queste oscillazioni hanno un certo grado di rapidità. Si prenda, per esempio, per corpo elastico una lamina d'acciajo molto lunga fissata orizzontalmente in una morsa per una delle sue estremità; le sue oscillazioni, quando si sarà piegata, e quindi abbandonata a se stessa saranno abbastanza lente perchè si possano contare, ma esse non produrranno alcun suono distinto. Quando raccorciando la lamina esse diverranno troppo rapide per poter essere contate, il calcolo verrà al nostro soccorso, per determinarne il numero in un dato tempo; poichè si dimostra in meccanica, come vedremo più specialmente in appresso, che se lo spessore d' una simil lamina è per tutto esattamente lo stesso, ed essa sia sempre

messa in vibrazione d'una maniera simile, le durate di ciascuna delle sue vibrazioni saranno proporzionali ai quadrati delle lunghezze, che le si danno, d'onde segue che se si è dapprima misurata la lunghezza che essa avea quando essa faceva, per esempio, in un secondo quattro oscillazioni visibili, si potrà quindi calcolare il numero delle vibrazioni invisibili che essa fa in un secondo, colle diverse lunghezze che le si saran date. Si troverà così che quando essa comincia a rendere un suono ben distinto, la sua lunghezza sarà tale, che essa farà a un dipresso 32 vibrazioni per secondo, e quando essa farà esattamente questo numero di vibrazioni, il suono che essa renderà sarà quello che negli organi è prodotto da un tubo aperto della lunghezza di 32 piedi. Se si raccorcia ancora di più la parte della lamina che si lascia sporgere dalla morsa, si sentiranno suoni più acuti, d'onde vediamo che il tuono più acuto o più grave de' suoni prodotti da un medesimo corpo sonoro dipende dalla rapidità delle sue vibrazioni, essendo esso tanto più acuto quanto son più rapide le vibrazioni.

ARTICOLO PRIMO

Vibrazioni delle corde tese; relazioni tra i suoni che ne risultano.

94. Ciò posto esaminiamo ora le leggi speciali delle vibrazioni de' diversi corpi sonori, e primieramente di quelli che furono prima degli altri considerati dai meccanici, cioè delle corde tese; nel medesimo tempo fisseremo anche più particolarmente la relazione che si osserva tra la rapidità delle vibrazioni de' corpi sonori, e il tuono acuto o grave che ne risulta. Quando una corda metallica, per esempio, quali sono quelle che s'impiegano negli stromenti di musica, è attaccata per le sue estremità a due punti fissi, e tesa fortemente nella direzione della sua lunghezza, essa prende una direzione sensibilmente rettilinea, mentre per altra parte essa diviene alquanto più lunga che nello stato naturale, la distanza delle molecole essendo aumentata in maniera che la forza con cui esse tendono a ritornare alla loro situazione primitiva sia in equilibrio colla forza di trazione. Se si scosta alcun poco da questa direzione, tirandola pel suo punto di mezzo, il che non si può

fare che allungandola ancora, o scostandone di più le molecole, e si abbandoni quindi a se medesima, la forza di trazione o piuttosto la forza che essa produce, e che tende a ricondurvela, le fa fare da una parte e dall' altra un gran numero d'oscillazioni che si possono scorgere alla semplice vista, sebbene esse siano ordinariamente troppo rapide per poter essere contate. Possono anche eccitarsi queste vibrazioni facendovi passar sopra un archetto da violino. L'estensione di queste oscillazioni va continuamente diminuendo per le resistenze che il moto della corda incontra nell'aria, pel fregamento che essa può soffrire ne'punti a cui è annessa ecc.; ma se le oscillazioni sono molto piccole, la variazione della loro ampiezza non altera sensibilmente la tensione primitiva, ossia la forza elastica che le fa equilibrio, la quale può considerarsi in conseguenza come costante in tutta l'oscillazione. In questo fenomeno può considerarsi ciascun elemento infinitamente piccolo della corda come una piccola massa di cui la tensione o forza elastica è la forza motrice, cosicchè data la lunghezza della corda, il suo peso e la forza di tensione che la tira, ossia la forza colla quale le molecole tendono a ravvicinarsi, e che si suppone costante in tutta l'oscillazione, si riduce ad un semplice problema di meccanica il determinare la natura e la durata delle sue oscillazioni infinitamente piccole; e si vede da quel che abbiamo detto, che l'ipotesi che si fa nella risoluzione di questo problema, sulla legge dell' elasticità relativamente all' allungamento, consiste qui nel supporla costante, ossia sempre uguale alla tensione primitiva, a cui faceva equilibrio sotto la forma rettilinea, supposizione che la piccolezza degli allungamenti che hanno luogo nelle vibrazioni rende legittima relativamente al fenomeno di cui si tratta, sebbene non possa essere assolutamente vera, secondo quello che abbiamo veduto ne' numeri precedenti. Su questa base si è stabilita già da lungo tempo e perfezionata dai lavori di Taylor, d'Alembert, Lagrange ecc. la teoria delle *corde vibranti*, ed essa fu poi anche toccata dal sig. Poisson nella Memoria più volte citata sull'equilibrio e sul movimento de' corpi elastici, dietro alle considerazioni più rigorose sulla natura de' corpi elastici, e come una conseguenza delle leggi generali dell'azion molecolare, di cui sopra abbiamo

parlato. Qui ci limiteremo a riferire i risultati finali di questi calcoli che appartengono specialmente alla teoria del suono.

Per meglio fissare gli elementi della questione si può immaginare che la tensione della corda è prodotta da un peso P attaccato ad una delle sue estremità, o piuttosto che agisca sopra questa estremità per mezzo d'un vette piegato ad angolo retto, oppure per mezzo d'un filo flessibile che passi sopra una carrucola, come si vede nella fig. 16. Un apparecchio così disposto si chiama un *monocordo* o *tonometro* (1). Supponiamo la corda di spessore uniforme; sia l la sua lunghezza, p il suo peso, e P il peso che la tende; si dimostra coi calcoli fondati sui principii generali di meccanica nell'indicata ipotesi, che il tempo t nel quale si fa una vibrazione semplice di piccola estensione, cioè un'escursione da una parte all'altra della posizione d'equilibrio, prendendo per unità il secondo sessagesimale, è espresso dalla formola $t = \sqrt{\frac{lp}{gP}}$, g essendo, come sopra, la celerità comunicata dalla gravità in un secondo, ossia il doppio dello spazio percorso da un corpo grave in un secondo, cioè $9^m,8088$. Quest'espressione è applicabile qualunque sia l'estensione delle vibrazioni, purchè ella sia sempre molto piccola. Consideriamo la corda come cilindrica; sia r il raggio della sua sezione trasversale, δ il peso d'un'unità di volume della materia che la compone e indichiamo al solito con π la circonferenza di cui il diametro è 1, ossia la semi-circonferenza di cui il raggio è 1; il volume della corda sarà $\pi r^2 l$; ed il suo peso $\pi r^2 l \delta$.

---

(1) Guglielmo Weber ha descritto negli *Annali di fisica e chimica* tedeschi, di Poggendorff, vol. 15, num. 1, 1829, un monocordo di costruzione perfezionata, in cui la corda è sospesa verticalmente; dopo che le si è data la tensione che si desidera per mezzo d'un peso posto in un piattello, annesso all'estremità inferiore della medesima, si stringe essa in due punti distanti tra loro della lunghezza che si vuol lasciare alla corda vibrante, per mezzo di due tenagliette a vite, di cui una è fissa al sostegno della corda, e l'altra può farsi ascendere e discendere lungo lo stesso sostegno, e fermarsi con viti all'altezza che si vuole.

Mettendo questo valore in vece di p nella formola surriferita, si avrà

$$t=\sqrt{\frac{\pi r^2 l^2 \delta}{gP}}=rl\sqrt{\frac{\pi\delta}{gP}}.$$

Questa è adunque la durata d' un' oscillazione d'una corda di cui la lunghezza sia l, il raggio della sezione r, la tensione P e il peso specifico della materia ossia il peso di un' unità di volume di questa materia sia δ.

Se si vuole il numero di vibrazioni fatte dalla corda in un tempo dato qualunque T, si avrà, per trovar questo numero che chiameremo N, l'equazione

$$T=Nrl\sqrt{\frac{\pi\delta}{gP}},\quad \text{d'onde}\quad N=\frac{T\sqrt{gP}}{rl\sqrt{\pi\delta}}.$$

E se il tempo arbitrario T è supposto uguale a 1", si avrà pel numero N di vibrazioni in un secondo di tempo

$$N=\frac{\sqrt{gP}}{rl\sqrt{\pi\delta}};$$

o se si vuole rimettere in quest' espressione il peso p della corda in vece della sua densità $\delta=\frac{p}{\pi r^2 l}$, semplicemente

$$N=\sqrt{\frac{gP}{pl}}.$$

In queste espressioni abbiamo considerato come una vibrazione il semplice cangiamento di figura e di posizione della corda da una parte all'altra; se si vuole comprendere sotto il nome di vibrazione o oscillazione l'andata e il ritorno della corda alla posizione da cui si è fatta partire, converrà raddoppiare il tempo assegnato all'oscillazione semplice, ossia ridurre alla metà il numero delle oscillazioni in un dato tempo.

95. Da queste formole risultano molte conseguenze importanti per la teoria de' suoni (1). Si vede primieramente, che per due

(1) L' esposizione qui appresso di queste conseguenze è in parte tratta dal *Trattato di Fisica* del sig. Biot.

corde della stessa grossezza e della stessa materia, ugualmente tese, e che non differiscono che in lunghezza, i numeri delle vibrazioni in un tempo dato, ossia le rapidità delle vibrazioni sono in ragion inversa delle lunghezze delle corde, poichè tutte le quantità restano le medesime nell'espressione di N in funzione di l, r, e P, eccettuato l, che si trova nel denominatore.

Parimenti per due corde della stessa natura, della stessa lunghezza ed ugualmente tese, che differiscono tra loro in grossezza, il numero delle vibrazioni in un dato tempo, sarà per la stessa ragione inversamente proporzionale alla grossezza, rappresentata dal raggio r della sua sezione trasversale.

Ma se la natura della corda, e la sua lunghezza e grossezza restando le medesime, si fa variare solamente il peso che la tende, i numeri delle oscillazioni saranno direttamente proporzionali alle radici quadrate di questi pesi, poichè allora tutte le quantità restano le stesse nella formola, eccettuato P che si trova sotto al segno radicale nel numeratore.

Dobbiamo qui richiamarci che se una corda è tesa con una data forza tra due punti nello stato di riposo, essa non può esserne scostata per farla vibrare, senza allungarla alcun poco, e per conseguenza senza aumentare alquanto la sua tensione, e ciò tanto più quanto sarà maggiore questo scostamento. Si fa ordinariamente astrazione, come già abbiamo accennato, da questa circostanza di cui l'effetto è poco sensibile, nella teoria delle vibrazioni delle corde; non è però men vero, che da questa circostanza dee risultare che il tuono d'una corda di data lunghezza, grossezza e tensione primitiva dovrà essere alquanto più acuto quando se ne vorrà trarre un suono più intenso, col farle fare escursioni più estese, necessariamente accompagnate d'un maggior aumento di tensione nelle posizioni estreme della corda in ciascuna vibrazione, e l'esperienza è conforme a questo risultato. Il sig. Weber in una nota pubblicata negli *Annali di fisica e chimica* di Poggendorff, n.° 5 del 1833, ha proposto un mezzo di ovviare alle dissonanze sensibili che ne risultano in alcuni stromenti musicali a corda; esso consiste nel dare ai ponticelli sui quali si tendono le corde non una forma angolare, come si pratica comunemente, ma una

forma ritondata, e nel mettere quello di una estremità della corda al dissopra, e quello dell'altra estremità al dissotto della medesima, pizzicando poi la corda da alto in basso verso il ponticello che si trova al dissopra, o da basso in alto verso il ponticello che si trova al dissotto; così il vertice della curvatura della corda trovandosi alternativamente verso l'uno e l'altro ponticello, in tutta la serie delle vibrazioni, la corda si *svolge* da sopra uno dei ponticelli più che non si *avvolge* sull' altro, onde verrà essa ad essere tanto più lunga quanto maggiori saranno le escursioni, e questa maggior lunghezza che tende a rendere il tuono più grave compenserà l'effetto della maggior tensione che sarebbe di renderlo più acuto.

Il sig. Weber nella stessa nota ha anche osservata un'altra sorgente di irregolarità nelle vibrazioni delle corde, per cui una stessa corda di data lunghezza, grossezza e tensione può rendere talvolta due tuoni diversi; egli l'attribuisce alla rigidità naturale della corda di cui si fa astrazione nella teoria delle corde vibranti, considerandole come perfettamente flessibili di lor natura, cosicchè le vibrazioni non dipendano che dalla tensione a cui si sottopongono, il che non è intieramente esatto, poichè le corde di qualunque natura siano hanno sempre un certo grado di elasticità o rigidezza, per cui il loro moto può talvolta partecipare più o meno di quello proprio alle verghe elastiche, e che è sottoposto, come vedremo in appresso, a leggi affatto diverse da quelle delle corde tese, e di lor natura flessibili.

96. Ma astrazione fatta di queste piccole irregolarità, le conseguenze indicate della teoria possono facilmente verificarsi colla sperienza sul monocordo. E primieramente per far variare sola la lunghezza l della corda, possiamo servirci d'un piccolo ponticello mobile, di forma triangolare, che si pone sotto la corda in qualunque punto della sua lunghezza si voglia, e che ha un'altezza tale, che essendo posto tra la tavola del monocordo, e la corda medesima, questa vi si appoggii, e si trovi così fissata in questo punto. Supponiamo che si faccia prima vibrare la corda intiera; se il peso P che tende la corda è un po' grande le oscillazioni saranno troppo rapide perchè si possano contare; ma si sentirà un certo suono, di cui si potrà ritenere la sensazione, o che si fisserà paragonandolo con un suono

simile reso da un'altra corda della stessa natura ugualmente lunga e grossa, ed ugualmente tesa, oppure cercando sopra un cembalo, od un organo il tasto che vi corrisponde. Suppongasi ora il ponticello posto sotto la corda, precisamente alla metà della sua lunghezza, senza cangiare il peso che la tende; il numero delle vibrazioni in un dato tempo sarà, secondo quello che si è detto, doppio di quello che avea luogo per la corda intiera, poichè la lunghezza ne è ridotta alla metà. Ora il suono reso da ciascuna parte della corda così divisa sarà più acuto del primo, e ne sarà ciò che in musica si chiama l'*ottava acuta*; e siccome questo si osserva sempre qualunque sia la lunghezza, la grossezza, e la tensione della corda che si divide, convien conchiuderne, che quando un suono è all'ottava acuta d' un altro, esso corrisponde a vibrazioni del doppio più rapide; cosicchè se si vuole indicare ciascun suono pel numero delle vibrazioni in un dato tempo da cui è prodotto, il primo sarà 1, ed il secondo 2, e se si vuole chiamare il suono fondamentale ut_1 e la sua ottava ut_2, come si fa ordinariamente nella teoria della musica, si avrà $ut_1=1$, $ut_2=2$, il che offre, come si vede, il mezzo di fissare un rapporto matematico tra questi due suoni. Collochiamo ora il ponticello al terzo della corda, e facciamo vibrare la sua parte minore, che è il terzo della lunghezza della corda intiera: il numero delle vibrazioni in un dato tempo diverrà triplo di quello che conviene alla corda intiera. Il suono che produrrà questa parte sarà dunque molto più acuto che il suono fondamentale ut_1. Per paragonarlo più da vicino con questo prendiamo la sua ottava grave, che sarà data dagli altri due terzi della corda, conformemente alle sperienze precedenti. Il numero delle vibrazioni di questa parte sarà soltanto la metà di quello che è reso dalla terza parte della corda, cioè sarà $\frac{3}{2}$ del numero delle vibrazioni dato dalla corda intiera. Ora si trova che il suono che rende questa parte è relativamente al primo ciò che si chiama la sua *quinta*, cosicchè se il primo è $ut_1=1$, il secondo sarà quello che si indica con $sol_1=\frac{3}{2}$, e per conseguenza la sua ottava acuta che era data dal terzo della corda sarà, secondo

la stessa notazione, $sol_2 = 3$. Mettiamo ora il ponticello al quarto della lunghezza della corda; il numero delle vibrazioni per la parte più piccola sarà quadruplo di quello della corda intiera, cioè sarà doppio di ut_2; sarà dunque l'ottava di ut_2, cioè ut_3. Ma per l'altra porzione che contiene i tre altri quarti della corda, il numero delle vibrazioni sarà $\frac{4}{3}$ del numero che conviene al suono fondamentale; il suono che ne risulta si trova essere ciò che si chiama la *quarta* del suono fondamentale, che s'indica in musica con fa_1; si avrà dunque $fa_1 = \frac{4}{3}$. Continuando a dividere così la corda in un numero sempre più grande di parti uguali si potranno trovar successivamente tutti i tuoni impiegati nella musica; ma limitandoci qui a quelli che compongono la serie de' suoni che chiamasi la *gamma* o la *scala diatonica*, si avranno i valori seguenti, ne' quali si è preso per unità il numero delle vibrazioni in un tempo dato, che appartengono al suono fondamentale ut_1:

Nomi de' suoni	ut_1	re_1	mi_1	fa_1	sol_1	la_1	si_1	ut_2
Numero delle vibrazioni in un dato tempo	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
Lunghezza delle corde che li danno	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$.

Numeri di vibrazioni doppii, quadrupli, ottupli ecc. dei precedenti daranno altrettante nuove gamme, i suoni delle quali saranno l'ottava, la doppia ottava, la tripla ottava ecc. di quelli della prima. Egli è dall'ordine delle corde che rendono questi suoni negli stromenti di musica, che sono presi i nomi di seconda, terza, quarta, quinta ecc. nella prima gamma, e così quelli delle gamme successive. Per esempio, la decimasettima al dissopra di ut_1 significa il diciasettesimo suono partendo da ut_1, il che corrisponde alla doppia ottava di mi_1, ossia a mi_3. Negli stromenti di musica a tasti le diverse note della gamma si sogliono indicare cominciando da un *la*, colle lettere

a, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*; oppure *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*. Si sostituisce però soventi al *b* per indicare il *si* la lettera *h*; le ottave successive si distinguono segnando queste lettere con uno o più tratti al dissopra, come $\bar{c}$, $\bar{\bar{c}}$, ecc. per alzarle di una, due ottave ecc., e al dissotto, come $\underline{c}$, $\underline{\underline{c}}$ ecc. per abbassarle. In Italia si indica il suono *ut* nella scala colla sillaba *do*.

Quanto all'elevazione assoluta dei suoni delle diverse gamme successive negli stromenti di musica, abbiamo già detto, che il tuono più grave discernibile corrisponde a un dipresso a 32 vibrazioni per minuto secondo; ma l'*ut* fondamentale degli stromenti a tasti e che si segna con *C* si suole fissare al suono corrispondente a un dipresso alla terza ottava al dissopra di questo numero, cioè a un numero di vibrazioni otto volte maggiore in un minuto secondo, che sarebbe 256; la fissazione precisa ne dipende dal tuono dell'istromento detto *diapason* formato di una lamina elastica piegata a forchetta, e che serve per regolare tutti gli altri suoni, prendendo il suo tuono pel secondo *la* al dissopra del suddetto *ut* fondamentale degli stromenti a tasto. Il tuono di questo diapason si è fissato a un dipresso per convenzione lo stesso in tutta l'Europa. Il sig. Fischer però avendo determinato esattamente il numero delle vibrazioni corrispondenti al tuono reso da diversi *diapason* di Francia e di Germania, per mezzo della lunghezza d'una corda che rendeva lo stesso tuono in un monocordo di struttura particolare da lui adoperato, (n.° 94) trovò piccole diversità dall'uno all'altro, onde si sarebbero dedotti pel primo *ut* diversi numeri di vibrazioni tra 243 e 260, e di cui la media sarebbe stata 253. Per queste vibrazioni s'intende ancora qui una sola andata o ritorno del corpo vibrante; se si volesse riferire questo tuono a un numero di doppie vibrazioni composte di andata e ritorno si ridurrebbe questo numero a metà, cioè a 128 secondo l'estimazione comune, e a $126\frac{1}{2}$ secondo questa media (Vedi le Memorie dell'Accademia di Berlino pel 1822 e 1823).

97. Finquì noi non abbiamo fatto variare che la lunghezza della corda; ma facendo variare o la grossezza della corda (cioè sostituendone di diversa grossezza nel monocordo), oppure

anche la tensione sola che è rappresentata dal peso P, potremo pure raddoppiare, triplicare il numero delle vibrazioni, o in generale moltiplicarlo in qualunque rapporto si vorrà. Allora quando il calcolo c'indicherà alcuno de' numeri d'oscillazione dati dalle sperienze precedenti, dovremo anche ritrovare il medesimo suono, se è vero, che per una corda qualunque, il suono non dipenda che dal numero delle vibrazioni. Questo infatti si verifica esattamente. Per esempio, se la corda tesa dal peso P, dà il suono ut_1, tesa dal peso $4P$ essa darà ut_2; tesa dal peso $\left(\frac{3}{2}\right)^2.P$ ossia $\frac{9}{4}.P$ essa darà sol_1, col peso $\left(\frac{5}{4}\right)^2.P$, ossia $\frac{25}{16}.P$, essa darà mi_1, e così appresso.

98. In quello che precede non abbiamo considerato che il suono principale dato da ciascuna corda, secondo la sua lunghezza e grossezza, e secondo il peso che la tende; ma ascoltando con attenzione il suono prodotto da una corda metallica, vi si può facilmente riconoscere la mescolanza di molti altri suoni più acuti che il suono fondamentale; cosicchè se questo è rappresentato da ut_1 si sente molto distintamente per esempio sol_2 e mi_3, cioè l'ottava della sua quinta, e la doppia ottava della sua terza, le quali sono rispettivamente rappresentate quanto al numero delle oscillazioni dai numeri 3 e 5, il suono fondamentale essendo 1. Un orecchio esercitato sente ancora l'ottava di ut_1 che è rappresentata dal numero 2, e la doppia ottava di cui il valore è 4. Generalizzando adunque questi risultati si concepisce che la stessa corda fa sentire ad un tratto, ma con una intensità successivamente decrescente, i suoni 1, 2, 3, 4, 5, ... ecc., cioè tutti quelli che essa può dare dividendosi in un numero intiero di parti. Questi suoni diconsi *armonici* relativamente al suono fondamentale perchè il nome di *armonia* indica la sensazione simultanea di molti suoni, che formano un complesso grato all' orecchio, e non vi è riunione di suoni che gli riesca più aggradevole che quella dei suoni che formano questa serie 1, 2, 3, ecc. e che sono resi naturalmente da una medesima corda. Questa coesistenza di molti suoni è principalmente facile a riconoscersi nelle corde abbastanza grosse e lunghe, perchè il suono fondamentale sia

molto grave ed intenso ; ma coll'abitudine si giunge a sentirla in tutte le corde.

Non si può concepire questo fenomeno , se non supponendo che ciascuna corda nel vibrare si divide in molte parti che vibrano isolatamente le une attorno le altre, mentre si fa la vibrazione generale della corda intiera. Infatti esaminando , secondo le leggi della meccanica, i moti che una corda tesa può prendere attorno ad un asse rettilineo , si vede che essa può formare un'infinità di curvature diverse, che tutte rendono diversi suoni. La più semplice di queste configurazioni è quella che non offre che una sola concavità verso l'asse (fig. 17, n.° 1), come l'avevamo prima supposto; essa dà il suono il più grave della corda , ossia il suo tuono fondamentale ut_1 che noi indicheremo coll'unità. Ma si potrebbe anche concepire che la corda si dividesse in due metà di curvature uguali e contrarie (fig. 17, n.° 2) ; poichè in virtù della simmetria di questa figura , il punto N in cui essa taglia l'asse sarebbe sempre ugualmente tirato dall'alto in basso , e da destra a sinistra , cosicchè resterebbe immobile ; allora ciascuna delle due metà sarebbe come una corda isolata d'una lunghezza uguale alla metà della corda intiera , e vibrando esse amendue nel medesimo tempo , renderebbero uno stesso suono , che sarebbe l'ottava acuta del suono fondamentale, cioè $ut_2 = 2$. Si potrebbe ugualmente concepire che la corda si dividesse in tre parti uguali di curvatura contraria attorno all'asse (fig. 17, n.° 3); allora i punti N, N in cui essa taglia l'asse resterebbero in riposo, e ciascuna delle parti vibrerebbe separatamente come una corda fissa alle sue due estremità, ed uguale in lunghezza al terzo della corda principale, cosicchè il tuono sarebbe $sol_2 = 3$. Finalmente generalizzando queste considerazioni , si vede che il moto sarà ancora possibile quando si concepisca la corda divisa in un numero qualunque n di parti uguali, di cui le curvature alternino attorno all'asse , e siano separate le une dalle altre da punti che resteranno immobili ; allora il suono sarà rappresentato da n , cosicchè moltiplicando progressivamente le divisioni si otterranno tutti i suoni armonici 1 , 2 , 3 ecc. Per abbreviare si indicano i vertici V, V', V'', ... delle curvature col nome di

ventri, e si chiamano *nodi* i punti N, N', ecc. che restano immobili.

In generale la forma che prende la corda nel vibrare può variare in un infinito numero di maniere, e dipende dalle funzioni arbitrarie con cui si può supporre espressa la sua forma, e la velocità attuale di cui i suoi diversi punti possono godere, in virtù di forze estranee, nello stato iniziale della medesima. La maniera la più semplice di soddisfare alla possibilità di quelle diverse divisioni della corda, di cui abbiamo parlato, nelle sue vibrazioni, è di supporre che l'ordinata y della curva che essa formava nello stato iniziale, prendendo per la linea delle ascisse x la sua direzione rettilinea nella posizione d'equilibrio, sia una funzione di x della forma $h.\text{sen}\frac{n\pi x}{l}$, h essendo una costante, π il rapporto tra la circonferenza e il diametro, e n un numero intiero dato, e che i punti della corda non abbiano ricevuta alcuna velocità iniziale; i punti corrispondenti a

$$x=\frac{l}{n},\quad x=\frac{2l}{n},\quad x=\frac{3l}{n},\ \text{ecc.},$$

in numero di $n-1$, doveano così trovarsi sulla linea stessa della posizione d' equilibrio, e la corda essere formata di n parti uguali situate alternativamente da una parte e dall'altra di questa linea. Ciascuna di queste parti di curva è ciò che si chiama una *trocoide*, di cui la larghezza è $\frac{l}{n}$, e l'altezza h. Il calcolo prova allora che la figura della corda è composta in tutta la durata del movimento di trocoidi d'una larghezza costante n, e d'un'altezza variabile da un istante all'altro nel periodo di ciascuna vibrazione, i punti che dividono queste trocoidi l'una dall'altra rimanendo sempre nella posizione d'equilibrio della corda, e formandone così i nodi nelle sue vibrazioni; e che il numero delle vibrazioni in un' unità di tempo sarà allora in generale $N=n\sqrt{\frac{gP}{pl}}=\frac{n}{rl}\sqrt{\frac{gP}{\pi\delta}}$, espressione che ricade in quella sovra indicata per la corda vibrante senza divisione, facendovi $n=1$.

Dobbiamo ora richiamarci quel principio generale di meccanica, che se un corpo o un sistema di corpi è suscettibile di molti moti piccolissimi, se gli possono questi imprimere tutti ad un tratto, ed il suo moto composto sarà la somma di tutti questi moti parziali. Applicando qui questo principio noi concepiremo, che una stessa corda può riunire tutti insieme i generi d'oscillazioni che abbiamo or ora esaminati. Imperciocchè se primieramente si vuol combinare la prima e la seconda forma, non si ha che a considerare la prima come un asse su cui si descriverà la seconda, il che darà la specie di curvatura rappresentata nella fig. 18, n.°1; allora siccome le vibrazioni di ciascuna metà sono del doppio più rapide, che quelle della corda intiera, ne segue che ciascuna oscillazione compiuta di quest'ultima offrirà successivamente le cinque configurazioni rappresentate ne'cinque numeri della figura 18; la prima, di cui abbiamo già parlato, si riferisce all'istante della partenza, nel quale la corda si lascia a se stessa, e le quattro altre a ciascun degli istanti in cui le due metà avranno eseguita una semi-vibrazione attorno alla curva traslatrice, quella di mezzo n.° 3 corrispondendo alla situazione naturale di questa, e le due intermedie n.i 2 e 4 alla situazione naturale delle due parti relativamente alla curva traslatrice. I due generi d' oscillazioni che compongono questo movimento ecciteranno nell'aria due specie d' ondulazioni, che propagandosi insieme sino all'orecchio senza confondervisi, vi produrranno la doppia sensazione d'un suono fondamentale, e della sua ottava.

Ora se sopra la curvatura rappresentata da queste figure, considerata come asse, si costrugga quella della fig. 17, n.° 3, in cui la corda è divisa in tre parti uguali, si avrà una terza specie di curvatura che farà sentire ad un tratto i suoni 1, 2, 3; e continuando la sovraposizione delle curve nella stessa maniera, si otterrà simultaneamente nella stessa corda la riunione di tutti i suoni armonici.

Se si considera la figura iniziale della corda che dà luogo alla sua divisione in un numero qualunque n di parti nelle sue vibrazioni, come rappresentata dall'equazione

$$y = h \operatorname{sen} . \frac{n\pi x}{l} ,$$

come sopra, potrà rappresentarsi quella che dà luogo alla riunione delle diverse maniere simultanee di vibrare, di cui si tratta, coll'equazione

$$y = h_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} + h_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{l} + h_3 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{l} \ldots\ldots + h_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l},$$

e la corda prenderà successivamente una figura simile al fine di ogni escursione, ma con tutte sue parti situate alternativamente al di qua e al di là della linea d'equilibrio.

99. Le diverse divisioni possibili d'una corda in molte parti vibranti separatamente, di cui abbiamo supposta la coesistenza in qualunque corda vibrante, possono realizzarsi distintamente coll' esperienza, mettendo nel luogo dove si vuole che si formi un nodo un leggiero ostacolo, per esempio, un ponticello di cartone che impedisca questo punto di scostarsi dall' asse senza arrestare per altro la trasmessione del moto dall'una delle parti all'altra. Allora se si fa passare un archetto sopra l'una delle parti, essa renderà il suono che conviene alla sua lunghezza. Se il ponticello è alla metà, l'altra metà entrerà pure in vibrazione, e produrrà lo stesso suono; se il ponticello è al terzo, il rimanente della corda si dividerà da se stesso in due altri terzi, che vibreranno separatamente, e renderanno lo stesso suono che il primo terzo e così successivamente; e si potrà rendere sensibile la posizione de' nodi, e de' ventri collocando cartoline piegate sulla corda, nei luoghi a cui questi punti corrispondono; poichè le cartoline poste sopra i ventri saranno agitate, ed anche gettate a terra, mentre quelle poste sopra i nodi resteranno immobili. Questa sperienza si crede essere stata fatta la prima volta da Sauveur.

100. Si può anche ottenere in un'altra maniera la divisione d'una corda in più parti vibranti separatamente. È noto che avendo due corde di ugual grossezza e lunghezza, ed ugualmente tese, epperò atte a rendere il medesimo suono, o come si dice *unisone* tra loro, e poste una vicina all'altra, facendone vibrar una, l'altra entrerà pure in vibrazione, e risuonerà insieme alla prima. Ora un fenomeno analogo ha luogo anche quando le due corde in vece di essere unisone sono atte a render suoni di cui uno appartenga alla serie degli armonici dell'altro, per

esempio, quando due corde essendo ugualmente grosse ed ugualmente tese, la lunghezza dell'una è a quella dell'altra nel rapporto dell'unità ad un numero intiero qualunque, e allora si ottiene la divisione di quest'ultima, che abbiamo annunziata. Così se la prima corda è la metà della seconda in lunghezza, in guisa che essa dia ut_2, e la seconda ut_1, quando si farà risuonare la prima, l'altra si porrà pure in moto, e si dividerà naturalmente in due parti uguali separate da un nodo di vibrazione, come ciò si potrà riconoscere sia dal suono che essa renderà, sia per mezzo di cartoline come sopra. Qui la trasmissione del moto non si può fare se non per l'intermezzo dell'aria, che, agitata dalla prima corda, agita poi l'altra corda e le comunica la specie di vibrazione che eseguisce essa medesima. Ma perchè si stabilisca un moto sensibile da sì deboli ondulazioni, bisogna che le successive spinte provate dalla seconda corda cospirino tutte a farla muovere; conviene adunque che essa possa prendere un moto di vibrazione che s'accordi periodicamente col ritorno delle ondulazioni dell'aria che la colpisce, e questo appunto succede quando la sua lunghezza è un moltiplo esatto della prima corda messa in vibrazione, come abbiamo detto, la prima corda trovando allora nella seconda parti di lunghezza uguale alla sua da far vibrare colla stessa rapidità con cui vibra essa medesima. Ma questa condizione sarebbe ancora soddisfatta se la lunghezza della seconda corda fosse un sommoltiplo ossia parte aliquota di quella della prima, come $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ecc. Allora il suono della prima corda, che si fa vibrare essendo espresso da $ut_1 = 1$, quello della seconda corda sarebbe sempre uno de' suoi armonici 2, 3, 4, ecc. e siccome tutti questi armonici risuonano insieme nella prima corda, ciascuno di essi dee mettere in moto la corda isolata che gli corrisponde. Quindi si vede che l'aria stessa può ricevere insieme molte specie di moti di vibrazione piccolissimi, che si propagano senza confondersi, e comunicano le loro impressioni ai corpi suscettibili di riceverle; ma di quello che appartiene in generale alle vibrazioni sonore dell'aria tratteremo in appresso parlando della costituzione de' fluidi aeriformi.

101. In queste sperienze la produzione de' suoni armonici

dipende dalla comunicazione immediata del moto tra diverse corde, o tra le corde e l'aria; ma si possono anche eccitare, e per così dire creare nuovi suoni col solo concorso di molti altri, senza alcuna comunicazione di moto, anzi senza impiegare alcun corpo che dia immediatamente questi suoni. Per farsi un'idea della maniera con cui ciò può ottenersi bisogna considerare che ogni qual volta l'orecchio riceve l'impressione continuata d'una serie di colpi o battimenti sufficientemente rapidi, esso prova la sensazione distinta d'un suono, e ne determina la natura dalla rapidità colla quale questi battimenti si succedono. Supponiamo adunque, per esempio, che si facciano risuonare insieme per mezzo di due corde poste l'una vicino all' altra i due suoni ut_2 e sol_2 della medesima ottava. I numeri delle vibrazioni di questi suoni nel medesimo tempo saranno 2 e 3; vi saranno dunque istanti in cui esse arriveranno insieme all'orecchio, ed altri in cui vi arriveranno separate: supponendo, per esempio, che gli istanti di mezzo delle vibrazioni iniziali delle due corde coincidano, dopo il tempo di 2 vibrazioni compiute della prima, e di 3 vibrazioni della seconda, l'istante di mezzo di una vibrazione della prima coinciderà di nuovo coll'istante di mezzo d'una vibrazione della seconda, e così successivamente, come si vede nella figura seguente, ove gli istanti di mezzo delle vibrazioni sono rappresentati da punti posti a uguali distanze sopra una linea:

sol_2 . . . . . .

ut_2 . . . . . .

coincidenze . . . .

Gli intervalli che separano le coincidenze sono doppii di quelli che separano le vibrazioni di ut_2. L'orecchio dee dunque essere affetto dal loro ritorno periodico (che forma un suono più intenso che i battimenti separati di ut_2 e sol_2) come esso lo sarebbe da un suono ut_1 più grave d'una ottava che ut_2. Questo appunto succede, e la scoperta di questo fenomeno si attribuisce al celebre musico Tartini, che ne ha fatto menzione nel suo *Trattato di musica*, *Padova* 1754, sebbene già più anticamente fosse stato da altri notato. Per osservarlo bisogna che i due suoni siano perfettamente giusti, e prolungati per qualche tempo senz'alcuna alterazione; questo si ottiene particolarmente sull'organo, i

suoni del quale riuniscono ad una giustezza meccanica il vantaggio di poter essere prolungati indefinitamente. E questo fenomeno offre esso medesimo una prova sicura ed usitata già da lungo tempo per riconoscere se questo stromento sia esattamente accordato.

Egli è sempre facile in generale il determinare, secondo questa maniera di concepire i *tuoni di combinazione* o *di Tartini*, come essi sogliono chiamarsi, quale debba essere, ne' casi di cui abbiamo qui dato un esempio, il suono risultante dal concorso di due altri. A tal oggetto rappresentiamo coll'unità un suono fondamentale arbitrario ut_1, e supponiamo che i suoni dati siano espressi dalle frazioni $\frac{n}{N}$, $\frac{n'}{N}$, ridotte allo stesso denominatore. Se si considerasse un terzo suono di cui il valore fosse $\frac{1}{N}$ si vede che i due altri ne sarebbero suoni armonici, vale a dire che mentre la corda da cui questo è prodotto farebbe una sola vibrazione, le due altre ne farebbero l'una n, l'altra n'. Dunque dopo questo intervallo di tempo, cioè d'una vibrazione sola del suono, di cui il valore è $\frac{1}{N}$, vi sarà una coincidenza de' due primi. Perchè ve ne sia una sola bisogna che i numeri n ed n' siano primi tra loro, nel qual caso il suono cercato, formato da questa coincidenza, sarà il suono stesso $\frac{1}{N}$; ma se essi hanno un fattore comune f, $\frac{f}{N}$ esprimerà il valore del suono risultante dalla lor consonanza, poichè allora vi saranno f coincidenze in vece d'una, mentre i due suoni dati fanno n ed n' vibrazioni. In generale la ricerca del suono risultante dalle coincidenze di due suoni si riduce, come si vede, a trovare il suono più acuto, di cui i due suoni proposti siano amendue armonici. Nel nostro esempio qui sopra i suoni componenti erano espressi dagli intieri 2 e 3, cioè da $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$; si avea dunque $n=2$, $n'=3$, $N=1$. I numeri 2 e 3 essendo primi tra loro, il suono risultante dalla consonanza è $\frac{1}{1}$ ossia 1, cioè ut_1, come abbiamo veduto. Se si fossero presi per suoni componenti mi_1 e fa_1 che sono espressi da

$\frac{5}{4}$, e $\frac{4}{3}$, riducendoli allo stesso denominatore si sarebbero avute le frazioni $\frac{15}{12}$, e $\frac{16}{12}$, il che avrebbe dato $n=15$, $n'=16$, $N=12$; e siccome i numeri 15 e 16 sono primi tra loro, il suono risultante sarebbe espresso da $\frac{1}{12}$. Per trovare la sede di questo suono nelle ottave bisogna scomporre il suo valore in $\frac{1}{4.3}$; si vede allora ch'esso è la doppia ottava grave del suono $\frac{1}{3}$, poichè $\frac{1}{4}$ esprime la doppia ottava grave del suono rappresentato dall'unità. Ora nella gamma il valore di fa_1 è $\frac{4}{3}$; la sua doppia ottava grave, che chiameremo fa_{-2}, è dunque $\frac{1}{3}$, e la doppia ottava grave di quest'ultimo è

$$fa_{-4}=\frac{1}{12},$$

cioè il *fa* che è alla quarta ottava grave di fa_1. Tale sarebbe dunque il suono prodotto dalla risuonanza simultanea di mi_2 e fa_2.

Osserva però il sig. Weber (*Annali di fisica e chimica di Poggendorff*, *n.°* 2 *del* 1829), che per ottenere sensibilmente uno di questi tuoni risultanti di Tartini dalla riunione di due tuoni dati, non è necessario che la coincidenza dei battimenti che lo costituiscono sia matematicamente esatta, ma solo sufficientemente approssimata perchè l'orecchio vi sia sensibile; può quindi accadere che per certi tuoni si abbiano due intervalli diversi, in cui questa coincidenza approssimata dei battimenti abbia luogo sensibilmente, cioè corrispondenti a due valori diversi del rapporto di due tuoni, prossimi a quello per cui una coincidenza esatta si verificherebbe; si avranno dunque allora due tuoni risultanti dalla stessa riunione di due tuoni dati; e con questo principio Weber cerca di render ragione di alcune osservazioni su questi tuoni risultanti, che il sig. Blein ha riferite nella sua opera intitolata *Exposé de quelques principes*

nouveaux sur l'acoustique, *Paris* 1827, sebbene, secondo il sig. Weber, i risultati di queste osservazioni non siano intieramente esatti.

L'osservazione dei tuoni risultanti di Tartini fu impiegata per determinare con maggior esattezza il rapporto di due tuoni dati, di quello che si potrebbe fare per mezzo della comparazione immediata di questi tuoni. Le coincidenze indicate da questi tuoni risultanti offrono, come osserva Weber, all' orecchio lo stesso soccorso che un nonnio presenta all' occhio per la misura delle lunghezze; nel nonnio una sola e stessa linea è divisa in due maniere in parti uguali, cosicchè in una di queste divisioni essa contenga una parte di più che nell'altra; così pure per mezzo delle vibrazioni di due corpi che producono questi tuoni risultanti, un solo e stesso intervallo di tempo è diviso in due numeri diversi di parti uguali, di cui l'uno supera l'altro d'un'unità; e siccome nel nonnio si osserva la coincidenza di due tratti di divisione, si ha nel battimento prodotto da due tuoni la coincidenza di due oscillazioni. Così mentre un orecchio esercitato può determinare immediatamente il rapporto di due tuoni dati, colla differenza, per esempio, di una vibrazione su cento, si può col mezzo dei battimenti che essi presentano giungere all' esattezza d'una vibrazione su mille. Quindi l'uso già accennato di questi battimenti per accordare più esattamente gli stromenti di musica, e particolarmente gli organi.

102. Quando i suoni componenti saranno espressi da numeri intieri, come nel nostro primo esempio, si avrà sempre $N = 1$, e il suono risultante sarà il più gran divisore comune de' due numeri n ed n' da cui sono espressi i valori de' suoni componenti. Quindi risulta una conseguenza importante per la teoria dell'armonia in generale. Se si ha una serie di corde, i suoni delle quali formino la serie de' numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5, ecc., cioè siano gli armonici del suono il più grave 1 ossia ut_1, facendo risuonare insieme le due prime corde della serie, o le tre prime, o le quattro prime, o un numero qualunque di esse, preso di seguito, comprendendovi la prima, non si sentirà che un solo suono, che sarà il suono più grave ut_1. Per comprendere la ragione di questo fatto bisogna considerare

che due termini qualunque di questa serie paragonati insieme non possono avere per fattor comune che numeri minori di loro stessi. Se questo fattor comune è l'unità, cioè se i due termini che si considerano sono numeri primi tra loro, il suono risultante sarà ut_1, od 1; se il fattor comune è diverso dall'unità, esso cadrà sopra alcuno de' termini della serie, inferiore a quelli che si paragonano, e lo rinforzerà. Questo similmente combinato con un altro termine, o si risolverà in un altro numero minore di se, o darà immediatamente ut_1 per risultato; cosicchè al fine tutte le combinazioni possibili concorrono colle loro risuonanze a rinforzare il suono ut_1, che essendo altronde dato dalla corda 1 predominerà su tutti gli altri.

Egli è probabilmente a questo concorso di tutti i suoni armonici d'un suono dato, per produrre quest' ultimo colle loro coincidenze, e così una impressione sola e semplice nel senso dell'udito, che si dee attribuire l'armonia o sensazion grata che risulta dalla loro riunione col suono principale che si chiama il loro suono *fondamentale* o generatore, come già abbiamo accennato. E in generale qualunque *accordo*, cioè riunione aggradevole di due o più suoni pare dipendere da questa medesima coincidenza più o meno perfetta, ossia tendenza a formare un solo suono, sia che quest' ultimo suono sia uno di quelli che si fanno suonare immediatamente come nella suddetta serie de numeri armonici cominciando da 1, sia che esso non si produca che dalla riunione degli altri, come nell'accordo ut_1, mi_1, sol_1, ut_2 cioè d'un numero colla sua terza, quinta, ed ottava, ossia $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, 2$, che prendendo per unità un *ut* di due ottave più basso divengono 4, 5, 6, 8, suoni armonici di questo *ut*, e che per conseguenza lo fanno risuonare col loro concorso, sebbene imperfettamente per la soppressione de' suoni intermedii 2, 3. Se si sopprime mi_1, ossia la terza, si hanno i suoni $1, \frac{3}{2}, 2$, che prendendo per unità la semplice ottava grave del primo di essi, divengono 2, 3, 4, e fanno risuonare più compiutamente questo suono di cui sono gli armonici più vicini; in fatti quest'accordo d'un suono colla sua quinta, ed ottava è riguardato come il più

perfetto che si possa ottenere tra i suoni che compongono una sola gamma.

103. La teoria sovra esposta dei tuoni di Tartini, ossia tuoni di combinazione è quella più generalmente ricevuta, e la considerazione di Weber sull'influenza della variazione possibile dei suoni che li producono tra certi limiti, le arreca solo una leggiere modificazione, senza la quale essa si troverebbe affatto contradetta dalle sperienze. Il signor Hallström Svezzese non crede però questa teoria intieramente conforme alle sperienze, nemmeno con questa modificazione. Egli già fin dall'anno 1819 aveva proposto per questa teoria un altro principio nella sua Memoria *de tonis combinationis*, pubblicata in Abo in quell' anno, e così avanti che Weber avesse indicata quella modificazione, e la sostenne nuovamente negli *Annali di fisica e chimica* di Poggendorff n.° 3 dell' anno 1832, dopo aver vedute le spiegazioni di Weber. Questa teoria di Hallström, ossia modificazione da esso arrecata alla teoria ordinaria, è fondata sulla considerazione che per ottenere i battimenti di coincidenza da cui dipendono i tuoni di cui si tratta, non è necessario, come si suppone in quella teoria, che numeri intieri di vibrazioni de' due corpi sonori che li producono si compiscano nello stesso istante, ossia che partendo da un periodo comune, le vibrazioni dei due corpi si trovino di nuovo allo stesso periodo; ma basta che esse siano giunte ad un altro punto di periodo comune, sebbene diverso dal primo. Così per esempio se i numeri delle oscillazioni dei due corpi in un dato tempo sono 3 e 5, la coincidenza, quale la teoria comune la richiede, non avrà luogo che dopo tre oscillazioni dell' uno e cinque dell'altro, e questi corpi daranno così un tuono risultante corrispondente ad una sola vibrazione in quel dato tempo: ma si dee osservare che alla metà di quel tempo, il primo corpo avrà fatta una vibrazione e mezza, e il secondo due vibrazioni e mezza, e si troveranno così questi corpi amendue alla metà di una delle loro vibrazioni, il che basta, secondo Hallström per produrre una coincidenza degli impulsi che ne risultano, e così un tuono di combinazione che corrisponderà a quello d'un corpo, che facesse due vibrazioni mentre i corpi dati ne fanno l'uno tre, e l'altro cinque. In generale siano r ed s i numeri di oscillazioni

dei tuoni che si fanno risuonare insieme in un dato tempo, per esempio in un minuto secondo, e sia x il numero delle oscillazioni nello stesso intervallo d'un secondo, che costituisce il tuono che giusta quest'osservazione dee risultare dalle loro coincidenze, mentre secondo la teoria comune questo numero sarebbe sempre l'unità quando r, s sono numeri primi tra loro, o il loro fattore comune q, se essi ne hanno uno. Il tempo in cui si farà una di queste oscillazioni del tuono risultante sarà $\frac{1}{x}$, e in questo tempo i due corpi risuonanti faranno rispettivamente $\frac{r}{x}$, ed $\frac{s}{x}$ oscillazioni; perchè ne risulti una coincidenza basterà che il numero $\frac{s}{x}$ che supporremo il più grande superi $\frac{r}{x}$ d'un'unità, poichè allora, mentre uno di questi corpi avrà fatto un numero frazionario $\frac{r}{x}$ di oscillazioni, l'altro ne avrà fatto $1+\frac{r}{x}$, e così si troveranno amendue allo stesso periodo di oscillazione frazionaria dopo un numero di oscillazioni intiere che per l'uno sorpasserà quello dell'altro di un' unità; si determinerà dunque x per mezzo dell'equazione $\frac{s}{x}=\frac{r}{x}+1$; il che dà $x=s-r$. Il numero di oscillazioni in un secondo di tempo, che costituisce il tuono cercato è dunque la differenza tra i due numeri d'oscillazioni in un secondo, che costituiscono i due tuoni produttori. Se s ed r sono numeri primi fra loro questo numero non si potrà esprimere altrimenti che per $s-r$; ma se essi avessero un fattore comune q, cioè se si avesse per esempio $r=aq$, $s=bq$, ossia $\frac{r}{a}=\frac{s}{b}=q$, a, e b essendo due numeri primi fra loro, si avrà $x=s-r=s-\frac{as}{b}=(b-a)\frac{s}{b}$ $=(b-a)q$, oppure anche $x=\frac{br}{a}-r=(b-a)\frac{r}{a}$, che si riduce similmente a $(b-a)q$, espressione che non differisce da

quella, $x = \frac{r}{a} = \frac{s}{b} = q$, che darebbe la teoria comune, se non pel fattore $b - a$, in vece del quale in quest'ultima teoria si prende sempre l'unità. La teoria di Hallström non coincide dunque con quella comune, se non nel caso in cui $b - a$ è realmente l'unità, cioè in cui i due numeri corrispondenti ai tuoni produttori se essi sono primi tra loro, o i due numeri primi che essi contengono, con un fattore comune, in caso contrario, non differiscono tra loro che d'un'unità. Così per esempio se i due numeri dati sono 2 e 3, il numero cercato sarà 1 nell'una e nell'altra teoria; ma se i due numeri dati sono 3 e 5 che differiscono di due unità, il numero di cui si tratta sarà 2 nella teoria di Hallström, come sopra si è veduto, in vece di 1 soltanto che la teoria comune avrebbe dato.

Si osserverà che nella teoria di Hallström il suono risultante non è sempre necessariamente più grave che ciascuno dei due tuoni produttori, come ciò avea luogo nella teoria comune; in fatti secondo la relazione tra s ed r, il numero $s - r$ può essere più grande di r; così per esempio se $r = 3$, $s = 11$, si avrebbe $s - r = 8$.

Ma questo tuono corrispondente ad un numero $s - r$ di oscillazioni nella teoria di Hallström non dee essere considerato se non come il principal tuono di combinazione dei due tuoni dati, ossia come il primo di una serie di tuoni diversi di combinazione che avranno pur luogo, sebbene in generale meno sensibili, in vece d'un solo che ne dava la teoria comune. In fatti il tuono di combinazione $s - r$ così prodotto, dee generare nella stessa maniera col tuono r che è il più grave dei tuoni dati un altro tuono $r - (s - r) = 2r - s$; questo con s e con $s - r$ separatamente due altri tuoni di combinazione $s - (2r - s)$, ossia $2(s - r)$, e $2r - s - (s - r)$, ossia $3r - 2s$, e così successivamente. Questo numero però di tuoni di combinazione possibili è necessariamente limitato dalle relazioni diverse che si suppongono tra i tuoni produttori primitivi r ed s, in virtù delle quali i tuoni successivi possono confondersi coi primi; così per esempio perchè il secondo tuono di combinazione $2r - s$ si confonda col primo $s - r$ basta supporre tra r, ed s la relazione espressa da quest'equazione $s - r = 2r - s$, il

che da $3r=2s$, ossia $r=\frac{2}{3}.s$. Inoltre i diversi tuoni di combinazione non sono sempre tutti d'una tal forza che possano essere realmente sentiti.

Hallström cercò di confermare questa teoria colle esperienze, sia adoperando tuoni primitivi abbastanza gravi per produrre battimenti che si potessero contare, sia, quando i tuoni produttori erano troppo acuti perchè questo fosse possibile, giudicando dei tuoni di combinazione coll'orecchio e per mezzo del paragone con tuoni determinati. I numeri di battimenti, e i tuoni ottenuti si trovarono, secondo le tavole che egli ne ha date, affatto prossimamente conformi a quelli calcolati colla sua teoria; quelli dati dalla teoria comune non vi si accordavano con qualche prossimità, se non per mezzo della considerazione proposta da Weber, dei tuoni prossimi a quelli dati, non però colla stessa esattezza che offrivano i tuoni calcolati per mezzo della nuova teoria, e non in maniera da soddisfare a tutte le variazioni osservate, se si eccettuano i casi in cui secondo la teoria stessa, alcuni de' suoni o primarii, o successivi si accordano, o si confondono con quelli dati dalla teoria comune. Queste sperienze offrirono in particolare tuoni di combinazione molto più elevati di quelli che risultano dalla teoria comune, e questi tuoni elevati sono appunto una conseguenza della teoria di Hallström.

Quanto alle cagioni per cui tra più tuoni di combinazione che secondo questa teoria possono corrispondere a due tuoni dati, gli uni piuttosto che gli altri sono sensibili, esse pajono dipendere, secondo le esperienze di Hallström, da diverse circostanze nella relazione di questi tuoni dati, per cui accade anche talvolta che i tuoni di combinazione secondarii o dedotti dai primi siano appunto quelli che sono sensibili mentre questi nol siano. La capacità cioè dell'orecchio di sentire questi diversi tuoni di combinazione pare dipendere dall'elevazione relativa dei medesimi, e dal loro rapporto coi tuoni che li producono, in quanto che si distinguono più facilmente i tuoni più gravi a cagione della loro ruvidezza, e si confondono al contrario i più elevati coi tuoni originarii produttori, più fortemente risuonanti, e inoltre si distinguono più facilmente gli uni dagli

altri i tuoni armonicamente consonanti, mentre non si possono riconoscere in particolare quelli dissonanti, sopratutto quando ve ne siano molti insieme.

Del resto la coesistenza, in molti casi, di più tuoni di combinazione contemporaneamente sensibili è, come si vede, una conseguenza immediata della teoria di Hallström, in vece che secondo la teoria comune essa non poteva spiegarsi se non per mezzo della considerazione di Weber, cioè di due rapporti approssimati diversi tra i due tuoni produttori, i quali possono servire l'uno e l'altro alla determinazione del tuono di combinazione; ma secondo questa spiegazione i tuoni di cui il rapporto è affatto determinato, e sufficientemente semplice, e non ha per conseguenza bisogno di approssimazione non potrebbero produrre che un solo tuono di combinazione, mentre secondo le sperienze di Hallström si sentono distintamente anche in alcuni di questi casi due tuoni di combinazione diversi. Hallström fa notare, che anche le osservazioni di Blein di cui sopra si è parlato si accordano da vicino colla sua teoria, sebbene il loro autore non sembri aver avuta alcuna idea di questa teoria; e solo perchè esse non si accordavano colla teoria comune, Weber le ha riguardate come in parte difettose, accettandone solo il fatto della coesistenza di molti tuoni di combinazione corrispondenti ai due tuoni dati, e che Weber spiegava come si è detto per mezzo di quelle approssimazioni.

Tutto pare dunque concorrere a far riguardare questa teoria de' tuoni di combinazione di Hallström come più conforme che la teoria ordinaria ai fatti conosciuti a tale riguardo.

104. A questa teoria di Hallström pajono però aver ancora arrecata qualche modificazione, e data nello stesso tempo una maggior estensione ed esattezza le ricerche di Scheibler amatore di musica, fatte collo scopo di ottenere un metodo più esatto e più sicuro di accordare gli stromenti di musica, descritte da Röber Professore a Crefeld, e pubblicate nel 1834 negli *Annali di Fisica e Chimica* di Poggendorff in Tedesco T. 32 n.° 22. Egli ha osservato che il numero dei battimenti prodotti immediatamente da due tuoni, di cui sono dati i numeri delle oscillazioni in un dato tempo, è la metà soltanto del numero di vibrazioni che forma la differenza dei due tuoni

dati, e che, conformemente alla teoria di Hallström, rappresenta il tuono di combinazione, quando i battimenti divengono troppo rapidi per esser sentiti separatamente. La ragione ne è che questi battimenti corrispondono agli istanti, in cui le vibrazioni semplici dei due tuoni generatori non solamente sono ad uno stesso punto del loro periodo, ma si fanno inoltre nella stessa direzione, cioè in quella da cui si suppongano esser partite in comune da principio. Infatti le vibrazioni semplici facendosi alternativamente in due opposte direzioni, cosicchè nell' una l'aria è condensata, nell'altra è rarefatta relativamente all'orecchio, le coincidenze in un punto corrispondente del loro periodo sono alternativamente amendue nella stessa direzione di vibrazione, o in direzioni opposte; la coincidenza in uno stesso punto del periodo, di due vibrazioni amendue condensanti, o amendue rarefacienti forma sola un *massimo* di impressione nell'orecchio, e quindi un *battimento*; quella di due vibrazioni, l'una condensante, l'altra rarefaciente, e di cui gli effetti si distruggono reciprocamente produce al contrario un *minimo* o piuttosto un annullamento d'impressione, e non è che l'istante di mezzo tra quelli di due battimenti. Il tuono però risultante da quest' alternativa di massimo, e di minimo di impressione prodotta dalle vibrazioni dei due tuoni generatori, quando la successione ne sarà troppo rapida perchè i battimenti si possano contare, sarà espresso dalla somma di questi massimi e minimi, nella stessa maniera che il tuono prodotto dalle vibrazioni d'un solo corpo sonoro corrisponde al numero delle vibrazioni semplici che si fanno in un dato tempo, sebbene in direzioni opposte, epperciò l'una condensante, l'altra rarefaciente, ossia al doppio del numero delle vibrazioni condensanti o del numero delle vibrazioni rarefacienti prese separatamente; cioè questo tuono sarà realmente quello indicato dalla teoria di Hallström.

Ciò si rende sensibile nella fig. 19, che presenta una costruzione grafica dell' andamento delle condensazioni e dilatazioni alternative e delle loro coincidenze tra due tuoni corrispondenti l'uno a 4, l'altro a 5 vibrazioni semplici in un dato tempo. Queste condensazioni e dilatazioni prodotte dalle escursioni de' corpi vibranti da una parte e dall'altra della loro posizione di

equilibrio vi sono rappresentate dalle ordinate di curve, di cui le ascisse rappresentano il tempo; le ordinate al dissopra della linea delle ascisse esprimono le escursioni da una parte, e quindi per esempio le condensazioni, e quelle al dissotto le escursioni dalla parte opposta, e quindi le dilatazioni dell'aria; la curva $abcd...l$ è quella delle condensazioni e dilatazioni prodotte dal corpo che dà il tuono di 5 vibrazioni e $a'b'c'd'...l'$ è la curva delle condensazioni e dilatazioni prodotte dal corpo che dà il tuono di 4 vibrazioni in un dato tempo, che è rappresentato dall'ascissa pn. Si trovano le azioni combinate risultanti dalle due serie di vibrazioni, e quindi d'ondulazioni prodotte nell'aria, in un istante qualunque, prendendo la somma delle ordinate positive o negative che appartengono alle due curve in uno stesso punto della linea delle ascisse. Nel punto p coincidono due massimi dello stesso segno; questa coincidenza torna ad aver luogo in q dopo due intervalli pn, nq di 4 vibrazioni semplici di uno de'tuoni, e di 5 vibrazioni dell'altro, cosicchè il numero di questi massimi d'impressione non è che la metà del numero delle coincidenze delle vibrazioni semplici che hanno luogo in n e in q. L'azione combinata, andando da p verso il mezzo n di quest'intervallo di tempo, diviene vieppiù debole, e nel mezzo stesso n, ove due massimi di segno opposto coincidono, essa è uguale a zero, sebbene vi sia colà una coincidenza delle vibrazioni in uno stesso periodo, perchè queste vibrazioni si fanno in direzione opposta. La curva punteggiata $a\alpha\beta\gamma\delta\lambda\mu\nu\rho\sigma l$ rappresenta colle sue ordinate l'effetto di quest'azione riunita dei due tuoni. Essa offre, come le due altre, una successione di condensazioni e dilatazioni crescenti, e decrescenti; ma queste condensazioni e dilatazioni non sono, come quelle dei tuoni ordinarii, tutte di ugual forza, e la loro successione non è alternativa senza interruzione, cosicchè a ciascuna condensazione succeda una rarefazione, e reciprocamente; queste *vibrazioni di combinazione*, come le chiameremo, si compongono al contrario di sistemi successivi come $a\alpha\beta\gamma\delta\lambda$ e $\lambda\mu\nu\rho\sigma l$, in cui i massimi delle condensazioni e dilatazioni particolari $a,\alpha,\beta,\gamma,\delta$, e μ,ν,ρ,σ,l sono tanto più piccoli quanto sono più lontani dai punti p e q ove hanno luogo i più grandi massimi; e nei loro limiti contigui due

condensazioni, o due dilatazioni si succedono. Così nell'istante λ comincia uno di questi sistemi, e finisce il precedente; in questo istante, in cui coincidono due vibrazioni semplici opposte, l'azione combinata è nulla, ed è preceduta e seguita da due deboli azioni δ, μ amendue condensanti del tuono di combinazione. I più grandi massimi successivi in p, q, ecc. formano, come si è detto, i battimenti, quando la successione ne è abbastanza lenta perchè possano contarsi, mentre i massimi successivi decrescenti, e crescenti sono sempre troppo deboli, e troppo rapidamente si succedono per formare battimenti separati; ma il tuono di combinazione che risulta da queste alternative quando esse sono abbastanza rapide, perchè non si possano più sentire i battimenti, corrispondono al numero totale di coincidenze p, n, q ecc. doppio di quello dei battimenti, cioè al numero totale di istanti alternativi di condensazione, o dilatazione nulla e di sola condensazione o sola dilatazione massima, come i tuoni semplici corrispondono al numero di istanti alternativi di condensazione, e di dilatazione. Gli istanti in cui è nulla la condensazione o dilatazione fanno così nel tuono combinato, secondo Scheibler, le veci degli istanti di dilatazione frapposti agli istanti di condensazione, e degli istanti di condensazione frapposti agli istanti di dilatazione nelle vibrazioni da cui risultano i tuoni semplici.

Il numero dei battimenti, quale dee risultare da due tuoni combinati quando essi possono distinguersi e contarsi, non è dunque, come si è detto, secondo queste considerazioni, che la metà del numero di vibrazioni semplici che corrisponde al tuono di combinazione che nascerebbe da quei due tuoni, e se Hallström ha trovati risultati giusti calcolando il rapporto tra i battimenti e i tuoni di combinazione come se il numero de' primi dovesse essere uguale al numero di vibrazioni a cui i secondi corrispondono, bisogna che abbia corretto quest'errore prendendo nel calcolo il doppio del numero di battimenti che avrà realmente contati nelle sperienze. Lo stesso rapporto di 1 a 2 tra il numero dei battimenti, e il numero di vibrazioni corrispondenti al tuono di combinazione, è stato verificato coll'osservazione da Scheibler nei battimenti risultanti dalla riunione dei tuoni di combinazione stessa già formati dalla risonanza simultanea di tre tuoni

semplici, e in quelli risultanti dalla riunione di un tuono di combinazione, e di un tuono semplice, e così successivamente per gli altri tuoni di combinazione che secondo la teoria di Hallström possono concepirsi risultanti all'infinito dalle combinazioni successive di due o più tuoni semplici, e dei tuoni di combinazione da essi prodotti. Scheibler chiama i tuoni di combinazione prodotti immediatamente dalla riunione di due tuoni ordinarii *tuoni di combinazione del* 1.° *grado*; quelli che risultano dalla riunione di due tuoni di combinazione del 1.° grado, o di uno di questi tuoni con un tuono ordinario, *tuoni di combinazione del* 2.° *grado*; quelli formati dalla riunione di due tuoni di combinazione del 2.° grado, o di uno di questi tuoni con uno dei tuoni delle specie precedenti, *tuoni di combinazione del* 3.° *grado*, e così di seguito. Questi diversi gradi dei tuoni di combinazione sono successivamente più difficili a distinguersi coll' orecchio, e al di là del 3.° grado divengono insensibili, o almeno impossibili a determinarsi.

Per mezzo di questi rapporti, e servendosi per produrre i tuoni di diversi diapason ossia coristi come meno soggetti a variazione che il monocordo, e usando inoltre le precauzioni necessarie per evitare l'influenza delle variazioni di temperatura sui tuoni dati dai coristi medesimi, Scheibler pervenne a determinare l'elevazione d'un tuono colla precisione di $\frac{1}{15000}$ od anche maggiore, e ne dedusse, come si era proposto, un metodo per determinare in generale, per mezzo dei battimenti, intervalli di tuoni qualunque, e ottenere un accordo molto più perfetto degli stromenti di musica di quello che prima si fosse fatto.

Si noterà qui che ciò che abbiamo detto non essere il numero dei battimenti prodotti da due tuoni, secondo le osservazioni di Scheibler, che la metà del numero di vibrazioni a cui corrisponderebbe il tuono di combinazione, si dee intendere delle vibrazioni semplici formate da un'andata od un ritorno delle particelle del corpo vibrante; se si intendesse per vibrazione od oscillazione la somma d'un'andata, e d'un ritorno, il che corrisponde a ciò che ordinariamente si chiama, come vedremo a suo luogo, un'*ondulazione* nell' aria considerata essa medesima come corpo

vibrante, e per cui si propaga il suono all'orecchio, il numero dei battimenti sarebbe uguale a quello di queste ondulazioni o doppie vibrazioni, poichè questo numero non sarebbe più esso medesimo che la metà di quello delle vibrazioni semplici.

Quanto alla relazione teorica indicata da Scheibler, e Röber tra le vibrazioni corrispondenti ai tuoni semplici, e quelle in cui consiste il tuono di combinazione, essa è conforme a ciò che Tommaso Young avea già fatto osservare nella sua Memoria sul suono e sulla luce, *Trans. Fil.* del 1800, ed in altra posteriore pubblicata nel 1803, sull'addizione, o distruzione reciproca degli effetti delle vibrazioni coincidenti, secondo che o esse sono amendue di condensazione o di dilatazione, o l' una di condensazione, l'altra di dilatazione, in una maniera analoga a ciò che ha luogo nella propagazione della luce, secondo la teoria delle ondulazioni, e che costituisce il principio detto *delle interferenze*; di quest'oggetto avremo di nuovo occasione di occuparci quando tratteremo delle vibrazioni sonore dei corpi gazosi.

105. Per dar compimento alle considerazioni sulle relazioni che esistono tra i suoni, e a cui ci ha condotti la teoria delle vibrazioni delle corde tese, ci resta a dir qualche cosa sui rapporti diversi che passano tra i tuoni consecutivi della gamma, e di cui occorre soventi di far menzione nella teoria delle vibrazioni de'corpi sonori in generale.

Questi rapporti si ottengono paragonando tra loro le espressioni che sopra abbiamo indicate (n. 96) del valor dei suoni di cui si tratta per mezzo della rapidità delle vibrazioni che loro corrisponde, prendendo per unità il suono fondamentale ut_1. Così cominciando dai due primi vediamo che il rapporto di *re* a *ut* è $\frac{9}{8}$ ossia $1\frac{1}{8}$, come ciò è segnato nella gamma stessa espressa in numeri. Quello susseguente di *mi* a *re* è $\frac{5}{4}$ diviso per $\frac{8}{9}$, ossia $\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{8}=\frac{40}{36}=\frac{10}{9}=1\frac{1}{9}$; esso è adunque alquanto minore del precedente, e forma soltanto $\frac{80}{81}$ di quello, poichè $\frac{10}{9}$ diviso per $\frac{9}{8}$ ci dà infatti questa frazione $\frac{80}{81}$. La

differenza tra questi due rapporti è troppo piccola per essere sensibile all'orecchio, onde cantando la gamma non si sente che il passaggio da *re* a *mi* richiegga uno sforzo d'intonazione sensibilmente minore che quello di *ut* a *re*. Tuttavia nella teoria diviene necessario di distinguere questi due intervalli con denominazioni particolari. L'intervallo di *re* a *ut*, vale a dire il rapporto de' due tuoni *re* ed *ut*, ossia $\frac{9}{8}$ si chiama un *tuono maggiore*, e l'intervallo da *mi* a *re*, ossia $\frac{10}{9}$ si chiama un *tuono minore*. Ma non vi è alcuno che cantando la gamma non s'accorga che l'intervallo da *mi* a *fa* è minore di quello di *re* a *mi* o di *ut* a *re*. Infatti il rapporto dei suoni *fa* e *mi* è $\frac{4}{3}$ diviso per $\frac{5}{4}$, ossia $\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{15} = 1\ \frac{1}{15}$, e non differisce così dall'unità cioè dal rapporto di uguaglianza, che di $\frac{1}{15}$, in vece che il rapporto di *ut* a *re* ossia $\frac{9}{8}$ ne differisce di $\frac{1}{8}$ e così quasi due volte tanto. Quindi è che quest'intervallo o rapporto $\frac{16}{15}$ ha ricevuto il nome di *semituono maggiore*. Se si continuano a paragonare così due a due i suoni consecutivi che compongono la gamma, i loro rapporti si troveranno compresi in alcuni di quelli che abbiamo or ora considerati. Basta per convincersene gettar gli occhi sulla tabella seguente che presenta i risultati di questo calcolo.

Indicazione de' suoni.	Loro rapporti.	Valor musicale dell' intervallo che essi comprendono.
da *ut* a *re*	$\frac{9}{8}$	Tuono maggiore
re *mi*	$\frac{10}{9}$	Tuono minore
mi *fa*	$\frac{16}{15}$	Semituono maggiore
fa *sol*	$\frac{9}{8}$	Tuono maggiore
sol *la*	$\frac{10}{9}$	Tuono minore
la *si*	$\frac{9}{8}$	Tuono maggiore
si *ut*	$\frac{16}{15}$	Semituono maggiore

Oltre questi intervalli detti tuoni maggiore e minore, e semituono maggiore, ve n'ha un altro da notarsi particolarmente perchè esso si connette con un rapporto di suoni che forma una consonanza assai grata all'orecchio, e di frequente uso nella musica. Quest'intervallo o rapporto è quello di $\frac{6}{5}$ ossia $1\frac{1}{5}$; esso è un po' minore di quello di *ut* a *mi* che si chiama *terza maggiore*, e che ha per valore $\frac{5}{4}$ ossia $1\frac{1}{4}$, come ciò è segnato nell'espressione numerica dei suoni della gamma. Quest'ultimo rapporto può mettersi sotto la forma $\frac{6}{5} \cdot \frac{25}{24}$, poichè infatti $\frac{5}{4}$ diviso per $\frac{6}{5}$ ci dà $\frac{25}{24}$, d'onde si vede che per formare l'intervallo $\frac{6}{5}$ bisogna indebolire la terza maggiore *ut mi* ossia $\frac{5}{4}$ moltiplicandola per $\frac{24}{25}$. Per questa ragione l' intervallo $\frac{6}{5}$ ha ricevuto il nome di *terza minore*, e il fattore $\frac{25}{24}$, che misura il

suo intervallo alla terza maggiore si chiama un *semituono minore.*

Occorre soventi in generale nella musica di alzare una nota qualunque della gamma d'un *semituono minore*, cioè di moltiplicarne il valore per $\frac{25}{24}$, oppure di abbassarla nella stessa proporzione moltiplicandone il valore per $\frac{24}{25}$. Nel primo caso si aggiunge alla nota o tuono il nome *diezi*, e nel secondo il nome *bemolle*. Si indica il diezi col segno * e il bemolle col segno $\flat$, posti l'uno e l'altro alla destra della nota o del suo nome, e un poco al di sopra della medesima come un esponente. In Germania si suole indicare l'elevazione o l'abbassamento d'una nota di un diezi, o d'un bemolle, aggiungendo alle lettere *a*, *h*, ecc. con cui si segnano i tuoni della gamma le sillabe *is* o *es* come *cis* per *ut* *, ecc. *des* per *re*$^\flat$ ecc.; si fa eccezione pel *si*$^\flat$ che si indica con *b*.

L'intervallo $\frac{25}{24}$ è il più piccolo di quelli che si impiegano nella pratica della musica. Quando il rapporto di due suoni è espresso da un fattore che si approssima di più all'unità, per esempio dal fattore $\frac{80}{81}$ di cui sopra abbiamo parlato, questo rapporto si chiama in generale un *comma.*

A quest'indicazione dei diversi rapporti che esistono tra i suoni della gamma si potrebbero aggiungere molte cose sui suoni intermedii che vi si possono inserire per mezzo di diezi e di bemolli, sulle diverse gamme che si possono formare partendo da uno qualunque dei diversi suoni che compongono la gamma naturale che comincia per *ut*$_1$, sulla necessità di alterare alquanto i suoni degli stromenti, che non possono dare che suoni fissi, per farli servire a queste diverse gamme, etc.; ma queste cognizioni appartengono piuttosto alla teoria dell'arte della musica, che a quella delle vibrazioni de' corpi sonori, della quale soltanto, come collegata colla costituzione de' corpi, dee la fisica occuparsi.

Debbo però far menzione d'una maniera approssimata con cui si è cercato di rappresentare con intervalli uguali una serie

di semituoni componenti la gamma intiera, mentre al contrario, come abbiamo veduto, dei tuoni intieri che regnano fra alcune delle note della gamma semplice ordinaria, altri sono *maggiori*, ed altri *minori*, cioè gli uni espressi da $\frac{9}{8}$ ossia 1,125, e gli altri da $\frac{10}{9}$ ossia 1,1111..., e il valore $\frac{16}{15}$ del *semituono maggiore* che ha luogo fra altre di queste note della gamma ordinaria, non corrisponde alla metà dell'intervallo nè dell'uno nè dell'altro di questi tuoni, poichè $\left(\frac{16}{15}\right)^2 = \frac{256}{225} = 1{,}1377...$ numero ancor maggiore di $\frac{9}{8}$ ossia del tuono maggiore. Diverso ancora dall'intervallo corrispondente alla metà, sia d'un tuono maggiore sia d'un minore, è quello detto *semituono minore* $\frac{25}{24}$, poichè $\left(\frac{25}{24}\right)^2 = \frac{625}{576} = 1{,}085$ circa, numero minore di $\frac{10}{9}$ cioè del tuono minore, d'onde segue che non si avrebbe un tuono precisamente intermedio tra due suoni della gamma distanti tra loro d'un tuono nè segnando il più basso di *, nè segnando il più alto di $\flat$, il che darebbe altronde due tuoni diversi. Così le due serie

ut, *ut**, *re*, *re**, *mi*, *fa*, *fa**, *sol*, *sol**, *la*, *la**, *si*, *ut*

ut, *re*$^\flat$, *re*, *mi*$^\flat$, *mi*, *fa*, *sol*$^\flat$, *sol*, *la*$^\flat$, *la*, *si*$^\flat$, *si*, *ut*

sarebbero diverse tra loro, e non presenterebbero nè l'una nè l'altra intervalli uguali. Ora se si osserva che i semituoni diversi che formano o l'una o l'altra di queste due serie, sono in tutto al numero di 12, è chiaro che dovendo il secondo *ut*, ottava del primo, essere rappresentato da 2, quando si prende il primo *ut* per unità, converrà che ciascuno degli intervalli, quando essi si vogliano uguali tra loro, sia rappresentato da $\sqrt[12]{2}$ = 1,05946, cioè che la serie dei termini distanti successivamente d'un mezzo tuono uguale sia una progressione geometrica, di cui questo numero 1,05946 sia la ragione; così il secondo termine, che si potrà considerare indifferentemente come

l'*ut**, o come il *re*$^{\flat}$ identificati per quest'approssimazione, sarà questo stesso numero $\sqrt[12]{2}$ ossia 1,05946; il terzo cioè il *re* approssimato sarà $(\sqrt[12]{2})^2 = 1{,}12246$ in vece di $\frac{9}{8}$ ossia di 1,125; e così successivamente; onde si verrà a formare la tavola seguente dei suoni successivi di questa serie, rappresentati dai numeri delle vibrazioni in un dato tempo che loro corrispondono, prendendo per unità quello che corrisponde all'*ut* fondamentale: vi aggiungo la lunghezza corrispondente delle corde che darebbero questi suoni, prendendo per unità quella della corda che dà l'*ut* fondamentale.

	Numero delle vibrazioni.	Lunghezze delle corde.
ut	1,00000	1,00000
*ut** o *re*$^{\flat}$	1,05946	0,94387
re	1,12246	0,89090
*re** o *mi*$^{\flat}$	1,18921	0,84090
mi	1,25992	0,79370
fa	1,33484	0,74915
*fa** o *sol*$^{\flat}$	1,41421	0,70710
sol	1,49831	0,66742
*sol** o *la*$^{\flat}$	1,58740	0,62996
la	1,68179	0,59461
*la** o *si*$^{\flat}$	1,78180	0,56123
si	1,88775	0,52973
ut	2,00000	0,50000

I suoni corrispondenti a questi numeri di vibrazioni non differiranno sensibilmente all'orecchio da quelli di cui essi prendono il nome nella gamma primitiva; e questo è uno dei sistemi d'alterazione dei suoni che si sono proposti per accordare gli stromenti di musica in maniera da poter servire all'eseguimento di ogni sorta di musica, e che si chiamano *temperamenti*.

106. A queste considerazioni sulle relazioni dei diversi suoni tra loro, a cui hanno dato occasione le vibrazioni delle corde tese, debbo ancora aggiungere l'osservazione, che in generale i suoni possono esser prodotti, secondo quello che già si è accennato al n. 101, da qualunque serie d'impulsi, che l'aria riceva, in determinati intervalli di tempo, dipendenti anche da altre cause che dalle vibrazioni delle corde, o di altri corpi elastici, e che si succedano abbastanza rapidamente perchè l'orecchio non ne possa ricevere separatamente la sensazione, l'acutezza o gravità di questi suoni dipendendo poi sempre dalla maggior o minor rapidità della loro successione. Ce ne fornisce un esempio l'istromento, detto *Sirene*, inventato dal sig. Cagniard-La-Tour, in cui gli impulsi sono dati dall'aria stessa che si lascia uscire a determinati intervalli da forellini a ciò destinati. Negli istromenti da fiato detti *a linguetta*, il suono è pur reso in parte dall'alternativo aprirsi e chiudersi l'adito all'aria dal moto della linguetta medesima, come vedremo trattando a suo luogo delle vibrazioni dei fluidi aeriformi.

107. Quanto al moto vibratorio delle corde tese di cui qui si trattava, si dee notare per ultimo, che esse, oltre le vibrazioni trasversali di cui sin qui abbiamo parlato, sono ancora suscettibili di vibrazioni longitudinali per cui le loro parti si approssimano e si allontanano successivamente dai punti tra cui sono tese, il che non si può fare senza una condensazione della loro sostanza verso uno di questi punti, e una rarefazione verso l'altro. Il signor Poisson nella sua Memoria sull'equilibrio e sul moto dei corpi elastici, in cui come abbiamo già detto ha anche applicato le sue formole alle corde tese, ha trovato teoricamente che chiamando l la lunghezza d'una corda tesa, ossia la distanza compresa tra i due punti fissi che la terminano, α l'allungamento prodotto dalla forza che produce la sua tensione, n il numero delle sue vibrazioni longitudinali nell'unità di tempo, n' il numero delle sue vibrazioni trasversali nello stesso tempo, si ha $\frac{n}{n'} = \sqrt{\frac{l}{\alpha}}$, e questo rapporto, secondo il quale si vede che i suoni prodotti da vibrazioni longitudinali, sono sempre molto acuti relativamente a quelli trasversali

d'una corda comunque tesa, la quantità $\frac{l}{\alpha}$ essendo sempre molto grande per una tensione qualunque, si trovò confermato da una sperienza del sig. Cagniard-La-Tour.

Se si sostituisce in questo rapporto per n' l'espressione del numero delle oscillazioni trasversali della corda in un' unità di tempo stabilita al n. 94, cioè si faccia $n' = \sqrt{\frac{gP}{pl}}$, si avrà pel numero delle oscillazioni longitudinali nell'unità di tempo,

$$n = \sqrt{\frac{gP}{pl}} \cdot \sqrt{\frac{l}{\alpha}} = \sqrt{\frac{gP}{p\alpha}} .$$

Ma da quest'espressione si può eliminare la tensione P della corda; a tale oggetto si indichi con q la tensione che si richiederebbe per produrre nella corda un allungamento uguale alla lunghezza primitiva, cosicchè questa lunghezza ne venisse ad essere raddoppiata (che è quanto dire il quoziente che si ottiene dividendo la tensione necessaria per produrre un' allungamento qualunque in parti della lunghezza primitiva, per questo stesso allungamento, e supponendo che l'allungamento fosse sempre proporzionale alla tensione), quantità che dipende dalla natura e dalla grossezza della corda; si avrà $\alpha : l :: P : q$, d'onde $q = \frac{Pl}{\alpha}$, ossia $\frac{P}{\alpha} = \frac{q}{l}$; sostituendo questo valore di $\frac{P}{\alpha}$ nell'espressione di n, essa diverrà $n = \sqrt{\frac{gq}{pl}}$. Quindi si vede che il numero delle vibrazioni, e per conseguenza il suono d'una corda che vibra longitudinalmente è indipendente dalla tensione, che più non entra in quest'espressione, e non varia per una corda di data sostanza che colla grossezza, e colla lunghezza della medesima. L'osservazione tuttavia indica che il tuono longitudinale si eleva alcun poco quando la tensione aumenta, il che può attribuirsi a che la lunghezza della corda compresa fra i punti tra cui è tesa restando la stessa, il suo peso diminuisce a misura che essa si estende di più.

ARTICOLO SECONDO.

Vibrazioni delle verghe o spranghe rettilinee di corpi rigidi.

A. *Vibrazioni trasversali.*

108. Passiamo ora ad esaminare le leggi delle vibrazioni degli altri corpi sonori, diversi dalle corde tese, e in prima di quelle semplicemente lineari, cioè relative ad una sola dimensione, nelle verghe o spranghe di corpi naturalmente rigidi, ed elastici, supposte primieramente rettilinee nello stato d'equilibrio. Queste vibrazioni possono essere o *trasversali* come quelle che già abbiamo principalmente esaminate nelle corde, o *longitudinali*, cioè per cui le molecole si accostino e si allontanino successivamente nella direzione della loro lunghezza, senza che esse si pieghino, come in quelle di cui abbiamo pur detto alcuna cosa nel numero precedente relativamente alle corde tese, o finalmente *circolari*, cioè per torsione come quelle che già abbiamo avuto occasione di osservare nelle sperienze di Coulomb sulle forze elastiche. Sopra tutte queste maniere di vibrare, abbiamo particolarmente, come sulle vibrazioni sonore di ogni altra specie, sperienze molto accurate di Chladni, da lui esposte nel suo *Trattato d'Acustica.*

Cominciamo dalle vibrazioni trasversali. Queste vibrazioni possono, come quelle delle corde, calcolarsi secondo i principii della meccanica; ma le loro leggi sono molto diverse, perchè nelle corde la tensione non agisce che nella direzione della lunghezza, e non impedisce che la corda si pieghi, se non in quanto ne risulta un allungamento, mentre al contrario nelle lamine e verghe elastiche rigide, la forza elastica agisce sulla curvatura stessa, e tende a distrurla, e ciò, come si è spiegato nel n. 41 e nei numeri 55 e seg., in virtù del cangiamento di distanza delle molecole che ne formano lo spessore, cangiamento che nella corda non si suppone produrre alcuna forza elastica, perchè questa vi si suppone sempre uguale alla tensione primitiva in tutti i suoi punti, come al contrario l'allungamento non può aver luogo in generale nelle vibrazioni trasversali delle verghe, che non si suppon-

gono ordinariamente tese tra due punti fissi. Quanto alla legge della forza elastica ne' diversi stati per cui passa la verga vibrando, essa non può supporsi costante, poichè essendo nulla nello stato naturale, essa dee agire quando la verga se ne scosta; ma già abbiamo veduto che nell'inflessione delle verghe elastiche, principalmente quando l'inflessione è piccolissima, come nelle vibrazioni di cui si tratta, essa può supporsi proporzionale allo scostamento delle molecole dalla lor distanza naturale.

Conviene distinguere in queste vibrazioni sei casi diversi, secondo che o l'uno o l'altro de' due capi della verga, od amendue sono fissi, o liberi, o appoggiati contro un ostacolo fisso. È indifferente, quanto alle leggi delle vibrazioni, il servirsi di verghe cilindriche o parallelepipede, od anche di lamine di qualunque larghezza vibranti in una sola dimensione, purchè siano omogenee, e di uniforme spessore. Per metterle in vibrazione si possono fregare trasversalmente con un archetto da violino. Ciascuna delle indicate disposizioni può, come nelle corde vibranti, dar luogo a molte maniere di vibrazioni, secondo che la lamina o verga non forma che una sola curvatura verso l'asse rettilineo, o lo taglia in uno o più punti; ma la relazione de' suoni col numero delle curvature è diversa da quella delle corde vibranti. Esaminiamo prima queste diverse maniere di vibrazioni nei diversi casi suddetti, per una verga d'una data natura, grossezza, e lunghezza; poi riferiremo la formola generale teorica che esprime la rapidità delle oscillazioni di ciascuna maniera relativamente a verghe o lamine di diversi metalli, e di diversa lunghezza, e grossezza, e ne indicheremo l'applicazione ai diversi casi.

1.° Caso. Un capo fisso, o per meglio dire infisso od incastrato, per esempio in una morsa, e l'altro libero. In questo caso la maniera di vibrare la più semplice è quella che rappresenta il n. 1 della fig. 20. La verga non tocca l' asse AB, se non nel punto A in cui essa è fissata; essa dà allora il suono il più grave che possa risultare dalle sue vibrazioni; noi lo chiameremo il suo *suono fondamentale*. Nelle altre maniere di vibrare, di cui due sono rappresentate dai numeri 2 e 3 della stessa figura, la verga taglia l'asse una o più volte. Il miglior mezzo di produrre queste figure, è di toccar leggier-

mente col dito uno de' punti in cui si vuole determinare un nodo di vibrazione, e di mettere in moto con un archetto il punto di mezzo di una delle parti che debbono esser vibranti. Se ci serviamo di lamine piane si potranno rendere gli altri nodi sensibili, spargendo sulla lamina della sabbia fina e seca, che si accumulerà ne' luoghi ove il moto di vibrazione è nullo. I suoni corrispondenti alla seconda, terza ecc. di queste configurazioni sono tra loro, quanto al numero delle vibrazioni, come i quadrati de' numeri 3, 5, 7, ecc. che sono quelli delle metà di parti vibranti separatamente, che in esse si formano, e ciò è conforme alla regola generale che come vedremo risulta dalla formola teorica delle vibrazioni delle verghe elastiche, secondo la quale, in una data maniera di vibrare, le rapidità delle oscillazioni, poste tutte le altre cose pari, sono in ragion inversa dei quadrati delle lunghezze delle verghe. Ma il primo suono, in cui non si fa alcun nodo forma eccezione a questo riguardo; esso sta al secondo in cui si producono due ventri, come il quadrato di 2 sta al quadrato di 5, cioè come 4 a 25, mentre secondo la regola generale indicata, questo rapporto dovrebbe essere quello del quadrato di 1 al quadrato di 3, cioè di 1 a 9 ossia di 4 a 36. Nè questa eccezione dee recar meraviglia, poichè in fatti la vibrazione nel primo modo di vibrare è d'una natura diversa da quella di tutti gli altri modi; in quello il vertice della convessità è fisso, e l'estremità libera si muove rivolgendo la convessità della sua curvatura verso l'asse, in vece che negli altri modi le curve rivolgono la lor concavità verso l'asse, se non che la prima curvatura dee sempre avere una piccola porzione convessa verso l'asse, vicino all'estremità fissa, e aver quindi un punto d'inflessione per prender la forma concava nel rimanente. Non possono adunque paragonarsi le parti in cui la verga si divide nella seconda, terza ecc. maniere di vibrare colla semplice curvatura che essa prende nella prima, e il rapporto de' suoni non può esser quello che corrisponde alla lunghezza relativa di queste parti. Quello che abbiamo indicato risulta dalle sperienze di Chladni, sopra queste vibrazioni. Del resto anche la regola relativa agli altri modi di vibrare tra loro, non pare aver luogo che approssimativamente,

poichè la teoria e l'esperienza concorrono a farci vedere che le metà delle parti che vibrano separatamente non sono anche uguali tra loro se non approssimativamente; oltrecchè le due parti estreme non possono rigorosamente paragonarsi colle intermedie nella maniera di vibrare.

2.° Caso. Un capo appoggiato, l'altro libero. Questa disposizione non permette di far vibrare d'uno stesso moto la verga intiera, poichè bisogna sempre toccarla in qualche punto per tenerla in istato di pressione contro l'ostacolo, su cui dee appoggiarsi; altronde le curvature che essa prende nelle disposizioni corrispondenti sono diverse, e diversi per conseguenza sono anche i rapporti de' suoni che ne risultano. Il modo di vibrazione il più semplice è quello rappresentato dalla fig. 21 n. 1, in cui non vi è che un nodo, che si trova distante dall'estremità libera del terzo circa della lunghezza della lamina, cosicchè questa resta divisa in tre mezze parti vibranti separatamente. Segue il modo di vibrare che dà due nodi (fig. 21 n. 2) di cui l'ultimo è distante dall'estremità libera del quinto circa della lunghezza totale, cosicchè la verga resta divisa in cinque mezze parti vibranti, ecc. Per produrre ad arbitrio queste configurazioni diverse bisogna appoggiare uno de'capi della verga o lamina contro un piano fisso, tener leggiermente tra le dita uno de' punti in cui dee formarsi un nodo, e far passare l'archetto verso la metà di una delle parti che debbono entrare in vibrazione. Si osserverà che queste diverse maniere di vibrare corrispondono apparentemente alla seconda, terza ecc. del primo caso se non che la prima curvatura verso il punto d'appoggio è intieramente concava verso l'asse, l'appoggio non impediendo qui la verga di prendere questa forma. Parrebbe adunque che i suoni corrispondenti alle diverse maniere di vibrare, dovrebbero seguire la stessa legge che nel primo caso, cioè essere espressi dai quadrati de' numeri 3, 5, 7, ecc. Ma le sperienze di Chladni a questo riguardo ci mostrano che la cosa succede altrimenti; egli ha trovato che la serie di questi suoni è rappresentata dalla serie de' quadrati de'numeri 5, 9, 13, 17, ecc. che vanno aumentando di quattro unità, mentre i numeri delle mezze parti vibranti sono come nel primo caso, per quanto appare, in

queste diverse maniere di vibrare, 3, 5, 7, ecc., cioè non crescono successivamente che di due unità. Pare che non si possa spiegare questa circostanza, se non supponendo, che l'ultima porzione della verga, che vibra separatamente all' estremità libera, quantunque abbia una lunghezza a un dipresso uguale alla metà di ciascuna delle altre parti vibranti, non equivale però, per la natura particolare delle sue vibrazioni, che alla quarta parte di ciascuna delle altre, cosicchè nella maniera di vibrare n. 1 si possono considerare cinque di queste parti, in quella n. 2, 9 di queste parti, e così successivamente.

Quanto al paragone tra i suoni resi dalla verga in questo secondo caso e quelli del primo caso, Chladni ha osservato, che il primo de'suoni del secondo caso sta al più grave del primo caso, ossia al *suono fondamentale* della verga, come 625 a 144, ossia come il quadrato di 25 al quadrato di 12, rapporto alquanto diverso da quello del quadrato di 2 al quadrato di 1, cioè di 4 a 1.

3.° Caso. Le due estremità libere. Qui la maniera la più semplice di vibrare è quella che offre due nodi, situati a un dipresso alla distanza d'un quarto della lunghezza totale da ciascuna estremità libera, come nella fig. 22 n. 1. La seconda maniera è quella che dà tre nodi come nella stessa fig. n. 2, e così successivamente. Il primo suono sta al suono fondamentale della verga, secondo le sperienze di Chladni, come 25 a 4, ossia come il quadrato di 5 al quadrato di 2, e così nello stesso rapporto in cui il secondo suono nel primo caso sta al primo suono, cioè allo stesso suono fondamentale; e la serie de'suoni è anche rappresentata come per quelli del primo caso contati dal secondo suono, dai quadrati dei numeri impari 3, 5, 7, 9, ecc. Questo risultato è singolare, poichè i numeri delle mezze parti vibranti sono qui espressi dai numeri pari 4, 6, 8, ecc., epperò quelli delle parti intiere da 2, 3, 4, ecc.; ma esso si concilierà colle idee teoriche, supponendo che le parti estreme per la natura particolare delle loro vibrazioni non equivalgono qui che alle quarte parti delle porzioni comprese tra due nodi; allora le parti estreme non formando insieme che una sola metà di ciascuna di queste por-

zioni, i numeri delle metà potranno considerarsi come equivalenti a 3, 5, 7, ecc.

Risulta anche da ciò che si è detto, che i suoni ottenuti in questo caso sono i medesimi che nel primo caso, cominciando quanto al primo caso dal secondo suono, quantunque i numeri delle parti vibranti apparentemente siano affatto diversi; ma la diversità delle curvature o natura delle vibrazioni può servire a spiegare anche questa singolarità (1). Per fare le sperienze relative a questo terzo caso bisogna posare due punti della verga, in cui debbono formarsi de' nodi sopra ponticelli fatti di qualche materia un po' molle, come di sovero, e comprimervela leggiermente col dito.

4.° Caso. I due capi appoggiati. In questo caso le curvature della verga tra i suoi punti d'appoggio sono analoghe a quelle d'una corda vibrante, e la formazione delle parti vibranti, e dei nodi nelle diverse maniere di vibrare è la stessa, cosic-

---

(1) Si dee osservare che nel secondo modo di vibrazione di questo terzo caso la verga si può considerare come composta di due metà divise dal punto *N*, appoggiate a questo punto, come le verghe del secondo caso, e vibranti come nella prima maniera di questo secondo caso; il suono di questo secondo modo di vibrazione del terzo caso, dee dunque stare al suono del primo modo di vibrazione del secondo caso, secondo la regola generale sovra annunziata per le vibrazioni di parti simili, come $(2)^2 : 1$. Ora abbiamo veduto che il suono del primo modo di vibrazione del secondo caso sta al suono fondamentale della stessa verga come $(25)^2 : (12)^2$, cioè è espresso, quanto al numero delle vibrazioni in un dato tempo, da $\frac{(25)^2}{(12)^2}$, chiamando 1 il suono fondamentale; quello del secondo modo di vibrazione del terzo caso sarà dunque $\frac{(25)^2(2)^2}{(12)^2}$ ossia $\frac{(25)^2}{(6)^2}$ nella stessa unità. E questo appunto s'accorda con quello che qui abbiamo detto della serie de' suoni del terzo caso; infatti secondo questa serie il primo suono del terzo caso è espresso, prendendo sempre per unità il suono fondamentale, da $\frac{(5)^2}{(2)^2}$ come il secondo suono del primo caso; e il secondo suono del terzo caso da $\frac{(5)^2}{(3)^2}\frac{(5)^2}{(2)^2}$ ossia da $\frac{(25)^2}{(6)^2}$ come sopra.

chè i numeri delle parti vibranti in queste diverse maniere sono espressi, come per le corde, dalla serie de' numeri naturali 1, 2, 3, ecc.; ma i suoni seguono rapporti diversi relativamente a questi numeri, cioè sono come i quadrati dei medesimi, ossia in ragion inversa de' quadrati delle lunghezze di queste parti, conformemente alla regola che ha luogo a questo riguardo, come già abbiamo detto, per le verghe e lamine di sostanza rigida. Nel modo di vibrazione il più semplice, in cui non vi è nodo, il suono sta al suono fondamentale della verga come 25 a 9, ossia come il quadrato di 5 al quadrato di 3. Tutto questo risulta dalle speriente di Chladni. Per fare vibrar così la lamina bisogna premerla tra due piani perpendicolari alla sua direzione, posare il dito sopra il nodo di vibrazione il più vicino all'estremità, e mettere in moto con un archetto il mezzo di una delle parti che debbono esser vibranti.

5.° Caso. I due capi fissi. Qui ancora la verga potrà vibrar tutta intiera, o per parti, secondo la serie dei numeri 1, 2, 3, ecc. come nel caso precedente; ma i suoni sono diversi, e sono secondo le sperienze di Chladni gli stessi, tanto pel valore assoluto, quanto pel relativo, che pel terzo caso in cui le estremità sono libere. Per rendersene ragione si può supporre, che nel nostro caso presente le due parti estreme che sono fisse, e che sono separate dal resto della parte vibrante attigua da un punto d'inflessione, come si vede nella fig. 23, equivalgono, prese insieme, alla metà di una delle parti vibranti; allora la prima maniera n. 1 presenterà una parte e mezza, ossia tre metà in vece d'una parte sola, la seconda maniera n. 2 due parti e mezza ossia cinque metà, e così successivamente; quindi la serie delle parti vibranti sarà ridotta a quella dei numeri 3, 5, ecc., a cui già abbiamo ridotta quella del terzo caso per una analoga modificazione al modo apparente di vibrare, e l'esperienza dimostra che i valori assoluti de'suoni prodotti dai modi corrispondenti sono gli stessi nei due casi.

6.° Caso. Un capo fisso, e l'altro appoggiato. Anche in questo caso la verga può vibrare intiera o per parti, ma le curvature e i suoni differiscono da quelli de'due casi precedenti.

Pel suono il più grave la curvatura è quale la rappresenta la fig. 24, e si vede che essa non è simmetrica alle sue due estremità, il che viene da ciò che all'estremità fissa, come ne'casi precedenti ove questa circostanza ha luogo, non solamente la posizione di questa estremità è data, ma anche la direzione della tangente in questo punto alla curva, in vece che all'altro capo, che è semplicemente appoggiato, la direzione di questa tangente non è determinata. Tuttavia secondo le sperienze di Chladni i suoni si trovano esattamente gli stessi sia pei valori assoluti, sia pei loro rapporti, che nel secondo caso, in cui un capo è appoggiato e l'altro libero, il primo modo di vibrazione, in cui non v'è nodo nel nostro caso presente, corrispondendo al primo modo di vibrazione del caso citato in cui ve n'ha uno, e così successivamente.

Per ispiegare questo risultato pare che debba supporsi che la parte fissata dalla tangente avanti al punto d'inflessione fa qui la stessa funzione che la parte libera nel caso citato, e che vibra separatamente all'estremità della lamina; allora si potrà applicare al caso presente tutto ciò che abbiamo detto per ispiegare il caso suddetto.

109. La teoria compiuta delle lamine vibranti, cioè delle vibrazioni trasversali delle verghe, e lamine, di cui abbiamo nel numero precedente esaminate, dietro alle sperienze di Chladni, le diverse circostanze, e che presa in tutta la sua generalità dee anche estendersi alle verghe e lamine in cui alla rigidità naturale si aggiunge la tensione come nelle corde, è stata data per la prima volta, dopo altre ricerche imperfette; da L. Euler negli Atti dell'Accademia di Pietroborgo per l'anno 1779; ma essa è ancora stata perfezionata, e comprovata con esperienze da Giordano Riccati nel tomo 1 delle *Memorie della Società Italiana.*

Tuttavia l'integrale *generale* dell'equazione differenziale di questo moto stabilita da Euler non era ancora stata data, e la teoria non si era fondata che sopra un'integrale *particolare* della medesima. Il signor Plana cercò il primo d'esprimerne l'integrale generale per mezzo di *integrali definiti*, per una via indiretta che lo condusse ad un risultato troppo complicato, perchè se ne potesse far uso a determinare le proprietà del

moto di cui si tratta (*Journal de l'École Polytechnique* 17 cahier)· Il signor Fourier in una Memoria presentata all' Accademia di Parigi in giugno 1818 giunse, per mezzo di altre considerazioni, a rappresentare cógli integrali definiti non solamente l' integrale di quest'equazione differenziale delle lamine vibranti in una sola dimensione, ma anche quella delle *superficie* o lastre vibranti in amendue le dimensioni di cui si parlerà in appresso, e che facendo astrazione di una delle dimensioni si riduce a quella delle *lamine vibranti*, e ciò in una maniera abbastanza semplice e applicabile alla determinazione delle leggi fisiche di questo moto, e di cui si trova un' indicazione nel *Bulletin de la Société Philomathique* 1818. Il signor Poisson giunse in una nota inserita nel medesimo giornale, pur in quell'anno, alla stessa integrale generale dell' equazione delle *superficie vibranti*, epperciò anche delle *lamine vibranti* in un' altra maniera, e in altro modo ancora in una Memoria letta all' Accademia di Parigi in luglio 1819, cosicchè ora le basi di questa teoria non soffrono più alcuna difficoltà analitica; e quanto alla sua connessione più rigorosa colla natura fisica dei corpi elastici, essa risultò pure dall' applicazione che il signor Poisson fece de' suoi principii generali a questo riguardo alle vibrazioni di cui si tratta, nella sua Memoria sull' equilibrio, e sul moto dei corpi elastici. Noi però non faremo che riferir qui, come abbiamo annunziato, la formola che rappresenta le rapidità delle vibrazioni, e quindi la natura del suono reso da una verga o lamina vibrante in qualunque maniera e di qualunque natura, lunghezza e grossezza, formola già stabilita dalle considerazioni di Euler, e di Riccati; la dimostrazione di questa formola stessa non appartiene al nostro oggetto.

Sia l la lunghezza della verga o lamina, q la forza necessaria per produrre in questa verga per la natura della sua materia un allungamento uguale alla sua lunghezza primitiva, ossia per raddoppiare la sua lunghezza per trazione, p il peso della medesima, g la solita espressione della gravità, che vale in merri 9^{m}, 8088, finalmente n un numero intiero costante per ciascun modo di vibrazione, ma di cui il valore assoluto varierà da un modo all' altro secondo il numero dei nodi, e la natura delle circostanze espresse dai sei casi di cui abbiamo

parlato qui sopra; allora il numero N delle vibrazioni semplici fatte in un secondo di tempo sarà espresso dalla formola

$$N = \frac{n^2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{gq}{pl^3}} \cdot h,$$

h essendo una quantità dipendente dalla grandezza, e figura della sezione della verga o lamina, e che nel caso d'una verga parallelepipeda di cui sia e lo spessore della dimensione secondo la quale si fanno le vibrazioni, ha per valore $\frac{e}{2\sqrt{3}}$, e nel caso in cui la verga è cilindrica a sezione circolare, di cui sia pure e il diametro, è uguale a $\frac{e}{4}$.

Limitandoci a considerare particolarmente le vibrazioni di queste due figure della verga, osserveremo che nella prima di esse, chiamando δ la densità della materia della verga, e supponendo espressa da E la dimensione della lamina, perpendicolare al piano delle sue vibrazioni, ossia la larghezza della lamina di cui e è lo spessore, si avrà $p = eEl\delta$; per altra parte se si chiama ρ ciò che diviene q per la sezione di cui la superficie sia l'unità, il che formerà la misura della rigidità della materia di cui è composta, si avrà $q = eE\rho$, e quindi $\frac{q}{p} = \frac{\rho}{l\delta}$. Sostituendo questo valore di $\frac{q}{p}$, e quello sovra indicato di h per questo caso nella formola generale, essa diviene, per la verga parallelepipeda,

$$N = \frac{n^2 e}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{g\rho}{3\delta}}.$$

Per la verga a sezione circolare, ritenendo per δ e ρ la stessa significazione, si ha $p = \frac{\pi e^2 l\delta}{4}$, $q = \frac{\pi e^2}{4}\rho$; dunque anche qui $\frac{q}{p} = \frac{\rho}{l\delta}$; sostituendo questo valore e quello $h = \frac{e}{4}$ nella formola generale, si ha per questa figura della verga,

$$N = \frac{n^2 e}{4\pi l^2} \sqrt{\frac{g\rho}{\delta}}.$$

Paragonando queste formole per le verghe parallelepipede e cilindriche fra loro, si vede che il numero delle vibrazioni d' una verga cilindrica, sta a quello d'una verga parallelepipeda di uno spessore uguale al diametro della prima, tutte le altre circostanze supposte pari, come $\sqrt{3}$ a 2. Se poi si paragonano tra loro verghe o lamine della stessa materia, e figura di sezione, e di cui lo spessore, o diametro, e la lunghezza soltanto siano differenti, le quantità contenute sotto il radicale restano le stesse; il numero delle vibrazioni per modi simili, e per conseguenza per uno stesso valore di n, è allora proporzionale direttamente agli spessori o ai diametri della sezione delle lamine, e inversamente ai quadrati delle loro lunghezze, rapporti intieramente diversi da quelli che hanno luogo nelle corde tese, ove i numeri delle vibrazioni sono in ragion inversa tanto dei diametri delle corde quanto delle semplici lunghezze. Se le lunghezze sono uguali, la proporzione dello spessore o diametro rimane sola, e ne risulta che le lamine più spesse o le verghe più grosse rendono i suoni più acuti; è questa una conseguenza naturale di ciò che a misura che esse hanno maggiore spessore o grossezza, la loro forza elastica agisce con maggior energia per raddrizzarle, a cagion dello scostamento più grande dalla natural posizione che dee allora esser prodotto dallo stesso grado di curvatura, il che tende ad accelerare le loro vibrazioni. La larghezza delle lamine, quando esse sono parallelepipede, non entra nella formola, e non influisce realmente sul numero delle vibrazioni lineari che qui consideriamo, e sul tuono che ne risulta, poichè se vi è per esempio doppia larghezza, epperciò doppia forza elastica, vi è anche doppio numero di parti da muoversi, e l' effetto si riduce a quello di due lamine vibranti insieme.

Se si suppongono e ed l, e nel caso della verga parallelepipeda anche la larghezza E, proporzionali tra loro, le verghe essendo altronde supposte di simil forma, cosicchè esse divengano in tutto corpi simili, e sempre della stessa natura, i tuoni o rapidità delle vibrazioni saranno in ragion inversa delle dimensioni omologhe, poichè la quantità $\frac{e}{l^2}$ a cui sono in ge-

nerale proporzionali diverrà allora proporzionale ad $\frac{e}{e^2}$ ossia $\frac{1}{e}$, oppure ad $\frac{l}{l^2}$, ossia $\frac{1}{l}$; per conseguenza essi saranno in ragion inversa delle radici cubiche dei pesi delle verghe, poichè pe' corpi simili i pesi sono come i cubi delle dimensioni omologhe.

110. Si osserverà inoltre che secondo questa formola i suoni che una verga data quanto alla natura della sostanza, alla lunghezza e allo spessore, può produrre, nelle sue diverse maniere di vibrare, sono proporzionali ad n^2 cioè ai quadrati dei numeri sovr' accennati, diversi secondo le circostanze o casi diversi che abbiamo di sopra esaminati, e che giusta le sperienze indicate formano progressioni aritmetiche 3, 5, 7 ecc., oppure 5, 9, 13 ecc. ecc. come abbiamo veduto.

Secondo la teoria i diversi valori di n dipendenti dal numero di parti in cui la verga si divide nel vibrare, e che danno luogo a suoni di ordine diverso, pel caso in cui la verga è intieramente libera alle due estremità, sono dati dall' equazione

$$(e^n + e^{-n}) \cos n - 2 = 0,$$

e pel caso in cui la verga è incastrata ad una delle estremità e libera dall'altra, essi sono dati dall' equazione

$$(e^n + e^{-n}) \cos n + 2 = 0,$$

che non differisce da quella che pel segno del termine 2 nel primo membro. Ma si trova per approssimazione che questi valori possono rappresentarsi, per la verga libera da ambe le parti, da

$$n = \frac{1}{2}(2i + 1)\pi \mp \alpha$$

e per la verga incastrata ad una delle estremità, da

$$n = \frac{1}{2}(2i + 1)\pi \pm \alpha',$$

α e α' essendo quantità positive, e che non possono essere superiori ad $\frac{1}{2}\pi$, e prendendo i segni superiori o inferiori

avanti queste quantità α ed α', secondo che i è pari od impari. I valori di queste quantità α ed α' variano secondo i diversi valori di i; ma nel caso della verga libera si trova prossimamente, per $i=1$, che corrisponde al primo modo di vibrazione, ossia al suono più grave che la verga possa rendere, $\alpha=0{,}01792$, cosicchè per questo primo suono si ha

$$n = \frac{3\pi}{2} + 0{,}01792 = 4{,}74503 ;$$

i valori di α relativi ad $i=2$, $i=3$ ecc., cioè agli ordini successivi di vibrazione, dopo il primo, si trovano ancora più piccoli di quello indicato per $i=1$; i numeri delle vibrazioni che corrispondono a questi ordini successivi, contando anche il primo, e trascurando in esso pure il valore di α, saranno dunque, giusta il valore di N, proporzionali prossimamente ai quadrati delle quantità $2+1$, $4+1$, $6+1$, ecc., ossia dei numeri 3, 5, 7, ecc. come abbiamo veduto risultare prossimamente dalle sperienze in questo caso della verga libera alle due estremità, che forma il 3.° di quelli che sopra abbiamo esaminati.

Nel caso della verga incastrata ad una delle estremità si trova pel suono più grave, per cui $i=0$, prossimamente $\alpha'=0{,}30431$; il più piccolo valore di n sarà dunque $\frac{1}{2}\pi+0{,}30431 = 1{,}87011$. Paragonando il quadrato di questo numero con quello del valore precedente di n, pel primo suono della verga libera, si trova $\left(\frac{1{,}87011}{4{,}74503}\right)^2 = 0{,}15715$; questo sarà dunque il rapporto del tuono più grave della verga incastrata ad una delle due estremità a quello più grave della verga libera; abbiamo veduto che la sperienza ha dato a Chladni per questo rapporto $\frac{4}{25}$ ossia 0,16 che poco ne differisce.

Gli altri valori di α' per la verga incastrata sono molto piccoli; i valori corrispondenti di n sono adunque prossimamente i moltipli 3, 5, 7, ecc. di $\frac{1}{2}\pi$, e i tuoni di questa verga, eccettuato il primo suono, formeranno una serie crescente secondo i quadrati di questi numeri impari, come si è trovato infatti

coll' esperienza in questo caso, che è il primo di quelli sopra esaminati.

Si troverebbero simili conformità delle leggi date dalla teoria con quelle delle esperienze, per gli altri casi di cui abbiamo parlato, applicando loro convenientemente i principii della medesima.

Aggiungerò qui che la teoria determina pure la posizione dei nodi o punti immobili delle verghe che hanno luogo nei diversi ordini di vibrazione, cioè le loro distanze da una delle due estremità, le porzioni in cui si dividono le verghe nei diversi ordini di vibrazione non essendo uguali come nelle corde. Così nel caso della verga libera da ambe le estremità, chiamando x la distanza di uno qualunque di questi punti ad una delle estremità, i valori di x, pei diversi ordini di vibrazioni corrispondenti a quelli della quantità n che entra nelle formole precedenti, saranno dati dall'equazione

$$(e^n + e^{-n} - 2\cos n)\left(\operatorname{sen}\frac{nx}{l} + \frac{1}{2}e^{\frac{nx}{l}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{nx}{l}}\right)$$

$$+ (2\operatorname{sen} n - e^n + e^{-n})\left(\cos\frac{nx}{l} + \frac{1}{2}e^{\frac{nx}{l}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{nx}{l}}\right) = 0;$$

e nel caso della verga incastrata ad una delle estremità le distanze x da questa estremità, pei nodi corrispondenti ai diversi ordini di vibrazione, saranno date dall'equazione

$$(e^n + e^{-n} + 2\cos n)\left(\operatorname{sen}\frac{nx}{l} - \frac{1}{2}e^{\frac{nx}{l}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{nx}{l}}\right)$$

$$+ (2\operatorname{sen} n + e^n - e^{-n})\left(\cos\frac{nx}{l} - \frac{1}{2}e^{\frac{nx}{l}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{nx}{l}}\right) = 0,$$

che non differisce dalla precedente se non pei segni de' suoi diversi termini.

Per mezzo di queste formole od altre equivalenti, Riccati nella sovra citata Memoria avea già calcolate numericamente le posizioni dei nodi nei sette primi ordini di vibrazioni; e recentemente Strehlke, di Berlino, in una Memoria pubblicata negli *Annali* Tedeschi *di Fisica e Chimica* di Poggendorff, avendo pure determinate, per mezzo di formole analoghe da esso stabilite, le distanze di questi nodi ad una estremità per una verga intieramente libera, ne confrontò quelle relative ai sette

primi ordini colle sperienze, e vi trovò quella conformità che si poteva aspettare, avuto riguardo alle irregolarità accidentali che si possono presentare nell' elasticità delle verghe, nel loro spessore ecc. La posizione dei nodi fu determinata in queste sperienze sopra verghe parallelepipede, pel solito mezzo della fina sabbia sparsa sopra la faccia superiore delle verghe collocate orizzontalmente, e in alcuni casi in cui la linea trasversale formata dalle particelle di sabbia in riposo tagliava alquanto obliquamente l' asse della verga, come pure pei nodi estremi, ove questa linea si presentava alquanto concava verso le estremità, si è presa per punto del nodo la sua intersezione con quest' asse. Riferirò qui le distanze di questi nodi da una delle estremità, cioè dalla più vicina a ciascuno di essi, quali il calcolo le presenta, secondo il signor Strehlke, per le dodici prime maniere di vibrare, con 4 decimali, prendendo per unità la lunghezza totale.

1.ª maniera con 2 nodi.	2.ª maniera con 3 nodi.	3.ª maniera con 4 nodi.	4.ª maniera con 5 nodi.
0,2242	0,1321	0,0944	0,0735
	0,5	0,3584	0,2787
			0,5

5.ª maniera con 6 nodi.	6.ª maniera con 7 nodi.	7.ª maniera con 8 nodi.	8.ª maniera con 9 nodi.
0,0601	0,0509	0,0441	0,0389
0,2281	0,1930	0,1672	0,1476
0,4091	0,3462	0,3006	0,2647
	0,5	0,4333	0,3823
			0,5

9.ª maniera con 10 nodi.	10.ª maniera con 11 nodi.	11.ª maniera con 12 nodi.	12.ª maniera con 13 nodi.
0,0348	0,0315	0,0287	0,0264
0,1320	0,1195	0,1091	0,1003
0,2369	0,2143	0,1957	0,1800
0,3421	0,3095	0,2826	0,2600
0,4474	0,4048	0,3696	0,3400
	0,5	0,4545	0,4200
			0,5

111. Secondo le formole del n. 109 si noterà che la rigidità ρ della materia si trova rappresentata, nel caso delle verghe parallelepipede, da

$$\rho = \frac{12 . \pi^2 l^4 \delta N^2}{n^4 e^2 g},$$

e nel caso delle verghe cilindriche, da

$$\rho = \frac{16 . \pi^2 l^4 \delta N^2}{n^4 e^2 g};$$

essa sarà così per verghe vibranti nella stessa maniera, di materia diversa, e di ciascuna di queste due specie, proporzionale a $\frac{l^4 \delta N^2}{e^2}$, e se le dimensioni delle verghe saranno le stesse, essa sarà proporzionale a δN^2, cioè in ragione del quadrato del numero delle vibrazioni in un dato tempo, moltiplicato per la densità della materia. Si potrà dunque anche con questo mezzo determinare la rigidità delle diverse materie (n. 46).

Aggiungerò qui che l'integrale trovata dai signori Fourier e Poisson dell'equazione delle vibrazioni delle superficie, ristretta ad una sola dimensione, e supponendo la superficie o la lamina di dimensioni infinite, esprime le circostanze della propagazione delle vibrazioni di cui si tratta sotto forma di piegature o solchi alternativamente elevati, e abbassati relativamente al piano della lamina, partendo da un punto, o centro

he si sia messo in moto, e il sig. Fourier ha indicate queste ircostanze nella suddetta Memoria. Il sig. Poisson ha fatto sservare che l'equazione, e le circostanze di questa propagazione hanno molta analogia col moto e propagazione delle onde prodotte in una superficie di liquido indefinita da un moto eccitato in un punto qualunque della medesima, e di cui egli si era occupato anteriormente in una Memoria su questo oggetto. Del resto questa propagazione de' solchi nelle lamine elastiche indefinite, come nota lo stesso sig. Poisson, non ha che fare colla propagazione del suono nelle stesse lamine, che dipende, come vedremo a suo luogo, dalla teoria delle vibrazioni longitudinali di cui passiamo qui ad occuparci.

B. *Vibrazioni longitudinali.*

112. Queste vibrazioni consistono in una estensione, e contrazione alternativa nella direzione della lunghezza, e si possono eccitare fregando le verghe o lamine elastiche longitudinalmente con un archetto da violino molto inclinato sulla direzione della loro lunghezza, od anche col dito, o con qualche altro corpo flessibile, sparso di polvere di colofonio. Esse possono così o prendere un moto generale di vibrazione diretto alternativamente verso le due estremità, o dividersi in molte parti animate da moti contrarii e separate le une dalle altre da nodi di vibrazione immobili.

La grossezza assoluta della verga non ha alcuna influenza su questo genere di vibrazioni, poichè si possono considerare le verghe più grosse, come riunioni di cilindri della stessa natura, e della stessa lunghezza disposti gli uni accanto agli altri, e di cui gli strati trasversali vibrano d'un moto simultaneo. I valori de' suoni, per ciascun modo di vibrazione sono, come per le corde tese, proporzionali reciprocamente alle lunghezze, ma eccessivamente acuti quando si paragonano a quelli che producono le vibrazioni trasversali sia delle corde, che delle verghe, onde bisogna impiegare verghe molto lunghe per poterli apprezzare. Si possono poi variare le circostanze del moto iniziale come nelle vibrazioni trasversali. Il suono fondamentale il più grave, che il fregamento possa trarre dalla

verga vibrante longitudinalmente s'ottiene fissandola in una morsa per una delle sue estremità, e fregandola in tutta la sua lunghezza; in questo caso le particelle si allontanano, e si approssimano alternativamente all' estremità fissa, come ciò è rappresentato dalla direzione delle freccie nella fig. 25 n. 1. La traslazione di queste particelle è nulla a questa estremità, ma le espansioni, e contrazioni vi sono massime; di là esse vanno successivamente decrescendo sino all' estremità libera, in cui non v' ha nè dilatazione, nè condensazione, ma il moto di traslazione delle particelle è al suo massimo.

Se poi si suppone la verga libera alle sue due estremità, allora nel modo di vibrazione che dà il suono il più grave, il punto di mezzo della verga resta immobile, e le due metà vibrano isolatamente avvicinandosi, e allontanandosi alternativamente da questo punto, che diviene un nodo di vibrazione (fig. 25 n. 2). Ciascuna delle due metà è dunque nello stesso caso che una verga di lunghezza uguale, e di cui una estremità fosse fissa, l'altra restando libera; infatti i suoni in questo caso sono all'ottava acuta del suono fondamentale dato nel caso precedente dalla verga intiera.

Supponiamo finalmente le due estremità fisse; allora nel modo di vibrazione che dà il suono il più grave, la verga ha un moto di dilatazione, e di contrazione alternativo verso l'una e verso l'altra estremità; in questo caso le dilatazioni, e le contrazioni sono massime alle due estremità, ove la traslocazione delle particelle è nulla, e di là esse vanno continuamente decrescendo sino al mezzo della verga, ove esse sono nulle, mentre il moto di traslazione delle particelle vi è al suo massimo. Ciascuna delle due metà vibra dunque come farebbe una verga di lunghezza uguale di cui l'estremità fosse fissa, l' altra, che corrisponde al punto di mezzo della verga intiera, restando libera, ma in maniera che le traslazioni delle particelle si facciano contemporaneamente nella medesima direzione per le due metà (fig. 25 n. 3). Da questo si vede, che i suoni debbono esser simili a quelli del caso precedente, ove i due capi della verga intiera erano liberi, e questo appunto ci conferma la sperienza.

In ciascuno de' tre casi che abbiamo considerati delle vibra-

zioni longitudinali delle verghe, oltre il suono più grave di cui abbiamo parlato, esse possono renderne altri più acuti, dividendosi in diverse parti vibranti separatamente; non entreremo qui in queste particolarità, come nè anche in alcune considerazioni importanti di teoria, a cui queste vibrazioni danno luogo, perchè avremo occasione di ritornarvi, trattando delle oscillazioni delle colonne d'aria in tubi o chiusi, o aperti, a cui esse sono affatto analoghe.

Aggiungerò soltanto, quanto alla connessione del tuono reso dalle vibrazioni longitudinali delle diverse verghe colla rigidità, e col peso specifico delle loro materie, e quindi della rapidità di queste vibrazioni coi medesimi elementi, (soggetto su cui Chladni ha fatte molte sperienze di cui parleremo all'occasione suddetta), che si può presumere per analogia colle vibrazioni trasversali, che chiamando n un numero dipendente dal modo di vibrazione, secondo il numero de'nodi, l la lunghezza della verga, ρ la sua rigidità, e δ il suo peso specifico, il suono di questa verga dee esser rappresentato da un'espressione della forma $\frac{n}{l}\sqrt{\frac{\rho}{\delta}}$, il che vedremo a suo luogo confermato dalla teoria di queste vibrazioni paragonate con quelle dell'aria, a cui sono analoghe.

Per quello poi che riguarda il rapporto delle rapidità delle vibrazioni longitudinali alle trasversali, riferirò qui i risultati stabiliti teoricamente da Poisson nella Memoria *sull' equilibrio e sul moto de'corpi elastici*, e confermati dalle sperienze del sig. Savart (*Note sur les vibrations des corps sonores par M. Poisson*, *Annales de Chim. et de Phys.*, *septembre* 1827) nel caso delle verghe cilindriche, e in quello delle verghe parallelepipede. Rappresentando con l la lunghezza d'una verga libera alle due estremità e che rende il suono il più grave di cui essa sia suscettibile, con n il numero delle sue vibrazioni longitudinali, con n' quello delle trasversali in uno stesso tempo, e con e la sua grossezza nel caso delle verghe parallelepipede, od il suo diametro nel caso delle verghe cilindriche, si avrà $n' = (2{,}05610)\,\frac{ne}{l}$ nel primo caso,

e $n' = (1{,}78063)\ \frac{ne}{l}$ nel secondo, il numero che serve d
efficiente in questo secondo caso deducendosi dal coeffic
relativo al primo caso colla moltiplicazione per $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Le
ghe sopra cui il sig. Savart a richiesta del sig. Poisson sperin
furono di diverse sostanze, cioè d'ottone, rame, ferro, e v
in tutte i risultati suddetti si trovarono prossimamente co
mati dalle sperienze. Il divario fu un po' più grande per
ghe di legno di faggio; ma ciò pare essere una conseg
di che la rigidità del legno non è uguale nelle due dire
parallela e trasversale alle fibre del medesimo, onde le fo
di Poisson non sono ad esse rigorosamente applicabili.

W. Weber ha pure confermato colla sperienza questo
porto indicato da Poisson, su verghe parallelepipede di
e d'ottone (Poggendorff *Annalen* 1828 n. 9).

C. *Vibrazioni circolari.*

113. Ci resta ancora a parlare delle vibrazioni circolari
verghe rettilinee. Quando abbiamo esposti gli effetti dell
sione sui fili elastici, abbiamo veduto, che se si torce d'un
numero di gradi un simil filo, a cui sia sospeso verticalment
corpo pesante, esso fa, per ritornare alla sua posizione prim
una serie d'oscillazioni di cui le rapidità per lunghezze u
crescono come i quadrati de'diametri de' fili. Se dunque in
d'un filo sottile, prendiamo una verga cilindrica abbastanza g
e abbastanza rigida per sostenersi da se stessa in qualunqu
sizione, quando essa sarà fissata in uno de' suoi punti le
lazioni risultanti dalla torsione potranno divenire abbas
rapide per produrre un suono. Così appunto si produco
vibrazioni circolari delle verghe. Il modo il più sempli
queste vibrazioni è quello in cui tutte le parti della
girano nella medesima direzione, sebbene con celerità dis
secondo la lor posizione; ma essa potrà anche vibrare in
altre maniere, separandosi nella sua lunghezza in part
quote, di cui le une gireranno in un verso, e le altr
verso opposto, i punti intermedii restando fissi, e form

veri nodi di vibrazione. Queste vibrazioni si producono fregando la verga con un archetto circolarmente, e toccandola nei punti in cui si vuole che si formino de' nodi. Chladni è il primo, che si sia occupato di questo genere di vibrazioni. Egli ha trovato che le divisioni operate in questa maniera in una verga o libera, o fissa per una delle sue estremità o per amendue, seguivano assolutamente le stesse leggi che nelle vibrazioni longitudinali, e che in conseguenza la serie de' suoni era la medesima. Ma il loro valore assoluto è differente, e Chladni vi ha trovato questo rapporto degno di osservazione, che il suono d' una verga cilindrica o prismatica che fa vibrazioni circolari è sempre la *quinta grave* circa di quello che essa renderebbe vibrando longitudinalmente nella stessa maniera. Quindi il sig. Biot congetturò che in questo genere di vibrazioni le escursioni delle particelle non si facciano circolarmente, ed in una direzione perpendicolare alla lunghezza della verga, ma secondo una direzione inclinata sopra questa lunghezza di 45°, in guisa che le linee vibranti girino attorno alla verga come in un' elice. In fatti in questa supposizione la lunghezza di queste linee sarebbe uguale alla lunghezza totale dell' elice; ma questa è uguale a $\sqrt{2}$ rappresentando coll' unità la lunghezza della verga, come è facile il vederlo sviluppando l' elice in un piano, ove essa formerà una linea retta inclinata di 45° sopra la base, poichè così l' elice diviene l' ipotenusa d' un triangolo rettangolo, di cui i due cateti sono 1. Allora questo modo di vibrazioni non differendo dalle vibrazioni longitudinali che per la lunghezza delle linee vibranti, i valori de' suoni che esso produrrà, saranno inversi di queste lunghezze, cosicchè se si prendono per unità quelli dati dalle vibrazioni circolari, quelli dati dalle vibrazioni longitudinali saranno rappresentati da $\sqrt{2}$. Ora $\sqrt{2}$ che vale 1,414 circa, è poco diverso da $\frac{3}{2}$ ossia 1,500, che rappresenta la quinta del primo suono, e corrisponde a un suono un po' meno acuto di questa; dunque il suono delle vibrazioni longitudinali sarà a un simile intervallo al dissopra di quello delle vibrazioni circolari, ossia questo sarà dello stesso intervallo al dissotto del primo, conformemente alle sperienze di Chladni.

Questa considerazione spiegherebbe dunque molto semplicemente la cagione del rapporto di cui si tratta.

Ma il sig. Poisson per mezzo della sua teoria, stabilita nella Memoria sopra l'equilibrio e il moto dei corpi elastici, e applicata a questa specie di oscillazioni circolari, o giratorie, ha fissato in una maniera più precisa la natura di queste vibrazioni, e il loro rapporto colle vibrazioni longitudinali. Secondo il suo risultato, se si ha una verga cilindrica incastrata ad un' estremità, e libera all' altra, e si faccia essa vibrare successivamente attorno al suo asse per torsione, e nella direzione della sua lunghezza, il rapporto dei due suoni, e per conseguenza della rapidità delle vibrazioni sarà indipendente dalla materia, e dalle dimensioni della verga. Indicando con n' il numero delle vibrazioni *giratorie* e con n quello delle longitudinali in uno stesso tempo, si avrà $\frac{n}{n'} = \frac{1}{2}\sqrt{10} = \frac{1}{2}.3,162$ $= 1,581$ circa. Il rapporto trovato da Chladni 1,5 sarebbe ancora alquanto inferiore a questo risultato teorico; sperienze più recenti del sig. Savart hanno dato al contrario un valore alquanto maggiore, cioè 1,6668; la media dei due risultati sperimentali che sarebbe 1,5834, differisce pochissimo dal risultato teorico di Poisson.

Per altra parte il sig. Cauchy per mezzo di altri ragionamenti troverebbe per valore teorico di questo rapporto $\frac{1}{2}\sqrt{15}$ in vece di $\frac{1}{2}\sqrt{10}$, il che dà 1,9364, numero ancor maggiore di quello trovato da Savart per esperienza (V. *Exercices* e *Bulletin* de Ferussac, juin 1829).

Secondo la teoria del sig. Cauchy questo rapporto si applica ugualmente alle verghe di sezione quadrata. Ma se si vogliono considerare verghe di cui la sezione sia un rettangolo più o meno allungato, ossia verghe rettangolari di spessore diverso dalla larghezza, questo rapporto costante non può più aver luogo, poichè le vibrazioni longitudinali sono indipendenti da queste dimensioni trasversali, e al contrario le oscillazioni per torsione in generale ne dipendono. Si avrà allora un rapporto diverso tra i suoni delle due specie di vibrazione secondo che

varierà il rapporto tra le due dimensioni della verga rettangolare, e solo ciascuno di questi rapporti resterà costante quando si faranno variare le due dimensioni, conservando lo stesso rapporto tra loro, cioè quando le sezioni resteranno simili. Quando una delle dimensioni, che si considererà come lo spessore, è molto piccola relativamente all' altra, ossia alla larghezza, cioè si tratterà delle vibrazioni per torsione di una lamina assai larga relativamente al suo spessore, Cauchy trova teoricamente nel citato luogo, che il tuono espresso dal numero delle vibrazioni in un dato tempo sarà in ragion diretta dello spessore di questa lamina, e inversa del prodotto delle altre due dimensioni, ossia della superficie della lamina, il che si trova conforme ai risultati di alcune sperienze di Savart (*Annales de Chimie et de Physique*, fevrier 1824).

ARTICOLO TERZO

Vibrazioni delle verghe curvilinee ed annelli.

114. Dopo aver esaminate tutte le circostanze delle vibrazioni delle verghe o lamine rettilinee dobbiamo passare a quelle delle verghe curve. Queste vibrazioni, e i suoni che ne risultano debbono variare all' infinito secondo la diversità delle curvature; ci limiteremo a due esempi suscettibili d'applicazioni, sui quali riferiremo i risultati delle sperienze di Chladni, che il primo si è occupato di questo genere di sperienze in un' opera pubblicata a Leipzig nel 1787, e quindi nella sua *Acustica*.

Il primo di questi esempi riguarda le vibrazioni delle doppie verghe, ossia d'una verga piegata a forma di forchetta. Sono note quelle forchette d' acciaio, che servono di *diapason* per regolare il tuono degli stromenti di musica, come già abbiamo avuto occasione di accennarlo (fig. 26). Si fanno vibrare battendo con una delle loro gambe sopra un corpo solido, oppure facendo uscire a forza dal mezzo delle stesse gambe o rami un cilindro che vi s' inserisce, cosicchè i rami si restringano tutto ad un tratto dopo essere stati allargati. Questi stromenti hanno alla lor base un prolungamento che forma una specie di piede, su cui si posano quando si sono messi

in vibrazione; quest' addizione utile per l' oggetto a cui s'impiegano, dà ai loro moti una complicazione che li rende meno proprii alle considerazioni geometriche. Ci converrà dunque considerar piuttosto le vibrazioni delle verghe cilindriche di uniforme spessore, e curvate nel mezzo della loro lunghezza (fig. 27). Il suono il più grave di tutti quelli che una simil forchetta può rendere, s'ottiene quando ciascun ramo vibra tutto intiero senza dividersi, astrazion fatta della parte compresa tra i due nodi n, n' molto vicini alla flessione di mezzo (fig. citata n. 1). Allora tutte le parti d' uno stesso ramo vanno insieme nella medesima direzione, sebbene con disuguali velocità. Questo genere di moto è analogo al più semplice dei moti di vibrazione trasversali delle verghe rettilinee libere alle due estremità; e che abbiamo rappresentato nella fig. 22 n. 1; ma il suono è più grave nel rapporto di 16 a 25, cioè del quadrato di 4 al quadrato di 5, il che dee dipendere dall' influenza che la curvatura primitiva esercita sulla natura delle vibrazioni. Nel secondo modo di vibrazione (fig. 27 n. 2), la forchetta forma cinque divisioni separate da quattro nodi, due molto prossimi nel mezzo n, n', ed uno a ciascun ramo, N, N'. Per produrre questo movimento bisogna tener la forchetta per uno de'suoi nodi, e far passare l'archetto sul mezzo di una delle parti che debbono entrare in vibrazione, per esempio verso le estremità. Tra questo modo, e il precedente non è possibile (eccetto che la curvatura della forchetta fosse molto piccola) di stabilirne uno, in cui la verga si divida in quattro parti separate da tre nodi, e che sarebbe l' analogo del secondo modo delle vibrazioni trasversali delle verghe rettilinee libere ai due capi. Negli altri modi di vibrazione di cui la forchetta è suscettibile, i nodi sono al numero di 5, 6, ecc. (un nodo formandosi nel mezzo della curvatura primitiva per que' numeri che sono impari), e la serie de' suoni che ne risultano, cominciando dal suddetto secondo caso possibile, è espressa dalla serie de' quadrati dei numeri 3, 4, 5, 6, ecc., sebbene il numero de' nodi essendo successivamente 4, 5, 6, 7, ecc., quello delle divisioni formi la serie 5, 6, 7, 8, ecc. Il suono il più grave, ossia il primo

sopra indicato non è compreso nella stessa legge; esso sta a quello del secondo caso come 4 a 25, ossia come il quadrato di 2 al quadrato di 5. Tutto questo risulta dalle sperienze di Chladni a tale riguardo. Ora paragonando questa serie di suoni con quella relativa ad una verga rettilinea appoggiata alle sue estremità si può osservare, che cominciando dal secondo modo possibile nel nostro caso presente, cioè da quello in cui vi sono quattro nodi, ossia dal terzo de' casi che si possono imaginare, la serie de' suoni è la stessa che ha luogo nel caso citato, cominciando dal modo di vibrazione in cui vi son due nodi, sia quanto al valor assoluto, sia quanto al valor relativo. Per rendersene ragione basta supporre, che i nodi che si stabiliscono ne' due rami della forchetta verso le due estremità producono lo stesso effetto che i punti d'appoggio nelle verghe che hanno due nodi di meno. Si può inoltre osservare, che nelle maniere di vibrare in cui vi sono due nodi molto vicini, cioè nella prima in cui vi sono due soli nodi, e in tutte quelle ove il numero de' nodi è pari, le vibrazioni de'diversi modi s' eseguiscono come in una verga di cui una estremità è fissa, e l'altra libera, ma d'una lunghezza uguale a quella di ciascun ramo, vale a dire della metà della lunghezza totale; infatti la progressione de' suoni è la stessa in questi modi, che nei modi successivi di questo caso per la verga rettilinea; ma i suoni sono più acuti di due ottave nel nostro caso presente, cioè sono come 4 ad 1, ossia come il quadrato di 2 a 1, epperciò nella ragione inversa de'quadrati delle lunghezze, secondo la regola generale delle vibrazioni trasversali delle verghe; così per esempio il primo suono del nostro caso è di due ottave più acuto che il suono fondamentale d' una verga della lunghezza di quella che piegata forma la forchetta, cioè del suono che questa verga renderebbe nel modo più semplice di vibrare essendo fissata ad una estremità.

Se si continua ad incurvare la verga ridotta a forchetta, sino a formarne un annello circolare, di cui si saldino insieme le due estremità, vi si potranno ancora produrre vibrazioni diverse, e trarne diversi suoni, e questo sarà il nostro secondo esempio di vibrazioni di verghe curve. Queste vibrazioni sono sempre tali, che l'annello si divide in 4, 6, 8, ecc.

od in generale in un numero pari di parti uguali che vibrano isolatamente in direzione contraria, e che sono separate le une dalle altre da nodi di vibrazione. La fig. 28 rappresenta la prima di queste maniere di vibrare, in cui l'annello prende la forma d'un' ellisse, alternativamente allungata e raccorciata in due direzioni rettangolari, e che taglia la forma circolare ne' quattro punti o nodi indicati colle lettere *N*. Le maniere di produrre queste vibrazioni sono simili a quelle che si adoperano pei casi analoghi delle vibrazioni delle verghe rettilinee. La divisione dell' annello in numero sempre pari di parti dipende da ciò, che, per la natura rientrante della curva, in un numero pari soltanto può aver luogo la contrarietà di vibrazioni nelle parti attigue, che si richiede perchè ciascun punto di nodo sia ugualmente tirato dai due lati opposti, e quindi rimanga in equilibrio. È poi cosa straordinaria, che secondo le sperienze di Chladni i suoni che corrispondono alle indicate maniere di vibrare, in cui il numero delle divisioni segue la serie dei numeri pari 4, 6, 8, ecc., epperciò le lunghezze delle parti sono in ragion inversa di questi numeri, siano tra loro come i quadrati de' numeri impari 3, 5, 7, ecc., come se per la natura particolare di queste vibrazioni, una delle divisioni dovesse sempre contarsi per niente nell' assegnare il rapporto delle loro lunghezze.

Quanto alla teoria delle vibrazioni delle lamine o verghe curve, Euler ha data nel Tomo 10 de' *Nuovi commentarii di Pietroburgo*, l' equazione differenziale di quelle degli annelli circolari, e ne ha dedotte le leggi delle medesime; Chladni non ha trovato i suoi risultati sperimentali affatto conformi a queste leggi. Tuttavia l' analisi di Euler è confermata dalle ricerche dell' Autor anonimo della Memoria che ha riportato il premio dell' Istituto di Francia *sulle vibrazioni delle superficie elastiche*, e da quelle del sig. Navier, in una Memoria *sulla flessione delle lamine elastiche* presentata all' Accademia di Parigi nel 1820, e l' Autor anonimo suddetto, dopo aver discusse le sperienze di Chladni, non crede che esse siano sufficienti a invalidare la teoria. Quanto all' equazione differenziale generale delle superficie elastiche, di cui parleremo fra breve, la quale facendo astrazione di una delle dimensioni

diviene quella delle lamine o verghe elastiche, e di cui i signori Fourier e Poisson hanno trovato l'integrale generale, essa non è applicabile immediatamente al caso delle verghe curve, e in particolare degli annelli, perchè essa non è stabilita che per le superficie primitivamente piane nel loro stato naturale, epperciò anche per le verghe rettilinee, e richiederebbe per essere estesa alle superficie, e linee curve una modificazione che non si è ancora esaminata; onde la teoria generale di queste vibrazioni delle verghe curve non è ancora nota.

Potrebbesi essa del resto derivare dalle formole generali del moto dei corpi elastici stabilite da Poisson nella sua Memoria più volte citata, nella quale però egli non si è occupato specialmente di questi corpi. Il sig. Cauchy soltanto ha fatto qualche applicazione di questa teoria in particolare alle lamine piegate in archi circolari, ed ha trovato alcuni risultati che furono confermati da sperienze eseguite da Savart a di lui richiesta. (V. *Exercices de Mathématique*, e *Bulletin de Ferussac*, *juin* 1829).

ARTICOLO QUARTO

Vibrazioni delle membrane tese, delle lastre, e de' corpi in cui debbono considerarsi le tre dimensioni.

115. Limitandoci primieramente alle vibrazioni che si fanno secondo due dimensioni osserveremo, che esse hanno luogo nelle superficie piane, come quelle delle membrane tese, e delle lastre piane di materia rigida. Generalmente quando uno di questi corpi vibra, esso si divide in un certo numero di parti che eseguiscono le lor vibrazioni separatamente, e che sono dotate a ciascun istante di moti alternativi, mentre i punti per cui queste parti sono unite restano immobili; il che può rendersi sensibile sopra le superficie orizzontali versandovi della sabbia molto fina e secca, che si accumula nelle linee formate da questi punti, e che si possono chiamare *linee nodali*.

Le vibrazioni delle membrane tese, come nei tamburri, sono analoghe, tra le vibrazioni delle superficie, a quelle delle

corde tese, e le vibrazioni delle lastre rigide a quelle delle verghe o lamine elastiche. Non abbiamo alcuna serie estesa di sperienze sulle vibrazioni delle membrane tese; ci contenteremo adunque di indicare le ricerche che si sono fatte sulla loro teoria. Euler ha pubblicato nel tomo 10 de' *Nov. Comm. Acad. Petrop.* alcune ricerche sulle vibrazioni d'una membrana rettangolare. Giordano Riccati ne' *Saggi scientifici e letterarii dell'Accademia di Padova* tom. 1. 1786, ne ha fatte altre sulle vibrazioni d'una membrana ugualmente tesa in tutte le direzioni. Ma queste ricerche erano troppo particolari, ed imperfette, per condurre ad una teoria generale. La-Grange nella seconda edizione della *Mécanique analytique* avea data l'equazione differenziale d'una superficie flessibile e non elastica per se stessa, sollecitata in tutti i punti da forze qualunque ed ugualmente tesa in ogni direzione, nello stato d'equilibrio, e il sig. Poisson nella sua Memoria *sulle superfioie elastiche* (*Mémoires de l'Institut* 1812), per mezzo di altre considerazioni ha trovata quella più generale che appartiene ad una simil superficie di cui ciascun elemento è inegualmente teso in due direzioni rettangolari. Ora quando si conoscono le equazioni di equilibrio di un sistema di punti materiali sollecitati da forze qualunque, se ne sanno dedurre, per mezzo dei principii generali della meccanica, le equazioni del moto dello stesso sistema. Applicando questi principii al caso di cui si tratta, supponendo nulle le forze variabili sopra ciascun punto, cosicchè non vi restino che le tensioni primitive, e inoltre che la superficie si scosti pochissimo dal piano primitivo, e finalmente che ciascun punto della superficie resti costantemente in una perpendicolare a questo piano, si avrà così l'equazione differenziale del moto delle membrane tese, ossia delle superficie tese non elastiche per loro stesse, con restrizioni simili a quelle che si ammettono nella teoria delle corde vibranti, e così appunto la stabilì il sig. Poisson. Quest'equazione diviene più semplice supponendo le due tensioni rettangolari uguali e costanti in tutti i punti, cioè la membrana ugualmente tesa in tutte le direzioni come ne' tamburi, e si riduce allora a quella che il signor Biot avea già trovata per questo caso nelle Memorie dell'Istituto di Francia, tom. 4. Se poi si sup-

pongono costanti bensì queste due tensioni da un punto all' altro, ma disuguali, si ottiene l' equazione che Euler avea data nella Memoria già citata per le vibrazioni d' una membrana rettangolare inegualmente tesa nelle direzioni della sua lunghezza, e della sua larghezza. Per poter applicare nella maniera più generale l' equazione del sig. Poisson alla determinazione del moto delle membrane tese, restava a trovare l'integrale generale di quest'equazione ; ora essendo Fourier e Poisson giunti ad integrare per mezzo degli integrali definiti l' equazione generale delle superficie vibranti elastiche di cui parleremo fra breve, e che si riduce a quella delle superficie vibranti non elastiche, ossia delle membrane tese, quando si sopprimono in essa le quantità che si riferiscono alla forza elastica propria della sostanza, quest' integrazione si dee riguardare come fatta, almeno pel caso della tensione uguale in tutte le direzioni a cui il sig. Poisson si limitò nello stabilimento dell' equazione generale della superficie elastica. Altronde il sig. Parseval avea già data l' integrazione dell' equazione differenziale relativa a questo caso, che è la stessa che quella di un fluido elastico vibrante in due dimensioni, di cui parleremo a suo luogo, e si può anche dedurre dall' integrale dell' equazione più generale delle vibrazioni d' un fluido elastico in tutte tre le dimensioni, integrale, che come vedremo è pure stata data dal sig. Poisson. Non vi resterebbe più che a far l' applicazione di questi risultati dell' analisi matematica ai diversi casi delle vibrazioni delle membrane, e fissarne così tutte le circostanze, del che niuno sinora si è occupato in tutta la sua generalità.

Il sig. Poisson però ha applicato ad alcuni casi delle membrane tese le sue formole generali del moto dei corpi elastici nella Memoria sull' equilibrio e sul moto di questi corpi. Egli ha determinato così teoricamente i diversi suoni d' una membrana tesa ugualmente per ogni verso, e che vibra trasversalmente nel caso in cui questa membrana è un rettangolo di cui i quattro lati si suppongono fissi ; egli ha anche determinato nello stesso caso i diversi sistemi di linee nodali, ed ha fatto vedere che essi possono essere in numero infinito quantunque il suono resti lo stesso, quando i lati della membrana

sono uguali, od hanno una misura comune. Quanto alle membrane circolari, ecco i risultati che egli ha ottenuto col calcolo. Sia p il peso d' una membrana circolare, P la forza applicata a tutti i punti del suo contorno, che produce la sua tensione uguale per ogni verso, g la misura della gravità, n il numero delle vibrazioni trasversali nell' unità di tempo relativamente al suono più grave che essa possa somministrare, e supponendo che i suoi punti ugualmente lontani dal centro hanno in ciascun istante lo stesso moto, si avrà $n=(0,6784)\sqrt{\frac{Pg}{p}}$. I pesi P, e p restando gli stessi, questo numero è, come si vede, indipendente dal raggio della membrana; esso cresce in una ragione alquanto minore di quella di 5 a 2, passando dal suono il più grave a quello che lo segue immediatamente. Questo suono immediatamente successivo al più grave è accompagnato da una linea nodale, di cui il raggio è 0,4347, prendendo il raggio della membrana per unità. Ma non si hanno ancora sperienze con cui si possano paragonare questi risultati della teoria.

116. Passiamo ora alle vibrazioni delle superficie elastiche ossia delle lastre di sostanza rigida. Le sperienze sulla maniera di vibrare di queste lastre, e sui suoni che loro corrispondono possono farsi col mezzo sovra indicato, cioè tenendole orizzontalmente, e ponendovi sopra della sabbia minuta che si accumula nelle linee nodali.

Quando si sono una volta riconosciute queste linee, si possono riprodurre gli stessi modi di vibrazione ponendo leggieri ostacoli sulle linee nodali, e facendo passare un archetto sopra una delle parti che debbono entrare in vibrazione. Chladni ha fatto un gran numero d' esperienze di questo genere sopra le vibrazioni delle lamine di vetro di forma diversa, di cui egli descrive minutamente i risultati nella sua *Acustica* publicata prima nel 1802 in Tedesco, poi nel 1809 in Francese, e in un'altra opera posteriore *Neue Beytrage für akustik*, Leipsig 1817. Ne daremo qui soltanto alcuni esempi per le lamine quadrate e per quelle circolari.

Nelle lamine quadrate le figure le più semplici delle linee nodali sono due linee, che si incrocicchiano nel mezzo, e che

vanno a terminare o nel mezzo dei lati, o agli angoli (fig 29 n. 1 e 2). Il suono ottenuto nel secondo caso è la quinta acuta di quello del primo.

Quanto alle lamine circolari, quando esse sono libere ne'loro orli, le forme possibili delle linee nodali possono riferirsi a linee diametrali, ed a circoli concentrici alla lamina; queste linee possono tuttavia difformarsi per diverse circostanze.

Quando tutte le linee nodali sono diametri, il loro complesso presenta la figura d'una stella di cui il numero de'raggi può essere 4, 6, 8, 10, ecc., sempre in numero pari, per una ragione analoga a quella che abbiamo veduto per la divisione degli anelli vibranti. La fig. 30 n. 1, 2, e 3 presenta le tre prime di queste divisioni. A misura che il numero delle parti s' accresce, il suono diviene più acuto, e il numero che lo esprime cresce come i quadrati dei numeri delle linee nodali, o dei settori che esse formano, il che è analogo alla regola relativa alle verghe a questo riguardo. Così in generale se il numero delle parti vibranti è n, e si prenda per unità il suono dato dal caso di quattro settori, cioè d' una semplice croce, il suono sarà espresso da $\left(\frac{n}{4}\right)^2$.

Quanto alle linee nodali circolari, il modo il più semplice, e che dà il suono più grave, è quello formato da una sola linea circolare (fig. 31 n. 1); il suono in questo caso è al più grave dato dalle linee diametrali in croce, come $(5)^2$ è a $(4)^2$, cosicchè esso è rappresentato da $\left(\frac{5}{4}\right)^2$ prendendo questo per unità. Possono anche ottenersi due linee circolari (fig. 31 n. 2), od anche un maggior numero. Il mezzo più atto ad ottenere questi modi di vibrazione composti di sole linee circolari è, come ha osservato il sig. Savart (*Ann. de Chim. et de Phys. octobre* 1827), di adoperare un disco traforato d'un piccol foro al centro, per cui si introduce un fascetto di crini che si fa strisciare sull' orlo del foro, tenendolo disteso tra le mani, mentre il disco è rattenuto in un punto di alcuna delle linee nodali che debbono formarsi. I numeri delle vibrazioni da cui dipende l' acutezza del suono, sono a un dipresso come i quadrati dei numeri delle linee nodali circolari.

Ma queste linee circolari possono anche combinarsi colle linee diametrali (fig. 32) : il caso il più semplice di questo genere è quello che presenta una linea circolare attraversata da un diametro (n. 1); il suono in questo caso sta a quello di una semplice linea circolare come $(3)^2$ a $(2)^2$ ossia come $\frac{9}{4}$ ad 1. Viene in seguito il caso d' una linea circolare e due diametri ad angolo retto (n. 2); se la linea nodale circolare restasse alla stessa distanza dall'orlo, che nel caso precedente, le parti vibranti sarebbero simili, e soltanto più piccole nel rapporto di 1 a 2; i suoni sarebbero adunque nel rapporto di 4 a 1, vale a dire il secondo sarebbe la doppia ottava del primo; ma questa similitudine non ha luogo perchè il raggio della linea circolare s' aggrandisce, ed il rapporto de'due suoni si trova essere soltanto $\left(\frac{4}{3}\right)^2$ ossia $\frac{16}{9}$, cioè il secondo suono non è nemmeno all'ottava semplice del primo. In generale a misura che le linee diametrali si moltiplicano, la linea circolare nodale si avvicina all'orlo, e questa circostanza influisce sulla progressione de'suoni. Possono anche combinarsi più linee nodali circolari colle linee diametrali, e generalmente se si rappresenta per D il numero delle linee nodali diametrali, per C il numero delle linee circolari, tutti i suoni resi dalla lamina per una combinazione qualunque di queste linee, saranno approssimativamente espressi da un numero proporzionale a $(D+2C)^2$; ma questa formola non si applica al caso in cui C è nullo, cioè non vi è alcuna linea circolare; questo caso dee esser considerato a parte. L'applicazione della formola comincia quando $D=0$, $C=1$, il che dà $(2)^2$ pel numero caratteristico di questo primo suono ; prendendolo per unità, tutti gli altri a cui la formola si applica, saranno rappresentati da $\left(\frac{D+2C}{2}\right)^2$. Così per esempio facendo $D=0$, $C=2$, si avrà pel suono corrispondente al caso di due linee nodali circolari senza linea diametrale, $(2)^2$ ossia 4, nella suddetta unità.

Ciascuno di questi diversi modi di vibrazione richiede per essere ottenuto che la lamina sia rattenuta in punti diversamente situati, e che l'archetto con cui si fa vibrare sia anche

applicato a punti diversi dell'orlo della lamina. Queste particolarità possono vedersi nella citata opera di Chladni. Dirò soltanto che per tener ferma la lamina comodamente in punti determinati, Chladni adoperava una specie di morsa della forma rappresentata nella fig. 33, di cui una delle viti serviva a stringer la lamina, e l'altra ad affiggere la morsa stessa ad una tavola.

Aggiungerò qui che il sig. Savart in una Nota pubblicata negli *Annales de chimie et de physique, novembre* 1827 ha osservato poter nelle lastre circolari accadere che il sistema delle linee nodali, e delle parti vibranti prenda esso medesimo un moto di oscillazione, ed anche di rotazione attorno al centro della lastra, nel qual caso il tuono prodotto dalla lastra diviene alquanto più acuto di quello che converrebbe allo stesso sistema in riposo.

Chladni ha anche esteso le sperienze di questo genere alle lamine rettangolari, ellitiche, e triangolari.

Sarebbe troppo lungo, e estraneo al nostro scopo, il seguirlo in queste particolarità. Non riferirò più che qualche osservazione generale sulle circostanze che queste sperienze presentano. In tutte le maniere possibili di vibrazioni d'una lastra le figure delle linee nodali possono ridursi ad un certo numero di linee, che o percorrono l'estensione della lastra terminandosi ai suoi orli, o sono parallele al suo contorno, o ad alcune parti del medesimo; per esempio sopra una lastra rettangolare esse si riducono a un certo numero di linee parallele all'una o all'altra dimensione, oppure diagonali, come abbiamo veduto nelle lastre quadrate; sopra una lastra rotonda a un certo numero di linee diametrali, o circolari come sopra si è detto; sopra una lastra ellitica queste linee si allungano ecc. Se alcune specie di vibrazioni non producono figure regolari, esse saranno tuttavia rappresentate da distorsioni delle linee nodali che si potranno riferire alla forma primitiva. Queste distorsioni secondo Chladni non cangiano il tuono, perchè ciascuna parte vibrante conserva la stessa grandezza relativa.

I suoni delle lastre, quando la forma, la materia e la maniera di vibrare restano le stesse, sono in ragione dello spessore, e in ragione inversa dei quadrati delle altre dimensioni. Se la materia è diversa i suoni sono pure, poste tutte le altre cose pari,

in ragion diretta delle radici quadrate della rigidità o forza elastica, e inversa delle radici quadrate del peso specifico; risultati analoghi a quelli delle vibrazioni delle verghe.

117. A quest' esposizione generale dei risultati delle sperienze di Chladni nella sua Acustica, aggiungerò l' indicazione di alcuni lavori posteriori di altri autori che tendono a modificare più o meno quei risultati.

Secondo le osservazioni del sig. Strehlke, consegnate in una Memoria pubblicata negli *Annali di fisica e chimica* di Poggendorff in Tedesco, n. 6 dell' anno 1825, le linee nodali rette che si tagliano tra loro apparentemente nelle diverse maniere di vibrazione delle lastre, non sarebbero realmente che linee curve, che si approssimano coi loro vertici, cosicchè l'intervallo tra loro rimanente permette alla sabbia di accumularvisi. Così per esempio la croce che si forma in una lastra quadrata, e di cui le braccia tagliano i lati, o vanno agli angoli della lastra, non è, secondo Strehlke, che il risultato di due linee nodali curve come nella fig. 34 n. 1 e 2, di cui i rami divengono sensibilmente rettilinei allontanandosi dal centro, e tra i vertici delle quali si accumula la sabbia come si vede in *a b*. Ma Chladni stesso non crede questa maniera di vedere fondata (stesso giornale n. 11 dell'anno 1825). Tuttavia Strehlke ha ancora sostenuto posteriormente le sue asserzioni, ed ha anche cercato di determinare le equazioni delle curve da esso osservate, le quali trova appartenere alle sezioni coniche (Poggendorff *Annal.* n. 2 del 1830).

118. Anche nelle vibrazioni delle lastre debbono aver luogo le combinazioni di più modi di vibrazione coesistenti, e di cui ciascuno produce suoni diversi, come si è detto dei suoni armonici prodotti contemporaneamente da una stessa corda vibrante. Il sig. Savart in una Memoria pubblicata negli *Annal. de chim. et de phys. octobre* 1827, ha fatto vedere in particolare sperimentalmente che ciascuno dei diversi modi di vibrazione di cui sono suscettibili le lastre circolari, e rettangolari, e da cui dipende il loro suono principale, è accompagnato da un altro modo di vibrazione in cui la lastra si divide in un più gran numero di parti vibranti, e di cui le linee nodali intermedie tra quelle della divisione principale,

si possono render manifeste per mezzo d' una sabbia più fina o d'una polvere, come quella di licopodio, sparsa sulla superficie della lastra, che si raccoglie sopra quelle linee, mentre la sabbia più grossolana va a riunirsi sulle linee nodali del modo principale, le quali del resto fanno anch' esse parte di questo modo di vibrazioni concomitanti, che Savart chiama *modo secondario*. Così per esempio quando il modo principale di vibrazione d' un disco presenta una o più linee nodali circolari, si osserva che i granelli di sabbia ordinaria si collocano sopra le linee circolari che abbiamo sopra indicate secondo le sperienze di Chladni, ma che la polvere o sabbia fina si riunisce per tracciare altre linee circolari da Chladni non osservate, le quali in generale sono situate tra le prime linee suddette, e che inoltre, qualunque sia il numero di queste linee, la polvere si riunisce anche in un punto corrispondente al centro del disco. Così in generale vi sono sempre tante linee secondarie quante sono le principali, e inoltre un punto secondario al centro. Ne segue che aggiungendo al numero delle linee secondarie quello delle linee principali, che fanno pur esse parte anche del sistema delle secondarie, se il numero delle linee principali è n, quello delle linee secondarie, compreso il punto al centro, è $2n+1$. Quelle tra queste linee che sono intermedie fra le linee nodali principali, non possono essere segnate come si è detto che da una polvere fina, la quale in virtù di una certa aderenza tra le sue proprie particelle, e colla superficie della lastra, può mantenersi nei ventri delle parti vibranti della divisione principale, delle quali esse formano la suddivisione. Così pure in una lastra quadrata, il modo principale di vibrazione, che è formato da sole linee rette parallele a uno dei lati, è accompagnato da un sistema di linee nodali secondarie, che comprese quelle del sistema principale sono al numero di $2n+1$ quando il numero delle principali è n. Il modo poi che presenta due linee nodali che si tagliano nel centro, e sono perpendicolari ai lati del quadrato (fig. 35), è accompagnato da un modo secondario che comprende oltre a queste due linee, segnate in pieno nella figura, quattro altre linee, segnate a punti nella medesima, parallele due a due alle prime, e che sono indicate dalla polvere più fina; cosicchè questo

sistema secondario di linee, comprese le prime, è formato da tre linee parallele tra loro che ne tagliano tre altre pur parallele fra loro. In generale il numero delle linee della figura principale in questo genere di vibrazioni delle lamine quadrate, ove le linee nodali si tagliano ad angolo retto, essendo espresso da $2n$, per conservare l'analogia coi casi precedenti in cui non vi erano linee nodali che in una sola direzione, quello della figura secondaria diviene $4n+2$. Quest'espressione si applica ugualmente ai casi in cui le linee nodali principali sono parallele alle diagonali del quadrato.

Anche le membrane tese presentano secondo le osservazioni del Savart sistemi analoghi secondarii di vibrazione. E le linee nodali elicoidali che lo stesso Savart ha fatto osservare, come vedremo in appresso, nelle verghe che vibrano longitudinalmente non sono probabilmente che indizii di modi secondarii di vibrazione che accompagnano i modi principali da cui è determinato il tuono di queste verghe secondo la teoria generale delle vibrazioni longitudinali. In generale è da presumersi, secondo Savart, che il suono che risulta dal moto secondario nelle vibrazioni dei corpi, riunendosi a quello del moto principale, è una delle cagioni che hanno maggior influenza sulla qualità del suono (*timbre*) dei diversi corpi sonori. Questo è confermato dall' osservare che ciascun modo di divisione di un corpo produce un suono che ha caratteri particolari distinti, il che dee provenire da che il rapporto dei numeri delle vibrazioni dei due suoni primario e secondario differisce da una divisione all' altra, e ciò può estendersi anche agli altri infiniti modi di vibrazione subordinati a ciascun modo di vibrazione principale, e che lo accompagnano.

Debbo però avvertire che il signor Faraday in una Memoria pubblicata nelle *Trans. Fil.* del 1831 part. 2, e che si trova pure tradotta in Francese negli *Annal. de chim. et de phys. janvier* 1832, sostiene che in generale queste linee tracciate dalle polveri più sottili, tra le linee nodali principali indicate dalla sabbia più grossolana nelle citate sperienze di Savart, non sono occasionate da linee nodali di un modo di vibrazione secondario, ma solo da correnti dell' aria sovrapposta alle lamine vibranti, eccitate alla loro superficie dal loro

moto stesso, e che tendono dalle linee nodali verso i ventri e vi accumulano quelle sottili polveri.

Nella stessa Memoria Faraday esamina pure certi mucchi *involgenti* (involving) come egli li chiama, che le polveri sottili formano inoltre su alcuni punti delle superficie vibranti, e che egli spiega per mezzo dell' aderenza che le particelle delle polveri hanno tra loro, e colla superficie delle lastre, combinata coll' azione dell' aria che le circonda, e ad essi son pure analoghe secondo lui certe crispazioni che si osservano in uno strato d' acqua sovrapposto ad una lastra vibrante, od anche nella superficie dell' acqua contenuta in un vaso nelle pareti del quale si eccitino vibrazioni sonore, le quali crispazioni egli non crede dipendere dalla comunicazione di queste vibrazioni sonore al liquido medesimo.

Per altra parte il sig. Wheatstone ha presentato più recentemente alla Società R. di Londra una Memoria, in cui cerca di render ragione delle diverse figure delle linee nodali osservate da Chladni nella vibrazione delle lastre, in una maniera molto analoga alle idee di Savart, cioè per la considerazione della sovraposizione di due o più modi semplici di vibrazione, nella quale ora le linee nodali dei diversi modi coincidono tra loro, ora le parti vibranti di uno dei modi di vibrazione cadono sulle linee nodali appartenenti all' altro modo, onde queste cessano d'essere linee nodali, e se ne formano altre per compensazione tra i due modi, in altri luoghi della lastra.

119. Nei corpi, in cui l' elasticità non è la stessa in tutte le direzioni, i modi di divisione di cui le lastre dei medesimi sono suscettibili prendono posizioni determinate dalla struttura stessa di questi corpi, e possono presentarsi con modificazioni diverse in diverse posizioni. Tale è il caso delle lamine di legno, di cui l' elasticità può considerarsi come differente nella direzione delle fibbre del legno, in quella dal centro alla circonferenza del fusto da cui sono prese, e in quella tangente alla circonferenza dello stesso fusto. Savart ha esaminate le modificazioni che i modi di vibrazione presentano in tali lamine di legno in una Memoria pubblicata negli *Annal. de chim. et de phys. janvier* 1829, e si è poi servito di osservazioni di questo genere per esaminare l' elasticità dei corpi cristallizzati

nelle diverse direzioni relativamente agli assi dei cristalli, come vedremo in appresso parlando della cristallizzazione; egli ha quindi fatto osservare in un altra Memoria pubblicata nello stesso giornale in maggio dello stesso anno, che anche i corpi che si riguardano come i più omogenei, come le lastre di metallo, di vetro ecc. offrono sempre qualche differenza di elasticità nelle loro diverse direzioni, dipendenti dalle circostanze del loro consolidamento dopo la fusione, dalla compressione che hanno subita in alcune direzioni ecc., e che si manifestano per la modificazione delle figure delle loro linee nodali nelle vibrazioni, e per la diversità del suono che ne risulta secondo la loro posizione.

120. Tali sono i principali risultati sperimentali conosciuti sulla vibrazione delle lastre elastiche. Quanto alla lor teoria generale, atta a render ragione delle leggi e circostanze relative ai diversi casi, Giacomo Bernoulli avea già fatto qualche tentativo tendente a stabilirla, nelle Memorie di Pietroburgo del 1788, all' occasione delle prime sperienze di Chladni; ma avea riguardata la cosa sotto un aspetto particolare, che l'avea condotto a conseguenze mal fondate, e che infatti non si trovarono d'accordo colla sperienza. Paradisi in una Memoria che si trova nel primo volume dell' Istituto delle Scienze di Milano aggiunse alle sperienze di Chladni alcune sue sperienze, colle quali riconobbe che le linee nodali non giungevano a forme costanti, che dopo una successione graduata e continua di forme variabili, la generazione delle quali lo condusse a qualche idea teorica sulla formazione di queste curve; ma questo era ancor ben lontano da una general teoria delle vibrazioni di cui si tratta.

In tali circostanze l' Istituto di Francia propose per soggetto di premio per l'anno 1812, *la teoria matematica delle vibrazioni delle superficie elastiche, e la sua comparazione colla sperienza.* Una sola memoria, tra quelle che vi concorsero fu giudicata degna d' attenzione, quella cioè d' un anonimo, che diede, senza dimostrazione, l' equazione differenziale generale del moto di queste superficie, e cercò di soddisfare a quest' equazione, come Euler avea fatto per quella delle semplici lamine o verghe vibranti, per mezzo di integrali

particolari. Ciascuna di queste integrali determina una figura speciale della lastra vibrante, che presenta un certo numero ed una certa disposizione di linee nodali; il suono che la lastra produce dipende in generale dal numero di queste linee, e l'integrale stabilisce un rapporto tra questo numero e il suono corrispondente. L'autore calcola così il tuono relativo a ciascuna figura, e paragonandolo a quello che dà la sperienza per questa figura, trova un accordo soddisfacente tra i due risultati; cosicchè l'equazione fondamentale, d'onde egli è partito, può riguardarsi come sufficientemente verificata dalle osservazioni. Le sperienze a cui l'autore si è riferito sono quelle di Chladni, ed alcune altre proprie all'autore stesso. Era quindi desiderabile di avere la dimostrazione di quest'equazione, ossia di vederla stabilita sui principii teorici, mentre al contrario si ignorava come vi fosse stato condotto l'autore anonimo.

A questo desiderio soddisfece il sig. Poisson nella già citata *Memoria sulle superficie elastiche* che fu letta all'Istituto di Francia nel 1814, ed inserta nel volume delle Memorie dell'Istituto stesso per l'anno 1812. Avendo egli in questa Memoria stabilite, come abbiamo detto, le equazioni dell'equilibrio d'una superficie, di cui ciascun elemento è inegualmente teso in due direzioni rettangolari, e di cui tutti i punti sono sollecitati da forze qualunque, mettendo per queste forze le espressioni di quelle prodotte dalla forza elastica, ne dedusse quelle dell'equilibrio d'una lastra elastica, e quindi quella della superficie medesima in equilibrio, come si è detto al n. 115, limitandosi però al caso della tensione uguale in tutte le direzioni. Da queste equazioni finalmente, secondo i noti principii della meccanica, dedusse anche l'equazione generale del moto vibratorio d'una simile superficie, sotto le solite restrizioni, che la superficie non faccia che piccole oscillazioni da una parte e dall'altra d'un piano fisso, e che ciascun punto oscilli in una retta perpendicolare a questo piano; lo spessore si suppone uniforme, e la forza attrattiva e ripulsiva delle molecole agente soltanto a distanza insensibile, come si è detto parlando dell'inflessione delle lamine elastiche. Annullando in quest'equazione i termini che dipendono dall'elasticità, si trova di nuovo l'equazione delle vibrazioni della membrana

tesa ugualmente in tutte le direzioni; facendovi al contrario questa forza di tensione nulla, essa si riduce alla forma la più semplice che essa possa avere nel caso dell' elasticità; e sotto questa forma essa si trova appunto la stessa che quella che avea data l' autor anonimo senza dimostrazione.

Restava a trovarsi l' integrale generale di quest' equazione, per farne uso nell' applicazione alle sperienze in una maniera più compiuta che non l'avea potuto far l' anonimo per mezzo di integrali particolari. A questa pervennero, come già abbiamo accennato, Fourier, e il sig. Poisson, per mezzo degli integrali definiti, il primo nella Memoria presentata all' Istituto di Francia nel 1818, e di cui diede un estratto nel *Bulletin de la Societé Philomathique* di quell'anno, il secondo in una nota inserta nello stesso giornale, e in una Memoria sopra l' integrazione di diverse equazioni letta all'Istituto nel 1819, e che si trova nel volume del 1818.

La teoria delle vibrazioni delle lastre elastiche si trovò così compiutamente stabilita, e sarebbe soltanto a desiderarsi un trattato compiuto della sua applicazione a tutti i risultati sperimentali già noti, o che si potrebbero trovare con altre sperienze, trattato che ancor non esiste.

121. Debbo però aggiungere che il sig. Poisson riprese ancora questa teoria delle vibrazioni delle lastre nella sua Memoria sull'equilibrio e sul moto dei corpi elastici, applicandovi le sue formole generali stabilite sulle considerazioni più rigorose della natura dell' azione molecolare, e ne dedusse alcuni nuovi risultati, che si trovarono conformi alle sperienze che furono a tal riguardo fatte dal sig. Savart.

Così egli ha determinato i suoni, e le linee nodali d' una lastra circolare di cui tutti i punti ugualmente distanti dal centro hanno in ciascun istante lo stesso moto, sia che questo contorno sia incastrato, o solo appoggiato, o intieramente libero. In quest' ultimo caso il rapporto che esiste tra i due suoni più gravi d' una stessa lastra è 4,316; si è veduto che la formola empirica del Chladni avrebbe dato 4 per questo rapporto; il sig. Savart ha ottenuto per questo stesso rapporto un numero che supera alquanto il 4, ma d'una frazione un po' minore di quella indicata; la differenza però tra il calcolo e

la sperienza è tra i limiti degli errori di cui queste osservazioni sono suscettibili.

Nello stesso caso il suono più grave è accompagnato da una linea nodale, e quello che lo segue immediatamente in elevazione, da due simili linee. Prendendo per unità il raggio della lastra, e chiamando r il raggio della linea nodale unica nel caso del primo suono, r_1, e r_2 i raggi delle due linee nodali nel caso del secondo suono, il calcolo dà $r=0{,}6806$, $r_1=0{,}3915$, $r_2=0{,}835$. Il sig. Savart ha misurato accuratamente questi stessi raggi sopra tre lastre di rame di dimensioni diverse; egli ha trovato valori poco diversi tra loro, per ciascuno di questi raggi, e di cui le medie differiscono pochissimo dai valori calcolati.

Il sig. Poisson ha anche determinato il rapporto fra questi suoni della lastra circolare e quelli resi dalle vibrazioni trasversali delle verghe; sia n il numero delle vibrazioni nell'unità di tempo pel suono più grave d'una verga cilindrica libera alle due estremità, e di cui ε sia il raggio e $2l$ la lunghezza; sia n_1 il numero delle vibrazioni nello stesso tempo che corrisponde al suono più grave d'una lastra circolare della stessa materia di cui il contorno è intieramente libero, e di cui la metà dello spessore sia ε, e il diametro $2l$; si avrà, secondo il risultato teorico del sig. Poisson, $\frac{n_1}{n}=(3{,}3746)\,\frac{\varepsilon}{l}$, formola che non si potrà verificare se non misurando con una grande precisione lo spessore della lastra e il diametro della verga, a cagione della loro grande influenza sulle vibrazioni di questi corpi sonori.

122. Ma se solo in questi ultimi tempi si è fissata la teoria delle vibrazioni delle superficie piane, non è da stupire che non si sia ancor giunto a determinar teoricamente le vibrazioni de' corpi elastici di forma più complicata, e in cui conviene aver riguardo alle tre dimensioni. Ci limiteremo qui a dir qualche cosa delle vibrazioni de' vasi di cui le superficie interna ed esterna sono di rivoluzione attorno ad uno stesso asse, perchè questa forma di corpi è impiegata nelle campane, e nello stromento di musica chiamato *armonica*. Ci contenteremo anzi, conformemente alla natura di quest' applicazione, di considerare tra tutte le vibrazioni possibili d' un simil vaso,

quelle in cui i punti situati sopra uno stesso meridiano della superficie, cioè sopra una delle sezioni di cui il piano passa per l'asse, hanno moti del medesimo genere, cioè o sono tutti compresi in una linea nodale, o vibrano insieme nella stessa direzione quantunque con maggior o minor estensione. Secondo questa supposizione, se si fa una sezione nella superficie per mezzo di due piani perpendicolari al suo asse, e molto vicini l' uno all' altro, questa sezione che sarà un elemento circolare del vaso sarà, quanto alla direzione de' moti la sola cosa che dobbiamo considerare, poichè tutti i generi di moto che un simil anello potrà ammettere, saranno comuni a tutti gli altri anelli che compongono il vaso. Allora tutto ciò che abbiamo detto sui diversi modi di vibrazione di cui gli anelli sono suscettibili s'applicherà qui, almeno per quanto concerne il numero de'nodi e tutte le circostanze di mobilità od immobilità.

Non si dee però estendere quest'analogia sino ai valori assoluti de' suoni, poichè essi dipendono non solamente dalla posizione de' nodi e de' ventri, ma ancora dalla rapidità assoluta con cui le vibrazioni si eseguiscono, e questa rapidità è modificata dalla connessione delle parti che vibrano insieme nella stessa maniera, e che secondo il loro diverso spessore hanno una forza elastica più forte o più debole, e per conseguenza accelerano o ritardano il complesso delle vibrazioni. E per la stessa ragione non si può nè anche conchiudere dalla somiglianza de' nodi, e de' ventri l' uguaglianza de' rapporti dei suoni ne' diversi modi di vibrazione tra il vaso, e l'anello.

L' analogia è più intima fra le vibrazioni annulari di un vaso di rivoluzione, e quelle d' una lamina circolare, mentre nell' uno e nell' altro caso ha luogo la connessione tra un anello elementare e l' altro, per cui i moti dell' uno accelerano o ritardano i moti dell' altro, quantunque questa connessione sia stabilita in una direzione diversa. Infatti l' esperienza mostra che la progressione de' suoni segue la stessa legge in queste vibrazioni de' vasi, che in quelle d' una lamina circolare, che vibra nella direzione de' suoi raggi, cioè di cui tutte le linee nodali sono diametrali. Quindi si vede che il suono il più grave che un simil vaso possa dare corrisponde al caso in cui la circonferenza si divide in quattro parti vibranti, e

per conseguenza la superficie del vaso intiero si divide anche in quattro parti uguali, cosicchè il vaso si appiana, e si estende alternativamente in due direzioni perpendicolari tra loro. Quanto agli altri suoni, se il numero di parti in cui il vaso si divide è n, la progressione de' suoni sarà rappresentata dalla serie de' quadrati dei numeri pari 4, 6, 8, ecc., e questo è perfettamente confermato dall' esperienza. Se si vuole prendere il primo suono per unità, i valori di tutti gli altri saranno, come già l' abbiamo veduto per le lamine,

$$1\ ,\ \left(\frac{6}{4}\right)^2\ ,\ \left(\frac{8}{4}\right)^2\ ,\ \left(\frac{10}{4}\right)^2\ ,\ \left(\frac{12}{4}\right)^2\ ,\ \text{ecc.}$$

ut_1, re_2 ut_3 $sol_3{}^*$ re_4, ecc.

Ora nella stessa maniera che una corda che vibra fa sentire ad un tratto tutti i suoni armonici, che corrispondono alle diverse parti aliquote nelle quali essa può dividersi, così una campana, o un vaso di rivoluzione dà, oltre il suo tuono più grave, quella infinità d' altri suoni che abbiamo indicata, e che corrisponde alle sue diverse divisioni possibili. È poi notabile, che quantunque questi suoni differiscano molto dai suoni armonici ut_1, ut_2, sol_2, mi_3, ecc., che produce la vibrazione d' una corda, essi godono tuttavia, come questi, della proprietà di accordarsi tra loro nelle lor risuonanze, cioè di produrre colla coincidenza de' lor battimenti un suono risultante simile. In qualunque maniera, per esempio, si combinino i cinque primi suoni ut_1, re_2, ut_3, $sol_3{}^*$, e re_4, essi danno sempre, secondo la regola stabilita al n. 101, per suono risultante, 1 od $\frac{1}{4}$, vale a dire il suono ut_1, o la sua doppia ottava grave ut_{-2}, cosicchè anche la riunione di questi suoni, come quella degli armonici d' una corda, dà una sensazione aggradevole, ossia forma un *accordo*. Tuttavia questo accordo pare qui dover essere méno perfetto, poichè i suoni risultanti sono due, di cui l'uno è la doppia ottava dell' altro, in vece d' un solo.

Prescindendo ora dalle diverse maniere particolari di vibrare

delle campane e de'vasi, di cui la teoria compiuta non è ancor nota, osserveremo che la formola generale teorica che abbiamo riferita nel n. 109 per la rapidità delle vibrazioni delle verghe elastiche si estende alle vibrazioni di qualunque corpo elastico d'una data forma, anche non lineari, e per conseguenza a quelle delle lamine e dei vasi. Quindi segue che i suoni dati da vasi di figura simile, ma di spessori diversi, e per la stessa maniera di vibrare, saranno proporzionali a questi spessori, e in ragion inversa dei quadrati delle altre lor dimensioni; cosicchè se sono in tutto simili, vale a dire se i loro spessori sono anche proporzionali alle altre dimensioni, i valori de'suoni saranno in ragion inversa delle loro dimensioni omologhe, come si è detto nella supposizione analoga delle vibrazioni trasversali delle verghe. Ciò posto se si riuniscono gli uni accanto agli altri molti vasi di vetro simili di forma, ma di grandezza disuguale, si potrà stabilire tra le loro grandezze una tal gradazione, che essi diano i diversi suoni che s'impiegano nella musica; questo è il principio dello stromento conosciuto sotto al nome d'*armonica*. Le vibrazioni si eccitano facendo passare sull'orlo un dito bagnato, nel qual caso i nodi, ed i ventri si traslocano a ciascun istante insieme col dito. L'equivalente ha luogo nell'*armonica a cilindro*, in cui si fanno girare i vasi di vetro sopra un asse comune, e si applicano le dita sui loro orli, o immediatamente, o coll'interposizione d'una pelle bagnata ecc.

123. Ho detto che la teoria generale delle vibrazioni delle campane e de' vasi non è ancor nota. Infatti le sole ricerche speciali che si abbiano a questo riguardo sono quelle di Euler (*De sono campanarum in nov. comm. Acad. Petrop.* T. 10), e di Golovin (*Act. Acad. Petrop.* 1781); ma le supposizioni su cui queste ricerche sono fondate non sono conformi alla natura, e i risultati che se ne ottengono non sono confermati dalla sperienza. Quanto all'equazione generale delle superficie vibranti che Poisson ha il primo dimostrata, essa non può applicarsi ai vasi nemmeno di uniforme spessore, perchè l'analisi su cui è stabilita suppone come già si è detto la superficie piana nel suo stato naturale, e si richiederebbe un altro lavoro per modificarla in maniera da applicarsi alle superficie curve.

Sono però ora note le equazioni differenziali del moto d' un corpo elastico considerato nelle sue tre dimensioni ; esse furono per la prima volta stabilite dal sig. Navier in una sua Memoria pubblicata nel T. 7 delle Memorie dell' Accademia delle Scienze di Parigi, ma sopra principii ipotetici non dedotti rigorosamente dalla considerazione delle forze molecolari. Navier ha particolarmente supposta nulla la mutua azione di due molecole nello stato d' equilibrio in vece che l' equilibrio di ciascuna molecola è prodotto dalle azioni combinate di tutte le molecole vicine sulla medesima; e questa supposizione l'avrebbe condotto ad equazioni diverse da quelle a cui è giunto, se non avesse creduto poter rappresentare per altra parte le somme delle forze per mezzo di integrali, il che non è ammissibile in questo caso, secondo il sig. Poisson. Avendo poi lo stesso sig. Poisson nella più volte citata Memoria stabilite le equazioni generali riferite ai n.i 85 e 86, dell'equilibrio de'corpi elastici, fondate sopra le considerazioni di cui abbiamo parlato, ne dedusse pure, secondo i noti principii della meccanica, quelle del moto dei medesimi, che si trovarono conformi alle equazioni di Navier. Egli diede anche un esempio assai generale dell' applicazione di queste formole alla determinazione delle vibrazioni d' una sfera omogenea di cui tutti i punti ugualmente lontani dal centro abbiano in ciascun istante uno stesso moto nella direzione dei loro rispettivi raggi; ma non si è ancor fatta l' applicazione speciale delle stesse formole ai corpi solidi di diversa forma che si possono adoperare come corpi sonori. Poisson ha però dato in un addizione alla sua Memoria letta all' Accademia di Parigi in novembre 1828, e pubblicata nel T. 8 della stessa Accademia, l' integrale compiuta delle equazioni differenziali generali suddette, che può applicarsi a qualunque caso.

Anche il sig. Cauchy si è occupato, ne' suoi *Exercices de Mathématique*, e in alcune Memorie particolari, della teoria generale dell' equilibrio e delle vibrazioni de' corpi elastici, e ha fatto osservare tra le altre cose, che una conseguenza generale di questa teoria, è che in corpi di qualunque forma, il tuono che rappresenta il numero delle vibrazioni del medesimo nell' unità di tempo è in ragion inversa delle dimensioni di questo corpo che si suppongano crescere o decrescere

in un dato rapporto comune ; il che è infatti conforme alle osservazioni del sig. Savart (V. *Bulletin de Ferussac*, *janvier* 1829), e a quello che abbiamo detto delle vibrazioni delle campane e dei vasi.

ARTICOLO QUINTO

Della comunicazione delle vibrazioni tra diversi corpi.

124. Le vibrazioni sonore eccitate in un corpo elastico possono communicarsi ad un altro convenientemente disposto, non solo per l' intermezzo dell' aria, conformemente a quello che si è detto nel n.° 100, ma ancora per contatto immediato ; così negli stromenti di musica da corda, le vibrazioni delle corde si comunicano alle tavolette o lamine di legno di cui è composta la cassa di questi stromenti, cosicchè queste concorrono colle lor proprie vibrazioni a rinforzare il suono prodotto dalle corde, e a rendere così lo stromento più sonoro e più armonioso ; onde dalla forma e modo di riunione di queste tavolette più o meno atta a facilitare questa comunicazione dipende in gran parte la perfezione di questi stromenti, e la preferenza che si dà a quelli costrutti da alcuni artefici, che per certe modificazioni per dir così impercettibili nella costruzione di queste casse dei medesimi, hanno particolarmente riuscito a dar loro questa perfezione. Ma il sig. Savart in una Memoria presentata all' Accademia delle Scienze di Parigi, e sulla quale si trova inserito negli *Annales de chimie et de physique*, novembre 1819, il rapporto fattone all' Accademia cercò di determinare dietro ad idee teoriche la miglior forma di cassa particolarmente pel violino, ed ottenne così uno stromento comparabile a quelli dei migliori artefici di tal genere, e questa ricerca gli diede occasione di stabilire alcuni principii generali sulla comunicazione del moto di vibrazione tra corpi solidi, che formano l' oggetto d' un altra Memoria presentata posteriormente alla stessa Accademia, e inserita per intiero nel già citato giornale (giugno 1820). Egli ha trovato che le vibrazioni trasversali d' un solido eccitano soventi vibrazioni

longitudinali in un altro, e reciprocamente, secondo la maniera con cui la comunicazione del moto si opera. Così per esempio si possono secondo le sue osservazioni eccitare vibrazioni trasversali in un corpo sonoro col fregamento longitudinale d'una verga di corpo elastico unita al primo di questi corpi ad angolo retto, e questo mezzo fu applicato alla costruzione di alcuni particolari stromenti di musica.

Si possono anche vedere negli *Annales de chimie et de physique*, *juillet* 1823, alcune sperienze curiose di Wheatstone sulla comunicazione delle vibrazioni sonore.

125. Savart istesso ha poi ancora generalizzata questa teoria della comunicazione dei moti di vibrazione tra i corpi solidi in altra Memoria presentata all'Accademia di Parigi li 22 aprile 1822, in cui ha considerato in una maniera generale le differenti spezie di vibrazioni delle verghe, lamine, membrane e lastre, che sopra abbiamo distinte, Memoria che si trova inserta negli *Annales de chimie et de physique*, *janvier* 1824. Quelle diverse sorta di vibrazioni, dette trasversali, longitudinali, o giratorie, si riducono tutte a vibrazioni delle molecole del corpo parallelamente ad una sola linea, che può essere tangente alla superficie del corpo che si considera, o ad essa perpendicolare, o far con questa superficie un angolo obliquo qualunque, onde le vibrazioni stesse possono chiamarsi *tangenziali*, o *normali*, o *oblique* relativamente a questa superficie. Le molecole che vibrano in una direzione secondo questa linea possono essere in generale disgiunte da quelle che vibrano nella direzione opposta contemporaneamente, da superficie che possono chiamarsi *superficie nodali*, e queste possono essere anch' esse perpendicolari, o oblique, o parallele a quella linea secondo la quale si fanno le vibrazioni; le *linee nodali* non sono che le intersezioni di queste sezioni nodali colle superficie che si considerano ne' corpi vibranti.

Così per esempio quando una lamina libera *efhg* vibra in direzione trasversale nel piano della fig. 36, nella maniera più semplice, ossia corrispondente al suono più grave della medesima, le molecole comprese nella porzione *abfe* si muovono nella direzione indicata dalle freccie in verso opposto a quello in cui si muovono contemporaneamente le molecole comprese nella

porzione *abdc*, e lo stesso si dica di quelle comprese nella porzione *cdhg*, relativamente a questa stessa porzione intermedia *abdc*. Queste vibrazioni sono *normali* relativamente alle superficie rappresentate dalle linee *eacg*, e *fbdh*, e *tangenziali* relativamente alla superficie *efhg* che è qui nel piano della figura, e alla sua opposta, come pure alle superficie terminali della lamina, rappresentate da *ef* e *gh*; le *superficie nodali* sono quelle che passano per le linee *ab*, *cd* perpendicolarmente alla lunghezza della lamina, ossia le sezioni trasversali della medesima, condotte per queste linee, e sono qui parallele alla direzione delle vibrazioni. Le linee nodali considerate sullo *spessore* della lamina sarebbero le stesse linee *ab*, *cd*; ma quelle che si considerano ordinariamente per tali sono le intersezioni delle superficie nodali suddette colle faccie rappresentate da *eg*, *fh*, e che attraversano la *larghezza* della lamina.

Suppongasi ora che le direzioni delle vibrazioni che abbiamo considerate, girando nel piano della figura, vengano ad essere perpendicolari alle precedenti, ossia parallele alla lunghezza della lamina o verga, le superficie o sezioni nodali restando le stesse, cosicchè le vibrazioni continuino a farsi in opposto verso nelle porzioni della lamina separate da queste sezioni; si avrà il moto vibratorio rappresentato dalla fig. 37. Queste saranno vibrazioni longitudinali della lamina, nelle quali le sezioni nodali si troveranno come prima in *ab*, *cd*, ma queste sezioni saranno ora perpendicolari alla direzione delle vibrazioni.

Si concepisca quindi che le prime direzioni che abbiamo considerate, in vece di girare nel piano della figura, girino in piani perpendicolari a quello della figura, finchè venendo ad essere ad angolo retto con quelle, siano esse stesse perpendicolari al piano della figura, ossia parallele alla larghezza della lamina. Mettendo allora nel piano della fig. 38 la faccia della lamina che era rappresentata dalla linea *eacg*, si avrà il moto vibratorio in essa rappresentato, normale allo spessore della lamina, e tangenziale alle sue faccie più larghe. In tale moto le sezioni nodali primitive, rappresentate in questa figura dalle linee *am*, *cn*, saranno come prima parallele alle direzioni delle vibrazioni; ma potrà anche facilmente accadere,

a cagione dell' estensione di queste faccie in larghezza, che oltre a quelle sezioni nodali, o in vece di quelle, se ne formino altre perpendicolari a queste direzioni delle vibrazioni, ossia longitudinali relativamente alla lamina, cosicchè le molecole poste da parti opposte di queste nuove sezioni nodali vibrino contemporaneamente in parti opposte; tali sono per esempio le sezioni rappresentate nella fig. 39 dalle due linee longitudinali; e queste vibrazioni diverrebbero di nuovo longitudinali se la larghezza delle lamine si accrescesse al di là della lunghezza, di maniera che la prima divenisse lunghezza, e la seconda larghezza, le sezioni nodali che erano longitudinali restando allora trasversali.

Ma anche nel primo caso che abbiamo considerato, cioè quello del moto trasversale, ossia perpendicolare alla faccia della lamina, oltre le sezioni nodali che abbiamo indicate, trasversali alla lunghezza della lamina, se ne possono formar altre parallele ancora, come quelle, alla direzione delle vibrazioni, ma longitudinali alla lamina, come le sezioni *abcd*, *efgh* nella fig. 40, e combinandosi in diversa maniera queste sezioni normali, e in più o men grande numero, colle prime si avranno le diverse maniere di vibrazioni normali alla sua superficie di cui è suscettibile una lamina considerata in lunghezza e larghezza, venendo così essa divisa da queste sezioni normali tra loro rettangolari in parallelepipedi separati che avranno alternativamente il loro moto vibratorio in direzione opposta.

Suppongasi, per uno dei casi particolari di questa combinazione, che si abbia una sola di tali sezioni longitudinali nodali, nel mezzo della larghezza della lamina, e che una delle estremità della medesima lamina formi ella stessa una sezione normale trasversale, come quando la lamina è incastrata in una maniera fissa a questa estremità; la lamina vibrando si dividerà longitudinalmente in due parallelepipedi, che faranno le loro vibrazioni in opposto verso alternativamente, come si vede nella fig. 41, e se un moto vibratorio di questa specie si considera in una lamina di cui la larghezza sia a un dipresso uguale allo spessore, si avrà il caso più semplice del moto che abbiamo chiamato, per una lamina o verga, *moto giratorio*, o di *torsione*.

126. Si vede adunque che le diverse specie di vibrazioni che si distinguono nelle lamine si riducono tutte a moti vibratorii delle loro molecole parallelamente a certe linee, e che i diversi ordini delle vibrazioni corrispondono alle direzioni opposte in cui si fanno queste vibrazioni, al di qua e al di là di certe sezioni nodali perpendicolari o parallele a queste linee. In quelle particolari maniere che si distinguono coi nomi di vibrazioni trasversali, longitudinali, e di torsione relativamente alle lamine e verghe parallelepipede, le linee in cui si fanno le vibrazioni sono o parallele, o perpendicolari alle une o alle altre delle loro tre dimensioni. Ma nulla impedisce che esse prendano direzioni obblique qualunque relativamente a queste dimensioni, e inoltre le sezioni nodali possono esse medesime divenire più o meno obblique sia a queste dimensioni, sia alle linee stesse parallelamente alle quali si fanno le vibrazioni. Da quest' ultima circostanza ne può risultare che le linee nodali, che sono le intersezioni delle sezioni nodali colle faccie della lamina, non si corrispondano nelle diverse faccie. Così per esempio nelle vibrazioni tangenziali a due delle faccie, sia che si facciano esse nella direzione della larghezza (nel qual caso potrebbero chiamarsi *latitudinali*), o nella direzione della lunghezza, che sono quelle che diconsi longitudinali, può accadere che la sezione nodale abbia per esempio la direzione $abcd$ (fig. 42) obbliqua alla superficie della lamina di cui AB sia lo spessore, cosicchè le due linee nodali ad, bc non si corrispondano sulle due faccie più estese $AFHD$, $BEGC$, come infatti Savart ha trovato realmente succedere nelle lamine anche assai sottili, e nelle membrane tese medesime, dove in generale le linee nodali d' una faccia corrispondono alle linee di mezzo dei ventri della faccia opposta. Inoltre queste sezioni nodali che fin qui abbiamo considerato come piani, potranno anche essere superficie curve o in una sola o in due direzioni, onde risulteranno dalle loro intersezioni colle opposte faccie, linee nodali in queste, di diverse figure, o corrispondenti, o non corrispondenti in posizione da una faccia all' altra, e così l' infinita varietà di linee nodali osservate da Chladni, Savart ecc. nelle vibrazioni delle lamine e delle membrane. Quello poi che abbiamo detto delle lamine o verghe parallelepipede

si estenderà colle convenienti modificazioni, sia alle lastre sottili di diversa figura, per esempio alle circolari, sia alle verghe di sezione trasversale qualunque; e si osserverà pure che la direzione delle vibrazioni che abbiamo fin qui supposto essere parallele ad una stessa linea può essere diversa relativamente alle diverse parti del corpo vibrante, del che ci presenterebbero un esempio le vibrazioni tangenziali che in una lamina circolare partissero dal centro, e ammettessero linee nodali pur circolari.

127. Ma limitandoci alle vibrazioni che si fanno in una stessa direzione in tutta l'estensione d'un corpo, è chiaro dal fin qui detto che, nella comunicazione del moto vibratorio da un corpo all'altro, le vibrazioni che sono trasversali nell'uno possono divenir longitudinali, o in generale tangenziali in un altro, per la diversa posizione di questo relativamente al primo, e generalmente quelle d'una specie qualunque nell'uno divenire d'una specie diversa nell'altro, sebbene conservino nello spazio la stessa direzione. Così per esempio facendo vibrare trasversalmente una corda che attraversi perpendicolarmente una lamina od una membrana, o sia in contatto con uno de' lati della lamina come nella fig. 43, si ecciteranno nella lamina o nella membrana vibrazioni tangenziali, che potranno prendere diverse direzioni sulla medesima secondo il piano delle vibrazioni trasversali che si faranno fare alla corda. Lo stesso si può ottenere per mezzo d'un cilindro solido appoggiato alla superficie d'una lamina come nella fig. 44, e che si faccia vibrare con un archetto trasversalmente in una direzione qualunque. Se in vece di mettere la corda o il cilindro che si fa vibrar trasversalmente in una posizione perpendicolare alla superficie della lamina si annettono questi corpi tra loro, cosicchè l'uno si trovi nel prolungamento dell'altro, come nella fig. 45, quando si farà vibrare con un archetto la corda o il cilindro trasversalmente, si ecciteranno nella lamina vibrazioni nella stessa direzione; così se il piano delle vibrazioni trasversali della corda o cilindro sarà quello delle faccie della lamina, questa prenderà vibrazioni tangenziali a queste faccie, ma se si varia in qualunque modo la direzione delle vibrazioni trasversali della corda, o cilindro, quelle della lamina avranno

diversi gradi qualunque d'obbliquità alle sue faccie, e diverranno normali alle medesime, ossia trasversali, quando la direzione delle vibrazioni della corda o cilindro sarà perpendicolare alle sue faccie; in questi diversi casi si formeranno del resto linee nodali di figure diverse, corrispondenti o non corrispondenti sulle faccie opposte della lamina, secondo la figura di questa, e la direzione delle vibrazioni che le sue molecole prenderanno relativamente alle sue dimensioni. Queste sperienze furono fatte e variate in più maniere dal sig. Savart, come si può vedere nella citata Memoria, determinando le linee nodali sopra ciascuna faccia pel solito mezzo della sabbia sparsa sulle medesime, di cui metteva per tale oggetto l' una o l' altra in posizione superiore, e osservando che nelle vibrazioni tangenziali, i granelli di sabbia si muovevano per collocarsi nelle linee di riposo, parallelamente alla direzione delle faccie, strisciando sopra di esse, mentre al contrario quando le vibrazioni erano normali alle faccie, i granelli saltellavano perpendicolarmente alle faccie per disporsi nelle linee nodali.

128. Secondo alcune di queste sperienze le linee nodali di una faccia d' una lamina che vibra tangenzialmente paiono riunirsi alle linee nodali della faccia opposta, che come abbiamo già detto non si corrispondono in posizione, per mezzo delle linee nodali che hanno luogo sulle faccie intermedie che formano lo spessore della lamina, in maniera che queste linee nodali considerate sulle faccie della lamina prese in giro vengono a formare una o più linee continue che percorrono in *ziczac* la lunghezza della lamina. Savart fu condotto a queste osservazioni da quelle che fece primieramente di linee nodali in forma d' elice che si formano sulle verghe cilindriche dotate d' un moto di vibrazione longitudinale, osservazioni su cui dobbiamo qui entrare in qualche particolarità. Egli si servì per esse di cilindri o di tubi di vetro della lunghezza per esempio di 2 metri, che faceva vibrare longitudinalmente per mezzo d' un pezzo di panno bagnato, che faceva strisciare lungo una delle metà della lunghezza dei cilindri, mentre li riteneva in direzione orizzontale stringendoli tra le dita nel mezzo della lunghezza. Così venivasi a produrre in uno di questi cilindri il suono più grave di cui esso era suscettibile vibrando longitudinalmente,

e in cui si considera la sezione trasversale posta nel mezzo della lunghezza come una sezione nodale, relativamente alla quale le molecole componenti le due metà del cilindro vibrano contemporaneamente in opposta direzione. Tuttavia Savart trovò che in ciascuna di queste metà si formava una linea nodale in forma d' elice, la quale in una delle metà girava in un verso, per esempio da destra a sinistra, e nell' altra metà in verso opposto, per esempio da sinistra a destra. Siccome per queste osservazioni egli non poteva servirsi del solito mezzo della sabbia, egli vi sostituì un anello formato d' una stretta fascia di carta, che appoggiandosi con uno de'suoi punti sulla linea superiore della superficie del cilindro su cui veniva infilato, dovea necessariamente portarsi, pel moto longitudinale delle molecole della medesima, verso il più vicino punto di una linea nodale, e fermarvisi. Sia dunque AB (fig. 46) il cilindro portante uno di questi anelli di carta $a\,b$, che riposi tra i due punti vicinissimi n_1 e N_1 ove nella supposta maniera di vibrare le molecole sono in riposo, cioè posti a piccolisima distanza al di qua e al di là del mezzo della lunghezza del cilindro; segniamo con numeri le quattro linee che dividono la circonferenza del cilindro in quattro settori uguali; il punto n_1 sarà dunque un punto immobile della linea segnata 1, ma un poco a destra del punto preciso di mezzo della lunghezza del cilindro, cosicchè posto questo in vibrazione, l' anello su di esso collocato non si muoverà; supponiamo ora che si faccia girare colle dita il cilindro nella direzione contraria all' ordine dei numeri 1, 2, 3, 4, cosicchè la linea n. 2 divenga superiore; posto di nuovo il cilindro in vibrazione l' anello sdrucciolerà al punto n_2; e se si rivolge il cilindro successivamente in posizioni intermedie tra le due precedenti, il piccolo cursore si arresterà pure in punti intermedii tra n_1 e n_2, cosicchè si potranno tracciare tutte le sue posizioni con una linea d'inchiostro sopra la superficie del cilindro. Se si continua quindi a far girare il cilindro nella stessa direzione sinchè la linea n. 3 sia superiore, l'anello si arresterà al punto n_3; e quando la linea 4 sarà giunta a sua posta alla parte superiore, esso si arresterà al punto n_4. Finalmente quando la linea 1 sarà divenuta di nuovo superiore, esso si arresterà al punto n'_1, e la linea continua che

si avvolge attorno al cilindro avanzandosi in elice verso la sua estremità avrà fatto un giro intiero. Se si continua a girare il cilindro si potrà esaminare un secondo passo $n'_1\ n'_2\ n'_3\ n'_4$ dell'elice più vicino all'estremità, di cui una porzione è segnata nella figura, e girando sempre si condurrà l' anello sino all'estremità stessa della linea nodale e del cilindro, dove esso cadrà al di fuori. Ma quando l'anello è giunto affatto vicino all' estremità, se si fa girare il cilindro in direzione opposta a quella in cui si faceva girare dapprima, in vece di cadere esso ritornerà indietro per la stessa linea prima percorsa, e sarà ricondotto al punto di mezzo della lunghezza del cilindro, da cui era partito.

Se si esamina collo stesso procedimento la disposizione dei punti immobili nell'altra metà della lunghezza del cilindro, si troverà che partendo dal punto N_1 vicinissimo ad n_1 essi formano un' altr' elice che va pure verso l' estremità, ma in direzione opposta, come abbiamo annunziato a quella della prima metà, cosicchè se l'anello di carta è posto nel punto N_1 e così a piccolissima distanza dal punto preciso di mezzo del cilindro, stando questo colla sua linea 1 all' insù, si dovrà far girare il cilindro nella stessa direzione, in cui l' abbiamo fatto girare la prima volta per far camminare l' anello verso l' estremità a sinistra, e la prima porzione dell'elice $N_1\ N_2 N_3\ N_4 N'_1$, ecc. si troverà così dalla stessa parte anteriore del cilindro, in cui si trovava la prima porzione dell' elice precedente. Il sig. Savart ha però osservato che in ciascuna di queste due linee nodali in elice che partono dal mezzo del cilindro, le escursioni delle molecole, da una parte e dall'altra della medesima, che si fanno contemporaneamente in direzione opposta, secondo il carattere di una linea nodale qualunque, sono piccolissime nei punti delle medesime più vicini al punto di mezzo della lunghezza del cilindro, e vanno successivamente crescendo andando da quel punto verso ciascuna delle due estremità; questa circostanza si deduce sia da che a misura che il piccolo anello di carta si approssima all' estremità per la successiva rotazione del cilindro, esso vi si strascina con maggior vivacità, sia da che se si inclina il cilindro in maniera che l'anello debba trasportarsi contro l' azione del suo proprio peso, si osserva che l' inclinazione può essere viemmaggiore a misura che il cursore è più

prossimo all' estremità. Si dee pur notare che l' inclinazione di questa linea in forma d' elice non è la stessa, relativamente all' asse del tubo in tutti i punti delle sue spire; così il ramo a destra del punto di mezzo nei punti n_1, n_3, n'_1, ecc. che corrispondono alla linea da cui essa parte sulla superficie cilindrica, e a quella che le è diametralmente opposta, è quasi perpendicolarmente trasversale alla lunghezza del cilindro, mentre nei punti n_2, n_4, n'_2, ecc. corrispondenti alle linee intermedie, essa prende una direzione quasi parallela all'asse del tubo. L'analogo si dica del ramo a sinistra. Inoltre le spire dell'uno e dell'altro ramo diveagono sempre più allungate, a misura che si allontanano dal punto di mezzo della lunghezza.

Osserverò qui che siccome in forza del carattere d'una linea nodale, le molecole al di qua e al di là di ciascuna porzione di quest' elice, come ab, cd (fig. 47) debbono muoversi contemporaneamente in verso opposto relativamente alla medesima, cioè contemporaneamente avvicinarvisi, e contemporaneamente allontanarsene, come è segnato dalla posizione delle freccie nella figura, e così tra le due spire ab, cd che appartengono all'elice continua descritta da Savart, le molecole debbono andar le une verso il mezzo della lunghezza del cilindro, le altre verso l'estremità, dee necessariamente esservi un' altra elice intermedia nodale, come quella di cui a' b' rappresenta una spira nella figura, relativamante a cui queste molecole vibrino, avvicinandovisi pure, e allontanandosene alternativamente; partendo dunque dal punto di mezzo debbono formarsi in ciascuna metà della lunghezza del cilindro due elici che corrono a un dipresso parallelamente, amendue da destra a sinistra per una delle metà, e da sinistra a destra per l' altra metà, cosicchè tra una spira qualunque di una di queste elici, e la spira vicina dell' altra le molecole si muovano nella stessa direzione, cioè vadano contemporaneamente tutte verso il punto di mezzo, e verso l'estremità alternativamente. Ma probabilmente questi movimenti sono assai deboli partendo da quest' elice intermedia, e aumentano poi rapidamente di forza e di estensione nei punti più vicini all' elice descritta da Savart, il che non ha permesso al medesimo di osservare sperimentalmente se non quest' ultima.

Del resto questi moti delle molecole, che nelle due zone

comprese tra queste due elici si fanno contemporaneamente in opposto verso non sono che relativi all' elici stesse, ossia alle molecole che ne fanno parte; poichè queste elici allungandosi esse medesime e raccorciandosi alternativamente, in virtù dell'allungamento e raccorciamento alternativo di ciascuna metà del cilindro, che forma il carattere delle vibrazioni da cui dipende il suono più grave reso dal cilindro vibrante lungitudinalmente, e di cui qui si tratta, i moti assoluti delle molecole, ossia relativi al punto di mezzo della sua lunghezza, sono in ciascuna metà contemporaneamente diretti nello stesso verso; onde le vibrazioni parziali indicate dall' esistenza di queste elici, possono bensì dare un carattere particolare al suono reso dalle verghe che vibrano lungitudinalmente, ma non ne alterano il tuono dipendente dalla posizione della sezione nodale assoluta, che qui è la sezione di mezzo del cilindro, e da cui, come si è veduto, è pure determinato il rivolgimento in senso opposto delle elici appartenenti a ciascuna metà, e l'accrescimento successivo delle escursioni relative delle molecole che si riferiscono alle elici, andando da questa sezione di mezzo a ciascuna delle due estremità. Il numero delle spire di queste elici, e la prossimità più o men grande di queste spire non possono essere che accidentalmente determinate da qualche disposizione delle molecole nelle verghe adoperate, dalla maniera con cui le vibrazioni si eccitano ecc.

I cilindri cavi o tubi presentano pure questa disposizione di linee nodali in forma d' elici; la loro superficie esterna vibra esattamente come quella dei cilindri pieni; ma di più la loro superficie interna diviene la sede d' un movimento che è in tutto analogo a quello dell' esterna; vi si osserva pure una linea nodale continua in ciascuna metà della lunghezza, e che va nello stesso verso, passando per gli stessi gradi di inclinazione relativamente all' asse; ma vi è questa annotazione importante a farsi, che la linea interna non parte da un punto corrispondente a quello in cui comincia l' esterna, bensì dal punto diametralmente opposto, onde l' elice interna si trova per tutto intermedia alle spire dell' elice esterna; cioè l'elice interna osservata da Savart corrisponde all' elice esterna intermedia di cui abbiamo parlato e che non ha fatto l' oggetto

delle sue osservazioni, e reciprocamente all' elice esterna osservata dee corrispondere un' altr' elice interna a spire intermedie a quella osservata da Savart; e probabilmente la direzione delle vibrazioni contemporanee relativamente alle elici interna ed esterna osservate da Savart è opposta, e tale è pure quella delle vibrazioni delle altre due elici, cosicchè le vibrazioni relative all' elice interna osservata da Savart, siano contemporaneamente nella stessa direzione che nell' elice esterna non osservata, e reciprocamente; onde se per esempio AB, CD fig. 48 rappresentano due linee longitudinali corrispondenti delle superficie interna ed esterna; a, c i due punti in cui due spire consecutive dell'elice interna osservata da Savart tagliano la linea interna; b, d i due punti in cui l'elice esterna corrispondente non osservata da Savart taglia la linea esterna; a' il punto in cui l' elice interna intermedia non osservata da Savart taglia la linea interna, e b' quello in cui l' elice esterna corrispondente osservata da Savart taglia la linea esterna, i moti contemporanei delle molecole contenute tra queste spire saranno quali sono rappresentati dalle freccie nella figura; cioè vi saranno due sezioni nodali spirali di cui le linee $a'b$, cb', obblique allo spessore delle pareti del tubo faranno parte, e relativamente alle quali le molecole si muoveranno contemporaneamente in verso opposto in tutta la parte solida del tubo.

Per esaminare questi moti delle superficie interne dei tubi si può impiegare il solito mezzo della sabbia, od anche far uso di piccole sfere d'avorio, di marmo, o di ceralacca, che poste sopra i punti vicini a quelli per cui passano le spire dell' elice nodale nella linea inferiore dell'interna superficie del tubo, saranno spinte verso questi punti dalle escursioni delle molecole di questa superficie; e con tal mezzo si possono meglio verificare le circostanze relative all' andamento di queste elici nodali interne, e che sono ad esse altronde comuni colle esterne.

Se in vece di far produrre al cilindro pieno o cavo il suono il più grave che esso sia suscettibile di rendere, se gli fa produrre il suono che è all' ottava acuta di quello, si osserva che le linee nodali in elici vi sono ancora continue e disposte relativamente a ciascuna delle sezioni che si rendono immobili col toccarle, nei punti corrispondenti ai nodi propriamente detti

da cui dipende il tuono reso dal cilindro, nella stessa maniera sovra indicata; ma con questa circostanza da notarsi che le linee oltre di girare partendo da ciascuna di queste sezioni in direzione opposta, partono pure da punti diametralmente opposti, da una di queste sezioni nodali all' altra; cosicchè se per esempio in una data posizione del cilindro, esse partono per una di queste sezioni da un punto della linea superiore, esse partiranno per l' altra sezione nodale da un punto della linea inferiore; e così alternativamente per le sezioni nodali diverse, a cui corrispondono suoni più elevati.

129. Savart estendendo ora simili osservazioni a lamine di sezione rettangolare, ha verificato ciò che sopra abbiamo annunziato, cioè che si formano pure sulle faccie di queste lamine linee nodali continue, per cui le linee nodali che si osservano sulle faccie opposte sono tra loro collegate per mezzo di quelle che si formano sopra le faccie intermedie. La disposizione la più semplice di queste linee, e di cui ha osservato traccie più o meno distinte in alcuni casi, è quella segnata nella fig. 49. Le linee nodali *NN* di una delle faccie più larghe trasversali alla lunghezza della lamina e tali al solito che quelle d' una faccia corrispondono agli intervalli fra quelle della faccia opposta sono, come si vede, riunite da linee nodali curve *Nn* sullo spessore della lamina, cosicchè ne risultano due linee continue che partendo da un punto di mezzo della lunghezza, in cui si suppone posta la linea nodale corrispondente all'elevazione del suono reso dalla lamina, girano in direzione opposta verso le due estremità; onde queste linee rappresentano realmente le elici osservate da Savart nelle verghe cilindriche, modificate solo dalla forma rettangolare della lamina. Tra queste linee debbono del resto supporsene altre intermedie che camminino nella stessa direzione da ciascuna parte della lamina, e in cui i moti delle molecole si facciano contemporaneamente in direzione opposta a quelli delle prime, conformemente a ciò che ho osservato sulle elici delle verghe cilindriche, onde risulteranno sulle opposte faccie linee nodali corrispondenti, ma in cui i moti delle molecole saranno opposti, e di cui le une faranno parte della linea continua osservata da Savart, e le altre della linea continua intermedia da esso non

osservata, e probabilmente poco osservabile per la lentezza e ristrettezza delle escursioni che relativamente ad essa si fanno.

Sembra più difficile a concepirsi come si possano riferire a linee continue le linee nodali obblique, e ordinariamente curve che si formano soventi sulle faccie più estese delle lamine, e in posizione tale che quelle d' una faccia incrocicchiano quelle della faccia opposta, come nella fig. 50, ove le linee nodali della faccia superiore sono segnate con tratti pieni, e quelle della faccia inferiore con linee punteggiate, e gli incrocicchiamenti delle prime colle seconde sono segnati dalle lettere a,b,c,d. Tuttavia il sig Savart ha fatto osservare che queste linee così disposte possono supporsi collegate tra loro per mezzo di quattro linee nodali continue, di cui si scoprono anche sperimentalmente le traccie sulle faccie laterali che formano lo spessore della lamina, e disposte come nella fig. 51. Le due linee segnate su tutte le faccie, l' una col numero 1 e l' altra col numero 2, girano attorno alla lamina nella stessa direzione, cioè per esempio da sinistra a destra, ma partendo da punti corrispondenti A, B su due spigoli opposti; le due altre linee segnate rispettivamente coi numeri 3 e 4 sovra ciascuna delle faccie girano in senso opposto a quelle prime, cioè per esempio da destra a sinistra, partendo pure da quei due punti opposti A e B. Le sperienze relative a queste linee nodali furono fatte da Savart col solito mezzo della sabbia sparsa sopra ciascuna delle faccie, che metteva successivamente al disopra in posizione orizzontale; le vibrazioni si comunicavano alla lamina per mezzo d' un tubo di vetro impiantato alla sua estremità, e che faceva vibrare longitudinalmente.

130. Osservazioni analoghe alle fin qui riferite furono pur fatte dal sig. Savart sopra verghe, e lamine fissate od incastrate ad una delle estremità o ad amendue, ed anche sopra corde, e membrane tese.

Linee e sezioni continue dello stesso genere paiono anche formarsi talvolta nelle vibrazioni tangenziali trasversali, quali le longitudinali divengono, quando la dimensione più estesa, secondo cui le vibrazioni si facevano, si diminuisce, e si aumenta al contrario la dimensione della larghezza, finchè

la prima divenga larghezza, e la seconda lunghezza, come sopra abbiamo detto (1).

Da tutte queste osservazioni di Savart risulta come abbiamo annunziato che le diverse maniere di vibrazioni che si sogliono distinguere ne' corpi non sono che casi diversi della direzione delle trasposizioni, allontanamenti, ed avvicinamenti delle molecole vibranti, relativamente alle dimensioni di questi corpi che si considerano; bisogna però notare che secondo questi diversi casi, tali moti sono necessariamente accompagnati da flessioni de' corpi e trasporto di alcune delle loro parti in complesso, in direzioni diverse, secondo che l' estensione delle loro dimensioni le permettono più o meno facilmente. Quindi le diverse leggi delle formazioni delle linee e sezioni nodali, e del numero delle vibrazioni e conseguentemente dell' elevazione del suono, che i corpi presentano in questi diversi casi.

Così nelle vibrazioni longitudinali i numeri delle vibrazioni in un dato tempo, sono, per ciascuna maniera di vibrare, in ragione inversa della lunghezza, come sopra si è detto, senza che la larghezza o lo spessore vi abbia alcuna influenza, i trasporti delle molecole non facendosi in queste specie di vibrazioni, che parallelamente alla lunghezza medesima. Ma se si accorcia la lamina, e si allarga nello stesso tempo, in maniera che la lunghezza di prima divenga larghezza, e reciprocamente, le vibrazioni continuando a farsi nella stessa direzione di prima, queste vibrazioni non potranno più farsi in generale senza inflessioni della lamina relativamente alla sua lunghezza che prima era larghezza; a queste inflessioni la lamina resisterà con una forza che dipenderà da questa larghezza divenuta lunghezza, da cui prima le vibrazioni non soffrivano alcuna influenza, essendo minore questa forza quando questa dimensione è maggiore, e che inoltre dipenderà dalla lunghezza di prima divenuta larghezza secondo una legge inversa da quella con cui

(1) Può pure consultarsi sul moto vibratorio di alcuni corpi solidi una Memoria del sig. Peyré pubblicata tra quelle della Società delle Scienze Naturali *de Seine et Oise*, e di cui si trova un estratto nella *Biblioth. Univers.* di Ginevra, octobre 1835.

ne dipendevano i moti di vibrazione nel primo caso, essendo ora maggiore questa forza quando questa dimensione è maggiore, al contrario di quello che prima accadeva; si troverà dunque che il numero delle vibrazioni in un dato tempo sarà in ragione inversa dei quadrati della prima dimensione che è ora la lunghezza, e in ragione diretta dell' altra dimensione che ora è larghezza, in vece che nelle vibrazioni longitudinali era in ragione inversa di questa dimensione che formava allora la lunghezza. In somma le leggi delle vibrazioni della lamina nel secondo caso indicato saranno le stesse relativamente alla lunghezza e alla larghezza, che quelle delle vibrazioni trasversali delle lamine nel piano del loro spessore relativamente alla lunghezza e allo spessore, come ciò dee essere, poichè non ne differiscono se non in quanto si considera nelle une come spessore ciò che nelle altre è larghezza, e reciprocamente.

Del resto il signor Savart osserva qui in generale (Nota pubblicata negli *Annales de chimie et de physique*, *août* 1826) che siccome qualunque specie di vibrazione d' un corpo può comunicarsi a un altro nella stessa direzione, comunque si variino le dimensioni di questo, e la loro posizione relativamente a questa direzione, e rendervi per conseguenza lo stesso suono, bisogna necessariamente ammettere che un corpo qualunque è suscettibile di vibrare in infiniti modi, in maniera da produrre suoni di infiniti gradi di elevazione, e ciò per mezzo delle diverse posizioni, e curvature ossiano distorsioni delle sue linee e sezioni nodali, che collegano per così dire una maniera di vibrare coll' altra per gradazioni insensibili; cosicchè il principio che generalmente si ammette che un dato corpo abbia una successione determinata di suoni di elevazioni crescenti, a misura che si divide in un maggior numero di parti nel vibrare, dee restringersi al caso in cui si posi per condizione che il carattere proprio dei modi di suddivisione resti il medesimo, cioè si faccia astrazione dalle distorsioni delle sezioni nodali per cui si può passare da un carattere all' altro. Questa maniera però di considerare le distorsioni delle linee nodali, sarebbe contraria all' opinione di Chladni riferita al n. 116, secondo la quale esse non sarebbero che modifica-

zioni nella forma delle parti vibranti, che non altererebbero la loro estensione, nè il suono che esse producono.

131. La comunicazione del moto di vibrazione dee necessariamente aver luogo anche tra un corpo solido vibrante, e un liquido, o fluido aeriforme che lo circonda; non è qui il luogo di parlare delle vibrazioni di questi fluidi, che ne risultano; si osserverà soltanto che se il fluido entro a cui un corpo solido fa le sue vibrazioni, ha una certa densità comparabile a quella del solido, dee risultarne un ritardo nelle vibrazioni di questo, e quindi un abbassamento del tuono che esso renderebbe nel vacuo, o nell' aria, dalla resistenza della quale a questo riguardo si fa comunemente astrazione. Questo cangiamento è nullo o insensibile pei moti longitudinali, o in generale per quelli tangenziali alla superficie dei corpi solidi, che possono farsi senza urtare il fluido circostante, ma è sensibile nel caso dei moti di vibrazioni normali od oblique alla superficie dei corpi vibranti; il sig. Savart ha fatto a questo riguado esperienze di cui si può vedere l' esposizione negli *Annales de chimie et de physique*, *novembre* 1825.

CAPO QUARTO

Delle relazioni tra la distanza e la grossezza delle molecole dei corpi solidi, e la loro densità.

132. Nei due capi precedenti abbiamo cercato di render ragione in generale di alcune proprietà de' corpi solidi, che si riferiscono alla forza più o meno grande con cui le loro molecole resistono alla separazione, o al cangiamento di distanza e di posizione che possono esservi cagionati dall' applicazione di forze estranee, in virtù delle forze da cui sono esse medesime animate. Ci resta ora a dare un' idea dei tentativi che si sono fatti per collegare in qualche modo la diversa densità che i corpi solidi ci presentano allo stato naturale, cioè indipendentemente da ogni forza estranea, e che nel Libro primo abbiamo insegnato a determinare sperimentalmente, colle cognizioni che possiamo avere della diversa

grossezza e distanza delle loro molecole, e delle altre qualità che distinguono le sostanze le une dalle altre.

Queste considerazioni prese in tutta la loro estensione entrerebbero nel dominio della Chimica, che ci fa conoscere quali sono le sostanze che si possono riguardare come elementari, cioè formate da una sola specie di molecole, e c' insegna ad ottenerle nella loro purezza quando la natura non ce le presenta isolatamente, e quali sono i composti che risultano dalla loro unione.

Tali cognizioni speciali non appartengono all'oggetto di questo trattato, e nemmeno crediamo doverle supporre come preliminari allo studio del medesimo; non possiamo però a meno di annunziarne in generale i principii, che servono di base alla ricerca di cui qui ci occupiamo, limitandoci nelle loro applicazioni alle sostanze più generalmente conosciute nelle arti, e negli usi della vita, e così indipendentemente dalle più precise e compiute cognizioni che la Chimica ci fornisce poi applicando questi stessi principii a tutte le sostanze conosciute. Considereremo primieramente quest' oggetto in una maniera indipendente dalla natura semplice o composta delle molecole integranti di cui un corpo è formato, poi relativamente alla composizione chimica, ossia alla riunione di molecole di diversa specie per formare la molecola totale d' un corpo composto.

Abbiamo già veduto nel Libro primo che le molecole integranti dei corpi, cioè quelle che costituiscono immediatamente colla loro riunione una porzione quanto si voglia piccola d' un corpo, dotata di tutte le proprietà esterne che appartengono a questo corpo, sono probabilmente formate in generale dalla riunione di più molecole semplici, o atomi propriamente detti, più strettamente collegati tra loro, e in una posizione determinata. La densità d' un corpo, in qualunque stato d' aggregazione esso si trovi, dee necessariamente essere in ragion composta della massa di ciascuna delle sue molecole integranti, e del numero di queste molecole che si trova in un dato volume del medesimo; ora questo numero, quando le molecole si suppongono uniformemente distribuite nel volume che si considera, è necessariamente in ragion inversa del cubo della distanza

de' loro centri. La densità è dunque definitivamente in ragion diretta della massa delle molecole integranti, ed inversa del cubo della distanza a cui i centri ne sono collocati. Quindi se si conoscesse la massa relativa delle molecole integranti che compongono un corpo in un dato stato, per esempio in quello di solidità di cui qui si tratta, ad una data temperatura, se ne potrebbero dedurre le distanze relative dei loro centri di figura o di gravità gli uni dagli altri, e paragonarle colla massa medesima delle molecole integranti, col numero, e colla distanza e posizione degli atomi che si possono supporre in ciascuna di esse, e colle diverse proprietà che distinguono le sostanze le une dalle altre, per cercarne la dipendenza da ciascuna di queste circostanze.

Ora le cognizioni che la Chimica ci somministra delle proporzioni determinate in cui i corpi si combinano tra loro, e che non paiono poter dipendere che dal numero relativo di atomi semplici, o di molecole integranti formate di questi atomi, che si riuniscono gli uni agli altri per formare la molecola integrante del corpo composto, e dalla massa relativa di ciascuno di essi atomi o molecole, possono dar luogo a congbietture o ipotesi più o meno probabili sulla massa relativa di questi atomi, e quindi delle molecole integranti risultanti, ne' diversi stati de' corpi, e particolarmente in quello di solidità, dalla riunione di un numero più o meno grande di atomi semplici, o di molecole integranti già di essi composte. Il paragone della densità de' corpi colle masse delle molecole determinate secondo queste ipotesi potrà dunque condurci a qualche idea sulla dipendenza della distanza di queste molecole ne' diversi corpi, dalla loro massa, e da altre circostanze nella loro formazione, o da proprietà particolari che loro appartengano.

133. In primo luogo vediamo, quanto alle sostanze che la Chimica attuale riguarda come semplici ossia formate di una sola specie d' atomi, che i metalli i quali secondo le proporzioni in cui si combinano cogli altri corpi, offrono in generale molecole o atomi di masse più considerevoli, sono pur quelli che hanno la maggior densità; anzi quelli tra loro che si distinguono per la grandezza della massa degli atomi, che le considerazioni chimiche loro assegnano, come l'oro,

il platino, il piombo ecc., sono pur anche quelli di cui è particolarmente notabile la densità o peso specifico; e siccome per altra parte in sostanze che hanno tanta analogia tra loro, come i metalli più cogniti, è naturale il supporre che le loro molecole integranti siano composte in generale dell' istesso numero di atomi elementari, similmente disposti, e che perciò le masse di queste molecole abbiano tra loro gli stessi rapporti che quelle degli atomi, o delle molecole che regolano le combinazioni chimiche, ne possiamo conchiudere che la distanza dei centri di queste molecole integranti non varii notabilmente per la variazione delle loro masse, o almeno sia lontana dal crescere proporzionalmente alla radice cubica di queste masse, come ciò si richiederebbe per compensare colla distanza l' influenza della grossezza, e rendere la densità a un dipresso la stessa per tutti i corpi.

Tuttavia se si considerano più specialmente i diversi metalli a questo riguardo paragonandoli sia tra loro, sia con alcune delle sostanze semplici non metalliche più conosciute, si troverà che perchè la proporzionalità approssimata tra le densità e le masse degli atomi o molecole vi abbia luogo, conviene supporre per alcuni di essi che l' atomo ne sia un moltiplo od un sommoltiplo per 2 ed anche per 4 dell' atomo relativo quale è ammesso ordinariamente dai Chimici, e particolarmente da Berzelius, che si è più specialmente occupato di questa determinazione degli atomi de' corpi semplici. Questa modificazione potrebbe, per alcuni di questi corpi applicarsi agli atomi semplici stessi, o a molecole formate da uno stesso numero di atomi, dietro alle considerazioni chimiche medesime, le quali lasciano in generale luogo a qualche arbitrio nella scelta dei moltipli di molecole che costituiscono le diverse combinazioni, e potrebbe anche appoggiarsi talvolta ad alcune considerazioni speciali ad essi relative; ma si può inoltre spiegare per alcuni altri, ritenendo l' atomo chimico suggerito dalle proporzioni nelle combinazioni, e supponendo che per questi metalli allo stato solido la molecola si raddoppii, o si riduca alla metà per la riunione o separazione di atomi parziali, che non abbia luogo negli altri; queste unioni o separazioni succedono infatti talvolta secondo le osservazioni,

come vedremo trattando della costituzione de' corpi gazosi, sia nelle combinazioni, sia nel passaggio dei corpi da uno stato d' aggregazione all' altro, sia finalmente in uno stesso stato d' aggregazione, ma con cangiamento delle proprietà chimiche e fisiche dei corpi.

Si potrà prendere un' idea di questa corrispondenza, quale si offre colle modificazioni del genere indicato, nel quadro seguente in cui ho posto allato alla densità o peso specifico di ciascuna sostanza semplice dato dall' osservazione, e già riferito nella tavola posta al fine del Libro 1.°, l' atomo o molecola chimica quale è attualmente ammesso da Berzelius, il valore del moltiplo o della frazione semplice del medesimo, a cui la densità si troverebbe prossimamente proporzionale, e il fattore per cui si dovrebbe ancora moltiplicare questo valore per avere la proporzionalità esatta. Per facilitare le comparazioni ho supposto, come ciò si può fare senza error sensibile, che la densità dello zolfo fosse 2,01 di quella dell' acqua che è l'unità in cui sono espresse tutte le densità, come 2,01 è il valore dell' atomo dello zolfo, secondo Berzelius, con due decimali, prendendo per unità l' atomo dell' ossigeno che è pur l' unità in cui tutti gli altri atomi della tavola sono espressi; così l' atomo ridotto o modificato esprime la densità medesima, calcolata secondo la proporzione suddetta relativamente allo zolfo.

Nomi delle sostanze	Densità o pes. sp. (acqua = 1)	Atomo di Berz. (ossig. = 1)	At. ridotto ossia dens. calc.	Moltiplo o fraz. dell'at. di B.	Fattore tra la dens. calc. e osserv.
Zolfo	2,01	2,01	2,01	1	1
Fosforo	1,77	1,96	1,96	1	0,90
Diamante	3,45	0,76	3,04	4	1,13
Carbone secondo Rumford	1,57		1,52	2	1,03
Oro	19,26	12,43	12,43	1	1,55
Platino	19,50	12,33	12,33	1	1,58
Argento	10,47	13,52	6,76	$\frac{1}{2}$	1,55
Palladio	11,30	6,66	6,66	1	1,70

Iridio	23,65	12,33	12,33	1	1,91
Osmio	23,65	12,44	12,44	1	1,90
Rodio	11,00	6,51	6,51	1	1,69
Rame	8,79	3,96	7,92	2	1,11
Ferro	7,60	3,39	6,78	2	1,12
Nichel	8,28	3,70	7,40	2	1,12
Cobalto	8,51	3,70	7,40	2	1,15
Manganese	8,01	3,46	6,92	2	1,16
Cadmio	8,60	6,97	6,97	1	1,20
Stagno	7,29	7,35	7,35	1	0,99
Piombo	11,40	12,94	12,94	1	0,88
Zinco	7,19	4,03	8,06	2	0,89
Bismuto	9,82	13,30	9,97	$\frac{3}{4}$	0,98
Arsenico	5,79	4,70	4,70	1	1,23
Molibdeno	8,61	5,99	8,98	$\frac{3}{2}$	0,96
Tellurio	6,20	8,02	6,01	$\frac{3}{4}$	1,03
Selenio	4,31	4,95	4,95	1	0,88
Tunsteno	17,40	11,83	17,74	$\frac{3}{2}$	0,98
Titanio	5,30	3,04	6,08	2	0,87
Antimonio	6,86	8,06	8,06	1	0,85
Cromio	5,90	3,52	7,04	2	0,84
Uranio	9,00	27,11	6,77	$\frac{1}{4}$	1,33
Potassio	0,86	4,90	1,22	$\frac{1}{4}$	0,71
Sodio	0,97	2,91	1,35	$\frac{1}{2}$	0,67
Merc. liq.	13,60	12,66	12,66	1	1,07
Merc. sol.	15,61	12,66	12,66	1	1,23
Iodio	4,95	7,90	5,95	$\frac{1}{2}$	1,25
Bromo liq.	2,97	4,89	2,14	$\frac{1}{2}$	1,22

Si scorge da questa tavola che la proporzionalità approssimata di cui si tratta, ha luogo per una gran parte dei corpi semplici che vi sono contenuti, senza alterazione dell' atomo chimico ammesso da Berzelius; in alcuni soltanto dee prendersi per ottenere tale proporzionalità il doppio o la metà di questo atomo; in pochi il quadruplo od il quarto, od anche tre metà o tre quarti. Gli scostamenti poi che le densità presentano ancora dalla proporzionalità colle molecole così modificate, e che sono espressi dai fattori che formano l' ultima colonna della tavola, possono attribuirsi sia ad una leggiera influenza della massa stessa delle molecole sopra la distanza dei loro centri, sia alla particolare posizione che gli atomi o molecole parziali possono prendere nella formazione di ciascuna molecola integrante, e che modifichi pure la distanza de' centri di queste, sia finalmente alla diversa qualità delle sostanze medesime, e particolarmente a quella che dai Chimici si distingue col nome di qualità elettro-positiva o elettro-negativa, e per cui nelle loro mutue combinazioni esse fanno funzione d'acido, o di base, proprietà che possiamo qui soltanto accennare, come fondata su considerazioni chimiche, ma che si manifesta anche nelle relazioni elettriche di questi corpi. Sarebbe però difficile, nello stato attuale delle nostre cognizioni, di assegnare la parte che ciascuna di queste circostanze può avere nel determinare la distanza dei centri delle molecole, e quindi, unitamente alla massa della molecola, la densità di ciascun corpo.

134. In una Memoria pubblicata nel Tomo 30 dell' Accademia delle Scienze di Torino *sulla densità de' corpi solidi e liquidi* ecc., io avea considerato, tra queste circostanze, come la principale, quella della qualità elettro-positiva o elettro-negativa, cioè acida o basica dei diversi corpi. Questa qualità può riguardarsi come una conseguenza del diverso grado d'una qualità generale relativamente alla quale i diversi corpi si trovano al dissotto o al dissopra d' un certo punto determinato, che corrisponderebbe ad un corpo nè acido, nè alcalino, ossia ad un corpo *neutro*, a un dipresso come i gradi di calore al dissotto o al dissopra dello zero del termometro non formano realmente che una serie continua di gradi che si comprendono

sotto il nome di temperatura, e di cui lo zero del termometro non è esso medesimo che un grado determinato; questa qualità generale che comprenderebbe i diversi gradi di acidità o d' alcalinità, io l' indicava col nome di *numero affinitario*, ed avea cercato di determinarlo relativamente alle diverse sostanze per mezzo di considerazioni troppo estranee al nostro oggetto presente, per essere qui riferite. Paragonando quindi tra loro alcuni metalli quanto alla loro densità, massa della molecola, e numero affinitario che io credeva poter loro attribuire, ne avea dedotto una formola di relazione tra la distanza dei centri delle molecole, e il numero affinitario appartenente alle diverse sostanze; relazione per cui data la massa della molecola integrante d' un corpo allo stato solido, e il suo numero affinitario, si sarebbe potuto calcolare la distanza dei centri delle molecole e quindi la sua densità; e questa non avrebbe più dovuto differire da quella osservata, che per l' influenza delle altre cause che io riguardava come semplicemente perturbatrici, cioè della grossezza stessa della molecola, e del numero, e particolar posizione delle molecole parziali o atomi componenti la medesima.

Siccome però le basi su cui io fondava la determinazione dei numeri affinitarii delle diverse sostanze erano ancora molto ipotetiche, non credo di poter qui riferire, come dimostrata, la formola di relazione che io avea trovata per l' oggetto di cui si tratta. Mi limiterò solo a far osservare che tutte le comparazioni dei corpi tra loro a questo riguardo paiono confermare, che in generale un grado più elevato della qualità elettro-positiva, o un minor grado di qualità elettro-negativa, ossia, secondo l' indicata espressione, una maggior elevazione del numero affinitario tende ad aumentare la distanza delle molecole integranti de' corpi, e quindi a diminuire la densità che sarebbe dovuta alla grandezza delle loro molecole, cosicchè le sostanze elettro-negative debbono essere più dense, e le elettro-positive più leggiere di quello che richiederebbe la proporzionalità con questa grandezza. Basta a convincersene la semplice ispezione dell' ultima colonna della tavola qui sopra, secondo la quale tra i metalli più cogniti quelli che sono riconosciuti per più elettro-negativi, quali sono l' oro, l'argento

ed il platino presentano il fattore 1,55 o 1,58, e il palladio, l' iridio, l' osmio ed il rodio, che hanno ad un alto grado questa stessa qualità, offrono per valor medio di questo fattore circa 1,8. I metalli mezzani a questo riguardo come il rame, il ferro, il nichel ecc., a cui si possono aggiungere tra i corpi non metallici lo zolfo ed il carbonio, hanno il fattore compreso a un dipresso tra 1 e 1,20; pei metalli ordinarii più elettro-positivi come lo stagno, il piombo, lo zinco ecc., a cui si può aggiungere il fosforo, questo fattore si stende da 1 a 0,9, e pei metalli alcaligeni, più basici o elettro-positivi di tutti, il potassio ed il sodio, esso è per una media 0,7.

Si può dunque supporre per approssimazione che la distanza dei centri delle molecole non varii notabilmente che in ragione della qualità elettro-positiva, o elettro-negativa de' corpi, cosicchè la loro densità non dipenda che da questa qualità e dalla massa della loro molecola integrante, facendo astrazione dalle variazioni della distanza dei centri che possono essere prodotte dalla grossezza stessa di questa molecola, e dal numero e posizione delle molecole parziali che la compongono E quest' approssimazione può estendersi dai corpi semplici anche ai corpi composti di cui le molecole non differiscono da quelle dei primi, se non per la riunione di molecole parziali di diverse specie in una sola molecola composta; bisognerà solo aver riguardo alla massa totale della molecola composta, secondo il numero e la massa relativa di queste molecole di diversa specie che vi si supporranno e alla qualità elettro-positiva, od elettro-negativa che risulterà nel composto da quella de' suoi componenti. Ma l' applicazione di questo principio ai casi particolari diviene anche qui difficile per la mancanza od incertezza dei dati relativi a ciascuna combinazione sia riguardo al numero di molecole parziali che concorrono a formare la molecola totale, sia riguardo alla qualità più o meno elettro-positiva, o elettro-negativa dei componenti.

La supposizione che la disposizione diversa delle molecole semplici, o d'una sola o di più specie, nella formazione della molecola totale, non abbia una grande influenza sulla distanza dei centri delle molecole totali, e quindi sulla densità che dee risultare ne' corpi dalla massa di queste molecole, e dalla

qualità loro elettro-chimica pare abbastanza giustificata dalla circostanza che molte sostanze *isomere*, cioè della stessa composizione chimica, ma dotate di proprietà diverse, e di cui le molecole totali, supponendole altronde formate d' un ugual numero di atomi o molecole parziali, debbono differire tra loro per la disposizione che queste vi prendono (n. 27), offrono densità poco diverse; così per esempio la densità dello spato calcare è circa 2,7, e quella dell' arragonite 2,9; cosicchè queste densità stanno tra loro come 14 a 15 circa, sebbene le proprietà e le forme di cristallizzazione di questi due minerali siano affatto diverse, e per conseguenza diversa la posizione delle molecole parziali nella formazione della loro molecola totale.

135. Frère de Montizon (*Annales de chimie et de physique, septembre* 1816, *et janvier* 1818) ha creduto osservare nei gradi di solforazione e d' ossidazione dei diversi metalli certi rapporti in volume, che potrebbero indurre a pensare che la massa delle molecole dei corpi allo stato solido sia esattamente proporzionale alla loro densità; ma le sue considerazioni mi paiono solamente confermare quella general connessione tra la densità dei corpi, e la massa delle loro molecole integranti, che abbiamo ammessa, senza escludere l'influenza delle altre cause di cui abbiamo parlato, e particolarmente quella della qualità elettro-positiva o elettro-negativa. Infatti i numeri trovati da Montizon per esprimere questi rapporti non paiono avere alcuna relazione colle proporzioni definite, che reggono la formazione dei composti, e non presentano una certa semplicità se non per mezzo di modificazioni considerevoli fatte ai risultati delle osservazioni.

I signori Royer e Dumas in una Memoria pubblicata nel *Journal de physique* di Blainville, giugno 1821, sotto il titolo di *Essai sur le volume des atomes des corps* hanno cercato di stabilire relativamente a questo volume degli atomi una regola che verrebbe anch'essa a far dipendere la densità dei corpi solidi dalla massa dei loro atomi o molecole ad esclusione di ogni altra qualità delle sostanze. Questa regola consiste nel dire che il volume dell' atomo di tutti i corpi solidi è o uguale, o rappresentato da un moltiplo variabile del più piccolo di

tali volumi, o piuttosto d'una unità ideale che si prende per tipo di tutti. I suddetti Fisici hanno chiamato *volume dell' atomo* d' un corpo lo spazio che ciascun atomo o molecola integrante occupa in un volume di questo corpo avuto riguardo alla distanza che vi dee essere tra i centri dei diversi atomi. Questo volume dell' atomo non è altro che il quoziente che si ottiene dividendo il peso dell' atomo o molecola integrante per la densità del corpo; poichè il peso o massa dell' atomo è evidentemente rappresentato dalla densità del corpo moltiplicata per la porzione di volume che ciascun atomo vi occupa. La regola indicata viene adunque ad ammettere la densità dei corpi solidi proporzionale alla massa della molecola o ad una parte aliquota di questa massa. Royer e Dumas paiono supporre per la maniera stessa con cui hanno espressa questa regola, che l' atomo o molecola rimanga in tutti i corpi solidi tal quale essa risulta dalle considerazioni chimiche, e per cui essi hanno seguito in generale l' estimazione di Berzelius, d' onde seguirebbe, secondo la legge indicata, che la distanza dei centri delle molecole, quando essa non è uguale, fosse rappresentata dalla radice cubica d' un moltiplo intiero d' un numero costante, poichè questa distanza è la radice cubica del volume dell' atomo. Ma supponendo che la regola fosse provata dall' osservazione sarebbe più semplice il concepire che la distanza delle molecole integranti, e per conseguenza il volume di ciascuna di queste molecole, quale essa si trova nel corpo solido che si considera, fosse sempre costante, e che solo la massa di questa molecola fosse una parte aliquota dell' atomo o molecola dedotta dalle considerazioni chimiche, cioè che quest' ultima si dividesse in 2, 3, ecc. molecole parziali, secondo le diverse sostanze. Il numero di parti in cui la molecola chimica dovrebbe supporsi divisa, nelle applicazioni che i suddetti autori hanno fatto della loro regola sarebbe indeterminato, e si estenderebbe da 2 sino a più di 100.

Ma questa regola in qualunque maniera se ne concepisca il principio non pare realmente provata, come ho già osservato nella citata Memoria sulla densità de' corpi solidi ecc., dalle osservazioni che Royer e Dumas hanno radunate sotto forma di quadri per istabilirla. Infatti la loro unità di volume

degli atomi essendo arbitraria, si concepisce che se ne può prendere una tale che i suoi moltipli sufficientemente grandi possano rappresentare prossimamente i volumi degli atomi dei diversi corpi, dati dall'osservazione. Nel loro quadro generale essi hanno preso per unità la terza parte del volume dell'atomo del diamante, che essi hanno trovato il minimo di tutti, questo corpo avendo realmente una densità molto grande relativamente all' atomo del carbonio, che ne forma la sostanza, e i diversi moltipli che essi ne hanno ammessi, vanno sino a 128. È chiaro che se per le diverse sostanze essi non avessero trovato un' approssimazione sufficiente in uno dei moltipli compresi tra 2 e 128, essi vi sarebbero giunti prendendo un'unità ancora più piccola. Non pare adunque che si possa considerare la regola di cui si tratta come un risultato generale dell' osservazione. Altronde, sebbene come abbiamo già accennato, sia probabile, che le molecole integranti dei corpi solidi si formino talvolta per la riunione o divisione delle molecole indicate dalle considerazioni chimiche, non sembra potersi ammettere con qualche probabilità, che questa divisione si faccia in così gran numero di atomi parziali, quanto l' applicazione di questa regola lo richiederebbe, almeno secondo la sola maniera con cui se ne potrebbe rendere teoricamente ragione. Da simili ipotesi ci dispensa l' ammessione dell' influenza di altre qualità, indipendente dalla massa delle molecole, sulla loro distanza, qual è particolarmente la qualità elettro-positiva o elettro-negativa delle diverse sostanze, alla quale abbiamo creduto dover attribuire la parte principale a questo riguardo, in vece che Royer e Dumas non l' hanno fatta entrare per nulla in considerazione.

136. Passiamo ora a considerare i corpi solidi composti. Molti autori ne hanno paragonato immediatamente il peso specifico con quello dei loro componenti, ed hanno cercato di stabilire qualche relazione tra loro. Pare in primo luogo doversi distinguere a tale riguardo le semplici leghe che risultano dalla fusione dei diversi corpi in proporzioni indeterminate l' uno coll' altro, cioè dalla soluzione di uno di essi nell'altro liquefatto, e che si rappiglia poi pel raffreddamento, dalle combinazioni propriamente dette in proporzioni determinate. Le leghe, quelle per esempio dei metalli

tra loro, si possono concepire come aggregati delle molecole integranti dell'uno dei componenti frapposte a quelle dell'altro, nelle quali però le forze di attrazione e ripulsione che si esercitano tra le molecole vicine di diverso genere essendo diverse da quelle che si esercitano tra le molecole di ciascuno dei due corpi separatamente, gli spazii vacui, od occupati dal calorico o dall'etere che tra loro rimangono, possono essere maggiori o minori della somma degli spazii che vi erano tra le molecole dei componenti separati, e quindi la densità della lega può essere minore o maggiore di quella che risulterebbe per una semplice regola d' alligazione o mescolanza tra i due corpi. Può anche accadere che nell' azione d'un metallo liquefatto sull' altro si faccia tra loro una combinazione in proporzione determinata, la quale poi si sciolga nella quantità restante di uno dei medesimi, oppure che si formino due composti determinati in proporzione diversa, i quali si sciolgano tra loro, fondendosi insieme in proporzione qualunque.

Quindi non dee far meraviglia se si sono trovate molte anomalie e variazioni nella densità delle leghe paragonata con quelle dei componenti, secondo la diversa natura di questi, e le loro proporzioni, cosicchè ora questa densità si trova a un dipresso uguale a quella che risulterebbe da una regola d' alligazione, ora maggiore o minore della medesima. Il caso però d' una densità maggiore pare essere il più frequente.

La densità c che sarebbe data dalla semplice regola d' alligazione, cioè quella che il composto dovrebbe presentare per la giustaposizione e mescolanza delle molecole dei componenti senza condensazione nè dilatazione, chiamando m, n i pesi delle due sostanze allegate, a, b le loro densità o pesi specifici, è espressa dalla formola $c = \frac{(m+n)ab}{mb+na}$; poichè il volume del composto è in tal caso $\frac{m}{a}+\frac{n}{b}$ ossia $\frac{mb+na}{ab}$, e il peso specifico del composto dee essere uguale al suo peso assoluto $m+n$ diviso per questo suo volume $\frac{mb+na}{ab}$. Ma come abbiamo detto il peso specifico reale del composto può essere maggiore o minore di questa quantità.

Le leghe di piombo e stagno sono di quelle che hanno in generale una densità minore di quella data da questa formola, cioè presentano una dilatazione; abbiamo sulle densità di queste leghe in diversa proporzione dei metalli componenti, e su quella degli amalgami di ciascuno di questi due metalli col mercurio, esperienze molto accurate di Kupffer, *Annales de chimie et de physique*, *mars* 1829. Tra le leghe di piombo e di stagno quella di circa un volume di piombo e 2 volumi di stagno che corrisponde in peso a circa 10 di piombo e 13 di stagno offre una densità molto prossimamente uguale a quella data dalla formola, senza condensazione nè dilatazione. Tutte le altre leghe di questi due metalli offrono una dilatazione, e quindi una densità minore di quella calcolata colla suddetta formola, sia che si accresca la quantità del piombo, o quella dello stagno, e la diminuzione di densità osservata relativamente alla calcolata, cresce a misura che le proporzioni si scostano da una parte o dall' altra della composizione indicata. Quanto agli amalgami di stagno e di piombo, di cui faremo qui cenno per la connessione del soggetto, sebbene essi siano piuttosto soluzioni che leghe, poichè uno dei metalli componenti è liquido, essi non offrono mai dilatazione; Kupffer ha trovato, quanto all' amalgama di stagno, che quello formato di circa un volume di stagno e due di mercurio non offre nè dilatazione nè contrazione; ma la contrazione ha luogo per le altre proporzioni, ed essa si accresce a misura che si accresce la quantità sia dello stagno, sia del mercurio, partendo da quel punto. Tra gli amalgami di piombo quello di 1 volume di piombo e 3 di mercurio non prova che una piccolissima contrazione, per cui la densità osservata sta alla calcolata colla formola, come 1,003 ad 1, e partendo da questo minimo la contrazione aumenta pure per l'accrescimento della quantità o di mercurio o di piombo. È notabile, che secondo questi risultati lo zero, o il minimo di dilatazione o di contrazione corrisponda ad un rapporto semplice in volume.

137. Quanto ai composti per combinazione chimica in proporzioni determinate, la maniera immediata di concepire la loro formazione è di supporre che un certo numero di molecole integranti o totali dell'uno dei componenti si unisca con

un altro numero di molecole integranti del secondo componente, per formare una molecola composta, di massa uguale alla somma di tutte queste molecole di diverse specie. Nel caso più semplice una molecola integrante sola di uno dei componenti si unirà ad una o più molecole dell' altro, cosicchè non si avrà nel composto che un numero di molecole integranti uguale a quello delle molecole del primo componente. Se dunque in questo caso la distanza delle molecole integranti rimanesse la stessa che nel primo componente, il volume del composto sarebbe pure uguale a quello di questo primo componente, e la sua densità starebbe alla densità di questo come la somma dei pesi o masse di tutte le molecole formanti la molecola totale sta al peso della molecola di questo primo componente, cioè come il peso assoluto del composto alla porzione per cui questo componente vi entra. Ritenendo le stesse lettere di sopra per le proporzioni in peso, e per le densità, si avrà così per calcolare in quest' ipotesi la densità c del composto, la proporzione

$$m : m+n :: a : c = \frac{a(m+n)}{m}.$$

E in generale, sempre nella supposizione che la distanza tra le molecole composte sia la stessa che tra le molecole di uno dei componenti, la densità del composto dovrà stare a quella di questo componente come la somma delle masse di tutte le molecole di questo e dell' altro componente che concorrono a formare la molecola composta, sta alla massa della molecola del primo componente; cioè se si indica con q il numero delle molecole integranti di questo che si unisce ad un numero dato qualunque di molecole dell'altro componente nella molecola composta, si avrà la proporzione

$$\frac{m}{q} : m+n :: a : c = \frac{aq(m+n)}{m}.$$

Se dunque non si suppone nella formazione della molecola composta nè divisione in molecole parziali, nè ulteriore riunione di molecole, la densità osservata nel composto, mag-

giore o minore di quella espressa da queste formole, dovrà attribuirsi ad una diminuzione o ad un aumento della distanza delle molecole del composto relativamente a quella delle molecole di quel componente. Ma se quest' aumento o diminuzione di densità è molto notabile, diverrà probabile che due o più di quelle supposte molecole risultanti immediatamente nella maniera più semplice dalla combinazione si siano riunite in una sola molecola integrante del composto; o che al contrario la supposta molecola si sia divisa in due, quattro ecc. molecole, conservando lo stesso rapporto tra le molecole di diversa specie, per formare la molecola integrante del composto.

Tal è la maniera la più naturale che la teoria suggerisce per la comparazione della densità dei composti con quella dei loro componenti. Gli autori però che si sono occupati di questa comparazione, l' hanno fatta ordinariamente, come per le semplici leghe, calcolando il peso specifico colla regola di alligazione, di cui abbiamo più sopra data la formola, come se le molecole dei componenti dovessero tra loro mescolarsi, e su questo miscuglio si facesse poi una condensazione o dilatazione per l' azione delle diverse forze molecolari.

Hassenfratz è uno dei primi che si siano applicati a questo oggetto; egli ha determinato il peso specifico di diversi composti, e lo ha paragonato nella maniera indicata con quello dei componenti. Ma le composizioni in peso di questi composti allora generalmente ricevute, non aveano quella precisione che loro si è data dopo l'introduzione della teoria atomica nella chimica. Emmet (*Philos. Mag.* giugno 1829) ha cercato di verificare alcuni di questi risultati relativamente ai solfuri ossia alle combinazioni dei metalli collo zolfo; ma abbiamo un lavoro molto più esteso ed accurato a questo riguardo in una Dissertazione o Tese pubblicata da Polidoro Boullay a Parigi sulle modificazioni che subisce il volume de' corpi nelle combinazioni chimiche, e di cui si trovano estratti negli *Annales de chimie et de physique*, *mars* 1830, e nel *Bulletin des Sciences physiques et mathématiques* di Ferussac, *mai* 1830.

Egli ha dato al calcolo del peso specifico del composto, nell' ipotesi suddetta d' una semplice mescolanza e giustaposizione

delle molecole, da paragonarsi col peso specifico osservato, una forma diversa da quella sovra indicata, ma che ci conduce alla stessa formola. Egli chiama, come Royer e Dumas, *volume dell'atomo* d' un corpo il quoziente della massa dell' atomo o molecola, che gli si suppone, pel suo peso specifico, e ammette nel calcolo che il volume dell' atomo del composto sia uguale alla somma dei volumi di tutti gli atomi dei componenti che entrano nel medesimo; paragona poi questo volume così calcolato dell' atomo composto con quello dato dall' osservazione, cioè con quello che si deduce dalla densità o peso specifico osservato del composto. Se si chiama V il volume così calcolato dell' atomo composto, e si indicano con u e v quelli degli atomi componenti in numero p e q rispettivamente, si avrà $V=pu+qv$. Chiamando poi A, B i pesi delle molecole dei due componenti, cosicchè $pA+qB$ sia il peso o massa della molecola composta, P' il peso specifico osservato del composto, e V' il volume dell' atomo che se ne deduce, si avrà $V'=\frac{pA+qB}{P'}$, da paragonarsi con V. Per vedere la relazione che ha questa maniera di calcolare con quella immediatamente riferita alle densità (n. prec.) si osserverà che per la significazione data al volume V dell'atomo, il peso specifico calcolato del composto sarebbe $P=\frac{pA+qB}{V}=\frac{pA+qB}{pu+qv}$, ossia, per la significazione di u e v,

$$P=\frac{pA+qB}{\frac{pA}{a}+\frac{qB}{b}};$$

ora paragonando colla formola relativa alle densità, si ha $pA=m$, $qB=n$; dunque

$$P=\frac{m+n}{\frac{m}{a}+\frac{n}{b}}=\frac{(m+n)ab}{bm+an},$$

peso specifico calcolato da paragonarsi con quello osservato P', come nella citata formola. Del resto Boullay si serve e dell'una

e dell' altra di queste maniere di paragone per determinare la condensazione o dilatazione del composto relativamente ai componenti. Così applicandole a diversi solfuri ed ioduri, ossia combinazioni di metalli collo zolfo, e coll' iodio, egli trova pei solfuri sempre condensazione, e per la maggior parte degli ioduri, dilatazione.

138. Ci servirà d' esempio pei primi il solfuro di mercurio che Boullay suppone composto di un atomo o molecola di zolfo, e due di mercurio, prendendo 2,01 per l' atomo dello zolfo, riferito a quello dell' ossigeno = 100, come Berzelius, e per l' atomo del mercurio 633, metà di quello ammesso da Berzelius. Dividendo questi atomi dello zolfo e del mercurio per le densità di questi corpi, (pel primo de' quali Boullay prende la densità 2,086, e pel secondo si ha 13,6 circa) si trova pel volume dell'atomo dello zolfo 96,4, e per quello dell'atomo di mercurio 46,55. Il volume calcolato dell' atomo del solfuro sarebbe dunque $96,4 + 2 . 46,55 = 96,4 + 93,1 = 189,5$. Ora il volume dell' atomo dedotto dalla densità di questo solfuro, che Boullay ha trovata 8,124, sarebbe

$$\frac{1266 + 201}{8,124} = \frac{1467}{8,124} = 180,5.$$

Vi è dunque diminuzione di volume di circa $\frac{9}{189,5}$ ossia $\frac{1}{22}$ del volume calcolato. Se poi si vogliono paragonare immediatamente i pesi specifici, si troverà qui per la densità calcolata colla formola $\frac{(m+n)ab}{bm+an}$ (osservando che $m = 126,6$, $n = 201$) il numero 7,75, mentre la densità osservata è 8,12; vi è dunque aumento di densità di $\frac{1}{21}$ circa della densità calcolata, risultato che coincide col primo.

Ma come abbiamo già detto questa maniera di paragonare la densità dei composti con quella dei componenti non è atta a condurci ad alcuna vista teorica relativamente ai composti in proporzione determinata, avuto riguardo alla maniera con cui pare doversi considerare la formazione delle loro molecole. Se si vuole far qui il paragone, pel solfuro di mercurio di cui si

tratta, secondo la formola sopra indicata per questi composti $c = \frac{a\,q\,(m+n)}{m}$, prendendo ancora m pel mercurio ed n per lo zolfo, si avrà $q = 2$, secondo l' estimazione degli atomi di Boullay, e la densità calcolata, nella supposizione che le molecole composte restino alla stessa distanza di quelle del mercurio, sarà

$$c = \frac{2.13{,}6.1467}{1266} = 31{,}52.$$

Se poi si volesse calcolare la densità nell' ipotesi che la distanza delle molecole composte restasse uguale a quella delle molecole dello zolfo, prendendo m, a per lo zolfo, e n, b pel mercurio, e osservando che allora $q = 1$, si avrà

$$c = \frac{2{,}09.1467}{201} = 15{,}25.$$

Nel primo caso se vogliamo approssimarci alla densità osservata, dobbiamo supporre divisione della molecola composta in 4, il che darà 7,88 per la densità calcolata; nel secondo caso si dovrà supporre la divisione in 2 soltanto, e si otterrà così 7,62; densità amendue inferiori a quella osservata, l' una di circa $\frac{1}{32}$, l'altra di circa $\frac{1}{15}$. Del resto queste disparità nel numero di parti in cui siamo condotti a dividere la molecola immediatamente risultante dalla combinazione, per ottenere una densità prossima a quella osservata, secondo che riferiamo la distanza delle molecole composte a quella delle molecole del mercurio, o a quella delle molecole dello zolfo, dipende da che nell' estimazione dell' atomo o molecola del mercurio relativamente a quella dello zolfo ammessa da Boullay, e a cui ci siamo finqui attenuti, si è supposta la molecola del mercurio la metà soltanto di quella che corrisponderebbe alla densità di questo metallo nell' ipotesi della proporzionalità approssimata tra le densità e gli atomi, su cui calcoliamo la densità del composto. Infatti abbiamo veduto nella tavola di comparazione delle densità e delle molecole, che la molecola

del mercurio 1266 di Berzelius, doppia di quella supposta da Boullay era quella che si accordava da vicino, e senza divisione colla densità del mercurio 13,6 comparativamente alla densità dello zolfo, e alla molecola di questo 201. Ora attribuendo al mercurio questa molecola di Berzelius, si avrà lo stesso peso 1266 da una sola molecola di mercurio in vece di due, e la formola darà così immediatamente, supponendo la distanza delle molecole composte uguale a quella delle molecole del mercurio ora divenuta poco diversa da quella delle molecole dello zolfo,

$$c = \frac{13{,}6 \cdot 1467}{1266} = 15{,}76 ,$$

densità che, con una sola divisione di questa molecola composta in due, ci darà come sopra 7,88 per la densità calcolata da paragonarsi a quella osservata 8,12. Secondo questa maniera di calcolare adunque, sia che si riferisca la distanza delle molecole composte a quella delle molecole del mercurio, o a quella delle molecole dello zolfo, ammettendo una divisione della molecola immediatamente formata dalla combinazione, in due, cosicchè ciascuna molecola del composto sia l'unione di una mezza molecola dell' uno e dell' altro componente, vi sarà condensazione, cioè alquanto maggior prossimità delle molecole di quella che vi fosse tra le molecole dello zolfo, o tra quelle del mercurio.

Gli altri solfuri che Boullay ha esaminati darebbero risultati analoghi.

139. Quanto agli ioduri considereremo pure per servir d'esempio quello di mercurio che Boullay riguarda come formato di un atomo di mercurio, e di un atomo d' iodio, prendendo sempre pel mercurio la metà dell' atomo di Berzelius, e per l' iodio un atomo poco diverso da quello di Berzelius, cioè 7833,33. Così il volume dell'atomo di mercurio rimane come sopra 46,55, e quello dell'iodio, poichè il peso specifico di questo corpo allo stato solido è 4,948, diviene $\frac{783{,}33}{4{,}948} = 158{,}3$. Si ha dunque per l'atomo composto il volume calcolato 158,3+46,5

$=204{,}8$. Per altra parte Boullay ha trovata la densità di quest' ioduro 6,32, da cui si deduce pel volume osservao

$$\frac{783{,}33 + 633}{6{,}32} = \frac{1416{,}33}{6{,}32} = 225;$$

vi è dunque dilatazione di circa $\frac{20}{205}$, ossia $\frac{1}{10}$ del volume dell' atomo calcolato. Se si vogliono paragonare immediatamente i pesi specifici, si troverà che quello calcolato secondo la suddetta ipotesi di semplice giustaposizione delle molecole sarebbe 6,912, il che dà una diminuzione della densità osservata 6,32, relativamente a quella calcolata, di $\frac{0{,}59}{6{,}91}$ ossia di circa $\frac{1}{11}$, risultato identico col primo.

Se ora si vuol calcolare secondo la maniera sopra proposta come la più conveniente per le combinazioni propriamente dette, si avrà per la densità dell'ioduro di mercurio, nell'ipotesi che la distanza delle molecole composte resti uguale a quella delle molecole del mercurio, $\frac{13{,}6 \cdot 1416}{633} = 30{,}42$; ammettendo una divisione della molecola in 4, questa densità diviene 7,60, maggiore dell'osservata 6,32, di quasi $\frac{1}{5}$; vi sarebbe dunque, anche in questo modo, dilatazione relativamente al risultato del calcolo, cioè distanza delle molecole composte dell'ioduro maggiore di quella tra le molecole del mercurio; e ciò supponendo le molecole del mercurio e dell' iodio quali le ha ammesse Boullay. Ma abbiamo già veduto che l' ipotesi stessa della proporzionalità approssimata della densità alla massa delle molecole, ossia d' una distanza poco diversa tra quelle dei diversi corpi, richiede che si prenda la molecola del mercurio doppia, e così uguale a quella ammessa da Berzelius. Per altra parte abbiamo creduto dover ridurre al contrario la molecola dell' iodio alla metà di quella assegnatagli da Berzelius e a un dipresso anche da Boullay, per renderla prossimamente proporzionale alla densità dell' iodio 4,95, comparativamente alle molecole del mercurio, e dello zolfo, e avuto riguardo alla qualità molto elettro-negativa dell' iodio, che dee tendere,

secondo l' osservazione sopra fatta, ad aumentarne la densità. Prendendo così la molecola del mercurio doppia, e quella dell' iodio metà di quelle supposte da Boullay, l' ioduro di cui si tratta si trova composto di 1 molecola di mercurio e 4 d'iodio. Il peso della molecola composta risultante immediatamente dalla combinazione sarà in questo caso $1266 + 4 . 391,66 = 1266 + 1566,6 = 2832,6$, e si avrà ancora la densità calcolata $\frac{13,6 . 2832,6}{1266} = 30,42$; essa richiede una divisione della molecola in 4 per ridursi a 7,60, che ci dà sempre una dilatazione. Ma questa dilatazione, e così una densità dell' ioduro minore di quella che corrisponderebbe alla sua molecola composta, relativamente al mercurio, non pare ammessibile secondo il nostro principio, mentre al contrario la qualità elettro-negativa che l' ioduro dee avere relativamente al mercurio, per l' unione dell' iodio alla sostanza di questo, dovrebbe tendere a dargli una maggior densità. Ora per ottenere questa conformità coll' indicato principio, basta supporre che la molecola dell' ioduro soffra ancora una divisione in 2 di più, cioè in 8 in tutto. La densità calcolata dell' ioduro si riduce allora a 3,80; la densità osservata 6,32 ne sarebbe di $\frac{2}{3}$ circa maggiore; e questa superiorità si dovrebbe attribuire parte alla natura elettro-negativa del composto comparativamente al mercurio, parte ad una condensazione prodotta dalla combinazione medesima, che avrebbe qui luogo come nei solfuri, e che potrebbe anche essere più considerevole in ragione della maggior affinità dell' iodio, che dello zolfo, pel mercurio.

Del resto abbiamo paragonato in questo calcolo la densità dell' ioduro di mercurio, come sopra quella del solfuro, alla densità del mercurio allo stato liquido, onde renderne i risultati comparabili con quelli di Boullay; dovrebbero questi risultati alquanto modificarsi, se si volessero riferire alla densità del mercurio, quale sarebbe allo stato solido, se esso potesse sussistere in questo stato alla temperatura ordinaria; ma ciò non cangierebbe essenzialmente le conseguenze che ne abbiamo dedotte.

La maggior parte degli altri ioduri esaminati da Boullay

presenterebbero considerazioni analoghe a quelle relative all' ioduro di mercurio.

140. Quanto all' ioduro di potassio, Boullay vi ha trovata, come pei solfuri una condensazione, cioè una diminuzione di volume relativamente a' suoi componenti, ossia un aumento di densità su quella data per la regola d' alligazione. Boullay suppone l' atomo o molecola del potassio a un dipresso quale l' ammette Berzelius cioè circa 490, prendendo 100 per l' ossigeno, e dietro al suo peso specifico 0,865, egli attribuisce a quest' atomo il volume 564. Quindi, ritenendo per l'iodio l' atomo 783,38, e il suo volume 158,3 come sopra, l'ioduro di cui si tratta sarebbe formato di un atomo di potassio e due d'iodio, e il volume calcolato del suo atomo diviene così $564 + 2 . 158,3 = 564 + 316,6 = 880,6$. Boullay ha trovato per esperienza a quest' ioduro la densità 3,104, il che dà pel volume del suo atomo dedotto dall' osservazione

$$\frac{490 + 2 . 783,33}{3,104} = \frac{2057}{3,104} = 663,$$

minore di circa $\frac{1}{4}$ del volume calcolato. Similmente facendo il calcolo immediatamente sulle densità, si trova, per la densità calcolata secondo la regola d'alligazione, 2,333, a cui la densità osservata 3,104 è superiore di circa $\frac{1}{3}$, il che dà il rapporto di 3 a 4 tra le densità come tra i volumi dell' atomo, secondo il calcolo, e secondo l' osservazione.

Se si vuole ora applicare a questo composto il nostro metodo di comparazione per le combinazioni propriamente dette, ritenendo dapprima gli stessi atomi o molecole pel potassio e per l' iodio, ammesse da Boullay, si avrà per la densità calcolata, nella supposizione che la distanza degli atomi composti resti uguale a quella degli atomi o molecole del potassio,

$$\frac{0,865 . 2057}{490} = \frac{1779}{490} = 3,63.$$

La densità calcolata sarebbe dunque maggiore di quella osservata; ma se si ammette una divisione della molecola composta in due, la densità calcolata diverrà 1,815, e così la densità osservata 3,104 ne sarà di circa $\frac{2}{3}$ maggiore, il che offre una condensazione simile a quella che abbiamo trovata per l'ioduro di mercurio ammettendovi la divisione in 8, della molecola immediatamente formata dalla combinazione.

Del resto la connessione supposta delle densità colle masse delle molecole richiede, come abbiamo veduto nella tavola delle densità e degli atomi, che si attribuisca all'atomo o molecola del potassio la quarta parte soltanto della massa assegnatagli da Berzelius, e così 122,5. Ma ciò non cangia per nulla il risultato precedente, purchè si prenda anche per l'atomo dell' iodio come sopra, e per la stessa ragione, la metà di quello di Berzelius e di Boullay. Infatti l' ioduro di cui si tratta sarà allora composto di 1 atomo di ciascuno de' suoi due componenti. La densità calcolata, riferita sempre alla distanza delle molecole del potassio, sarà

$$\frac{0{,}865\,(122{,}5+391{,}7)}{122{,}5}=\frac{0{,}865\,.\,514{,}2}{122{,}5},$$

frazione di cui il numeratore ed il denominatore sono amendue la quarta parte di quelli del calcolo precedente, e che ha perciò lo stesso valore 3,63, e ci dà per la divisione della molecola in 2 la stessa densità 1,815, di cui la densità osservata è di $\frac{2}{3}$ maggiore.

Se nelle stesse ipotesi si volesse supporre la distanza delle molecole dell'ioduro di potassio uguale a quella delle molecole dell' iodio, in vece del potassio, si avrebbe per la densità calcolata senza divisione di molecola

$$\frac{4{,}95\,.\,514{,}2}{392}=\frac{2555}{392}=6{,}49.$$

Ammettendo quindi la divisione della molecola così formata in

due, questa densità si riduce alla metà 3,245. Questo valore sarebbe alquanto maggiore della densità osservata 3,104; ma bisogna osservare che qui la natura del composto che dee tenere il mezzo per la qualità elettro-chimica tra i suoi due componenti tende a dilatare il composto ossia a diminuirne la densità relativamente a quella dell' iodio, mentre nel primo calcolo essa tendeva ad aumentare la densità relativamente al potassio, e questa dilatazione può trovarsi superiore all' effetto immediato della combinazione supposto essere sempre una condensazione. Il risultato più conforme allo stato delle cose dee essere una media a un dipresso tra i risultati ottenuti dalle due comparazioni, cioè una densità $\frac{3,24 + 1,81}{2} = 2,52$; allora la densità osservata 3,104 supera questa densità calcolata di circa $\frac{1}{4}$, e questo sarà prossimamente l' effetto della condensazione prodotta dalla combinazione medesima.

Coi principii adunque che abbiamo proposti per paragonare la densità dei composti con quelle dei componenti, nel caso di combinazioni a proporzioni determinate, si toglierebbero le anomalie che Boullay ha trovate, e che dovea trovare per la semplice applicazione della regola d' alligazione, nei diversi composti, e vi sarebbe sempre, avuto riguardo alla divisione che può subire la molecola, una condensazione prodotta dalla combinazione stessa.

141. Nella stessa maniera che dati i pesi specifici di due sostanze che entrano in una lega in proporzione conosciuta in peso, si può calcolare il peso specifico che dovrebbe avere il composto, se le molecole di quelle sostanze si mescolassero semplicemente con giustaposizione, senza condensazione nè dilatazione, si potrà pure, dato il peso specifico del composto, e quello di uno dei componenti, conchiuderne il peso specifico che dovrebbe avere fuori della combinazione, nella stessa ipotesi, l'altro componente; basta perciò liberare a, o b dalla formola che abbiamo sopra indicata pel peso specifico delle leghe. Così pure calcolando alla maniera di Boullay, si potrà dal volume dell' atomo del composto formato dal quoziente del peso di quest' atomo pel suo peso specifico, e dal volume dell' atomo di uno de' suoi componenti, dedurre quello dell'

atomo dell' altro componente, e quindi se si vuole il peso specifico di quest' ultimo, quale sarebbe allo stato libero.

Boullay avendo calcolato in questa maniera il volume dell' atomo, e il peso specifico che dovrebbe aver l' ossigeno, partendo da molti de' composti in cui entra quest' elemento, considerati così come se fossero semplici leghe, trovò risultati affatto diversi tra loro, e che si estendono quanto ai volumi dell' atomo tra 17 e 79, e quanto al peso specifico tra 1,25 e 5,88, il che lo confermò nella conclusione che l' ipotesi della semplice giustaposizione delle molecole non è ammissibile nei composti, e che nelle combinazioni si fanno ora condensazioni, ora dilatazioni di cui non si conosce finora alcuna legge.

Ma, come abbiamo detto, questa maniera di calcolare non si conviene alle combinazioni propriamente dette, in proporzioni determinate, e non dubito, che se si applicasse alla ricerca della densità dell'ossigeno, quale sarebbe allo stato solido, la maniera di calcolo sopra indicata per questi composti, e colle convenienti supposizioni di divisioni delle molecole, si arriverebbe a risultati non molto diversi tra loro, e di cui la media dovrebbe solo modificarsi dalle considerazioni relative alla natura particolare dell' ossigeno, principalmente alla sua qualità eminentemente elettro-negativa, e dalla condensazione che si potrebbe inoltre supporre nelle combinazioni. Del resto si può anche determinare direttamente per approssimazione la densità che l' ossigeno dovrebbe presentare allo stato solido, nella supposizione della densità a un dipresso proporzionale alla massa della molecola, comparativamente ai corpi conosciuti allo stato solido, e nel caso che questa molecola non subisse alcuna divisione o raddoppiamento, che ne cangiasse il rapporto colla molecola di questi. Se si paragona per esempio collo zolfo di cui l' atomo o molecola è a un dipresso doppia di quella dell' ossigeno, questo dovrebbe pure avere, secondo quella proporzione, una densità allo stato solido uguale alla metà della densità 2 circa, che appartiene allo zolfo, cioè uguale a quella dell' acqua 1. In ragione però della qualità fortemente elettro-negativa dell' ossigeno, questa densità potrebbe forse ascendere ad 1,5 od anche più. Ma qualunque fosse per essere

questa densità dell' ossigeno allo stato solido, si può anche calcolare quale dovrebbe essere quella di ciascun composto da esso formato con un altro corpo, per esempio quella d'un ossido metallico, di cui si conosca la composizione in peso, nella supposizione che la distanza delle molecole integranti rimanga in quell' ossido la stessa che nel metallo medesimo. Così per esempio per l'ossido di mercurio composto di 1 atomo di mercurio, quale lo ammette Berzelius, e di 1 atomo di ossigeno, la nostra formola pei composti, ritenendo la molecola risultante immediatamente dalla combinazione, dà la densità

$$\frac{13{,}6(1266+100)}{1266} = \frac{13{,}6 \cdot 1366}{1266} = 14{,}7.$$

Boullay ha trovato la densità di quest' ossido 11,0. Ciò pare indicare che la molecola di quest' ossido è $\frac{3}{4}$ di quella immediatamente formata dalla combinazione, cioè che questa molecola si divide in 4 parti, e che 3 di queste parti si riuniscono di nuovo per formare la molecola integrante del composto. Infatti la densità calcolata si riduce allora a 10,9; la densità osservata un po' maggiore può attribuirsi sia alla qualità elettro-negativa dell' ossido relativamente a quella del metallo, sia alla condensazione prodotta dalla combinazione. Pel protossido di piombo, partendo dalla densità del piombo 11,4, si trova con un calcolo simile, e colla stessa riduzione della molecola ai $\frac{3}{4}$ la densità 9,22 un po' minore anch' essa di quella osservata da Boullay 9,5. Calcoli analoghi si potrebbero applicare agli altri ossidi metallici, e queste ricerche estese a diversi composti potrebbero somministrare importanti risultati.

142. Karsten ha presentato nella sua seconda Memoria *sulla combinazione chimica de' corpi* inserta nelle Memorie dell' Accademia di Berlino per l'anno 1831, un lavoro dello stesso genere di quello di Boullay, e ancora più esteso; ma siccome esso è fondato sugli stessi principii di Boullay, che credo non poter condurre allo scopo proposto, come questi autori l'hanno riconosciuto essi medesimi dalla grande discordanza dei

risultati che loro hanno dato le diverse combinazioni, non mi vi tratterrò. Osserverò soltanto che Boullay e Karsten hanno determinato sperimentalmente, con grande accuratezza, all' occasione di questi lavori, la densità di molte sostanze, per cui essa non era ancor conosciuta, onde vi si potrà ricorrere in tutte le ulteriori specolazioni su quest' oggetto.

143. Abbiamo veduto che anche le semplici leghe, possono presentarci ora condensazione, ora dilatazione, ora uguaglianza di densità relativamente alla riunione de' loro componenti considerata come un miscuglio delle loro molecole. Pare che in generale la soluzione, come la combinazione chimica propriamente detta debba tendere a diminuire la distanza delle molecole, e così ad aumentare la densità; ma le diverse circostanze di cui si tratta possono spiegarsi supponendo, come già abbiamo accennato, che soventi le soluzioni siano accompagnate da combinazioni chimiche in proporzioni determinate, i prodotti delle quali si sciolgano poi vicendevolmente, e si alleghino tra loro. Allora nelle combinazioni potranno succedere divisioni delle molecole in 2, in 4 ecc., per cui i composti si dilateranno, come si è veduto, relativamente ai componenti, sebbene vi abbia ancora condensazione relativamente alle nuove molecole formate; e queste dilatazioni potranno trovarsi o superiori, o uguali, o inferiori all' effetto delle condensazioni che hanno luogo nella soluzione dei prodotti tra loro, il che cagionerà dilatazione, uguaglianza di densità, o condensazione definitiva della lega relativamente alla densità calcolata.

SEZIONE 2.ª

DELLA DISPOSIZIONE PARTICOLARE DELLE MOLECOLE DE' CORPI SOLIDI, OSSIA DELLA CRISTALLIZZAZIONE

CAPO PRIMO

Nozioni generali sulla Cristallizzazione.

144. Dopo aver esposte le cognizioni che abbiamo sulla natura delle forze che agiscono sulle molecole de' corpi solidi, e che ne formano la particolar costituzione, dobbiamo ora passare, secondo quello che nel principio di questo Libro ci siamo proposto, ad esaminare la maniera con cui queste molecole sono tra loro disposte onde la loro unione presenti certe forme regolari, alla cognizione delle quali ci guida principalmente l' osservazione delle forme esterne, e della struttura sotto cui i corpi a noi si presentano in quello stato in cui si dicono *cristallizzati*. A tal fine dobbiamo presentare il complesso delle leggi, secondo le quali queste forme dipendono le une dalle altre, e finalmente dalla forma sotto cui le molecole primitive ed elementari possono supporsi fra loro disposte, il che forma un ramo di scienza detto *Cristallografia*, di cui può considerarsi come creatore Haüy in Francia, ma che in questi ultimi tempi ha ricevuto grandissimi accrescimenti dai lavori di Weiss, e di altri fisici e mineralogisti Tedeschi.

Ci atterremo però qui ai principii generali di questa teoria, mentre la loro applicazione alle sostanze particolari appartiene essenzialmente alla Chimica, a cui tocca a far conoscere ad una ad una queste sostanze, e alla Mineralogia, che ritrova queste medesime sostanze tra i diversi materiali del nostro globo, di cui essa dee far l' enumerazione; ci contenteremo

soltanto, per render l'esposizione di questi principii meno astratta, di citarne alcuni esempi tra i corpi più generalmente conosciuti.

145. Le molecole dalla riunione delle quali risulta un corpo di massa sensibile, e che si applicano successivamente l'una sull'altra quando esso passa dalla forma liquida alla forma solida, sono impercettibili ai nostri occhi, per la lor piccolezza, come già abbiamo fatto osservare al n. 5; ma non si può dubitare che esse non abbiano forme determinate, e che esse non siano simili tra loro in ciascuna specie di corpo. Siamo anche condotti a quest'idea dalle osservazioni. Se si batte con precauzione sopra un pezzo di sal comune, si vedrà questo dividersi in frammenti d'una forma cubica, e continuando la divisione si avranno cubi sempre più piccoli, e che finiranno per non essere più sensibili, se non coll'aiuto del microscopio. Per altra parte la chimica analizzando questo sale prova che esso è composto di due principii diversi, di cui l'uno in istato libero è naturalmente gazoso, e si chiama dai chimici *cloro*, l'altro è un metallo detto *sodio*; ciascun cubo che si ritira da questo sale è dunque una riunione di molecole appartenenti a questi due principii, e se noi avessimo organi e stromenti abbastanza delicati per ispingere la divisione sin dove essa può giungere, arriveremmo finalmente a cubi, che non potremmo ulteriormente soddividere senza analizzarli, cioè senza isolare i due principii, la riunione de' quali costituisce l'essenza di questo sale. La forma cubica può dunque considerarsi come appartenente in questo sale alle più piccole parti che possano ottenersi separatamente senza che la natura del medesimo sia distrutta, cioè a quelle parti che abbiamo chiamate *integranti* (n. 9); e in generale gli ultimi risultati della division meccanica de' corpi (chè così chiamasi quella separazione di parti in cui un corpo facilmente si divide) ci rappresenteranno così la forma delle loro molecole integranti, per quanto l'osservazione può farcela conoscere. Queste forme risultano probabilmente dalla maniera con cui le molecole *costituenti* o *elementari* (n. citato) sono disposte tra loro ad una certa distanza, minore di quella che ha luogo tra le molecole integranti, per formare quest'ultime, ciascun angolo di queste

forme essendo, come si può conghietturare, e come più particolarmente spiegheremo in appresso, occupato da una delle molecole *costituenti* che concorrono a formare ciascuna molecola *integrante*; e siccome simili forme si trovano collo stesso mezzo anche nelle ultime molecole delle sostanze che la chimica ci presenta come semplici, e che secondo ogni apparenza, almeno in gran parte, sono realmente tali, è probabile che anche in queste si può distinguere un ordine secondario di molecole che possiamo chiamare *integranti*, e che risultano dalla riunione di più molecole elementari dello stesso genere, più strettamente riunite tra loro in una maniera analoga a quella, con cui le molecole di diverso genere si riuniscono tra loro per formare la molecola integrante d' un corpo composto.

Quanto alle molecole elementari medesime, la loro forma ci resta così affatto ignota, e sarebbe anche possibile che esse fossero tutte sferiche per esempio, cosicchè dalla maniera sola con cui sono tra loro disposte, secondo le forze attrattive e ripulsive che le animano, dipendesse la forma che l' osservazione ci mostra nelle molecole integranti o di secondo ordine.

146. I corpi solidi sono dunque composti di molecole integranti similari; la maniera con cui essi si dividono meccanicamente ci prova inoltre, che l' attrazione che sollecita queste molecole a riunirsi quando il corpo solido si forma, tende a disporle in piani situati nella direzione delle loro diverse faccie. L' osservazione finalmente dimostra ancora, che tale è l'azione delle leggi di quest'attrazione o affinità sulle molecole integranti, che quando nulla le disturba, le riunioni di queste molecole sono esse medesime terminate da superficie piane, appartenenti a forme regolari simili a quelle de' solidi geometrici. Si sono compresi tutti questi corpi regolari, di cui i minerali ci presentano molti esempi, e che si ottengono anche artificialmente quando si fanno passare i corpi dallo stato liquido allo stato solido, sotto il nome di *cristalli*, e si è data all' operazione per cui essi si formano il nome di *cristallizzazione*. Le forze attrattive che sollecitano le molecole d' una sostanza sospesa in un liquido per dissoluzione, o tenuta liquida dal calore, hanno una certa relazione colla figura di queste molecole, e da questa relazione dipende la tendenza che esse hanno a riu-

tirsi conformemente alle leggi d' una aggregazione regolare quando il liquido che le tenea sospese si svapora, o il calore che le ritenea in istato liquido si dissipa; ma perchè esse pervengano a questo scopo conviene che esse abbiano il campo di ricercarsi per così dire, di applicarsi le une contro le altre per le faccie convenevoli, e di concorrere tutte nel medesimo tempo alla disposizione che dee nascere dal loro complesso; bisogna per questo che il liquido sia in istato di riposo, che nel caso d' una soluzione le molecole del liquido abbandonino lentamente quelle del corpo di cui si tratta, e in quello della liquefazione dal calore la congelazione si faccia pur lentamente, e finalmente che vi sia sufficiente spazio, e sufficiente quantità di liquido, perchè le molecole cristalline che si formano vi nuotino a bell'agio, e in piena libertà. Se queste condizioni non sono riempiute, la forma geometrica ne sarà più o meno alterata, e ne risulterà ciò che si chiama una *cristallizzazione confusa*, od anche una massa affatto informe.

147. Limitandoci qui alla cristallizzazione propriamente detta, o regolare dobbiamo osservare, relativamente alla sua teoria, che sovente i cristalli appartenenti ad una medesima sostanza prendono forme affatto diverse, e al contrario si trovano sostanze tra loro diverse, che presentano assolutamente la stessa forma. Ma le differenti forme che ciascuna sostanza può presentare sono tra loro collegate in due maniere; cioè 1.° da un complesso di caratteri geometrici, per cui possono tutte derivarsi per mezzo di variazioni nella posizione delle faccie, assoggettate a certe condizioni, da una forma fondamentale, che è in generale la più semplice tra quelle di cui ciascuna sostanza è suscettibile; 2.° da una forma primitiva, di cui tutte le altre possono considerarsi come modificazioni prodotte dalla sovrapposizione di altre parti integranti su questa forma che ne è come il nocciuolo, e che ordinariamente si trova essere la forma fondamentale medesima suggerita dalle considerazioni geometriche.

Quindi la teoria della cristallizzazione, per cui si fanno dipendere le une dalle altre le forme appartenenti ad una stessa sostanza si divide in due parti, l' una puramente *geometrica*, che stabilisce i caratteri geometrici di cui abbiamo parlato, che ne formano la connessione, l' altra che si può chiamare

la *teoria fisica*, e che fondandosi sulla divisione meccanica che i cristalli di ciascuna sostanza ci presentano naturalmente, assegna la forma che se ne può considerare come il nocciuolo comune, e ricerca le leggi con cui, dalla sovraposizione di particelle simili al nocciuolo medesimo, o in cui il nocciuolo stesso può dividersi, vengono a formarsi i diversi cristalli medesimi che a ciascuna sostanza appartengono. In questa seconda parte possono anche considerarsi alcune delle proprietà fisiche de' corpi che si riferiscono alle diverse direzioni nelle loro forme cristallizzate.

Sebbene queste due parti della teoria della cristallizzazione siano tra loro strettamente collegate, esse formano però due ordini di cognizioni relative a questo ramo di scienza fisica, di cui il primo, interessante per se stesso in ragione delle relazioni che esso ci scopre tra le diverse forme geometriche su cui esso si aggira, dee servire come d' introduzione al secondo, che andando più oltre, trova in queste forme il comune vincolo per cui esse sono fisicamente tra loro connesse. È però da notarsi che per una singolarità che si è presentata talvolta anche in altri rami delle nostre cognizioni, questa seconda parte della teoria è stata studiata la prima, essendo quella appunto, che fu come abbiamo detto creata per così dire da Haüy, il quale non si era specialmente occupato di quelle relazioni geometriche immediate che formano l' oggetto della prima parte della teoria dei cristalli. Questa fu posteriormente coltivata principalmente dai fisici, e mineralogisti Tedeschi, e sopra tutto da Weiss, che ne gettò le basi in un' opera intitolata *Dissertatio de indagando formarum crystallinarum caractere geometrico principali*, stampata a Lipsia nel 1809, e quindi tradotta in francese negli *Annales des mines* T. 29, maggio e giugno 1811, e ne fece poi le speciali applicazioni in diverse Memorie pubblicate negli atti dell' Accademia di Berlino.

Ma un trattato compiuto della scienza dee ristabilire l' ordine che la natura e la dipendenza delle cognizioni assegna naturalmente a ciascuna parte di essa, e che non è sempre quello che lo spirito umano, guidato da accidentali circostanze, ha seguito nei suoi progressi. Dovremo dunque trattare successivamente della teoria della cristallizzazione sotto questi

due aspetti, nell' ordine indicato, cioè prima relativamente alla connessione puramente geometrica che i cristalli ci offrono tra loro, quindi quanto alla maniera con cui le osservazioni ce ne hanno dimostrata la formazione gli uni dagli altri secondo le leggi fisiche della sovrapposizione delle loro particelle.

In ciascuna di queste due parti daremo pure quelle nozioni di cristallografia pratica od applicata che vi si riferiscono rispettivamente, cioè indicheremo la maniera di fare le osservazioni che debbono fornire i dati fondamentali del calcolo dei cristalli di ciascuna sostanza, o con cui si debbono paragonare i risultati del calcolo stesso, fondati sulle basi fornite da altre osservazioni.

Ma a queste due parti della teoria della cristallizzazione se ne dee aggiungere una terza più recondita per così dire, e che si addentra nella natura stessa dei corpi che la presentano, quella cioè in cui si cerca sia di render ragione della forma stessa delle molecole integranti, dall' unione delle quali risultano le diverse forme esterne dei cristalli, esaminando la disposizione che prendono tra loro le molecole primitive o atomi indivisibili de' corpi per formare queste molecole integranti, sia di assegnare le forze da cui le molecole sono animate in diverse direzioni, e da cui debbono dipendere la loro posizione medesima, e le proprietà che i corpi cristallizzati presentano relativamente a quelle diverse direzioni.

Queste tre distinte maniere di considerare la teoria della cristallizzazione formeranno l'oggetto dei tre Capi seguenti di questa Sezione.

CAPO SECONDO

Teoria geometrica della cristallizzazione (1).

§ 1.°

Principii generali di questa teoria.

148. La posizione d' un piano qualunque nello spazio, è determinata, come si sa, quando si indicano le lunghezze di tre coordinate che partono da un punto fisso, nelle quali questo piano, prolungato ove d' uopo, taglia i tre assi, a cui queste coordinate si riferiscono. Così tutte le faccie d' una forma poliedra qualunque presentata da un cristallo, saranno determinate quando se ne assegni la posizione relativamente a tre coordinate che abbiano per origine un punto preso nel cristallo medesimo. Se per esempio *abcd* (fig. 52) è una delle faccie d' un cristallo, in cui si sia preso il punto *A* per origine delle coordinate, e queste nelle direzioni arbitrarie *Ax*, *Ay*, *Az*, la posizione di questa faccia resterà determinata relativamente a un tal sistema di coordinate, imaginando che essa si estenda da ogni parte sino all' incontro dei tre assi, come nei punti *B*, *C*, *D*, e si assegnino le lunghezze *AB*, *AC*, *AD* delle porzioni dei medesimi assi comprese tra l' origine e questi punti. I tre assi a cui si riferiscono così le faccie d' un cristallo possono essere indifferentemente, considerando la cosa in astratto, rettangolari, o obliqui, e in ogni caso bastano sempre, per la determinazione di cui si tratta, tre assi, che possono riguardarsi come le intersezioni di tre piani coordinati. Nei cristalli però la posizione relativa delle faccie è soventi tale,

---

(1) Nell'esposizione di questa teoria ho principalmente seguito i principii e l'ordine adoperati da Carlo Federigo Naumann professore a Freiberg nella sua opera intitolata *Lehrbuch der reinen und angewandten Krystallographie*, in due volumi, stampata a Leipsick nel 1830.

che per la maggior semplicità nel modo di assegnarla, e per la simmetria di queste determinazioni, si trova conveniente di adoperare assi e piani coordinati obliqui tra loro piuttosto che rettangolari, e talvolta in numero maggiore di tre. Le lunghezze o distanze dall' origine, alle quali una data faccia d' un cristallo taglia gli assi delle coordinate a cui si riferisce per determinarne la posizione, come AB, AC, AD nella figura citata, si chiamano i *parametri* di questa faccia. Quanto alla posizione del punto che si prende per origine degli assi o coordinate, essa sarebbe anche arbitraria per se stessa, ma gli stessi principii di semplicità e simmetria richieggono pure una scelta nella posizione di questo punto relativamente al complesso di tutte le faccie d' un cristallo.

Ciò posto la connessione che abbiamo annunziata tra le forme cristalline sotto cui una sostanza stessa può presentarsi, consiste in che le faccie che appartengono a queste diverse forme possono sempre riferirsi ad uno stesso sistema di assi delle coordinate quanto al numero, e alla posizione di questi assi tra loro, e che inoltre i parametri di tutte queste faccie relativamente a un tal sistema d'assi hanno sempre un rapporto espresso in numeri razionali, ai parametri corrispondenti delle faccie di una forma semplice, da cui esse possono così derivarsi coll' indicazione di questi rapporti, e che perciò si chiama la *forma fondamentale* di tutti i cristalli di quella sostanza. Si varia poi questa forma fondamentale da una sostanza all' altra, quando il sistema delle coordinate ne è lo stesso, pei rapporti diversi che possono aver luogo tra i suoi parametri medesimi relativamente ai diversi assi, e che possono essere espressi da numeri qualunque, razionali ed irrazionali. Si chiamano in generale in cristallografia *assi* d' un cristallo le linee di lunghezza determinata (prese sugli assi indeterminati, e dati solo per la loro posizione, quali si considerano nella geometria dello spazio), che si terminano nei punti in cui si riuniscono per formare un angolo solido tre o più faccie del cristallo, che hanno sull' asse che si considera lo stesso parametro. Nella forma fondamentale della serie di cristalli diversi presentati da una stessa sostanza, le faccie a cui appartengono i parametri, con cui quelli delle forme da essa derivate hanno rapporti razionali,

si riuniscono parimente in uno degli angoli solidi di questa forma fondamentale; quindi questi parametri si chiamano gli *assi della forma fondamentale*, od anche gli *assi della serie dei cristalli* della sostanza a cui quella forma appartiene.

149. Da quello che precede si può dedurre che i cristalli delle diverse sostanze, e le forme loro fondamentali possono distribuirsi in diversi gruppi, o sistemi, in ciascuno de' quali vi è qualche cosa di comune, e che differiscono altronde gli uni dagli altri per certi caratteri generali; questi gruppi o sistemi si chiamano i *sistemi di cristallizzazione*; in ciascuno di essi possono poi variare in generale indefinitamente le forme fondamentali, e quindi le serie di cristalli che ne derivano, e che formano come le specie comprese in ciascun sistema. I caratteri che appartengono a questi sistemi, e per cui si distinguono gli uni dagli altri, sono forniti sia dal numero, e dalla posizione degli assi delle coordinate a cui la loro forma fondamentale, e quindi tutta la loro serie si riferisce, sia dal genere di rapporto che gli assi di questa forma, presi nel senso sovra indicato, come linee determinate, presentano tra loro.

Infatti in primo luogo le forme dei cristalli possono dividersi in due classi relativamente al numero dei piani coordinati, e quindi degli assi geometrici, a cui si possono comodamente riferire, quelle cioè che ammettono tre assi soltanto, che sono le più ordinarie, e che chiameremo *forme trimetriche*, e quelle in cui la semplicità e la simmetria delle derivazioni delle forme richiede un sistema di quattro assi geometrici, e che perciò chiameremo *forme tetrametriche*. Nella prima di queste due classi, la quale ha sempre per forma fondamentale un ottaedro, chiuso dalle otto faccie che si trovano negli otto ottanti formati dai tre piani coordinati, questi tre piani possono essere, o tutti tre ad angolo retto tra loro, nel qual caso rettangolari saranno pure i tre assi che ne sono le intersezioni; o trovarsi due di questi piani ad angolo obliquo tra loro, e il terzo perpendicolare a ciascuno di essi, cosicchè quello degli assi che è formato dall'intersezione dei due primi piani sarà perpendicolare a ciascuno degli altri due assi, mentre questi soli saranno obliqui tra loro; o essere al contrario due dei piani coordinati perpendicolari tra loro, e il terzo obliquo a ciascuno di essi,

nel qual caso i tre assi formati dalle intersezioni di questi piani saranno tutti, due a due, ad angolo obliquo tra loro ; o finalmente trovarsi tutti tre i piani ad angolo obliquo , il che in generale renderà pure oblique tra loro le intersezioni di essi , ossia gli assi del sistema. Distingueremo quindi le forme trimetriche in quattro sorta che indicheremo coi nomi di forme trimetriche *ortogonali* , *monocline* , *dicline* , e *tricline.*

Quanto alle forme tetrametriche e di cui la forma fondamentale è sempre necessariamente un dodecaedro , dodici essendo gli spazii angolari formati dalle intersezioni dei loro assi , e a cui queste faccie debbono applicarsi , un solo caso d'inclinazione dei piani , e degli assi coordinati si trova necessario ad ammettersi per riferirvi colla conveniente semplicità le forme che vi appartengono , cioè quello in cui tre di essi piani si tagliano tra loro in una linea sotto angoli di 60 gradi , e il quarto è a loro tutti , e per conseguenza a questa linea perpendicolare , onde la stessa linea forma uno degli assi , perpendicolare agli altri tre , disposti in un piano ad angoli di 60° tra loro. Non vi è dunque più luogo ad ulteriore divisione di questo sistema quanto alla posizione relativa dei piani e degli assi delle coordinate.

Tra le forme trimetriche poi , le ortogonali possono ancora soddividersi in tre classi pel genere diverso di rapporto che può presentarsi tra i tre assi della loro forma fondamentale ottaedra , presi nel senso di lunghezza determinata di cui sopra abbiamo parlato ; cioè questi assi possono essere tutti uguali tra loro , nel qual caso l' ottaedro fondamentale è regolare ; o due degli assi uguali tra loro , e il terzo disuguale da quelli, il che dà per forma fondamentale un ottaedro simmetrico da ogni parte relativamente a quest' asse disuguale, e a base quadrata ; o finalmente tutti tre disuguali tra loro , al che corrisponde per forma fondamentale un ottaedro a base rombica , potendo poi altronde in questi due ultimi casi, la disugaglianza degli assi essere espressa da una infinità di rapporti diversi, secondo le diverse sostanze che appartengono a tali sistemi. Queste tre sorta di forme trimetriche ortogonali possono distinguersi coi nomi di *regolari* , *simmetriche* , e *irregolari.*

Nelle forme trimetriche a assi obliqui, cioè monocline , dicline

e tricline, per cui gli ottaedri fondamentali sono sempre irregolari, gli assi sono in generale disuguali tra loro; e quanto alle forme tetrametriche vi si trova tra gli assi questa relazione, che tutti gli assi che si tagliano ad angoli di 60° tra loro sono uguali, mentre l'asse che loro è perpendicolare ne è in generale disuguale, sebbene possa anche accadere che loro sia uguale, senza che il carattere del sistema ne sia cangiato; quindi la loro forma fondamentale è sempre un dodecaedro simmetrico relativamente all'asse perpendicolare al piano degli altri, e a base esagona regolare.

Da quanto sovra risulta che i sistemi di cristallizzazione possono ridursi a sette, di cui la classificazione è presentata nel quadro seguente.

A Forme trimetriche, ossia a tre piani ed assi delle coordinate.
- *a* Ortogonali, ossia a piani rettangolari tra loro.
  - *α* Regolari; assi dei cristalli tutti uguali.
  - *β* Simmetriche; due degli assi uguali, e il terzo disuguale.
  - *γ* Irregolari; tutti tre gli assi disuguali.
- *b* Clinometriche, ossia a piani ed assi obliqui.
  - *α* Monocline; due dei piani obligui tra loro, e il terzo ad essi perpendicolare.
  - *β* Dicline; due dei piani rettangolari tra loro, e il terzo obliquo ad amendue.
  - *γ* Tricline; tutti i piani obliqui tra loro.

B Forme tetrametriche, ossia a quattro piani coordinati.

È facile vedere che in alcuni di questi sistemi, uno degli assi si distingue dagli altri per qualche speciale proprietà, come l'asse disuguale dagli altri due nelle forme trimetriche ortogonali simmetriche, l'asse formato dall'intersezione dei due piani coordinati perpendicolari tra loro nelle forme trimetriche dicline, e l'asse perpendicolare agli altri tre nelle forme tetrametriche; quest'asse si distingue allora col nome di *asse principale* del cristallo. Quando niuno degli assi si distingue particolarmente dagli altri, o due di essi possono ugualmente considerarsi come principali, si sceglie uno di essi che si riguarda come tale nella descrizione del cristallo, e questo asse

principale si suppone, per fissare le idee, in situazione verticale, mentre uno dei piani coordinati che formano lo stesso asse colla loro intersezione si concepisce passare per la direzione della vista dell' osservatore. Gli altri assi del cristallo si chiamano *assi secondarii* o *accessorii*.

Si chiama *base* d'un sistema cristallino il piano delle coordinate che contiene gli assi secondarii; la figura di questa base nella forma fondamentale di ciascun sistema è diversa; così essa è quadrata, secondo quello che abbiamo detto, nei sistemi di forme trimetriche ortogonali tanto regolari che simmetriche, e rombica nelle trimetriche ortogonali irregolari; romboidale in generale nelle forme trimetriche a assi obliqui, e esagona nelle forme tetrametriche.

I punti terminali di un asse principale in un cristallo qualunque, di forma fondamentale o derivata, considerato come limitato dalla superficie esterna della medesima, si chiamano i *poli* del cristallo; se essi coincidono con angoli solidi del cristallo, questi si dicono *angoli polari*, o *terminali*; e gli spigoli che vi si riuniscono *spigoli polari* o *terminali*. Le faccie *superiori* ed *inferiori* d' una forma sono quelle che prolungate ove d' uopo, tagliano l' asse principale, che è supposto verticale, nella sua metà superiore od inferiore. Gli *spigoli mediali* sono quelli che sono formati da una faccia superiore, e una inferiore; gli *angoli solidi mediali* sono quelli formati dall' incontro di spigoli mediali. Si chiama sezione *trasversale* qualunque sezione perpendicolare all' asse principale. Le sezioni *basiche* sono quelle parallele alla base del sistema; esse sono identiche colle trasversali in que' sistemi ove l' asse principale è perpendicolare agli assi secondarii. Si chiamano *sezioni principali* le sezioni che sono nei piani delle coordinate, e parricolarmente in quelli che contengono l' asse principale. Il centro ossia origine delle coordinate divide tutti gli assi in due *semi-assi*.

La considerazione della figura della base nei sistemi di cristallizzazione ci fornisce nomi semplici per indicare quelli dei sette sistemi sovra indicati, per cui difficilmente si troverebbero altri nomi convenienti; così tra i sistemi trimetrici ortogonali, mentre quello ove tutti gli assi sono uguali è assai

bene distinto da tutti gli altri sistemi col nome di *regolare*, quello che ha due degli assi uguali tra loro, e il terzo disuguale, dalla figura della sua base può prendere il nome di *sistema tetragonale*, e quello che ha tutti i tre assi disuguali il nome di *sistema rombico*. I tre sistemi trimetrici a assi obliqui rimarranno semplicemente e convenientemente indicati coi nomi di sistemi *monoclino*, *diclino*, e *triclino*; e il sistema tetrametrico di cui la base è sempre esagona sarà più semplicemente chiamato il sistema *esagonale*.

Si può osservare che i sistemi trimetrici a assi obliqui hanno, in comune col sistema rombico, i due assi della sezione basica disuguali tra loro, e il sistema monoclino in particolare ha anche comune con quello la forma rombica della base, quando si prende per asse principale quello che è obliquo al piano degli altri due assi perpendicolari tra loro, questa base divenendo poi romboidale nei sistemi diclino e triclino. E siccome per altra parte le sostanze che appartengono a questi tre sistemi a assi obliqui sono in piccolo numero, essi potrebbero riguardarsi come semplici alterazioni del sistema rombico. Si avrebbe forse quindi una divisione più naturale dei sistemi di cristallizzazione, disponendoli come segue:

I. Sistemi trimetrici, che potrebbero anche chiamarsi *tetragonali* dalla forma della loro base quadrangolare, sebbene non sempre quadrata.

1.° Sistema regolare; tutti gli assi uguali.

2.° Sistema simmetrico; uno degli assi disuguale.

3.° Sistema irregolare; tutti gli assi disuguali. Questo sistema si dividerebbe in ortogonale, monoclino, diclino, e triclino.

II. Sistema tetrametrico, ossia esagonale.

15o. In ciascuna forma derivata appartenente ad uno qualunque di questi sistemi, e che si considera come una forma *separata*, le diverse faccie che la costituiscono sono sempre tra loro *isoparametriche*, cioè i loro parametri dello stesso nome, ossia presi sopra assi similmente posti ed uguali della forma fondamentale, sono uguali, e non differiscono che nella direzione. Nel sistema regolare tutti gli assi essendo dello stesso valore, cioè avendo la stessa relazione, per la loro posizione, e per la loro uguale lunghezza, al sistema a cui appartengono, le faccie

che hanno i loro tre parametri rispettivamente uguali l'una all' altra sono sempre isoparametriche, e possono concorrere a costituire una stessa forma separata, comunque siano tra loro scambiati gli assi su cui questi parametri si prendono. Così in ciascun ottante si potranno concepire sei faccie in posizione diversa tutte isoparametriche tra loro, le quali potranno appartenere ad una stessa forma; infatti se indichiamo i tre parametri rispettivamente uguali delle faccie con a, b, c, si avranno le combinazioni possibili seguenti per la posizione di questi parametri sui tre assi:

Sull' asse delle x	Sull' asse delle y	Sull' asse delle z
a	b	c
a	c	b
b	a	c
b	c	a
c	a	b
c	b	a

Non così negli altri sistemi, in cui gli assi hanno un diverso valore, ossia una relazione diversa al sistema. Sia per esempio data nel sistema tetragonale una faccia per mezzo del suo parametro m sull' asse principale, e pei suoi parametri n ed r sugli assi accessorii o secondarii; una faccia a quella isoparametrica dovrà avere il suo parametro m anch' essa sull' asse principale, sia nel semi-asse positivo, sia nel semi-asse negativo, cioè al disopra e al dissotto del piano degli assi accessorii; solo i due altri parametri n, r possono essere presi indifferentemente sull' uno e sull' altro dei due assi accessorii che sono di ugual valore tra loro.

Così nella figura 53, se Ox, Oy, rappresentano i due assi di un tal sistema uguali tra loro, e Oz il terzo asse disuguale da quelli, saranno bensì isoparametriche tra loro nell' ottante della figura le faccie che fanno parte dei piani ACE, ABG che hanno il parametro 3 sull'asse delle z, e i parametri 1 e 2 scambiati tra loro sugli altri due assi; ma non sarà isoparametrica con

quelle, per esempio, la faccia DHG, che ha il parametro 3 sull' asse delle y, il parametro 2 su quello delle z, e il parametro 1 su quello delle x.

Se poi gli stessi parametri fossero dati per una faccia nel sistema rombico, lo scambio di situazione dei parametri n, r sui due assi accessorii non sarebbe più permesso per formare due faccie isoparametriche, e quindi appartenenti ad una stessa forma separata, perchè questi due assi accessorii sono essi medesimi di diverso valore tra loro, e in conseguenza i parametri n non possono essere presi che sopra uno di questi assi, e i parametri r sull' altro, nella stessa maniera che i parametri m non possono esser presi che sull' asse principale.

Nei sistemi ortogonali, le faccie isoparametriche da cui è terminata una forma separata, sono necessariamente dello stesso valore, cioè uguali e simili. Non così nei sistemi a assi obliqui; in questi le faccie che soddisfanno a questa condizione possono distinguersi in diversi gruppi, che sono composti di faccie di ugual valore tra loro, ma di valor diverso da un gruppo all' altro; ciascuno di questi gruppi può allora considerarsi come appartenente a una forma *parziale*, e la forma totale che essi concorrono a formare è *composta* di queste forme parziali.

151. Una forma separata di cristallo può essere formata dalle faccie isoparametriche di dati parametri; ma non lo è sempre necessariamente di tutte. Quando essa è realmente la riunione di tutte le faccie che sono possibili attorno al suo sistema d' assi, determinate da un dato rapporto di parametri, questa forma si chiama *oloedrica*. Le faccie di queste forme oloedriche sono sempre parallele e opposte due a due; poichè, siccome ciascun asse partendo dal centro si stende in due opposte direzioni, i parametri m, n, r di una qualunque delle faccie, presi sui loro assi rispettivi in direzioni opposte, determinano dall' altra parte del centro una faccia che è parallela alla prima. Una forma che non contiene se non la metà, simmetricamente disposta, del numero delle faccie isoparametriche possibili di dati parametri, dicesi *emiedrica*, e *tetartoedrica* quella che non comprende che la quarta parte di questo numero, pure simmetricamente distribuita. La forma che

sarebbe compiuta dalla presenza di tutte le faccie suddette si dice allora mostrarsi emiedrica, o tetartoedrica, e questo rapporto stesso di forme alla forma compiuta si indica col nome di *emiedria*, o di *tetartoedria*.

Quando l' emiedria, o la tetartoedria ha luogo in una forma composta di forme parziali, quali si presentano, come si è detto, nei sistemi clinometrici, essa fa soventi scomparire una o più di queste forme parziali, lasciando solo sussistere una o alcune delle altre, cosicchè può accadere che la forma si riduca ad esser semplice come quelle dei sistemi ortogonali. Ma l'emiedria, e la tetartoedria possono anche esercitarsi sulle forme semplici di questi ultimi sistemi, e siccome nella natura di queste forme non vi è alcuna disposizione originaria delle faccie a scomparire piuttosto le une che le altre, questi casi vi seguono allora certe leggi generali loro proprie, che qui dobbiamo indicare, considerandole principalmente nell' emiedria che è più frequente che la tetartoedria. L' emiedria può aver luogo tanto per faccie isolate che per paia di faccie, o per sistemi di tre, quattro o sei faccie, queste faccie o questi sistemi di faccie scomparendo, mentre gli altri sistemi di faccie che rimangono, s' aggrandiscono per incontrarsi tra loro, e chiudere così lo spazio tutt' all'intorno; ma poichè si richiede sempre come si è già detto che le faccie, o sistemi di faccie rimanenti siano simmetricamente disposti, le faccie o sistemi che scompaiono, e che restano sono alterni tra loro, di due faccie, o sistemi di faccie aggiacenti, l' uno scomparendo e l' altro restando; e l' emiedria non può realizzarsi se non in quelle forme, in cui per queste faccie o sistemi di faccie alternativi può aver luogo una perfetta simmetria attorno al sistema degli assi, cosicchè la metà del numero di faccie che scompare abbia esattamente dal suo canto la stessa disposizione che la metà che rimane. Può poi accadere che in questa disparizione alternativa di faccie, o di sistemi di faccie, le faccie opposte due a due e parallele, che si trovano sempre come abbiamo veduto nelle forme semplici compiute od oloedriche, rimangano e scompaiano insieme, onde sussista ancora il parallelismo delle faccie rimanenti, opposte due a due; oppure che essa colpisca le faccie opposte due a due in ma-

niera da farne sparire una e lasciar sussistere l' altra, cosicchè non vi sia più nella forma risultante quell' opposizione e parallelismo delle faccie due a due; quindi la distinzione di *emiedria a faccie parallele*, e *emiedria a faccie inclinate.*

Poichè, come abbiamo detto, nell' emiedria la metà del numero di faccie o sistemi di faccie che scompare dee sempre avere la stessa disposizione relativamente agli assi, che quella che rimane, l' una o l' altra di queste metà può ugualmente scomparire, o rimanere; quindi ogni forma semplice può sempre fornire due forme emiedriche affatto simili quanto ai loro elementi di limitazione, e che non differiscono che per la situazione, o maniera di riunione di questi elementi; esse possono chiamarsi forme emiedriche *opposte* tra loro.

152. La relazione che hanno con una stessa forma fondamentale le diverse forme che si riferiscono alla medesima, cioè per cui i parametri delle loro faccie hanno rapporti espressi da numeri razionali, coi parametri della forma fondamentale, si chiama *derivazione* di queste forme dalla fondamentale. In ogni derivazione adunque non si tratta che di pervenire, dai numeri a, b, c con cui si esprimono i rapporti dei parametri della forma fondamentale, ai rapporti $a' : b' : c'$ per la forma da derivarsi, i quali debbono essere tali che loro si possano sostituire i rapporti $ma : nb : c$, oppure $ma : b : rc$, o finalmente $a : nb : sc$, i numeri m, n, r, s essendo razionali; si ritiene arbitrariamente uno dei parametri originarii in queste espressioni, moltiplicando gli altri due per quei numeri, che debbono produrre i rapporti che si propongono, poichè non si tratta qui di valori assoluti. I fattori m ed n, od m ed r, od n ed s, che determinano la nuova forma, si chiamano i *coefficienti di derivazione.* Una *serie cristallina* è la riunione di tutte le forme che possono essere derivate da una forma fondamentale determinata.

Si sono proposte molte notazioni per indicare brevemente le diverse forme che possono essere derivate da una forma fondamentale data, secondo i diversi valori dei coefficienti di derivazione; una delle più semplici consiste a prendere, per rappresentare la forma fondamentale una lettera maiuscula, che sarà l' iniziale del suo nome, per esempio P, e a mettere

avanti e dopo questa lettera rispettivamente i due coefficienti m, ed n per cui si debbono moltiplicare i due primi a, b degli assi della forma fondamentale a, b, c, per cangiarli nei due primi ma, nb dei tre parametri corrispondenti delle faccie della forma derivata, ritenendo pel terzo parametro l' asse stesso della forma fondamentale; così il simbolo generale di una forma derivata dalla forma fondamentale P, sarà mPn, e quest' espressione diverrà quella di ciascuna forma particolare, mettendo in vece di m, e di n i diversi numeri razionali che vi corrispondono; le forme emiedriche, e tetartoedriche si indicheranno poi collo stesso segno, mettendovi sotto rispettivamente una linea colle ciffre 2 o 4 a foggia di denominatore d' una frazione; così il segno per esempio di una forma emiedrica o tetartoedrica di mPn, sarà rispettivamente $\frac{mPn}{2}$, o $\frac{mPn}{4}$. Si osserverà che prendendo come si è detto a, b, c per gli assi della forma fondamentale, e ma, nb, c pei parametri corrispondenti della forma derivata, l' equazione di una faccia qualunque della forma fondamentale riferita alle coordinate x, y, z prese nella direzione dei tre assi a, b, c rispettivamente, secondo i principii della geometria analitica nello spazio, sarebbe $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, e quella d' una faccia qualunque della forma derivata, $\frac{x}{ma} + \frac{y}{nb} + \frac{z}{c} = 1$. Il simbolo proposto per la notazione d' una forma derivata qualunque, non è dunque che l' espressione abbreviata dell' equazione di una faccia qualunque della forma derivata, supponendo data l' equazione di una faccia della forma fondamentale; cioè esso indica per quali numeri debbansi dividere i due primi termini dell' equazione della faccia della forma fondamentale, per cangiarla nell' equazione della faccia della forma derivata.

Questa notazione è quella adoperata da Naumann nel suo *Trattato elementare di Cristallografia* in Tedesco, e noi pure la seguiremo in questa sezione. Essa è una semplificazione di quella proposta per la prima volta da Weiss nel Tomo delle Memorie dell' Accademia di Berlino per gli anni 1816 e 1817, nella quale si lasciava sussistere esplicitamente l'indicazione dei

rapporti dei parametri delle forme derivate tra loro, e con quelli della forma fondamentale, che si rinchiudevano in un piccolo rettangolo, oppure tra parentesi; scrivendo così in generale

$$\boxed{ma : nb : c} \quad \text{o} \quad (ma ; nb : c),$$

per esprimere una faccia della forma derivata appartenente alla forma fondamentale di cui i parametri delle faccie siano a, b, c, in vece di mettere semplicemente i coefficienti m ed n allato alla lettera, come P, con cui si rappresenta nella nostra notazione la forma fondamentale. Le notazioni che si sono proposte da altri Cristallografi, e in particolare da Mohs sono anch' esse espressioni più o meno abbreviate della relazione tra l' equazione della faccia della forma derivata, e quella della forma fondamentale.

Non si debbono poi confondere queste notazioni relative alla teoria geometrica della derivazione delle forme dei cristalli, con quelle che si riferiscono alla teoria fisica della lor composizione, qual è quella adoperata da Haüy, e di cui parleremo a suo luogo.

153. Le forme derivate semplici o separate, di cui finqui abbiamo parlato, possono presentarsi simultaneamente nella forma d' un cristallo in numero più o meno grande, compresavi anche la forma fondamentale; si indicano in generale col nome di *combinazioni cristallografiche* queste forme risultanti dall' unione di molte forme appartenenti ad una stessa serie di cristalli, attorno ad un centro comune, e che si fa in maniera, che le faccie o sistemi di faccie di una delle forme parziali si presentano simmetricamente tra le faccie, o sistemi di faccie delle altre. Siccome le faccie d' una forma isolata presentano tra loro, o spigoli, o angoli solidi, è chiaro che in una combinazione le faccie di una delle forme debbono mostrarsi al luogo di certi angoli solidi o spigoli dell' altra, e formarne così come troncature, o smuzzature. Le faccie poi d' una delle forme verranno a intersecare le faccie dell' altra per formare spigoli, e angoli solidi, che non appartengono nè all' una nè all' altra delle forme separate, e che si distingueranno coi nomi di *angoli* e *spigoli di combinazione*. Le forme che compongono una combinazione hanno, secondo la gran-

dezza o estensione delle loro faccie una parte più o meno grande nella forma generale risultante dalla loro combinazione; quelle tra queste forme che determinano il contorno più generale della combinazione si chiamano *dominanti* nella medesima, e le altre *subordinate*; talvolta però è difficile di assegnare in una combinazione una forma dominante sulle altre. La notazione delle combinazioni consiste a scrivere semplicemente l'uno dopo l'altro, con punti di mezzo, i simboli delle forme che vi sono riunite, in maniera che i segni delle forme dominanti precedano quelli delle forme subordinate.

154. Tanto nelle forme derivate separate, quanto nelle loro combinazioni, si debbono determinare colle opportune considerazioni geometriche, e calcoli analitici, il numero, la posizione, e la figura delle diverse faccie, come pure il numero, la posizione, e grandezza degli spigoli e degli angoli solidi che risultano dalla loro intersezione. Queste regole e calcoli non possono essere indicati che relativamente a ciascuno dei diversi sistemi di cristallizzazione, a cui una data serie di cristalli derivati appartiene, e per cui è diversa la specie di forma fondamentale, dalla quale deesi partire. Lo stesso si dica del calcolo inverso, in cui data la forma fondamentale dalla quale dee derivarsi una forma separata, o una combinazione di forme, per cui si conoscano il numero, e la disposizione, figura, e grandezza delle faccie, degli spigoli, e degli angoli, si cercassero i coefficienti di derivazione della forma, se è isolata, o di ciascuna delle forme di cui essa fosse la combinazione, o solo di quelle tra loro di cui i coefficienti fossero ignoti, essendo dati quelli delle altre. Possiamo però qui far menzione d' un caso speciale di quest' ultima natura, che si può trattare in una maniera generale, e indipendentemente dalla qualità del sistema a cui appartengono le forme che entrano nella combinazione. Questo caso è quello in cui si proponesse di trovare i coefficienti di derivazione d' una faccia di una combinazione, appartenente ad una delle forme che ne fanno parte, e per la quale questi coefficienti fossero ignoti, quando questa faccia formasse due spigoli paralleli tra loro per mezzo della sua intersezione con due altre faccie di forme note, contenute nella stessa combinazione, cioè per cui si conoscessero i coefficienti di deriva-

zione, e formasse due altri spigoli anch'essi paralleli tra loro con due altre faccie di forme pur note parimenti contenute nella combinazione. Si osserverà qui che una faccia non può formare così spigoli paralleli tra loro nelle sue intersezioni con due altre faccie, senza che essa sia essa medesima parallela allo spigolo che queste due ultime formerebbero tra loro intersecandosi, e che così queste tre faccie non siano parallele ad una stessa linea; ora quando più faccie d'un cristallo si trovano parallele ad una stessa linea, e formano così spigoli paralleli tra loro colle loro mutue intersezioni, esse si dicono formare una *zona* o fascia di faccie consecutive nel cristallo; il proposto problema si può dunque esprimere in altri termini, dicendo che si tratta di determinare i coefficienti di derivazione di una faccia che fa parte d'una combinazione, e per cui questi coefficienti sono ignoti, quando questa faccia appartiene a due zone, da essa formate con due paia di faccie di forme conosciute contenute nella stessa combinazione. Per risolvere questo problema si osserverà che la geometria analitica ci somministra un' equazione di condizione tra i coefficienti delle equazioni di tre piani, riferiti a tre coordinate x, y, z, di cui l'uno è parallelo all'intersezione degli altri due. Siano cioè le equazioni di due piani nello spazio

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\text{ , e }\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}+\frac{z}{c'}=1,$$

e quella di un' altro piano, parallelo all' intersezione dei due piani $\frac{x}{a''}+\frac{y}{b''}+\frac{z}{c''}=1$; l' equazione di condizione di cui si si tratta, si trova essere

$$a''b''(a'b-ab')cc'+c''a''(c'a-ca')bb'+b''c''(b'c-bc')aa'=0.$$

Per applicare quest' equazione al nostro caso siano F, F' (fig. 54) le due faccie appartenenti a forme note, e di cui i parametri, chiamando a, b, c quelli della forma fondamentale di tutta la combinazione, saranno noti, ed espressi da ma, nb, e c per la prima, e $m'a$, $n'b$, e c per la seconda; e sia F'' la faccia

di una forma ignota, che presenta con quelle due spigoli paralleli, faccia che per conseguenza è parallela all' intersezione delle due prime, ossia forma con loro una porzione di zona $FF''F'$, e siano i suoi parametri $m''a$, $n''b$, e c, ove m'', n'' sono quantità ancora ignote; sostituendo queste espressioni dei parametri nell' equazione di condizione ad a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'', essa diviene

$$m''n''(m'n - mn') + m''(m - m')nn' + n''(n' - n)mm' = 0;$$

questa è l' equazione detta *equazione generale di combinazione della cristallografia*. Se ora, come abbiamo supposto, la faccia F'' ha pure due spigoli paralleli formati dalle sue intersezioni con due altre faccie f, f' di parametri pur noti, cioè fa parte con esse d'un' altra zona $fF''f'$...., se ne dedurrà un' altra simile equazione, ove entreranno le stesse due quantità m'', n'' incognite, cogli altri coefficienti noti appartenenti a queste altre due faccie; e dalla combinazione di queste due equazioni, si otterrà il valore di ciascuno dei due coefficienti m'' ed n'', e quindi dei parametri che si cercavano, della faccia F'', senza che faccia bisogno di servirsi delle osservazioni per cui si fosse determinata direttamente la posizione di questa faccia. Del resto si comprende che secondo la diversa posizione delle faccie di parametri dati nei diversi ottanti dello spazio, i coefficienti dei loro parametri rispettivi debbono essere presi positivi o negativi, in vece che nell'equazione citata di cui abbiamo indicato l'uso si sono presi tutti positivi, perchè essa era calcolata nella supposizione che tutte le tre faccie F, F', F'', oppure f, f', F'' fossero situate nell' ottante de' semi-assi positivi.

Passiamo ora all'applicazione dei principii generali sovra esposti ai diversi sistemi di cristallizzazione.

§ 2.°

Del sistema regolare.

ARTICOLO PRIMO

Di questo sistema in generale, e della sua forma fondamentale.

155. Il sistema regolare, di cui il carattere geometrico fondamentale è espresso dal numero ternario degli assi, e dalla loro perpendicolarità, ed uguaglianza, è così chiamato, perchè da queste proprietà risulta necessariamente in tutte le sue forme una regolarità, o somiglianza di posizione di tutte le faccie, che non ha luogo in alcun altro sistema. Alcuni cristallografi lo hanno chiamato *tesserale*, o *tessulare* dal nome *tessera* che significa un dado od un cubo, perchè una delle sue forme derivate più semplici è il cubo; altri l'hanno indicato coi nomi di sistema *equi-asse*, o *equi-membre*, o *isometrico*, tratto dall' uguaglianza stessa degli assi della sua forma fondamentale. Finalmente fu anche chiamato *sistema sferoidico*, perchè le sue forme hanno tutte le loro faccie disposte similmente attorno a un centro come i punti d' una sfera.

In questo sistema la forma fondamentale avendo i suoi tre assi uguali, i parametri di questa forma, che in generale abbiamo rappresentati per a, b, c nella forma fondamentale di qualunque sistema trimetrico, saranno qui espressi da 1, 1, 1. In tale forma non può esservi in ciascun ottante che una sola faccia, di cui ciascuna, a cagione dell' uguaglianza delle sue intersezioni coi piani delle coordinate, dee presentare un triangolo equilatero; essa è dunque una forma rinchiusa da otto triangoli equilateri, cioè un *ottaedro regolare*. Quest' ottaedro è per conseguenza la forma fondamentale del sistema di cui qui ci occupiamo.

In questa forma tutti gli assi essendo uguali, e similmente posti, non ve n' è alcuno che possa distinguersi specialmente col nome di asse principale; o in altri termini si può prendere uno qualunque di essi per tale indifferentemente.

Oltre questi assi principali si debbono notare nel sistema rego-

lare gli assi *intermedii*, cioè quattro assi *intermedii ottanziali*, come li chiameremo, i quali si trovano a ugual distanza dai tre assi principali in ciascun ottante dei piani coordinati, e sei assi *intermedii quadranziali*, che dividono in mezzo l' angolo formato dai due assi principali in ciascun quadrante. I primi uniscono tra loro i centri delle faccie dell' ottaedro fondamentale opposte due a due, gli altri uniscono i punti di mezzo degli spigoli opposti pur due a due dello stesso ottaedro. Naumann chiama quelli *assi intermedii trigonali*, e questi *assi intermedii rombici*.

Si osserverà ancora che in questo sistema la forma fondamentale è unica, e determinata, una sola essendo la forma dell' ottaedro regolare, come di qualunque altra forma regolare geometrica; in vece che negli altri sistemi il rapporto di lunghezza degli assi può variare, e ciascuno di questi sistemi non essendo determinato che dal genere di questo rapporto, cioè di disuguaglianza di due, o di tutti tre gli assi, comprende, come già abbiamo detto, realmente un' infinità di forme fondamentali diverse. Quindi unica è pure la serie cristallina di forme derivate in questo sistema regolare, in vece che infinite sono le serie possibili di cristalli negli altri sistemi, in ragione della varietà di forma fondamentale da cui sono derivate. Ma siccome questo rapporto stesso di uguaglianza degli assi che caratterizza il sistema regolare, si può riguardare come il limite di tutti i rapporti di disuguaglianza che possono presentarci gli altri sistemi tra i loro assi, non è da stupirsi, se questo sistema di cristallizzazione sebbene formante una sola serie di cristalli, è comune ad un gran numero di sostanze diverse, mentre al contrario le diverse serie comprese in ciascuno degli altri sistemi appartengono in generale ciascuna ad una sostanza determinata.

Le sostanze più note che presentano le forme del sistema regolare nella loro cristallizzazione naturale o artifiziale, sono il diamante, la maggior parte dei metalli, come rame, oro, argento ecc., molti solfuri metallici, lo spato fluore ossia fluuro di calcio, il sal comune ossia cloruro di sodio, detto *sal gemma* quando si presenta cristallizzato in natura, l' alume, il *ferro ossidulato* di Haüy, ossia ossido di ferro detto magnetico (*magnet-eisenstein*), il

granato, lo spinello ecc. Tra queste diverse sostanze il diamante, il solfuro di zinco, la pirite di ferro, ossia solfuro di di ferro ordinario, e alcune altre offrono in generale forme emiedriche, mentre le altre in più gran numero si trovano sotto forme oloedriche. Non vi ha esempio in questo sistema di forme tetartoedriche.

ARTICOLO SECONDO

Delle forme derivate del sistema regolare.

A. *Derivazione di queste forme per semplici costruzioni geometriche.*

156. Partendo dall' ottaedro regolare che è la forma fondamentale di questo sistema, e in cui tutti i tre assi sono uguali, avremo le forme da esso derivate per mezzo di allungamenti in diversi rapporti di uno, o di due de' suoi parametri, col che verranno a sostituirsi altri rapporti a quello di uguaglianza che tra essi avea luogo nella forma fondamentale; considereremo prima le forme oloedriche, che si riferiscono immediatamente all' ottaedro come loro origine, e passeremo poi alle forme emiedriche, che si deducono da ciascuna delle oloedriche. Si osserverà qui, che la natura delle forme oloedriche compiute richiede in questo sistema, stante l'ugual valore di tutti tre gli assi, che ad essi tutti si stendano le faccie isoparametriche che le costituiscono, cosicchè ciascun sistema di parametri si applichi successivamente ai tre assi tanto nella lor parte positiva, che nella negativa, combinati in tutte le maniere possibili.

Si applichi in primo luogo, per parlare della forma derivata più semplice di questo sistema, sopra ciascun angolo solido come *b* dell' ottaedro fondamentale *abdecf* (fig. 55) un piano che sia parallelo come *ABCD* ai due assi *dOa*, *fOc* che non appartengono a quest' angolo, e che sia per conseguenza ugualmente inclinato su tutte le faccie che formano il medesimo; ne risulterà una forma rinchiusa da tre paia di faccie opposte perpendicolari l'uno all'altro, faccie che saranno

quadrati uguali tra loro, cioè la forma risultante sarà un esaedro regolare, ossia un cubo *ABCDEFGH*, il cubo e l'ottaedro regolare avendo tra loro questa relazione che l'una di queste forme ha i suoi angoli corrispondenti alle faccie dell'altra, cosicchè reciprocamente si formerebbe un ottaedro regolare applicando un piano sopra ciascun angolo solido d'un cubo, per esempio un piano parallelo a *abc* sull'angolo *A* del cubo. Le faccie del cubo, per l'indicata costruzione, avendo per parametro nella direzione di uno degli assi, l'asse stesso dell'ottaedro 1, ed essendo parallele ciascuna agli altri due assi, cioè non tagliandoli che a distanza infinita, i tre parametri di ciascuna faccia corrispondenti a quelli dell'ottaedro 1, 1, 1 saranno ∞, 1, ∞. Se dunque indichiamo l'ottaedro, forma fondamentale, colla sua lettera iniziale *O*, avremo, secondo i principii sovra stabiliti della notazione dei cristalli, il segno $\infty O \infty$ pel cubo, prima e più semplice forma derivata dall'ottaedro (1).

Applichiamo ora sopra ciascuno spigolo dell'ottaedro, per esempio *cb* (fig. 56), un piano come *AcBb* che sia parallelo a quello degli assi che non appartiene a questo spigolo come *Oa*, e che sia per conseguenza ugualmente inclinato sulle due faccie che formano questo spigolo; dodici essendo gli spigoli dell'ottaedro, dodici saranno pure queste faccie, e formeranno quindi colla loro intersezione un dodecaedro ossia forma di dodici faccie *cBACDdbaeIEFGf*, che si troveranno essere altrettanti rombi. Questa forma si chiamerà perciò *dodecaedro rombico*, o *rombo-dodecaedro*. Essa ha qui la massima regolarità che possa avere; i suoi spigoli sono al numero di 24, tutti uguali, e similmente posti relativamente al centro, e le sue faccie rombi uguali, ed anch'essi similmente posti; i suoi angoli solidi sono 14, di cui 6, come quello in *b*, sono formati

---

(1) Nel sistema di notazione di Weiss di cui sopra abbiamo parlato, l'ottaedro si indica con $(a:a:a)$, rappresentando a la lunghezza comune dei tre assi principali, e il cubo prende il simbolo $(a:\infty a:\infty a)$. È facile seguire l'analogia di questa notazione per le altre forme qui appresso.

da quattro angoli piani, e hanno il vertice comune con quelli dell' ottaedro fondamentale, e 8, come quello in *A*, sono formati da tre angoli piani al dissopra delle faccie dell' ottaedro; se questi ultimi si riunissero con linee si avrebbe un cubo inscritto nel dodecaedro, e agli spigoli di cui le faccie di questo sarebbero applicate non altrimenti che a quelli dell' ottaedro fondamentale. Gli angoli diedri degli spigoli sono di 120° nel dodecaedro.

Dalla maniera con cui abbiamo costrutta questa forma sull' ottaedro fondamentale, è chiaro che ciascuna delle sue faccie taglia due degli assi delle coordinate alla stessa distanza dal centro che quelle dell' ottaedro, cioè ha colle faccie di questo comuni i parametri 1, 1 relativamente a questi due assi, e che per altra parte essendo parallela al terzo asse, essa ha relativamente a questo il parametro infinito. Quindi il segno cristallografico di questa forma sarà $\infty O 1$, o semplicemente ∞O, oppure $O\infty$, comprendendo nel simbolo O dell' ottaedro fondamentale i due parametri con esso comuni. Questa forma fu chiamata da Weiss *granatoedro*, perchè si presenta particolarmente nella gemma detta *granato*.

Se si concepiscono applicati ad uno qualunque degli spigoli dell' ottaedro come *cb* (fig. 57) due piani *cAb*, *cBb* uno da ciascun lato, che vadano a tagliare l' asse che non appartiene a questo spigolo, come *dOa*, ad una distanza indeterminata, che chiameremo *m*, maggiore dell' asse 1 dell' ottaedro, e lo stesso si eseguisca su tutti gli spigoli, ne risulterà una forma terminata da 24 triangoli isosceli *cBACDdbaeIEFGf*, le faccie che partono da ciascuno spigolo dell' ottaedro formando sopra ciascuna delle faccie di questo una piramide triangolare, come *abcA*. Questa forma, se si avesse solo riguardo al numero delle sue faccie, si chiamerebbe un *icositetraedro*; ma siccome si possono immaginare molte altre forme di 24 faccie, di altre figure che la triangolare, ed altrimenti disposte, e di cui alcune come vedremo ci sono presentate da altre derivazioni in questo stesso sistema di cristallizzazione regolare, conviene distinguere la forma di cui qui si tratta con un nome che ne esprima la relazione particolare alla forma fondamentale, e quello di *triacisottaedro* che significa *forma di tre volte otto*

faccie, sembra il più conveniente tra quelli proposti da diversi cristallografi; da altri fu anche chiamato l'*ottaedro piramidato*, o l'*icositetraedro otto-piramidale*. I parametri delle faccie di questa forma sono, come è chiaro, 1, 1 ed *m*; il suo segno sarà dunque $mO1$, o semplicemente mO. Il parametro *m* restando qui indeterminato, questa forma rinchiude un' infinità di forme possibili, secondo i diversi valori che si assegneranno ad *m*. I valori che se ne presentano il più soventi in natura, nelle sostanze che appartengono a questo sistema di cristallizzazione regolare, sono $\frac{3}{2}$, 2, e 3, cosicchè ne risultano tre specie di triacisottaedro che hanno per segno $\frac{3}{2}O$, $2O$, e $3O$.

Se in vece di far partire tre piani dai tre spigoli che formano i lati di ciascuna faccia dell' ottaedro fondamentale, come nella derivazione della forma precedente, si facciano partire tre piani come $aCAF$, $bBAF$, $cBAC$ dai tre angoli piani di ciascuna di queste faccie dell' ottaedro come bac (fig. 58), i quali vadano a riunirsi al disopra della medesima; e così da ciascun angolo solido dell' ottaedro quattro simili faccie, di cui ciascuna si estenda sopra una delle faccie di quest'angolo solido, e vada a tagliare i due altri assi appartenenti alla stessa faccia, prolungati, ad una distanza indeterminata *m* maggiore dell' unità cioè dell' asse dell' ottaedro; risulterà dalle intersezioni di queste faccie una forma anch' essa di 24 faccie, $cDEBACaFbKdGHILMf$ (di cui per evitare la confusione non si sono segnati con lettere che gli angoli anteriori), ma che in vece di essere triangoli, saranno trapezoidi simmetrici ossia deltoidi. Chiameremo questa forma per abbreviare semplicemente *icositetraedro*; ma essa si può anche distinguere coi nomi di *icositetraedro trapezoidale*, o *deltoidale*; da Weiss fu inoltre chiamata questa forma *leucitoedro*, o *leucitoide*, perchè si è particolarmente osservata in una sostanza minerale detta *leucite*. Si noterà che la stessa forma si potrebbe anche ottenere partendo da un cubo, dagli angoli solidi del quale, situati in *A*, *E*, ecc., si elevassero tre faccie, sopra le tre faccie del cubo componenti ciascuno de' suoi angoli, e che verrebbero a riunirsi quattro a quattro sulle faccie del cubo, per

esempio in *b* al dissopra della faccia di questo cubo che avesse i suoi angoli in *A*, *E*, *H*, *L*, cosicchè le 24 faccie formerebbero 6 sistemi di 4 faccie ciascuno, in vece che nella maniera precedente di considerarla, relativamente all' ottaedro, esse formano 8 sistemi di tre faccie ciascuno. Dalla costruzione che ne abbiamo indicata è chiaro che queste faccie tagliano i tre assi coordinati a distanze dal centro espresse da 1, *m*, ed *m*; il segno generale di questa forma sarà dunque mOm; ma essa comprende un infinita varietà di forme secondo il valore che si attribuisce ad *m*. Le varietà che si osservano più frequentemente in natura sono

$$\frac{3}{2}O\frac{3}{2},\ 2O2,\ 3O3,\ 4O4,\ 6O6,\ 12O12;$$

le varietà $2O2$ e $3O3$ sono più propriamente quelle che furono distinte coi nomi di *leucitoedro*, e *leucitoide* rispettivamente.

Si facciano ancora partire da ciascun angolo solido dell' ottaedro quattro faccie che si estendano ciascuna sopra un delle faccie, o piuttosto sopra uno degli spigoli che formano quest' angolo, e così tre per ciascuna faccia dell' ottaedro, o due sopra ciascuno spigolo, come cAB, bAB sopra lo spigolo cb (fig. 59); ma in maniera che in vece di andare a tagliare i due assi che non appartengono a quest' angolo solido a due distanze uguali *m*, ne taglino uno alla distanza indeterminata *m* od *n*, e siano parallele all' altro, cosicchè non potrebbero tagliar quest' ultimo asse come dOa che a distanza infinita; ne risulterà ancora un icositetraedro o forma di 24 faccie $cABDCdbaGFEf$; ma queste faccie in vece di essere trapezoidi saranno triangoli isosceli aventi i loro vertici negli angoli solidi stessi dell' ottaedro ove si riuniscono quattro a quattro, e le loro basi trasversali al dissopra di ciascuno spigolo dell' ottaedro, come BA al dissopra di cb ecc. Esse formeranno angoli solidi di sei faccie al dissopra delle faccie dell' ottaedro, per esempio in *A* sopra cab. Questi ultimi angoli solidi si potranno concepire come i vertici degli angoli d'un cubo $ABDCGFE$, di cui gli spigoli saranno alternativamente tre de' sei spigoli che si riuniscono in questi

angoli, cioè saranno gli spigoli formati dalle basi dei triangoli isosceli, onde l'icositetraedro di cui si tratta si potrà considerare come formato dall'applicazione di sei piramidi quadrangolari sopra le sei faccie di questo cubo. Così quest' icositetraedro ha ad un tal cubo la stessa relazione, che il triacisottaedro ha all' ottaedro fondamentale medesimo, offrendo quattro faccie per ognuna delle sei di questo cubo, come il triacisottaedro ne offre sei per ognuna delle otto faccie dell' ottaedro; potremo dunque distinguerlo col nome di *tetracisesaedro* che significa forma di *quattro volte sei faccie.* Weiss lo ha anche chiamato *cubo piramidato*, e potrebbe pure indicarsi col nome di *icositetraedro se-piramidale.*

Le faccie di questa forma, prolungate convenientemente, tagliando secondo quello che si è detto i tre assi coordinati alle distanze m od $\frac{n}{2}$, 1, e ∞, il segno cristallografico ne sarà $m O \infty$, oppure $\infty O n$, e varierà questa forma pei diversi valori che si assegneranno ad m od n; le varietà più frequentemente osservate sono

$$\infty O \frac{3}{2}, \quad \infty O 2, \quad \infty O 3, \quad \infty O 4, \quad \infty O \frac{7}{2}.$$

Ci resta a parlare della forma la più composta di tutte quelle di questo sistema regolare. Essa si ottiene facendo partire da ciascun angolo solido dell' ottaedro otto faccie, che si estendano due a due come cAB, cCA (fig. 60) sopra ciascuna delle quattro faccie che lo compongono, o due a due sopra ciascuno de' suoi quattro spigoli, come cAB, cDB sopra lo spigolo cb, e di cui ciascuna prolungata vada a tagliare l'altro semi-asse dell' ottaedro, appartenente allo spigolo sovra cui si estende, ad una distanza n dal centro, e il terzo semi-asse che non appartiene a questo spigolo, alla distanza m, m ed n essendo due numeri indeterminati superiori all'unità, e di cui supporremo m maggiore di n. Dall'intersezione di queste faccie, che sono al numero di 48, risulterà una forma $cEDBAC\ aGbKdNMLHIf$ terminata da 48 triangoli scaleni, sei per ogni ottante del sistema delle coordinate, ossia al dissopra di ciascuna faccia dell' ottaedro, ove esse si riuniranno per formare angoli solidi di sei faccie; nella figura non

si sono segnate che le faccie anteriori per evitare la confusione. Si osserverà che de' sei spigoli che formano ciascuno di questi angoli solidi, tre presi alternativamente, cioè quelli che partono dagli angoli dell' ottaedro, come bA, cA, aA, sono quelli stessi che apparterrebbero ad un rombo-dodecaedro, quale sopra l' abbiamo costrutto, al dissopra delle faccie del quale, come per esempio $cAbD$, riunendosi gli altri spigoli, vi formano piramidi quadrangolari come $BcAbD$ che hanno quelle faccie per basi; onde la forma di cui si tratta può concepirsi risultante da questa sovraposizione di piramidi quadrangolari sulle faccie del rombo-dodecaedro. Questa forma avuto riguardo al numero soltanto delle sue faccie si potrebbe chiamare *tetracontaottaedro*, e così fu appunto chiamata da alcuni cristallografi; ma si avrà un nome più espressivo, relativamente alla sua derivazione dall' ottaedro, chiamandolo *esacisottaedro*, ossia *forma di sei volte otto faccie.* Altri volendo esprimere la sua relazione al rombo-dodecaedro, da cui si può derivare immediatamente, la chiamarono *rombo-dodecaedro piramidato*, e Weiss *granatoedro piramidato.* Il segno cristallografico di questa forma dee essere, secondo quello che si è detto della sua formazione, mOn; esso può variare in infiniti modi secondo i valori che si danno tanto ad m che ad n; le varietà più ordinarie in natura sono

$$3O\frac{3}{2};\quad \frac{11}{3}O\frac{11}{5},\quad 4O2,\quad 5O\frac{5}{3},\quad 7O\frac{7}{3}.$$

Del resto l' esacisottaedro preso nella maniera più generale comprende anche tutte le altre forme particolari avanti descritte, poichè i segni di queste non differiscono dal segno generale di quello, se non perchè m, od n, od amendue vi prendono un valore o uguale all' unità, o infinito, o divengono uguali tra loro.

Per rendere sensibile questa dipendenza di tutte le forme oloedriche del sistema regolare dall' esacisottaedro, e mettere nello stesso tempo sotto all' occhio la derivazione di questa forma, e per conseguenza di tutte le altre dall' ottaedro fondamentale, ho rappresentato nella figura 61 uno degli otto ottanti formati dalle intersezioni dei tre piani coordinati, se-

gnandovi per mezzo di linee punteggiate le faccie quali sarebbero essendo prolungate sino agli assi del sistema come lo richiede la loro derivazione, e indicandovi con linee continue le parti di esse faccie che rimangono realmente in quest' ottante, nella forma che ne risulta, in seguito alla loro mutua intersezione. I semi-assi o parametri dell' ottaedro fondamentale, sono segnati alla loro estremità colle ciffre 1, 1', ed 1'', e le lettere m, n che segnano i punti in cui le diverse faccie dell' esacis-ottaedro partendo da una di queste estremità, ossia da uno degli angoli solidi dell' ottaedro, andrebbero a tagliare gli altri assi prolungati sono pure senz'accento, o con un solo accento, o con due accenti corrispondentemente agli assi dell' ottaedro a cui si riferiscono. Così per esempio la faccia reale $1'pg$ fa parte del triangolo intiero $1'm''n$, che partendo dal punto 1', cioè dall' angolo dell' ottaedro che si trova sull' asse delle coordinate y, va a tagliare gli altri due assi x e z nei punti n ed m'', e così si dica delle altre faccie che sono comprese in quest' ottante; lo stesso si applicherà agli altri ottanti che non sono rappresentati nella figura. Ora si noterà che gli spigoli che si veggono nella porzione dell' esacis-ottaedro contenuto in quest' ottante della figura (il che avrà pur luogo negli altri ottanti) sono di tre sorta, gli uni come $g1'$ più lunghi degli altri tutti, altri come $p1'$ di lunghezza mezzana, e i terzi come gp più corti di quelli delle due prime specie. Ciò posto è facile vedere come l' esacis-ottaedro si cangierà successivamente nelle altre forme più semplici del sistema; infatti 1.° facendo $n=1$ nella sua formola o simbolo generale mOn, le faccie che s' incontravano due a due in uno degli spigoli più corti, coincideranno in un sol piano, formeranno un triangolo isoscele, e la forma diverrà un triacis-ottaedro $=mO$; 2.° se vi si fa $m=\infty$ svaniranno al contrario gli spigoli mezzani, le faccie due a due che vi si incontravano, e di cui l' una appartiene ad un ottante, come quello della figura, e l'altra all' ottante vicino, coincideranno in un sol piano, formeranno pure un triangolo isoscele, e la forma diverrà un tetracis-esaedro $=\infty On$; 3.° facendo $m=n$ svaniscono gli spigoli più lunghi, le faccie due a due appartenenti ad uno stesso ottante che vi si tagliavano, coincideranno in un piano, formeranno un tra-

pezoide simmetrico, e la forma diverrà un icositetraedro $=mOm$ od nOn; 4.° se si fa $m=\infty$ ed $n=1$ svaniscono gli spigoli mezzani in un coi più corti; le faccie si uniscono quattro a quattro, due di un ottante, e due dell' ottante vicino in un solo piano, formano un rombo, e la forma diviene il rombo-dodecaedro $=\infty O$; 5.° finalmente facendo $m=n=\infty$ gli spigoli più lunghi svaniscono in un co' mezzani, le faccie cadono otto a otto, cioè due di ciascuno di quattro ottanti, in un solo piano, e la forma diviene il cubo $\infty O\infty$.

Per compiere ciò che riguarda le forme oloedriche del sistema regolare, osserveremo ancora, che le faccie di queste diverse forme possono distribuirsi in generale in diverse *zone* aventi per asse alcuno degli assi principali, o intermedii, a cui esse si trovano parallele; così le faccie del cubo possono riferirsi ciascuna a due zone diverse aventi per asse uno degli assi principali; ciascuna delle faccie del rombo-dodecaedro e del tetracis-esaedro appartengono pure a una di queste zone, che possono chiamarsi *zone del cubo*. Così pure le faccie dell' ottaedro formano zone che hanno per assi gli assi quadranziali del sistema, e a cui appartengono pure le faccie di altre delle forme oloedriche; esse si possono chiamare *zone dell'ottaedro*. Finalmente il dodecaedro, ed altre forme offrono zone di faccie che hanno per assi gli assi ottanziali, e che possono indicarsi col nome di *zone del dodecaedro*.

157. Per passare ora alle forme emiedriche, che possono derivarsi da queste diverse forme oloedriche del sistema regolare, osserveremo in primo luogo che il cubo, e il rombo-dodecaedro non sono suscettibili di emiedria, il primo perchè 3 piani, che sarebbero la metà del numero delle sue faccie non possono rinchiudere uno spazio per ogni lato, e il secondo perchè non si possono prendere sei delle sue faccie in maniera che rinchiudano intieramente uno spazio, e che soddisfacciano nello stesso tempo alle condizioni di simmetria che abbiamo assegnato alle forme emiedriche. Si può anche dire che in queste due forme, il cubo, e il rombo-dodecaedro, le faccie alternative su cui dovrebbe esercitarsi l' emiedria per farle scomparire, non sono, a cagione della qualità infinita dei due coefficienti m, n nel primo $\infty O\infty$, e di uno di essi nel secondo

∞O, che la continuazione delle faccie che dovrebbero rimanere ; cosicchè queste due forme si possono considerare indifferentemente come oloedriche , o come già emiedriche esse medesime.Tra le altre forme oloedriche suddette si trova che l'ottaedro , il tetracisesaedro , e l' esacisottaedro sono capaci di emiedria per faccie semplici , delle quali però quella che corrisponderebbe a quest' ultimo non pare aver luogo in natura , onde non dobbiamo occuparcene ; che l' esacisottaedro fornisce per altra parte un' emiedria per paia di faccie ; che il triacisottaedro , e l' icositetraedro ammettono emiedrie per sistemi di tre faccie ; e finalmente che l' esacisottaedro è capace di emiedria anche per sistemi di sei faccie.

La forma emiedrica dell' ottaedro è il *tetraedro* , che perciò fu anche chiamato da alcuni *emi-ottaedro* ; è facile in fatti concepire che dalla soppressione delle faccie alternative aggiacenti dell' ottaedro regolare , e dall' ampliazione delle faccie restanti sino al loro mutuo incontro , dee risultare un tetraedro , ossia piramide triangolare , che avrà tutte le faccie ugualmente inclinate, gli angoli solidi uguali, e gli spigoli di ugual lunghezza, insomma un tetraedro regolare. Questa trasformazione si vede rappresentata nella fig. 62 ; la faccia *cba* dell' ottaedro *cabdef* si stende , per l' addizione dei tre triangoli *bcG* , *caH* , *baI* sui suoi tre lati , nel triangolo *IHG*, per divenire una delle faccie del tetraedro ; la faccia dell' ottaedro *bcd* a quella aggiacente scompare , come pure *cae* ; ma la faccia *cde* prende un accrescimento simile a quello di *cba* , e diviene la faccia *GHL* del tetraedro , che forma colla prima faccia *IHG* del medesimo che abbiamo considerata , lo spigolo *GH*. Parimenti la faccia dell' ottaedro *dbf* si stende nel triangolo *GLI* , e la faccia *efa* nel triangolo *LHI* , onde risulta il tetraedro *GHLI* che copre colle sue faccie, chiudendo lo spazio, le faccie alternative dell' ottaedro che sono scomparse. Conformemente poi a quello che sopra abbiamo detto delle forme emiedriche in generale , si osserverà che secondo le faccie che si sopprimono , o che si lasciano sussistere , debbono risultarne due tetraedri , che non differiranno tra loro che per la loro posizione relativamente a quella che si sarà scelta per l'ottaedro,

e che si potranno distinguere coi segni $+\frac{O}{2}, e -\frac{O}{2}$.

L' emiedria del triacisottaedro per sistemi di tre faccie, che è la sola specie di emiedria possibile per questa forma, ha luogo per la soppressione alternativa dei sistemi di tre faccie triangolari, che applicate in forma di piramide a ciascuna delle otto faccie dell' ottaedro fondamentale costituiscono questa forma, e per l'estensione delle faccie che compongono i sistemi conservati, al dissopra dei sistemi soppressi, sino alla loro riunione. Così nella fig. 63 le faccie $AbBc$, $AaCc$, $AbFa$ corrispondono alle tre faccie che apparterrebbero al triacisottaedro al dissopra della faccia abc dell' ottaedro fondamentale, cioè ad Abc, Aac, Aab, già segnate colle stesse lettere nella figura 57, ma sono prolungate l'una al dissopra della faccia cbd, l'altra della faccia cae, e la terza della faccia abf dell' ottaedro fondamentale; così su queste faccie dell' ottaedro non si formano i sistemi di tre faccie che costituirebbero il triacisottaedro, ma su di esse, da simili prolungamenti dei sistemi delle altre faccie alternative che si conservano, si formano in B, C, F angoli solidi di tre faccie in vece di quelli che vi formerebbero i sistemi di faccie soppressi del triacisottaedro.

I sistemi conservati essendo così al numero di quattro, ciascuno di tre faccie, ne dee risultare una forma di 12 faccie, ossia un dodecaedro, $cABDCabdeGFEIf$, e si trova che ciascuna faccia di questo dodecaedro, per la maniera con cui se ne opera la mutua intersezione, è un trapezoide simmetrico ossia deltoide. Quindi si dà a questa forma emiedrica il nome di *dodecaedro trapezoidale* o di *deltoido-dodecaedro*; altri lo chiamano semplicemente *emi-triacisottaedro*. Si può notare che se si riuniscono con linee rette i vertici delle piramidi restanti che appartenevano al triacisottaedro, cioè A, D, E, G, si avrà un tetraedro iscritto, sopra ciascuna delle faccie del quale potranno considerarsi riunite in altri angoli solidi, tre delle faccie trapezoidali del dodecaedro di cui si tratta, partendo dai tre angoli di questa faccia del tetraedro.

I segni dei due deltoido-dodecaedri che si possono derivare dal triacisottaedro, scambiando tra loro i sistemi di tre faccie che

si sopprimono, o si lasciano sussistere, saranno $+\frac{mO}{2}$ e $-\frac{mO}{2}$.

L' icositetraedro non può nè anche dare un' emiedria, se non per sistemi di tre faccie; le faccie formanti ciascun sistema alternativamente da sopprimersi o da conservarsi sono quelle che, come si è veduto, possono concepirsi partire da ciascun angolo solido di ciascuna faccia dell' ottaedro fondamentale, per andarsi a riunire in un angolo solido al dissopra di questa. Così nella fig. 64 le tre faccie AEC, AEL, ALC corrispondono alle tre faccie dell'icositetraedro della fig. 58, $ABcC$, $ABbF$, $ACaF$ che vi si formavano sulla faccia cba dell'ottaedro fondamentale, ma sono prolungate sino all'incontro delle altre faccie dei sistemi alternativamente conservati al dissopra delle faccie dell'ottaedro di cui i sistemi sono soppressi. Anche in questo caso i sistemi conservati, e che debbono congiungersi al dissopra di quelli soppressi essendo quattro, ciascuno di tre faccie, dodici saranno le faccie della figura emiedrica risultante, cioè questa forma sarà pure un dodecaedro $AECLHFGD$; ma le faccie di questo dodecaedro si trovano qui essere triangoli isosceli. Quindi questa forma emiedrica prenderà il nome di *dodecaedro trigonale*, o di *trigono-dodecaedro* quando non si voglia chiamare semplicemente *emi-icositetraedro*. Anche in questa forma potrebbe concepirsi iscritto un tetraedro, che avesse i suoi angoli solidi nei vertici dei quattro sistemi di faccie conservate cioè A, H, G, D; ma se ne può anche iscrivere un altro in diversa posizione, e che ha una relazione più intima colla natura della forma medesima, riuniendo con linee gli angoli solidi a sei faccie, che le faccie conservate appartenenti a tre sistemi diversi vengono a formare al dissopra dei sistemi soppressi della forma oloedrica generatrice di questa emiedria, cioè gli angoli E, C, L, F. Si osserverà nella figura che queste linee passano ciascuna per uno degli angoli solidi dell' ottaedro fondamentale, cosicchè le faccie del tetraedro che ne risulta, comprendono nel loro piano quelle dell' ottaedro, cioè questo tetraedro non è altro che quello che già abbiamo considerato come forma emiedrica dell' ottaedro; i suoi spigoli si confondono con quelli formati nel dodecaedro di cui si tratta dall' intersezione delle faccie di uno dei sistemi conservati con quelle dell'altro,

cosicchè ciascun sistema di tre faccie conservato viene a formare una piramide triangolare sopra una delle faccie di questo tetraedro, per esempio la piramide *AECL* sulla faccia *ECL*. Quindi si è anche chiamata questa forma emiedrica *tetraedro piramidato*, e si potrebbe pure chiamare *dodecaedro quadripiramidale*, o *triacis-tetraedro*, cioè *forma di tre volte quattro faccie*. I segni dei due trigono-dodecaedri che si possono derivare dall' icositetraedro $m\,O\,m$, in due diverse posizioni relativamente a questo, sono $+\frac{m\,O\,m}{2}$, e $-\frac{m\,O\,m}{2}$.

Consideriamo ora la forma emiedrica che ci fornisce l' esacisottaedro quando l' emiedria vi ha luogo per sistemi di sei faccie, cioè delle sei faccie che si estendono sopra ciascuna faccia dell' ottaedro fondamentale. Stendendo le faccie di quattro di questi sistemi presi alternativamente al dissopra degli altri quattro sistemi che rimangono soppressi, si forma sopra ciascuno di questi un nuovo sistema di sei faccie, due fornite da ciascuno di tre dei sistemi conservati, e che attorniano il sistema soppresso. Così nella fig. 65 le sei faccie dell' esacisottaedro della fig. 60 che formavano in *A* un angolo solido al dissopra, per esempio, della faccia *cba* dell' ottaedro fondamentale, si prolungano al dissopra delle faccie vicine dell'ottaedro, come *dbc* ecc., su cui i sistemi di tre faccie sono soppressi, onde dall' incontro di queste faccie con quelle fornite dai sistemi conservati sulle faccie alternative dell' ottaedro, vengono a formarsi, su quelle di cui i sistemi sono soppressi, angoli solidi come *B* ecc., anch'essi a sei faccie. Ne risulta così una forma di 24 faccie, che si trovano essere triangoli scaleni, ossia un icositetraedro a faccie triangolari, ma che si possono concepire riunite in quattro sistemi di sei faccie ciascuno. Se si riuniscono con linee i vertici dei quattro sistemi conservati dell' esacisottaedro generatore, come *A*, si formerà un tetraedro, da ciascuno degli angoli del quale si potrà concepire che partano le faccie triangolari che compongono i nuovi sistemi di sei faccie, due sopra ciascun angolo di ciascuna faccia del tetraedro, per andarsi a riunire in un angolo solido su questa, non altrimenti che nel deltoido-dodecaedro i nuovi sistemi di tre faccie possono concepirsi, come abbiamo veduto, formati

da faccie che partano ciascuna da uno degli angoli piani di ciascuna faccia d' un tetraedro posto similmente a questo relativamente alla forma oloedrica generatrice, e all' ottaedro fondamentale. Questa circostanza che le 24 faccie dell' icosi-tetraedro di cui si tratta, si possono così distribuire in quattro sistemi di sei faccie che si elevano al dissopra di ciascuna faccia d' un tetraedro, ci permette di dargli un nome che lo distingue dagli altri icositetraedri o figure di 24 faccie, chiamandolo *esacis-tetraedro*, o *forma di sei volte quattro faccie.* Fu anche chiamato *icositetraedro trigonale tetraedrico*, *icositetraedro scalenico* ecc., o semplicemente *emi-esacis-ottaedro.* È chiaro che esso ha al suo generatore, l' esacisottaedro, la stessa relazione che il deltoido-dodecaedro ha al suo generatore, il triacisottaedro. Inoltre l' esacistetraedro ha pure al tetraedro che vi abbiamo concepito iscritto, ma che non è però quello prodotto dall' emiedria dell' ottaedro fondamentale, la stessa relazione che l' esacisottaedro ha all' ottaedro medesimo.

Si possono poi anche nell' esacistetraedro riunire con linee i vertici dei quattro sistemi che si formano al dissopra dei sistemi soppressi dell' esacisottaedro; il tetraedro però che verrà così a formarsi sarà bensì in posizione simile a quello che riunisce i vertici dei nuovi sistemi nel trigono-dodecaedro, e che è pur quello prodotto dall' emiedria dell' ottaedro fondamentale, ma sarà più piccolo, cosicchè le sue faccie si troveranno al dissotto di quelle di questo tetraedro, poichè gli spigoli più lunghi dell' esacisottaedro passano per gli spigoli di quest' ultimo tetraedro nei punti in cui questi spigoli del tetraedro toccano i vertici degli angoli dell' ottaedro, in vece che questi stessi spigoli dell' esacisottaedro passano al dissopra degli spigoli del tetraedro che riunisce i vertici dei nuovi sistemi dell' esacistetraedro. Lo stesso si dica d' un tetraedro analogo che si può concepire nel deltoido-dodecaedro.

I segni dei due esacistetraedri che possono derivarsi per emiedria dall' esacisottaedro, in due posizioni diverse, sono $+\frac{mOn}{2}$, e $-\frac{mOn}{2}$.

Le emiedrie precedenti del sistema di cristallizzazione regolare sono tutte di quelle che non hanno più, come le forme

oloedriche, le loro faccie opposte e parallele due a due; e l' esacistetraedro, che è l' emiedria dedotta dalla forma oloedrica più generale, l' esacisottaedro, si può riguardare come il rappresentante generale di tutte quelle emiedrie, cosicchè esso si riduce a ciascuna delle forme emiedriche precedenti, dando ad m, e n nei loro segni que' valori uguali tra loro, o infiniti, o uguali all' unità, che cangiano l' esacisottaedro nelle forme oloedriche corrispondenti.

Le due altre forme emiedriche di questo sistema, di cui ci resta a parlare, hanno al contrario faccie parallele ed opposte due a due.

La prima di esse è quella derivata dal tetracisesaedro per faccie semplici, sola maniera, in cui questa forma è capace di emiedria. Sopprimendo alternativamente una a una dodici delle 24 faccie che appartengono a questa forma, esse si ridurranno a dodici, che si estenderanno sopra quelle soppresse, onde la forma emiedrica risultante sarà un dodecaedro. Così nella fig. 66, $ABEDC$ è ciò che diviene la faccia ABc della fig. 59, quando questa si concepisca estendersi sopra le faccie DcB, AcC, BAb della fig. 59 soppresse, e questa faccia farà con una delle altre faccie alternativamente ritenute di quella figura, con cui verrà a intersecarsi, lo spigolo DC che passerà pel punto c in cui si trova l' angolo solido dell' ottaedro, e in cui si trovava pure un angolo solido della suddetta figura, e così si dica delle altre faccie; e accade che per la maniera con cui queste faccie si intersecano allora tra loro, esse prendono la figura di pentagoni; la forma emiedrica di cui si tratta, cioè l' *emi-tetracis-esaedro*, sarà dunque un *dodecaedro pentagonale*, ossia un *pentagono-dodecaedro*. Si osserverà che per la natura del tetracisesaedro di cui questa forma è l'emiedria, le faccie alternative che si sopprimono e si estendono, appartengono ciascuna a due ottanti diversi e vicini del sistema degli assi, poichè le faccie che si elevano dagli angoli solidi dell' ottaedro per formare il tetracisesaedro, si estendono sopra gli spigoli di quello, e vanno a riunirsi colle faccie vicine al dissopra delle due faccie dell' ottaedro che formano ciascuno spigolo. Abbiamo veduto che questa forma oloedrica può anche concepirsi come formata da faccie che partono dagli

spigoli di un cubo iscritto, in maniera da formare al dissopra di queste faccie del cubo piramidi quadrangolari; due delle faccie di ciascuna di queste piramidi rimanendo nella forma emiedrica di cui si tratta, si estenderanno così sopra le due della stessa piramide soppresse, e sopra quelle pur soppresse delle due piramidi vicine, in maniera da prender la forma di pentagoni, che saranno quindi in numero uguale agli spigoli del cubo, e applicati sopra ciascuno di essi, cosicchè questi non appariranno più come spigoli nella forma emiedrica. Alcuni cristallografi per esprimere la relazione delle faccie restanti due a due alle sei faccie del cubo, hanno dato a questo dodecaedro il nome di *diacisesaedro*, ossia forma di *due volte sei faccie*. Altri l'hanno indicato col nome di *pirito-dodecaedro*, o semplicemente di *piritoedro*, specialmente nel caso in cui è generato dal tetracisesaedro $\infty O2$, perchè fu particolarmente osservato tra le forme del minerale conosciuto sotto il nome di *pirite*. I segni dei due pentagono-dodecaedri che possono dedursi in generale, in posizione diversa, per l' emiedria del tetracisesaedro ∞On, sono $+\frac{\infty On}{2}$, $-\frac{\infty On}{2}$.

La seconda di queste emiedrie a faccie parallele è quella derivata dall' esacisottaedro, per paia di faccie prese sugli spigoli di mezzana grandezza che abbiamo fatto osservare in questa forma, che sono quelli che si estendono sopra gli spigoli dell' ottaedro fondamentale, cioè una da una parte e l' altra dall' altra di ciascuno spigolo, e per conseguenza una appartenente ad un ottante, e l' altra all' ottante vicino, e ciò su questi spigoli presi alternativamente.

La fig. 67 rappresenta il risultato di quest' emiedria. In essa per esempio le faccie $ABcK$, $BCDc$ corrispondono alle faccie ABc, BDc dell' esacisottaedro della fig. 60, poste sullo spigolo Bc, le quali si sono estese, mentre le faccie vicine ABb, BDb della stessa fig. 60 poste sullo spigolo Bb sono scomparse, e così quelle faccie restanti vanno ad incontrare le faccie pur restanti AGb, DbK della fig. 60, anch'esse prolungate in maniera da formare gli spigoli AB, BC della fig. 67 con quelle, e lo spigolo Bb tra loro; e così si dica delle altre faccie e spigoli. Le 24 faccie così rimanenti delle 48 apparte-

nenti all' esacisottaedro, stendendosi sopra quelle soppresse, da triangolari che erano, prendono la forma di trapezoidi isosceli, cioè di quadrilateri a lati in generale non paralleli, ma di cui due sono uguali tra loro, e che talvolta possono anche divenire trapezii, cioè quadrilateri aventi due lati paralleli tra loro, e sempre isosceli. La forma emiedrica risultante è dunque un icositetraedro, o forma di 24 faccie di questa figura. Tale forma non differisce dal pentagono-dodecaedro fig. 66, se non in quanto le faccie di questo vengono ciascuna a formarne due, come nelle due forme oloedriche corrispondenti, il tetracisesaedro, e l' esacisottaedro. Ciascuna faccia che si trova al di sopra d' uno spigolo dell' ottaedro nel primo, viene a formarne due, da una parte e dall' altra di questo spigolo, nel secondo. Quindi si può distinguere la forma emiedrica di cui si tratta dagli altri icositetraedri col nome di *diacis-dodecaedro*, o *forma di due volte dodici faccie*. Alcuni lo hanno anche chiamato *icositetraedro trapezoidale*, ed altri *pirito-icositetraedro*, ossia icositetraedro della pirite, perchè anch'esso fu particolarmente osservato in questa specie di minerale. Alcuni chiamando semplicemente come abbiamo veduto *emi-esacisottaedro* l' esacistetraedro che è pure un' emiedria dell' esacisottaedro, ne distinguono quella di cui qui si tratta col nome di *emi-ottacisesaedro*.

I segni di questa forma emiedrica, dedotti da quello dell' esacisottaedro, sarebbero, secondo la loro diversa posizione relativamente a questo, $+\frac{mOn}{2}$ e $-\frac{mOn}{2}$, come quelli dell' esacistetraedro suddetto dedotto dall' emiedria di questo stesso esacisottaedro per sistemi di sei faccie. Per distinguerneli si è proposto di indicare i due diacisdodecaedri cogli stessi segni posti tra due uncini, cioè

$$+\left[\frac{mOn}{2}\right] \text{ e } -\left[\frac{mOn}{2}\right].$$

Sarebbe forse ancor meglio segnare sui simboli di tutte le forme emiedriche, il numero di faccie che entrano nei sistemi per cui si fa l' emiedria, il che si potrebbe fare con ugual numero di punti posti sovra questi simboli.

Si osserverà che il diacis-dodecaedro si cangia in pentagono-dodecaedro, cangiando nel suo segno, astrazione fatta dal numero delle faccie per cui si fa l'emiedria, m in ∞, cosicchè il pentagono-dodecaedro non è che un caso particolare del diacis-dodecaedro, con cui ha questo di comune che i sistemi delle faccie, o le faccie semplici che si sopprimono alternativamente si estendono sopra due ottanti degli assi delle coordinate, e la loro soppressione produce forme emiedriche a faccie parallele due a due.

È inutile l'avvertire che ciascuna delle diverse varietà che offre ciascuna delle forme oloedriche sopra descritte, di cui il simbolo contiene uno dei coefficienti indeterminati m od n, o amendue, ne può produrre una corrispondente nelle sue forme emiedriche.

B. *Calcolo delle forme del sistema regolare.*

158. Questo calcolo consiste in primo luogo nel trovare, per le diverse forme del sistema regolare, qui sopra indicate, la lunghezza delle diverse linee che si possono considerare in tali forme tanto nel loro interno, che nella loro superficie, i valori degli angoli piani delle faccie che compongono gli angoli solidi, e quelli degli angoli diedri degli spigoli, ossia le inclinazioni di una faccia sull'altra, il tutto in funzione dei coefficienti m ed n, che si suppongono dati per ciascun cristallo appartenente alla serie di cristallizzazione formata dal sistema regolare.

Noi ci limiteremo alla ricerca della lunghezza delle due sorta d'assi intermedii, del valore degli angoli piani delle faccie, della lunghezza degli spigoli, e della grandezza degli angoli diedri di questi, tali essendo gli elementi che si misurano il più ordinariamente nei cristalli che la natura ci presenta, e con cui si debbono paragonare i risultati del calcolo.

Per tal oggetto basta dapprima occuparsi della ricerca delle formole che si riferiscono all'esacisottaedro tra le forme oloedriche, all'esacistetraedro tra le forme emiedriche a faccie non parallele due a due, e al diacisdodecaedro tra le forme

emiedriche a faccie parallele, essendo queste tre forme le più complicate di quelle di ciascuna di queste tre classi, cosicchè le formole che per esse si saranno trovate non faranno che semplificarsi nell'applicarle alle altre forme, per mezzo dei corrispondenti valori uguali tra loro, infiniti, o uguali all' unità, che vi prendono i coefficienti m, n.

Per determinare in primo luogo la lunghezza d'uno dei semi-assi intermedii ottanziali nell' esacisottaedro, prolungato sino alla superficie di questa forma, e così sino all' angolo solido formato dall' intersezione delle sei faccie dell' esacisottaedro situate nell' ottante a cui questo semi-asse appartiene, come OA nella fig. 60, consideriamo l' equazione di una di queste faccie F come ABc, che partendo dall' estremità del semi-asse 1 dell' ottaedro fondamentale preso nell' asse delle coordinate z, andrebbe a tagliare i due altri assi x, y prolungati alle distanze m, n dal centro; l' equazione di questa faccia nello spazio sarà $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + z = 1$. Questa faccia viene a tagliare il semi-asse intermedio ottanziale del suo ottante, e si tratta di vedere in qual punto, il che determinerà la lunghezza cercata di questo semi-asse. Ora avendosi per tutti i punti di questa linea, in ragione della sua posizione, $x = y = z$, se ne deduce dalla combinazione coll' equazione suddetta della faccia, per le coordinate del suo punto d' intersezione con questa, $x = y = z = \frac{mn}{mn + m + n}$, e quindi per la distanza di questo punto dal centro, cioè per la lunghezza cercata del semi-asse di cui si tratta, che chiameremo T,

$$T = \sqrt{3 \cdot \frac{(mn)^2}{(mn + m + n)^2}} = \frac{mn\sqrt{3}}{mn + m + n}.$$

Per trovar poi la lunghezza del semi-asse intermedio quadranziale, si osserva che quello contenuto per esempio nel piano delle z, y, come OB, va a tagliare l' intersezione della stessa faccia suddetta F con questo piano, che è lo spigolo Bc in esso contenuto, e di cui l'equazione, considerandola come una linea in questo piano, è $\frac{y}{n} + z = 1$; poichè dunque anche qui

per la posizione del semi-asse, intermedia tra i due assi delle x, y, si ha in tutto questo semi-asse $y=z$, se ne deduce per le coordinate del punto d'intersezione del medesimo colla faccia, $y=z=\frac{n}{n+1}$, e quindi per la distanza di questo punto al centro, ossia per la lunghezza cercata, che chiameremo R, di questo semi-asse, $R=\frac{n\sqrt{2}}{n+1}$. Queste espressioni di T, R hanno per unità la lunghezza del semi-asse principale dell'ottaedro fondamentale, in cui già sono espressi m, n. Se si volessero esprimere i due semi-assi intermedii dell'esacisottaedro, prendendo per unità i due semi-assi intermedii corrispondenti dell'ottaedro stesso, si osserverà, che i valori di questi, che si ottengono facendo $m=n=1$ in quelli di T, R, sono $T=\sqrt{\frac{1}{3}}$, $R=\sqrt{\frac{1}{2}}$. Se dunque si chiamano t, r, i due semi-assi intermedii dell'esacisottaedro, prendendo per unità quelli dell'ottaedro, ossia i coefficienti che cangiano questi nei primi, si avrà

$$t=\frac{mn\sqrt{3}}{(mn+m+n)\sqrt{\frac{1}{3}}}=\frac{3mn}{mn+m+n},$$

$$r=\frac{n\sqrt{2}}{(n+1)\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{2n}{n+1}.$$

Per trovare la lunghezza degli spigoli di tre specie appartenenti all'esacis-ottaedro, si osserverà che i tre vertici degli angoli solidi, tra cui sono compresi questi spigoli, sono 1.° un polo dell'asse principale come c (fig. 60), per le coordinate del quale si ha per esempio $x=0$, $y=0$, $z=1$; 2.° un polo o estremità dell'asse intermedio quadranziale, come B, per cui si hanno come abbiamo veduto le coordinate $x=0$, $y=z=\frac{n}{n+n}$; 3.° un polo dell'asse intermedio ottanziale, come A, di cui le coordinate sono $x=y=z=\frac{mn}{mn+m+n}$. Lo spigolo più lun-

go come Ac che chiameremo A, è compreso tra il primo, e il terzo di questi poli, lo spigolo mezzano B, come Bc, tra il primo, e il secondo, e lo spigolo più corto C, come BA, tra il secondo e il terzo. Mettendo questi valori delle coordinate dei punti estremi delle tre specie di spigoli nell' espressione generale della distanza di due punti nello spazio, che è, come si sa, $\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$, quando le coordinate di due punti che si considerano sono x,y,z, e x',y',z', si trova

$$A = \frac{\sqrt{2m^2n^2+(m+n)^2}}{mn+m+n}, \quad B = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1},$$

$$C = \frac{n\sqrt{m^2(n+1)^2+2n^2}}{(mn+m+n)(n+1)}.$$

Conoscendo le coordinate dei punti estremi di ciascuno dei tre spigoli A,B,C, se ne possono formare le equazioni nello spazio; ora la geometria analitica dà per due linee qualunque di cui si conoscano le equazioni, l'espressione del cosseno dell' angolo che esse formano tra loro. Si potranno dunque ottenere i valori dei cosseni degli angoli che i tre spigoli fanno tra loro, che è quanto dire degli angoli piani delle faccie dell' esacisottaedro; dai cosseni si deducono tosto i seni degli stessi angoli, e quindi le loro tangenti dividendo questi pei primi. Si troverà così che le tangenti di questi angoli, che ne sono le espressioni più comode nell'uso, indicando con a,b,c, gli angoli rispettivamente opposti in ciascuna faccia agli spigoli A,B,C, come cBA, cAB, AcB nella faccia ABc, sono

$$\text{tang } a = \frac{(n+1)\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}}{n(n-1)},$$

$$\text{tang } b = \frac{(mn+m+n)\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}}{n[n(m^2-m+1)+m(m-1)]},$$

$$\text{tang } c = \frac{n\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}}{m(n^2+1)+n}.$$

Per trovare ora gli angoli diedri degli spigoli, ossia le inclinazioni delle faccie dell' esacis-ottaedro tra loro, seguitando ad indicare i tre spigoli che formano i lati di una delle faccie F, come Ac, Bc, AB, con A, B, C, e a prendere per l'equazione di questa faccia $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + z = 1$, avremo per le equazioni di altre tre faccie F', F'', F''', che formano colla faccia F i tre spigoli A, B, C, come ACc, BcD, AbB, le seguenti, cioè

$$\text{per } F', \quad \frac{x}{n} + \frac{y}{m} + z = 1,$$

$$\text{per } F'', \quad \frac{x}{-m} + \frac{y}{n} + z = 1,$$

$$\text{per } F''', \quad \frac{x}{m} + y + \frac{z}{n} = 1,$$

Ora la geometria analitica ci dà per l' espressione del cosseno dell'angolo V che formano tra loro due piani, di cui le equazioni siano

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = 1,$$

$$\cos V = \frac{aa'bb' + cc'aa' + bb'cc'}{\sqrt{a^2b^2 + c^2a^2 + b^2c^2}\ \sqrt{a'^2b'^2 + c'^2a'^2 + b'^2c'^2}}.$$

Mettendo successivamente in quest' espressione i parametri di F ed F', di F ed F'', di F ed F''' che entrano nelle equazioni suddette di queste faccie, si otterrà

$$\cos A = -\frac{mn(mn+2)}{m^2(n^2+1)+n^2}, \quad \cos B = -\frac{m^2(n^2+1)-n^2}{m^2(n^2+1)+n^2},$$

$$\cos C = -\frac{n(2m^2+n)}{m^2(n^2+1)+n^2}.$$

Da queste espressioni dei cosseni si possono dedurre quelle dei cosseni delle metà degli stessi angoli; facendo per abbreviare $\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}\cdot\sqrt{2} = M$, si trova

$$\cos\frac{1}{2}A = \frac{m-n}{M}, \quad \cos\frac{1}{2}B = \frac{n\sqrt{2}}{M}, \quad \cos\frac{1}{2}C = \frac{m(n-1)}{M},$$

il che dà le proporzioni

$$\cos\frac{1}{2}A : \cos\frac{1}{2}B : \cos\frac{1}{2}C = m-n : n\sqrt{2} : m(n-1);$$

si trova pure

$$\tang\frac{1}{2}A = \frac{\sqrt{(m+n)^2+2m^2n^2}}{m-n}, \quad \tang\frac{1}{2}B = \frac{m\sqrt{n^2+1}}{n},$$

$$\tang\frac{1}{2}C = \frac{\sqrt{m^2(n+1)^2+2n^2}}{m(n-1)}.$$

159. Queste formole relative all' esacis-ottaedro mOn, si simplificano, come abbiamo annunziato, applicandole alle altre forme in cui m, od n divengono 1, od infiniti, o uguali tra loro.

Così facendovi primieramente $n = m$, esse si cangiano in quelle che appartengono all' icositetraedro mOm, cioè:

Pei coefficienti dei semi-assi intermedii, come OA, OB fig. 58, ossia per questi semi-assi, prendendo per unità quelli corrispondenti dell' ottaedro, si ottiene $t = \frac{3m}{m+2}$, $r = \frac{2m}{m+1}$.

Per le lunghezze degli spigoli

$$A = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{m^2+2}}{m+2}, \quad B = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m+1}, \quad C = \frac{m\sqrt{m^2+2m+3}}{(m+2)(m+1)}.$$

La prima A di queste linee però non è più uno spigolo, come lo mostra il valore di cos A che troveremo qui appresso, secondo il quale le due faccie che formerebbero questo spigolo

si confondono in uno stesso piano, ma la diagonale simmetrica come Ac del deltoide $ABcC$ che risulta dalla riunione di queste due faccie in una sola, come si vede nella figura.

Per gli angoli piani delle faccie, si ha

$$\text{tang } a = \frac{(m+1)\sqrt{m^2+2}}{m-1},$$

$$\text{tang } b = \frac{m+2}{\sqrt{m^2+2}}, \text{ e quindi tang } 2b = -\frac{(m+2)\sqrt{m^2+2}}{2m+1},$$

$$\text{tang } c = \frac{m}{\sqrt{m^2+2}}, \text{ e quindi tang } 2c = m\sqrt{m^2+2}.$$

Gli angoli $2b$, e $2c$ sono qui i veri angoli, l' uno ottuso, come BAC, l' altro acuto come BcC sulla diagonale simmetrica Ac, poichè le faccie di mOn che formavano tra loro il più lungo spigolo, si riuniscono qui, come abbiamo detto, in un solo piano.

Per gli angoli diedri degli spigoli si ottiene

cos $A = -1$, d' onde segue che $A = 180°$, cioè che lo spigolo A svanisce come abbiamo già detto,

$$\cos B = -\frac{m^2}{m^2+2}, \text{ e } \text{tang } \frac{B}{2} = \sqrt{m^2+1},$$

$$\cos C = -\frac{2m+1}{m^2+2}.$$

160. Facendo quindi $n=1$ nelle formole generali calcolate per mOn, si ottiene nel triacis-ottaedro mO:

Pei coefficienti degli assi intermedii, $t = \frac{3m}{2m+1}$, $r=1$.

Per le lunghezze degli spigoli,

$$A = \frac{\sqrt{3m^2+2m+1}}{2m+1}, \; 2B = \sqrt{2}, \; C = \frac{\sqrt{2m^2+1}}{(2m+1)\sqrt{2}};$$

Quest' ultima linea però non è più uno spigolo, ma la linea dell' altezza delle faccie del triacis-ottaedro, come AP per la faccia Acb nella fig. 57, le due faccie che formavano questo spigolo riuniendosi in una sola, come ciò risulta dal valore di cos C qui appresso. In questa riunione i due spigoli B vengono a formare una sola linea retta cb che è lo spigolo dell' ottaedro fondamentale, epperciò si è indicato il valore di $2B$ in vece di quello di B.

Per gli angoli piani delle faccie,

tang $a=\infty$, e quindi $a=90^{\circ}$,

$$\text{tang } b=\frac{2m+1}{\sqrt{2m^2+1}}, \text{ e tang } 2b=-\frac{(2m+1)\sqrt{2m^2+1}}{m(m+2)},$$

$$\text{tang } c=\frac{\sqrt{2m^2+1}}{2m+1}.$$

Si è indicata la tangente di $2b$, perchè siccome le faccie che formano, due a due, uno degli spigoli più corti C di mOn coincidono qui in un solo piano, l' angolo ottuso delle faccie al vertice in mO, cioè l' angolo cAb della fig. 57, è formato dalla riunione di due angoli b. Per la stessa ragione l' angolo a non è più quello d' una faccia, ma uno dei due angoli retti che fa la linea AP sopra cb.

Per gli angoli diedri degli spigoli;

$$\cos A=-\frac{m(m+2)}{2m^2+1},$$

$$\cos B=-\frac{2m^2-1}{2m^2+1}, \text{ e tang } \frac{B}{2}=m\sqrt{2},$$

cos $C=-1$; così quest'ultimo spigolo scompare come abbiamo detto.

161. Se facciamo ora nelle formole per l' esacis-ottaedro, $m=\infty$, otterremo, pel calcolo del tetracis-esaedro ∞On, le espressioni seguenti:

Coefficienti degli assi intermedii, $t=\frac{3n}{n+1}$, $r=\frac{2n}{n+1}$.

Linee degli spigoli,

$$A = \frac{\sqrt{2n^2+1}}{n+1}, \quad B = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}, \quad 2C = \frac{2n}{n+1};$$

la linea B non è più uno spigolo, ma la linea d' altezza delle faccie del tetracis-esaedro, come cP nella fig. 59, l' angolo delle due faccie che la formavano, scomparendo come si vede nella figura, e come il calcolo stesso ce lo indicherà qui appresso, e le due faccie riuniendosi in una sola; si è per altra parte notato qui il valore di $2C$ in vece di quello di C, perchè siccome le faccie che formavano uno spigolo mezzano dell' esacis-ottaedro si riuniscono due a due in un solo piano, come abbiamo detto, due degli spigoli, che erano in quella forma i più corti, si uniscono ora per formare lo spigolo più lungo come AB del tetracis-esaedro.

Angoli piani delle faccie:

tang $a = \infty$, epperciò $2a = 180°$, cioè l' angolo piano che risulterebbe dalla riunione di quelli delle due faccie di cui abbiamo parlato, cessa di essere un angolo, e non è più che la somma dei due angoli retti cPa, cPb, il che si accorda con quello che abbiamo veduto, che i due spigoli C si riuniscono in un solo spigolo di doppia lunghezza.

$$\text{tang } b = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n};$$

$\text{tang } c = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, e $\text{tang } 2c = 2n\sqrt{n^2+1}$. Egli è a $2c$ che diviene uguale l'angolo ottuso delle faccie del tetracis-esaedro, come AcB, per la riunione dei due angoli piani c.

Angoli degli spigoli:

$$\cos A = -\frac{n^2}{n^2+1};$$

cos $B = -1$, questo spigolo scomparendo, come si è detto;

$$\cos C = -\frac{2n}{n^2+1}, \text{ e } \text{tang } \frac{C}{2} = \frac{n+1}{n-2}.$$

162. Le espressioni pel rombo-dodecaedro ∞O si deducono da quelle dell' esacis-ottaedro facendovi $m=\infty$, e $n=1$, o che viene allo stesso da quelle del tetracis-esaedro, facendovi semplicemente $n=1$. Si ottiene:

Pei coefficienti degli assi intermedii, $t=\frac{3}{2}$, $r=1$.

Per le linee degli spigoli, $A=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $2B=\sqrt{2}$, $2C=1$.

Ma le due linee B, C non sono più spigoli; esse formano le semi-diagonali come AP, cP, fig. 56, delle faccie del rombo-dodecaedro, e per conseguenza $2B$, e $2C$ le diagonali intiere.

Per gli angoli delle faccie,

tang $a=\infty$, d'onde $a=90^{\circ}$, e $2a=180^{\circ}$, come nel tetracis-esaedro,

tang $b=\sqrt{2}$, e tang $2b=-\sqrt{8}$,

tang $c=\sqrt{\frac{1}{2}}$, e tang $2c=\sqrt{8}$;

anche qui come nel tetracis-esaedro si riuniscono i due angoli c in uno per la riunione delle due faccie che li contenevano in un sol piano; ma inoltre riuniendosi nello stesso piano con queste, come nel triacis-ottaedro, due altre faccie simili dell' ottante vicino, che colle due prime formavano l' angolo solido nella direzione dell' asse intermedio quadranziale, si congiungono anche due angoli b in un solo; quest' angolo solido scomparendo intieramente per altra parte nel rombo-dodecaedro, e i quattro angoli piani a che lo formavano riuniendosi in un piano solo.

Per gli angoli diedri degli spigoli,

cos $A=-\frac{1}{2}$, d' onde $A=120^{\circ}$, e tang $\frac{A}{2}=\sqrt{3}$,

cos $B=$ cos $C=-1$, cioè questi due ultimi spigoli svaniscono per la riunione indicata delle quattro faccie in un piano.

163. Le espressioni relative al cubo $\infty O\infty$ si deducono o da quelle generali dell'esacis-ottaedro mOn facendovi $m=n=\infty$, o semplicemente da quelle dell' icosi-tetraedro mOm, facendovi $m=\infty$, od anche da quelle del tetracis-esaedro ∞On, facendovi $n=\infty$. Si trova,

Pei coefficienti degli assi intermedii $t=3$, $r=2$.

Per le linee degli spigoli $2A=2\sqrt{2}=\sqrt{8}$, che divengono le diagonali delle faccie cessando di essere spigoli; e $2B=2C=2$, restando $2C$ gli spigoli del cubo, e $2B$ divenendo linee sulle faccie del cubo uguali a'suoi spigoli, che si tagliano in croce nel mezzo di queste faccie, come è facile vedere dalla fig. 55.

Per gli angoli piani delle faccie, tang $a=\infty$, tang $b=$tang $c=1$; cioè l' angolo a diviene retto, come ciò dee essere, poichè esso diviene l'angolo di due linee perpendicolari tra loro, che sono lo spigolo $2C$, e la linea $2B$; gli angoli b e c divengono amendue di 45°; ma riuniendosi quelli di ciascuna specie a due a due, formano angoli retti $2b$, e $2c$, di cui $2b$ è l' angolo retto delle faccie del cubo, e $2c$ è formato dalle linee $2B$ che si tagliano in croce nel centro di queste.

Per gli angoli diedri degli spigoli, $\cos A=\cos B=-1$, d' onde ang. $A=$ ang. $B=180°$, cioè questi spigoli scompaiono, le faccie che li formavano nell' esacis-ottaedro riuniendosi in un sol piano, come ciò dee essere, poichè l' angolo solido che essi formavano, che corrispondeva all' angolo solido dell' ottaedro, dee ora corrispondere al mezzo di una faccia del cubo; e $\cos C=0$, tang $\frac{C}{2}=1$, cioè ang. $C=90°$, questo spigolo divenendo quello del cubo.

164. Finalmente le espressioni relative all' ottaedro fondamentale stesso si deducono da quelle di mOm, o di mO, facendo $m=1$, o direttamente da quelle di mOn, facendo $m=n=1$, e si trova:

Pei coefficienti degli assi intermedii, $t=1$, $r=1$, come ciò dee essere;

Per le linee degli spigoli, $A=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $2B=\sqrt{2}$, $C=\sqrt{\frac{1}{6}}$;

$2B$ è il valor comune degli spigoli dell' ottaedro; $A+C$ diviene l' altezza delle faccie dell' ottaedro in cui si riuniscono sei a sei quelle dell' esacis-ottaedro;

Per gli angoli piani delle faccie, tang $a=\infty$, cioè $a=90°$, tang $b=\sqrt{3}$; ma questi due angoli non si mostrano più come tali, a cagione della riunione delle faccie di cui abbiamo parlato, cosicchè gli angoli a si riuniscono due a due in 180°, e gli angoli b, sei intorno al centro della faccia dell' ottaedro,

in 360°; tang $c = \sqrt{\frac{1}{3}}$, e tang $2c = \sqrt{3}$; 2c diviene l'ang piano delle faccie dell' ottaedro;

Per gli angoli diedri degli spigoli, cos $A = \cos C = -\frac{1}{3}$, questi spigoli scomparendo per la suddetta unione delle faccie in un piano; e cos $B = -\frac{1}{3}$, o tang $\frac{B}{2} = \sqrt{2}$, d si deduce per l' angolo di questo spigolo, che diviene quello dell' ottaedro, 109° 28′ 16″.

165. Abbiamo veduto che il triacis-ottaedro mO può considerarsi come formato dalla sovraposizione di piramidi triangolari sopra ciascuna delle faccie dell' ottaedro, e il tetracis-esaedro ∞On come formato dalla sovraposizione di piramidi quadrangolari sopra un cubo; considerando queste due forme sotto questo aspetto, si può cercare l'espressione dell' altezza, e degli angoli degli spigoli alla base di queste piramidi.

Pel triacis-ottaedro si osserverà che l' altezza della piramide aggiunta a ciascuna faccia dell' ottaedro, per produrlo, e che chiameremo h, non è altro che la differenza dei due semi-assi intermedii ottanziali di mO ed O, onde si ha $h = \frac{m-1}{(2m+1)\sqrt{3}}$, prendendo per unità il semi-asse principale dell'ottaedro e quindi pel coefficiente σ di quest' altezza, relativamente al semi-asse ottanziale dell' ottaedro, ossia per quest' altezza, prendendo per unità quest' ultimo semi-asse, $\sigma = \frac{m-1}{2m+1}$.

Quanto all'angolo che chiameremo ε dello spigolo alla base della piramide, siccome la linea di altezza di ciascuna faccia dell'ottaedro è divisa dall' estremità dell' asse ottanziale in due parti A e C, secondo quello che abbiamo veduto nel calcolo dell' ottaedro, di cui la più piccola $C = \sqrt{\frac{1}{6}}$, quest'angolo ha l'altezza della piramide per tangente in un circolo di cui il raggio sia questa linea $\sqrt{\frac{1}{6}}$, onde si ha tang $\varepsilon = \frac{\frac{m-1}{(2m+1)\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{1}{6}}} = \frac{(m-1)\sqrt{2}}{2m+1}$.

Per riguardo poi al tetracis-esaedro, l'altezza della piramide sovrapposta alla faccia del cubo iscritto, è la differenza tra il semi-asse principale del tetracis-esaedro, e la porzione di questo semi-asse che è contenuta nel cubo iscritto; ora il semi-asse principale del tetracis-esaedro è $=1$, come quello dell' ottaedro, e la porzione che ne è contenuta nel cubo, ossia che si termina ad una delle faccie di questo, è uguale alla metà dello spigolo di questo cubo, cioè è uguale alla lunghezza di C metà dello spigolo $2C$ nel tetracis-esaedro, e per conseguenza a $\frac{n}{n+1}$; l'altezza cercata è dunque $h=\frac{1}{n+1}$; e quindi si deduce anche, per l'angolo ε dello spigolo alla base della piramide, $\text{tang}\,\varepsilon=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n}{n+1}}=\frac{1}{n}$.

166. Per passare ora al calcolo dell' esacis-tetraedro $\frac{mOn}{2}$, come rappresentante generale delle forme emiedriche a faccie non parallele, osserveremo primieramente che gli assi principali, e gli assi intermedii quadranziali non soffrono alcun cangiamento passando dalla forma oloedrica alla forma emiedrica, onde questi assi sono gli stessi nell' esacis-tetraedro, che nell' esacis-ottaedro di cui è l' emiedria. Ma gli assi intermedii ottanziali si dividono in questo passaggio in due porzioni disuguali da una parte all' altra del centro, uno dei semi-assi come OA nella fig. 65, ritenendo la stessa lunghezza primitiva che avea nella forma oloedrica generatrice, mentre l' altro come OB ne prende una più considerevole, dipendente dall' aggrandimento dei sistemi di faccie alternativi, onde si dee distinguere il semi-asse ottanziale emiedrico dall' oloedrico. Per trovare la grandezza del semi-asse ottanziale emiedrico, non si ha che a combinare l' equazione d' una faccia F dell' esacis-tetraedro colle equazioni del semi-asse ottanziale posto nell' ottante aggiacente, in cui questa faccia prodotta dall' estensione di una di quelle appartenenti a un sistema conservato di faccie dell' esacis-ottaedro, va a tagliare questo semi-asse prolungato. Ora l' equazione di F è, come nell' esacis-ottaedro

$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+z=1$, e le equazioni del semi-asse suddetto sono $y-z=0$, $x+z=0$, $x+y=0$; dalla loro combinazione risultano le coordinate del punto d'intersezione di cui si tratta, $x=y=z=\frac{mn}{mn+m-n}$, e quindi la lunghezza cercata T' del semi-asse emiedrico, $T'=\frac{mn\sqrt{3}}{mn+m-n}$, in vece che quella T del semi-asse ottanziale oloedrico, per l'esacis-ottaedro, era $T=\frac{mn\sqrt{3}}{mn+m+n}$. Se si vuole esprimere T' come un molti-plo di $\sqrt{\frac{1}{3}}$, che è il semi-asse ottanziale dell'ottaedro, il coefficiente τ ne sarà $\tau=\frac{3mn}{mn+m-n}$; e se si volessse esprimere il semi-asse ottanziale emiedrico dell'esacis-tetraedro, prendendo per unità quello oloedrico dell'esacis-ottaedro, si avrebbe $\frac{mn+m+n}{mn+m-n}$.

Se cerchiamo ora la grandezza delle linee degli spigoli dell'esacis-tetraedro, osserveremo che lo spigolo più lungo A del esacis-ottaedro (fig. 68) forma, senz'alcuna alterazione di lunghezza, lo spigolo più corto dell'esacis-tetraedro, mentre lo spigolo più corto C del primo si estende per costituire il più lungo spigolo del secondo, andando a formare il vertice g' dell'esacis-tetraedro al dissopra del vertice del sistema di sei faccie dell'ottante vicino, che scompare; e che lo spigolo B si perde intieramente, la faccia mng che era terminata da questo spigolo, dilatandosi nella faccia $mg'g$. In vece di questo spigolo ne compare un altro B' formato dall'intersezione della nuova faccia $mg'g$, o $gg's$ con un altra della stessa specie proveniente da un altro ottante, spigolo che è caratteristico di questa forma emiedrica. Se indichiamo il più corto spigolo dell'esacis-tetraedro, che è lo stesso che A dell'esacis-ottaedro, con A', il mezzano che è il nuovo spigolo proprio all'esacis-tetraedro con B', e il più lungo, che è quello C dell'esacis-ottaedro prolungato, con C'. e se consideriamo le coordinate dei punti estremi dei due ultimi, che sono conosciute da quello che pre-

cede, avremo, secondo la nota formola, per le distanze di questi punti estremi, ossia per le lunghezze di questi spigoli,

$$B' = \frac{\sqrt{2m^2n^2 + (m-n)^2}}{mn+m-n}, \quad C' = \frac{2mn\sqrt{m^2(n+1)^2+2n^2}}{(mn+m)^2-n^2},$$

restando sempre $A' = \frac{\sqrt{2m^2n^2+(m+n)^2}}{mn+m+n} = A.$

Quanto agli angoli piani delle faccie dell' esacis-tetraedro, siccome uno di questi angoli b', cioè quello opposto allo spigolo B', e che è formato dagli spigoli A' e C', resta lo stesso che quello b della forma oloedrica generatrice, dobbiamo soltanto calcolare i due angoli a' e c' che sono formati dagli spigoli B', C', e A', B'. Questo si potrà fare deducendo i valori dei loro cosseni dalle equazioni degli spigoli, le quali si formano esse medesime dai valori delle coordinate dei loro punti estremi; se ne avranno quindi i valori dei seni, e quelli delle tangenti degli stessi angoli, e si troverà così

$$\text{tang } a' = \frac{(mn+m-n)\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}}{n[n(m^2+m+1)+m(m-1)]},$$

$$\text{tang } c' = \frac{2mn\sqrt{m^2(n^2+1)+n}}{(m+n)(m-n)}.$$

Passiamo agli angoli degli spigoli dell' esacis-tetraedro. Siccome gli angoli degli spigoli più corti e più lunghi A' e C', sono gli stessi che nell' esacis-ottaedro, poichè i primi di questi spigoli sono gli stessi che gli spigoli A senz' alterazione, e i secondi non sono che gli spigoli C dell' esacis-ottaedro prolungati, senz' alterazione del loro angolo diedro, non ci resta a calcolare che l' angolo dello spigolo caratteristico B'.

Se prendiamo per l' equazione di una delle faccie F che formano questo spigolo, e che è una faccia dell' esacis-ottaedro ampliata, $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + z = 1$, l' equazione d' un' altra faccia

F' che si trovi nello stesso caso, sarà $\frac{x}{-n} + \frac{y}{-m} + z = 1$. Da queste due equazioni, per mezzo dell' espressione generale del cosseno d' un angolo formato da due faccie piane di date equazioni, che si tagliano, si troverà

$$\cos B' = -\frac{mn(mn-2)}{m^2(n^2+1)+n^2}.$$

167. Le espressioni precedenti applicate alle altre forme emiedriche del sistema regolare a faccie non parallele, considerate come casi particolari dell' esacis-tetraedro, ci danno le espressioni corrispondenti relative a queste forme; e in primo luogo facendovi $n=m$, per ottenere quelle del trigono-dodecaedro, emiedria dell' icosi-tetraedro, si trova:

Pel coefficiente dell' asse intermedio emiedrico ottanziale, $r=3$;

Per le linee degli spigoli, $A' = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{m^2+2}}{m+2} = A$ dell' icosi-tetraedro; ma questa linea non è più uno spigolo, come già non l'era più nell' icosi-tetraedro; essa è solo la linea d' altezza del triangolo isoscele del trigono-dodecaedro, due delle faccie triangolari dell' esacis-tetraedro, come $g'mg$ riuniendosi in un sol piano per la linea mg, che è una delle linee A o A' per cui esse si toccano, e venendo a formare un solo triangolo, mentre le due linee B' che loro appartenevano, si riuniscono in una sola linea retta; si ha inoltre $2B' = 2\sqrt{2}$ per lo spigolo solo, formato dalla riunione di questi due spigoli B' dell' esacis-tetraedro; e $C' = \frac{2\sqrt{m^2+2m+3}}{m+2}$;

Per gli angoli piani delle faccie si ottiene tang $a' = \frac{\sqrt{m^2+2}}{m+2}$; tang $b' =$ tang b dell' icosi-tetraedro; ma due di questi angoli si riuniscono, come per l' icosi-tetraedro, in un solo $2b'$ per formare l' angolo al vertice della faccia, e si ha per quest' angolo tang $2b' = -\frac{(m+2)\sqrt{m^2+2}}{2m+1}$; tang $c' = \infty$, e per conseguenza $c' = 90^\circ$, come ciò dee essere, poichè i due spigoli B'

riuniendosi in una sola linea, i due angoli c' che essi facevano con A' debbono formare colla loro somma 180°;

Per gli angoli diedri degli spigoli,

$\cos A' = \cos A$ dell'icosi-tetraedro $= -1$; quindi ang. $A' = 180°$, come dovea trovarsi, poichè questo spigolo scompare;

$$\cos B' = -\frac{m^2-2}{m^2+2};$$

$$\cos C' = -\frac{2m+1}{m^2+2} = \cos C \text{ dell' icosi-tetraedro.}$$

168. Le formole pel deltoido-dodecaedro, emiedria del triacis-ottaedro, si ottengono facendo $n=1$ in quelle dell' esacis-tetraedro; si avrà così:

Pel coefficiente del semi-asse emiedrico ottanziale, $\tau = \frac{3m}{2m-1}$.

Per le linee degli spigoli,

$$A' = \frac{\sqrt{3m^2+2m+1}}{2m+1} = A \text{ del triacis-ottaedro;}$$

$$B' = \frac{\sqrt{3m^2-2m+1}}{2m-1}; \quad C' = \frac{2m\sqrt{4m^2+2}}{4m^2-1};$$

quest' ultima linea però non è più uno spigolo, ma la diagonale simmetrica del deltoide, le faccie due a due che formavano questo spigolo riuniendosi in un sol piano quando l' esacis-tetraedro si trasforma nel triacis-ottaedro, di cui il deltoido-dodecaedro è l' emiedria;

Per gli angoli piani delle faccie,

$$\text{tang } a' = \frac{2m-1}{\sqrt{2m^2+1}}, \text{ e tang } 2a' = \frac{(2m-1)\sqrt{2m^2+1}}{m(2-m)};$$

$$\text{tang } b' = \frac{2m+1}{\sqrt{2m^2+1}}, \text{ e tang } 2b' = -\frac{(2m+1)\sqrt{2m^2+1}}{m(2+m)};$$

$$\text{tang } c' = \frac{2m\sqrt{2m^2+1}}{m^2-1};$$

si sono indicate le tangenti degli angoli doppi $2a'$ e $2b'$, perchè riuniendosi qui due a due le faccie che formavano lo spigolo C' in un sol piano come si è detto, $2a'$ e $2b'$ posti all' estremità di questo spigolo C' che cessa di esserlo, divengono gli angoli piani posti sulla diagonale simmetrica.

Per gli angoli diedri degli spigoli,

$$\cos A' = -\frac{m(m+2)}{2m^2+1} = \cos A \text{ del triacis-ottaedro};$$

$$\cos B' = -\frac{m(m-2)}{2m^2+1}; \quad \cos C' = -1, \text{ onde ang. } C' = 180^\circ,$$

come ciò dee essere per la disparizione di questo spigolo.

169. Finalmente facendo $m=n=1$ nelle formole dell'esacis-tetraedro, o semplicemente $m=1$ in quelle del trigono-dodecaedro, o in quelle del deltoido-dodecaedro, si trovano quelle appartenenti al tetraedro, cioè:

Pel coefficiente del semi-asse emiedrico ottanziale, $r=3$;

Per le linee degli spigoli,

$$A' = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad 2B' = 2\sqrt{2}, \quad C' = 2\sqrt{\frac{2}{3}};$$

le linee però A' e C' non sono più spigoli, ma la loro somma $A' + C' = \sqrt{6}$ forma l' altezza delle faccie del tetraedro, mentre $2B'$ diviene la linea degli spigoli del tetraedro: cioè i sei triangoli simili a $gg's$ che si riuniscono in g nell' esacis-tetraedro vengono a formare un sol piano, in cui lo spigolo gg' per esempio che è uno degli spigoli C', si riunisce in una sola linea retta colla linea gr che è uno degli spigoli A' o A, e ciascuno spigolo B', come $g'm$, viene a formare con un altro spigolo B' una sola linea retta, che è lo spigolo del tetraedro.

Per gli angoli piani delle faccie,

tang $2a' = \sqrt{3}$, e quindi $2a' = 60^\circ$, che è l' angolo piano delle faccie del tetraedro, i due angoli a' quali sono $mg'g$, e $sg'g$ riuniendosi in un solo per la disparizione dello spigolo $g\,g$ ossia C';

tang $b' = \sqrt{3}$, e quindi $b' = 60^\circ$, ma sei di questi angoli b' che si

riuniscono ing vengono ad essere in un sol piano, componendo 360°; tang $c' = \infty$, onde $c' = 90°$, ma quest'angolo non è più un angolo delle faccie dell'ottaedro, e ciò indica solamente che la linea dello spigolo A' che è scomparso, rimane perpendicolare al nuovo spigolo formato dalle due linee B'.

Per gli angoli diedri degli spigoli,

$$\cos A' = -1, \quad \cos B' = \frac{1}{3}, \quad \cos C' = -1;$$

cioè li due spigoli A' e C' scompaiono come abbiamo detto, i loro angoli divenendo 180°, e l'angolo dello spigolo B' si trova essere 70° 31′ 44″.

170. Ci resta a parlare del calcolo delle forme emiedriche a faccie parallele due a due, il che eseguiremo dapprima sul diacis-dodecaedro, che è il rappresentante generale di questa sorta di forme.

Gli assi intermedii conservano in questa forma emiedrica, senz'alterazione i valori che loro appartengono nell'esacis-ottaedro, sua forma oloedrica generatrice; ciò si vede nella fig. 69 ove gli spigoli del diacis-dodecaedro si sono segnati con linee più grosse per distinguerli da quelli dell'esacis-ottaedro, di cui le faccie alternative sussistenti come F, F^{v}, F^{vi}, F^{iii}, F^{iv}, F^{v} ecc., colle loro intersezioni due a due, le une immediatamente, le altre al dissopra delle faccie soppresse, formano questi spigoli; in fatti il punto b dell'esacis-ottaedro che termina l'asse ottanziale, resta lo stesso nel diacis-dodecaedro, e il punto a in cui si terminava l'asse quadranziale dell'esacis-ottaedro, resta pure sulla superficie del diacis-dodecaedro, sebbene in uno degli spigoli, e non più sul vertice di un angolo solido. Questi semi-assi non formano dunque un nuovo oggetto di calcolo. Ma un'altra linea nell'interno della forma richiede qui la nostra attenzione, sebbene a cagione della sua posizione variabile, secondo i valori di m e di n, non possa essa considerarsi come un asse. Questa linea è la distanza rp del vertice dell'angolo solido irregolare, che si forma in p, o in q ecc., dal centro delle coordinate. Questo punto è necessariamente situato nel piano d'una sezione principale, e si tratta di determinarne le due coordinate in tale

piano. Supponendo che questo piano sia per esempio quello delle x, z, si osserverà che il detto punto è formato dall' intersezione del più corto, e del più lungo spigolo, come A, B, di due paia di faccie, come F, F^{IV}, e F', F^{V}, spigoli di cui le equazioni sono $\frac{x}{m}+z=1$, $x+\frac{z}{n}=1$; combinando queste due equazioni, si hanno per le coordinate cercate del punto comune ai due spigoli, cioè di quello della loro intersezione, p;

$$x=\frac{m(n-1)}{mn-1}, \quad z=\frac{n(m-1)}{mn-1}.$$

Passando a cercare la lunghezza delle linee degli spigoli del diacis-dodecaedro, si noterà che essendo le faccie del diacis-dodecaedro trapezoidi isoscelici, o trapezii pur tali, non abbiamo da calcolare che tre dei loro lati come formanti gli spigoli di cui si tratta; li distingueremo coi nomi di spigolo più corto, più lungo, e mezzano, e li indicheremo rispettivamente colle lettere A'', B'', C'', corrispondenti ad A, B, C della figura, e tra cui si vede che C'' è quello che si trova doppio in ciascuna faccia. Per trovarne i valori si osserverà che lo spigolo A'' ha pei suoi punti estremi un vertice dell' angolo solido comune coll' ottaedro, come g, di cui le coordinate sono, se si prende quest' angolo sull' asse delle z, $x=0$, $y=0$, $z=1$, e un vertice dell' angolo irregolare, come p, di cui le coordinate sono, secondo quelle che abbiamo veduto,

$$x=\frac{m(n-1)}{mn-1}, \quad z=\frac{n(m-1)}{mn-1}, \quad y=0,$$

quando si prende questo punto nel piano delle x, z. Lo spigolo B'' è terminato dallo stesso vertice dell' angolo irregolare, e da un altro angolo, come c, comune all' ottaedro, preso per esempio nell' asse delle x, e di cui le coordinate sono $x=1$, $y=0$, $z=0$; finalmente lo spigolo C'' è limitato dallo stesso angolo irregolare, e da un angolo solido come b, di cui il vertice è comune coll' esacis-ottaedro, e di cui le co-

ordinate sono $x=y=z=\frac{mn}{mn+m+n}$. Conoscendo così le coordinate dei punti estremi di ciascuno di questi spigoli, se ne conchiuderà, colla nota espressione, la distanza, due a due, ossia la lunghezza di ciascuno spigolo, e si troverà

$$A''=\frac{(n-1)\sqrt{m^2+1}}{mn-1}, \quad B''=\frac{(m-1)\sqrt{n^2+1}}{mn-1},$$

$$C''=\frac{\sqrt{(m^2n^2+m^2+n^2)^2-m^2n^2(m+n+1)^2}}{(mn+m+n)(mn-1)}.$$

Quanto agli angoli piani delle faccie del diacis-dodecaedro, essi sono al numero di quattro; indicheremo con a'' quello formato dai lati B'' e C'', con b'' quello formato dai due C'', con c'' quello formato da C'' e A'', e con d''quello formato da A'' e B''. Questi angoli sono rispettivamente quelli segnati q, b, p, g per la faccia $qbpg$ del diacis-dodecaedro nella figura. I valori dei cosseni di questi angoli si troveranno per mezzo della nota formola di analisi geometrica, dalle equazioni degli spigoli A'', B'', C'' che formano questi angoli colle loro intersezioni due a due; se ne dedurranno quindi anche i seni, e poi le tangenti; i risultati di questo calcolo sono,

$$\text{tang } a''=\frac{n(mn-1)\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}}{n^2(m^2-n)+m(m-n^2)},$$

$$\text{tang } b''=-\frac{(mn+m+n)\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}}{mn(m+n+1)},$$

$$\text{tang } c''=-\frac{m(mn-1)\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}}{m^2(m-n^2)+n(m^2-n)},$$

$$\text{tang } d''=\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}.$$

Abbiamo veduto che sebbene in generale le faccie del diacis-dodecaedro siano trapezoidi isoscelici, esse possono però essere anche trapezii, nel qual caso i due lati come B'', C'' divengono

paralleli tra loro. Per vedere qual relazione vi debba essere tra i due coefficienti m ed n perchè questo abbia luogo, si osserverà che in tal caso si dee avere la somma dei due angoli piani $c'' + d'' = 180^o$, e quindi tang $d'' = -$ tang c''; sostituendo qui i valori generali di tang d'' e tang c'' or ora trovati, avremo l' equazione di condizione $\frac{m(mn-1)}{m^2(m-n^2)+n(m^2-n)} = 1$, che si riduce, sviluppando, a $(m^2+1)(m-n^2)=0$, o semplicemente $m-n^2=0$, ossia $m=n^2$. Tra le varietà conosciute in natura, questa condizione non si verifica che in quella $\left[\frac{4O_2}{2}\right]$.

Quando questa condizione non ha luogo, le faccie del diacis-dodecaedro sono semplicemente trapezoidi, e non trapezii; i loro lati opposti come B'', C'' non sono più paralleli; essi convergeranno, andando verso il più corto lato A'', o divergeranno, secondo che si avrà $m > 0 <$ di n^2; questo caso però della divergenza non è fin qui stato ancora osservato in natura.

Per quello poi che riguarda gli angoli degli spigoli del diacis-dodecaedro, è chiaro in primo luogo che l' angolo di B'' è uguale all' angolo dello spigolo corrispondente B dell' esacis-ottaedro. Quanto ai due altri angoli degli spigoli, se l' equazione di una delle faccie F che contribuisce a formarli è $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+z=1$, quelle delle faccie F' e F^{IV} che formano rispettivamente con F gli spigoli C'' ed A'', saranno

$$x+\frac{y}{m}+\frac{z}{n}=1\,, \quad \frac{x}{m}-\frac{y}{n}+z=1\,.$$

Quindi la formola per l' espressione del cosseno d' inclinazione di due piani, di cui le equazioni sono conosciute, ci dà

$$\cos A''=-\frac{m^2(n^2-1)+n^2}{m^2(n^2+1)+n^2}\,, \quad \cos C''=-\frac{mn(m+n+1)}{m^2(n^2+1)+n^2}\,.$$

Facendo ora nelle diverse formole precedenti calcolate pel diacis-dodecaedro, $m=\infty$, si ottengono le formole corrispondenti relative al pentagono-dodecaedro, come segue:

Coordinate del vertice dell'angolo irregolare, $x=\frac{n-1}{n}$, $z=1$.

Linee degli spigoli,

$$2A''=\frac{2(n-1)}{n},\quad B''=\frac{\sqrt{n^2+1}}{n},\quad C''=\frac{\sqrt{n^4-n^2+1}}{(n+1)n};$$

Ma la linea B'' non è più uno spigolo; essa è l'altezza del pentagono simmetrico formato dalla riunione in un solo piano di due trapezii o trapezoidi del diacis-dodecaedro; e da questa unione risulta pure che due degli spigoli A'' si riuniscono in un solo spigolo $2A''$ del pentagono-dodecaedro.

Angoli piani delle faccie,

$$\text{tang } a''=\frac{n^2\sqrt{n^2+1}}{n^2+1}=\frac{n^2}{\sqrt{n^2+1}},\text{ e } \cos 2a''=-\frac{n^4-n^2-1}{n^4+n^2+1};$$

$$\text{tang } b''=-\frac{(n+1)\sqrt{n^2+1}}{n},\text{ e } \cos b''=-\frac{n}{n^2+n+1};$$

$$\text{tang } c''=-n\sqrt{n^2+1};\quad \text{tang } d''=\infty,\text{ d'onde } d''=90^\circ;$$

L'angolo $2a''$ è quello formato dalla riunione degli angoli a'' delle due faccie del diacis-dodecaedro che vengono a formare una sola faccia pentagona; l' angolo piano d'' svanisce per la sua unione nello stesso piano con un altro simile a cagion di quella dei due spigoli A'' in una sola linea, su cui la linea che formava lo spigolo B'' cade perpendicolarmente.

Angoli degli spigoli, $\cos A''=-\frac{n^2-1}{n^2+1}$; $\cos B''=-1$, e per conseguenza ang. $B''=180^\circ$, a cagione della coincidenza in un solo piano, delle due faccie che formavano questo spigolo; $\cos C''=-\frac{n}{n^2+1}$.

Si può qui notare che perchè questa forma divenisse il pentagono-dodecaedro regolare della geometria, cioè avesse tutti i lati dei pentagoni uguali, i loro angoli piani pure uguali, e

finalmente uguali anche gli angoli diedri degli spigoli, si richiederebbe che si avesse $2A''=C''$; $\cos 2a''=\cos b''=\cos c''$; $\cos A''=\cos C''$. Se una di queste tre condizioni fosse riempiuta, lo sarebbero anche le altre due; ma si trova che ciascuna di esse conduce al coefficiente di derivazione $n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}618\ldots$, valore irrazionale, e che perciò non può realizzarsi in natura. Il pentagono-dodecaedro regolare non può dunque aver luogo nella cristallizzazione; tra le varietà conosciute quella che più se ne approssima è $\frac{\infty O_5^3}{2}$ ossia $\frac{\infty O\,1{,}5}{2}$.

171. Tutte le formole precedenti riguardano il calcolo diretto, per cui si trovano gli angoli, e gli altri elementi d'una forma derivata del sistema regolare, supponendo conosciuti i coefficienti di derivazione m, n di questa forma dall'ottaedro fondamentale. Ma nell'applicazione pratica della teoria della cristallizzazione, accade sovente che si abbia a fare il calcolo inverso, cioè dati dall'osservazione alcuni di questi elementi in un cristallo appartenente al sistema regolare, e principalmente gli angoli diedri degli spigoli, che sono gli elementi più atti a tale scopo, si debbano trovare i valori dei coefficienti m ed n, per mezzo di cui questa forma osservata deriva dall'ottaedro; le formole per tale oggetto si possono dedurre per mezzo delle convenienti inversioni, e combinazioni, da quelle che abbiamo stabilite pel calcolo diretto; ma questa applicazione delle nostre formole essendo per dir così estranea alla teoria medesima della cristallizzazione, e un oggetto di puro calcolo analitico, ci dispensiamo qui dall'occuparcene.

ARTICOLO TERZO.

Delle combinazioni delle forme derivate del sistema regolare.

172. Molte forme derivate possono, come abbiamo detto, combinarsi tra loro, in uno stesso cristallo, cosicchè questo presenterà faccie appartenenti a più forme derivate semplici, nella posizione in cui esse si presenterebbero in ciascuna forma separata, ma che si intersecheranno in diverse maniere,

quelle d' una forma con quelle dell' altra ; lo sviluppamento della teoria di queste combinazioni consiste ad assegnare in ciascun caso la forma che ne risulterà per queste diverse faccie, coi loro diversi angoli piani, e lunghezze ed angoli degli spigoli ecc., in somma a determinare tutti i rapporti possibili della combinazione delle forme di ciascun sistema , e in particolare del sistema regolare di cui qui si tratta , tanto oloedriche, che emiedriche. Tuttavia nella ricerca di questi rapporti si può da principio non aver riguardo che alle combinazioni binarie , poichè la teoria generale delle combinazioni ternarie, e ulteriori, si perderebbe in un' infinità di problemi, senza presentare vantaggi particolari nell' applicazione, ciascuna combinazione moltipla potendo scomporsi in combinazioni binarie, e svilupparsi quindi secondo le regole di queste. Tuttavia per avere almeno riguardo alla modificazione la più interessante , e la più frequente delle combinazioni ternarie , che è quella relativa al caso , in cui gli spigoli di combinazione di due forme sono troncati dalle faccie d' una terza forma , si potrà esaminare in seguito ai diversi problemi dei rapporti delle forme combinate due a due, quale divenga relativamente a queste due forme in particolare l' *equazione di combinazione* con una terza forma , di cui già abbiamo data l' espressione generale per tutti i sistemi di cristallizzazione , nel primo paragrafo di questo Capo, n. 154. Quanto alla maniera di considerare le combinazioni binarie, è conveniente per la chiarezza e per aiuto dell' imaginazione di concepire sempre una delle forme come dominante , cosicchè l' altra non faccia che modificarla con troncature e smuzzamenti di spigoli e d' angoli solidi ; in questa maniera, a dir vero, ciascuna combinazione binaria si presenta due volte, ma ciò può appena riguardarsi come una ripetizione, stante che una stessa combinazione prende un aspetto affatto diverso, secondo che l' una o l'altra delle due forme è dominante.

173. Ciò posto per cominciare a considerare le combinazioni delle forme oloedriche del sistema regolare , poichè l' esacis-ottaedro è il rappresentante generale di queste forme , per isviluppare le leggi di queste combinazioni nella loro maggior generalità , si dovranno in primo luogo esaminare i rapporti di combinazione di due esacis-ottaedri mOn, $m'On'$.

Per la considerazione di questi rapporti, sembrerebbe a prima vista che si dovesse rinunziare, relativamente ai due esacis-ottaedri da combinarsi, alla maniera di concepire che abbiamo fin qui adoperata per le forme separate, che consiste nel supporre a tutte una lunghezza uguale ed invariabile degli assi principali tanto nella forma fondamentale, che nelle derivate, uguaglianza che abbiamo ottenuta, ritenendo sempre per uno dei parametri di ciascuna faccia delle forme derivate la lunghezza stessa del semi-asse principale della forma fondamentale, e facendo soltanto variare gli altri due parametri per mezzo dei coefficienti m ed n, cosicchè tutte le intersezioni di queste faccie restassero comprese negli ottanti formati dagli assi della forma fondamentale medesima. Questa supposizione in fatti sembra contraddittoria, almeno in parte, all' idea della combinazione di due forme tra loro, poichè ammettendola, se per esempio i due coefficienti m, n d' una delle forme fossero amendue maggiori, o minori dei due coefficienti corrispondenti m', n' dell' altra, una delle forme resterebbe coperta dall' altra, senza che si avesse alcuna intersezione delle loro faccie, e in generale la diversità delle dimensioni delle due forme, dee cangiare la posizione assoluta delle intersezioni. Ma si noterà che per giudicare dei rapporti di combinazione non si richiede se non di conoscere la posizione relativa delle faccie delle due forme, e così quella pur anche delle linee in cui si intersecherebbero quando fossero trasportate, ove d' uopo, parallelamente a loro stesse, gli angoli diedri che esse vi farebbero tra loro colla mutua inclinazione, e gli angoli che queste intersezioni delle faccie o spigoli farebbero tra loro nel loro incontro, e quindi gli angoli solidi che ne risulterebbero, circostanze che non variano dal cangiamento delle dimensioni relative delle due forme fondamentali, comunque esso faccia variare le dimensioni delle faccie, e degli spigoli; ora si ottiene per tale oggetto una maggior facilità, assegnando originariamente a queste faccie certi punti d' intersezione comuni, pei quali i poli degli assi principali si offrono il più naturalmente, come quelli che già si presentano, nella derivazione delle forme separate, come i punti cardinali comuni di tutte. Converrà solo ritenere, che in questa maniera di concepire i risultati della combinazione, quando si troverà

pei rapporti delle due forme, coincidenza dello spigolo di una di esse con uno spigolo dell' altra, questo significherà che se si variassero proporzionalmente le dimensioni di una delle due forme, in maniera che la forma a cui apparterrebbe lo spigolo di angolo più acuto divenisse più grande, vi sarebbero nella forma combinata due intersezioni delle faccie delle due forme, parallele allo spigolo della forma che lo ha più ottuso; le porzioni di faccie della forma di spigolo più acuto, che rimarrebbero al dissopra di queste due intersezioni, dovrebbero concepirsi soppresse, per evitare gli spigoli rientranti, che senza ciò si formerebbero nella forma combinata; quello spigolo acuto scomparirebbe, e non rimarrebbero più che due spigoli della forma combinata paralleli a quello più ottuso dell' altra forma.

Questo si rende sensibile dalla fig. 70, ove supponendo che lo spigolo ab d' una delle forme si fosse trovato coincidere, partendo da una stessa forma fondamentale, collo spigolo $a'b'$ più ottuso d' un' altra forma, se le dimensioni della prima forma venissero ad aumentarsi, o quelle della seconda a diminuirsi, si avrebbero tra le faccie formanti questi spigoli le intersezioni cd, ef, le quali, togliendo le porzioni delle faccie estranee al cristallo che ne può risultare, diverrebbero due spigoli paralleli allo spigolo $a'b'$ che rimarrebbe. Questa formazione di tre spigoli paralleli in vece d' un solo che avrebbero presentato le due forme separate dicesi *bisellamento* dello spigolo della forma a cui avrebbe appartenuto lo spigolo ab, considerando questa come dominante. Ogni qual volta adunque si troverà pei rapporti delle due forme considerate come derivate da una stessa forma fondamentale di date dimensioni, *coincidenza* tra i loro spigoli, questo significherà *bisellamento* dello spigolo di una delle forme, con produzione di due spigoli di combinazione paralleli allo spigolo dell'altra, e ciò avrà luogo nel caso dell' indicata relazione di dimensioni diverse, senza la quale non vi sarebbe, per quanto spetta a questo spigolo, combinazione delle due forme; l' estensione poi più o men grande delle faccie di bisellamento, dipende dalla disuguaglianza più o men grande che le dimensioni delle due forme possono presentare.

L' analogo si dica del caso in cui, nella supposizione suddetta di identità di dimensioni delle due forme fondamentali, si

trovasse coincidenza dei vertici a e a' (fig. 71) di due angoli solidi; ciò indicherebbe soltanto, che attorno al vertice a' dell' angolo solido di una delle due forme può aver luogo, quando una di esse abbia dimensioni proporzionalmente più grandi dell' altra, un contorno di spigoli di combinazione, che lascia solo sussistere l' angolo più depresso, il che si chiama uno *smuzzamento* dell' angolo a dell' altra forma considerata come dominante, e questa sarà allora la modificazione che sola potrà essere prodotta dalla combinazione, quando essa si effettua. In questo caso lo spigolo bc prodotto dall' intersezione che dovrà necessariamente aver luogo tra una qualunque delle faccie bac, e l'altra $ba'o$ delle due forme, a cui apparterrebbero i due angoli solidi a e a', potrà essere o parallelo, o comunque inclinato agli spigoli che queste due faccie formerebbero colle faccie vicine delle stesse forme; se loro fosse parallelo vi sarebbe bisellamento dello spigolo appartenente alla forma di cui fa parte la faccia $ba'c$, quando questa si considerasse come dominante, onde si potrebbe la modificazione di cui si tratta, riguardare o come uno smuzzamento dell' angolo a di una delle forme, dall' angolo a' dell' altra, o come un bisellamento dello spigolo suddetto di quest' ultima forma dallo spigolo corrispondente della prima, secondo le dimensioni più o men grandi delle porzioni sussistenti delle faccie, che ci porterebbero a considerare l' una o l' altra delle forme combinate come dominante. Se poi quel parallelismo degli spigoli non avesse luogo, si dovrebbe necessariamente riguardare la circostanza indicata come uno smuzzamento dell' angolo solido a di una delle forme, dall' angolo solido a' dell' altra, tra le quali dovrebbesi allora riguardare la prima come dominante, e la seconda come secondaria, o modificante la prima; e resterà in tal caso a determinare, dalle altre relazioni delle due forme, in qual direzione saranno inclinati gli spigoli di combinazione che circondano l' angolo a' della forma modificante, relativamente agli altri spigoli ed angoli solidi delle due forme.

Si può notare ancora che quando, considerando sempre le due forme combinate come dotate degli stessi assi principali, ossia di dimensioni uguali di forma fondamentale, si trovasse la coincidenza d' uno spigolo dell' una con una faccia dell' altra,

questo indicherebbe che una *troncatura* di quello spigolo da questa faccia, avrebbe luogo per la diminuzione delle dimensioni della seconda forma ; lo spigolo allora scomparirebbe , e non resterebbe che una faccetta piana tra due spigoli paralleli di combinazione , la faccia piana facendo così riguardo allo spigolo troncato la stessa funzione , che faceva , nel caso del bisellamento , l' angolo dello spigolo più ottuso relativamente allo spigolo più acuto. E così pure se si trovasse, per dimensioni uguali, coincidenza d'un angolo solido di una delle forme, con una faccia piana dell' altra, potrebbe succedere , per la variazione di dimensioni di una di queste forme, la troncatura dell' angolo solido della prima dalla faccia della seconda , per cui a quell' angolo verrebbe a sostituirsi una faccetta piana circondata da tanti spigoli di combinazione quante erano le faccie che concorrevano a formarlo.

Le circostanze di cui abbiamo parlato di bisellamenti di spigoli , smuzzamenti d' angoli solidi , e troncature degli uni o degli altri , sono indicate , come si è detto, dalla coincidenza di spigoli tra loro , di vertici d' angoli solidi pur tra loro , e di spigoli ed angoli solidi con faccie, nelle due forme considerate come di uguali assi principali , pel caso in cui quella che ha gli angoli degli spigoli , o gli angoli solidi più ottusi , o una faccia in contatto con uno spigolo , o con un angolo solido dell'altra, venisse poi ad avere minori dimensioni. Queste circostanze però potranno aver luogo , anche colle supposte dimensioni primitive determinate dall' uguaglianza della forma fondamentale, quando con queste stesse dimensioni uno spigolo dell' una fosse parallelo a quello dell' altra, ma ad esso inferiore e più ottuso , o l' angolo solido più ottuso dell' una fosse al dissotto dell' angolo solido più acuto dell' altra , o la faccia dell' una passasse al dissotto d'uno spigolo, o del vertice d' un angolo solido dell' altra ; e le stesse circostanze continuerebbero allora a verificarsi anche nei cangiamenti di dimensione che si applicassero ad una delle forme , purchè non si facessero in un tal senso , e in grado sì considerevole, che venissero a distruggersi le condizioni indicate.

174. Adottando adunque l'uguaglianza primitiva dei due ottaedri , forme fondamentali dei due esacis-ottaedri mOn, $m'On'$

di cui dobbiamo qui esaminare le combinazioni tra loro, gli assi principali delle due forme, qualunque siano i coefficienti de' loro parametri, saranno sempre uguali, cioè quelli stessi dell' ottaedro fondamentale, e per conseguenza i poli di questi assi principali saranno tra loro coincidenti. Siccome inoltre i punti estremi degli assi quadranziale, ed ottanziale cadono per le due forme sulle stesse linee, la maniera di presentarsi della combinazione dipenderà evidentemente dalla grandezza di questi due assi intermedii, o che viene allo stesso dalla grandezza dei due coefficienti t, r, che esprimono i rapporti delle loro lunghezze a quelle dei due assi corrispondenti dell' ottaedro. Egli è dunque per mezzo di questi due coefficienti, che dee svilupparsi la teoria delle combinazioni dei due esacis-ottaedri.

Cerchiamo in primo luogo quali siano relativamente a questi coefficienti le condizioni della coincidenza, o del parallelismo degli spigoli delle due forme combinate, che rendono possibile il bisellamento degli spigoli di una di esse dall' altra, quando si cangino poi convenientemente le dimensioni delle medesime; condizioni, in virtù delle quali può aver luogo la specie di combinazioni, in cui queste bisellature si fanno senz' altro smuzzamento degli angoli solidi, che quello che ne è la conseguenza, e che però chiameremo *combinazioni regolari.*

1.° Succederà la coincidenza degli spigoli più lunghi, cioè di quelli che vanno dai poli degli assi principali a quelli degli assi ottanziali, quando $t'=t$, cioè quando i due semi-assi ottanziali saranno uguali, perchè allora i due punti estremi di questi spigoli coincideranno tra loro; il semplice parallelismo, nella nostra supposizione, non può aver luogo tra questi spigoli, finchè si ritengono le dimensioni primitive; esso si verificherà solo quando si vengano a cangiare le dimensioni di una delle forme.

2.° Avrà luogo per la stessa ragione la coincidenza degli spigoli mezzani, che vanno dai poli degli assi principali ai poli degli assi quadranziali, quando $r'=r$, cioè quando i due semi-assi quadranziali saranno uguali. Questa coincidenza non potrà divenire, anch' essa, un semplice parallelismo, che pel cangiamento nelle dimensioni di una delle forme.

3.° Nel caso in cui si verificassero amendue le coincidenze delle due sorta di spigoli precedenti, coinciderebbero pur anche

necessariamente gli spigoli più corti, poichè coinciderebbero le loro estremità che sono i poli degli assi ottanziale, e quadranziale, e allora le due forme diverrebbero una sola, e non vi sarebbe più combinazione; ma questi spigoli potranno presentare inoltre un semplice parallelismo, ritenendo le dimensioni primitive supposte delle due forme, quando $\frac{t'}{r'}=\frac{t}{r}$, o che è lo stesso $\frac{t'}{t}=\frac{r'}{r}$, cioè quando gli assi ottanziale e quadranziale saranno disuguali tra le due forme, ma avranno lo stesso rapporto, come è facile vedere.

Nel primo e nel secondo caso succederà un bisellamento degli spigoli più lunghi e mezzani rispettivamente di una delle forme, per mezzo dell' altra, cangiando nel senso conveniente le dimensioni di uno di essi, secondo quello che sopra si è detto; nel terzo si avrà un simile bisellamento degli spigoli più corti della forma in cui le due sorta di assi ottanziale e quadranziale sono più grandi, epperciò gli spigoli più acuti, dando a questa minori dimensioni che all' altra, senza il che le faccie non potrebbero intersecarsi, partendo tutte dalle estremità degli assi principali.

Se si mettono nell'espressione delle condizioni precedenti, in vece di t, t', r, r', i loro valori, che abbiamo stabiliti nel calcolo delle forme derivate separate, in funzione dei coefficienti dei parametri, m, n, m', n', avremo le stesse condizioni espresse immediatamente per mezzo di questi coefficienti; cioè avremo

$$t=t', \text{ quando } \frac{m'n'}{m'+n'}=\frac{mn}{m+n}, \quad r'=r, \text{ quando } n'=n;$$

$$\frac{t'}{r'}=\frac{t}{r}, \text{ quando } \frac{m'(n'+1)}{n'}=\frac{m(n+1)}{n}.$$

Passando poi alle condizioni della coincidenza dei vertici degli angoli solidi di due forme combinate aventi uguali le dimensioni della forma fondamentale, è chiaro, che questa coincidenza ha sempre luogo per gli angoli di otto faccie situati sugli angoli stessi dell' ottaedro fondamentale, e quanto

alle altre due specie di angoli solidi, cioè quello di sei faccie sull' asse ottanziale, e quello di quattro faccie sull' asse quadranziale, le condizioni della coincidenza consistono nell' uguaglianza di questi assi tra le due forme, cioè sono $t=t'$, $r'=r$, le stesse che determinano la coincidenza dei due spigoli più lunghi, e mezzani rispettivamente. Ma quando tale coincidenza non ha luogo, per essere $t>$ o $<t'$, $r'>$ o $<r$, gli angoli solidi di specie corrispondente, delle due forme, sono però sempre posti sulla stessa linea, cioè quella dell' asse ottanziale, o quadranziale rispettivamente; onde non si richiede realmente alcuna particolar condizione, fuori di una certa relazione di maggiore o minore ottusità degli angoli delle due forme tra loro, perchè possa succedere la combinazione, quando si cangino le dimensioni di una delle forme nel senso conveniente, ed anche talvolta ritenendo le dimensioni stesse dipendenti da una forma fondamentale comune. Quando questa combinazione avrà luogo, vi sarà intersezione delle faccie d' una forma concorrenti a formare l' angolo che rimane smuzzato, con quelle dell' altra forma, e si dovrà determinare per ciascun paio di faccie che così si intersecano, la posizione dello spigolo di combinazione che ne risulterà. Supponiamo per esempio che la faccia F' di $m'On'$ considerato come forma subordinata, venga così ad intersecare la faccia F di mOn, considerato come forma dominante. Lo spigolo di combinazione che consiste in quest' intersezione, taglierà sempre due degli spigoli della faccia triangolare F, e prenderà conseguentemente una certa situazione relativamente al terzo spigolo, che non ne è tagliato immediatamente; se gli è parallelo, si potrà considerare come formante qui un bisellamento, e la combinazione a questo riguardo sarà ancora compresa tra le combinazioni regolari di cui già abbiamo parlato. In caso contrario si avrà una di quelle combinazioni che chiameremo *irregolari*, e si tratta allora di sapere qual è la direzione secondo la quale lo spigolo di combinazione converge con quello spigolo non intersecato di F. Ora siccome ciascuno spigolo è terminato da due vertici diversi di angoli solidi, la convergenza si farà verso l' uno, o verso l' altro di questi vertici d' angolo, e si dovrà determinare la posizione dello spigolo di cui si tratta, indicando verso quale di questi due punti essa abbia luogo.

Ciò posto dovremmo ora esaminare più specialmente i diversi casi di semplice bisellatura degli spigoli, ossia di combinazione regolare, e quelli di smuzzamento degli angoli solidi, da cui possono risultare le combinazioni irregolari, ed indicare le condizioni dipendenti dalla relazione di grandezza degli angoli degli spigoli, o degli angoli solidi, che vi debbono essere tra i due esacis-ottaedri, oltre quelle dell' esistenza o nò delle coincidenze o dei parallelismi suddetti, perchè questi casi si verifichino realmente, o possano verificarsi pel cangiamento delle dimensioni di una delle forme, considerando, in queste combinazioni, la forma *mOn* come dominante, e la forma *m'On'* come subordinata o modificante la prima. Ma queste particolarità non essendo che conseguenze dei principii generali della teoria che qui esponiamo, e potendo facilmente dedursi dalla considerazione di ciascun caso proposto, a cui si vogliano essi applicare, ci dispenseremo dall' occuparcene specialmente.

175. Siccome poi qualunque forma derivata oloedrica del sistema regolare può essere considerata come un caso particolare dell' esacis-ottaedro, si concepisce facilmente che per le combinazioni binarie delle altre forme oloedriche di questo sistema, sia coll' esacis-ottaedro stesso, sia tra loro, i rapporti di combinazione sono essenzialmente compresi anch' essi in quelli dei due esacis-ottaedri, presentando solo aspetti e circostanze particolari, secondo le diverse specie di forme che vi si considerano; se non che alcuni dei casi relativi alla combinazione degli esacis-ottaedri, possono essere esclusi, in diverse di queste combinazioni, dall' impossibilità di riunire insieme le condizioni che loro si riferiscono.

Reciprocamente vi sono alcune circostante particolari nell' aspetto delle forme combinate, che possono presentarsi in alcune di queste combinazioni, e che non si presentavano in quella dei due esacis-ottaedri.

Tali sono in primo luogo le troncature di spigoli, o d'angoli solidi, che debbono sostituirsi ai bisellamenti di spigoli, e agli smuzzamenti degli angoli, quando ad uno spigolo della forma dominante venga a corrispondere, in vece d' uno spigolo più ottuso della forma subordinata, una faccia piana di questa,

o ad un angolo solido della prima, in vece d' un angolo solido più ottuso, pur anche una faccia piana della seconda.

Un altro accidente è quello di bisellamento di un angolo solido, per cui a un angolo solido della forma dominante viene a sostituirsi uno spigolo della forma subordinata, che si trova corrispondervi.

Può anche accadere che la smuzzatura d' un angolo di più faccie sia ridotta ad un numero di faccie uguale alla metà soltanto del numero primitivo.

176. Passando a parlare delle combinazioni delle forme emiedriche, tratteremo separatamente di quelle che non hanno le faccie opposte parallele due a due, e di quelle a faccie parallele. Nelle prime, le forme capaci di quella specie di emiedria, si presentano realmente emiedriche in combinazione; per conseguenza l' ottaedro vi si mostra come tetraedro, il triacis-ottaedro come deltoido-dodecaedro, l' icosaedro come trigono-dodecaedro, e l'esacis-ottaedro come esacis-tetraedro. Possono però entrare inoltre in queste combinazioni, senza che esse cessino di essere emiedriche, il cubo, e il rombo-dodecaedro, perchè queste due forme possono riguardarsi, secondo che abbiamo veduto, come per loro stesse emiedriche, nello stesso tempo che sono oloedriche; e lo stesso può dirsi per una ragione analoga del tetracis-esaedro relativamente all' emiedria a faccie non parallele, sebbene questa forma sia altronde suscettibile di emiedria a faccie parallele.

Per trovare i rapporti di queste combinazioni si dovrebbero esaminare anche qui le combinazioni binarie delle indicate forme due a due, considerando ciascuna di loro per ordine, come dominante, e indicando le modificazioni che esse provano dalle faccie della forma subordinata. Ma si può cominciare a risolvere il problema in tutta la sua generalità, considerando la combinazione di due esacis-tetraedri $\frac{mOn}{2}$ e $\frac{m'On'}{2}$, l' esacis-tetraedro essendo come già abbiamo veduto il rappresentante generale di ogni forma emiedrica a faccie non parallele. In ciò però dee aversi riguardo, come in generale nella ricerca delle combinazioni di tutte le forme emiedriche, alle due di-

verse posizioni che le due forme emiedriche tra loro combinate possono avere l' una relativamente all' altra , e in conseguenza si dee esaminare non solamente la combinazione di $\frac{mOn}{2}$ e $\frac{m'On'}{2}$, ma anche quella di $\frac{mOn}{2}$ e $-\frac{m'On'}{2}$.

La maniera di presentarsi delle combinazioni dei due esacis-tetraedri , di cui l' uno sia considerato come dominante , e l' altro come subordinato , dee evidentemente dipendere , nella supposizione degli assi principali uguali , dai rapporti dei coefficienti t e τ che esprimono le grandezze dei semi-assi ottanziali , oloedrico ed emiedrico , di una delle forme , di cui il primo rimane , e il secondo si produce nella forma emiedrica , prendendo per unità il semi-asse ottanziale della forma fondamentale ; e dei coefficienti t' e τ' che esprimono le grandezze degli stessi semi-assi nella medesima unità per l' altra forma ; in fatti egli è da questi semi-assi ottanziali che dipendono la posizione , e gli angoli degli spigoli delle due forme , poichè l' asse quadranziale , che altronde è lo stesso nell' emiedria , che nell' oloedria, si termina nelle forme emiedriche alle faccie ampliate , e non ad alcuno dei loro angoli solidi.

Ora considerando primieramente le combinazioni dei due esacis-tetraedri $\frac{mOn}{2}$ e $\frac{m'On'}{2}$, l' uno come dominante , e l'altro come subordinato, si osserverà che i due sistemi di sei faccie triangolari che si trovano, per le due forme, in ciascuno dei quattro ottanti degli assi coordinati per cui essi sussistono, sistemi di cui i vertici sono gli stessi che appartenevano ai due esacis-ottaedri , di cui queste due forme sono le emiedrie, dipendono quanto ai rapporti d' inclinazione dei loro spigoli , e faccie , da t, τ, t', e τ' precisamente nella stessa maniera che quelli dei due esacis-ottaedri , di cui abbiamo considerato qui sopra le combinazioni , dipendevano da t, r, t', r', essendo questi sistemi nelle due forme emiedriche similmente situati relativamente a quegli ottanti che nelle forme oloedriche corrispondenti. In fatti sia cab (fig. 72) una delle faccie dell' ottaedro fondamentale di una di queste forme , e Og il semi-asse ottanziale t dell' esacis-ottaedro di cui essa è l' emiedria. Questo

semi-asse, e il vertice g del sistema di faccie che consideriamo rimarrano gli stessi nell' esacis-tetraedro. Lo spigolo più lungo dell' esacis-ottaedro, come ga, gb, o gc, sussisterà pure senza alterazione di lunghezza, divenendo però il più corto spigolo dell' esacis-tetraedro. I tre altri spigoli intermedii che erano i più corti dell' esacis-ottaedro si allungheranno in G, G' e G'' per andare a formare i nuovi sistemi proprii all'esacis-tetraedro al dissopra dei sistemi soppressi dell' esacis-ottaedro, e diverranno gli spigoli più lunghi dell' esacis-tetraedro; la situazione ne sarà determinata dai due semi-assi $Og = t$ oloedrico, e $OG = \tau$, che è il nuovo semi-asse emiedrico, come quella degli spigoli più corti dell'esacis-ottaedro era determinata dai due semi-assi ottanziale e quadranziale t e r. Finalmente la situazione degli spigoli mezzani dell' esacis-tetraedro, come bG ecc., sarà pure determinata dai due semi-assi principale come $Ob = 1$, e emiedrico $OG = \tau$, non altrimenti che quella degli spigoli mezzani dell'esacis-ottaedro era determinata dallo stesso semi-asse principale 1, e dal semi-asse quadranziale r. Il sistema della forma emiedrica, il quale non è altro che il sistema corrispondente della forma oloedrica, di cui soltanto la lunghezza di due delle sorta di spigoli è alterata, ha dunque la stessa dipendenza da t e τ, che questo avea da t ed r. Per ottenere un triangolo, a cui i nuovi spigoli abbiano la stessa relazione, quanto alle loro lunghezze rispettive, e alla posizione, che quelli dell' esacis-ottaedro avevano alla faccia dell' ottaedro fondamentale, basta riunire con linee i vertici G, G', G'', che si formano al dissopra dei sistemi soppressi nel passaggio all'emiedria; questo triangolo è una delle faccie del tetraedro, che abbiamo veduto a suo luogo potersi concepire nella nuova forma emiedrica, avente le sue faccie parallele a quelle dell' ottaedro, e a quelle per conseguenza del tetraedro che sarebbe l' emiedria di questo ottaedro, ma al dissotto di esse; la posizione di questa faccia è diversa da quella della faccia dell' ottaedro corrispondente, avendo, non altrimenti che quella del tetraedro emiedrico di questo, i suoi angoli corrispondenti ai lati della medesima, e reciprocamente. Quello poi che si è detto di una delle forme che si vogliono combinare relativamente a t e τ, si applica ugualmente all' altra relativamente a t' e τ', onde

eguè, come abbiamo detto, che i rapporti di questa combinazione hanno la stessa dipendenza da t, τ, t' e τ', che quelli della combinazione dei due esacis-ottaedri sopra considerata aveano da t, r, t' e r'.

Da ciò risulta che la combinazione di due esacis-tetraedri presi nella stessa posizione relativamente alla loro forma oloedrica, cioè di $\frac{mOn}{2}$ e $\frac{m'On'}{2}$, dee presentare relativamente ai loro spigoli più corti, mezzani, e più lunghi, e agli angoli che ne sono formati, e sotto condizioni dipendenti dai rapporti di uguaglianza e disuguaglianza di t, τ, t', τ', casi affatto analoghi nell' aspetto, e nella disposizione degli spigoli, ed angoli della forma della combinazione, ai casi rispettivamente presentati dalla combinazione di due esacis-ottaedri relativamente ai loro spigoli più lunghi, mezzani, e più corti, e alle condizioni di rapporti tra t, r, t', e r'.

177. Ma dobbiamo qui inoltre esaminare le combinazioni che possono aver luogo tra due esacis-tetraedri in posizione inversa l' uno all' altro, cioè in cui i quattro sistemi di sei faccie che rimangono, e si estendono in uno degli esacis-ottaedri generatori nel suo passaggio all' emiedria, sono quelli che corrispondono alle faccie dell' ottaedro fondamentale alterne con quelle a cui corrispondono i sistemi che rimangono nella formazione dell' altro esacis-tetraedro; cioè, secondo la notazione che abbiamo adottata, tra $\frac{mOn}{2}$ e $-\frac{m'On'}{2}$. In questa sorta di combinazioni il semi-asse emiedrico di una delle forme, coincidendo col semi-asse oloedrico dell' altra, e viceversa, a cagione che l' antico vertice dei sistemi nell' uno si trova nell' asse del vertice dei nuovi sistemi dell' altro, bisogna paragonare tra loro, nelle relazioni precedenti τ' e t, e t' e τ in vece di τ' e τ, e di t' e t; allora i casi che sarebbero analoghi ai precedenti non possono più tutti succedere, perchè non possono più verificarsi tutte le condizioni ad essi relative, stante che si ha sempre $\tau > t$, e $\tau' > t'$, il nuovo vertice in ciascun esacis-tetraedro essendo sempre più elevato dell' antico, ossia di quello rimasto dall' esacis-ottaedro generatore.

Noteremo ora che le condizioni di rapporti di t, τ, t', τ',

da cui dipendono, secondo le analogie indicate colle combinazioni degli esacis-ottaedri sopra considerate, i casi di quelle degli esacis-tetraedri tanto similmente che inversamente formati, si potranno tradurre in rapporti tra i coefficienti m, n, m', n', come già si è accennato per quelli delle combinazioni degli esacis-ottaedri, osservando che si ha qui, in conseguenza dei valori delle quantità t, τ, t', e τ', quanto agli esacis-tetraedri nella stessa posizione,

$$t'=t\text{, quando } \frac{m'n'}{m'+n'}=\frac{mn}{m+n},$$

$$\tau'=\tau\text{, quando } \frac{m'n'}{m'-n'}=\frac{mn}{m-n},$$

$$\frac{t'}{\tau'}=\frac{t}{\tau}\text{, quando } \frac{m'(n'+1)}{n'}=\frac{m(n+1)}{n};$$

e quanto agli esacis-tetraedri in posizione inversa,

$$t'=\tau\text{, quando } \frac{m'n'}{m'+n'}=\frac{mn}{m-n},$$

$$\tau'=t\text{, quando } \frac{m'n'}{m'-n'}=\frac{mn}{m+n}.$$

Nella stessa maniera poi che le circostanze delle combinazioni dell' esacis-ottaedro con ciascuna delle altre forme oloedriche, e di queste, due a due, tra loro, considerandone una come dominante, e l' altra come subordinata, si deducono da quelle relative alle combinazioni dei due esacis-ottaedri, così pure le circostanze relative alle combinazioni a faccie non parallele dell' esacis-tetraedro colle altre forme emiedriche, o considerate come tali, e di queste, due a due, tra loro, si deducono da quelle dei due esacis-tetraedri, di cui queste altre forme possono considerarsi come casi particolari; se non che anche qui non tutti i casi che sono possibili nelle combinazioni dei due esacis-tetraedri rimangono possibili nelle combinazioni

delle altre forme, e l' aspetto ne è diverso, secondo la diversa maniera con cui le faccie si intersecano tra loro.

178. Le combinazioni emiedriche a faccie parallele due a due, nel sistema regolare, delle quali dobbiamo ora passare a trattare, sono in generale rappresentate, secondo quello che sopra abbiamo veduto, da quelle di due diacis-dodecaedri

$$\left[\frac{mOn}{2}\right] \text{ e } \left[\frac{m'On'}{2}\right],$$

i quali però debbono considerarsi anche qui separatamente o in posizione simile, o in posizione inversa tra loro. Nelle combinazioni di queste forme, a cagione della loro particolare qualità, si debbono annoverare tra le combinazioni distinte per qualche regolarità, non solamente quelle in cui gli spigoli di combinazione sono paralleli ad uno dei lati delle faccie della forma dominante $\left[\frac{mOn}{2}\right]$ (lati che sono qui al numero di quattro, poichè le faccie del diacis-dodecaedro sono quadrilatere, cioè trapezii, o trapezoidi), il che sarebbe analogo alle combinazioni delle forme precedenti in cui gli spigoli di combinazione erano paralleli ad uno dei lati delle loro faccie triangolari, e formavano così bisellamenti o troncature di spigoli; ma ancora quelle in cui i due spigoli di combinazione sono paralleli alle due diagonali diverse di queste faccie. Così riferendoci alla fig. 73, la quale rappresenta le tre faccie che rimangono in un ottante, ossia al dissopra di una delle faccie dell' ottaedro fondamentale, nel passaggio alla forma emiedrica di cui si tratta, considereremo come dotate di questa regolarità le forme combinate in cui gli spigoli di combinazione sono paralleli: 1.° agli spigoli più lunghi B''; 2.° agli spigoli più corti A''; 3.° allo spigolo irregolare C'' aggiacente a B''; 4.° allo spigolo irregolare C_1'', aggiacente ad A''; 5.° alla diagonale isoscelica a, cioè quella che riunisce l' angolo che fanno i due lati C'', C_1'', uguali tra loro, coll' angolo che fanno gli altri due lati; 6.° alla diagonale anisoscelica b, che riunisce gli angoli formati da ciascuna delle due linee uguali C'' e C_1'', coi due altri lati A'', B'. Si possono trovare le condizioni relative a questi parallelismi

o immediatamente per mezzo di semplici considerazioni geometriche, o facendo uso dell'equazione che ci dà la relazione tra tre piani qualunque di cui l'uno sia parallelo all'intersezione dei due altri, e formi per conseguenza con questi intersezioni ad essa parallele, equazione di cui già abbiamo indicato l'uso per istabilire l'*equazione di combinazione* per le combinazioni ternarie delle forme in generale. Mi limiterò qui a riferire i risultati di queste considerazioni, e calcoli, cioè le condizioni definitive stesse, per cui si hanno nella combinazione dei due diacis-dodecaedri di cui si tratta, i suddetti diversi parallelismi degli spigoli di combinazione, cioè:

A. Per una posizione simile delle due forme si avranno gli spigoli di combinazione paralleli,

1.° Agli spigoli più lunghi B'', quando, $n' = n$;

2.° Agli spigoli più corti A'', quando, $m' = m$;

3.° Agli spigoli irregolari C'', attigui a B'', quando

$$m'(m^2 - n)n - n'(mn - 1)mn - m'n'(m - n^2)m = 0;$$

4.° Agli spigoli irregolari C_1'', attigui ad A'', quando

$$m'(mn - 1)mn + n'(m - n^2)m - m'n'(m^2 - n)n = 0;$$

5.° Alle diagonali isosceliche, quando

$$m'n'(m - n) - m'(m - 1)n + n'(n - 1)m = 0,$$

ossia
$$\frac{m'(n' - 1)}{n'(m' - 1)} = \frac{m(n - 1)}{n(m - 1)};$$

6.° Alle diagonali anisosceliche quando $\frac{m'n'}{m' + n'} = \frac{mn}{m + n}$.

B. Per una posizione inversa delle due forme, le condizioni per gli stessi parallelismi degli spigoli di combinazione, si ottengono dalle precedenti, scambiando semplicemente tra loro le lettere m' e n', se non che il 5.° caso dei parallelismi suddetti non può realizzarsi per le forme in questa posizione.

Anche qui occorrerebbe ora di esaminare i diversi casi di queste combinazioni, coi loro diversi aspetti ed accidenti, sia sugli spigoli, sia sugli angoli solidi, secondo le diverse relazioni tra m, n, m', n', e che comprendono le combinazioni sia regolari, ossia soddisfacenti alle indicate condizioni di parallelismo degli spigoli, sia irregolari, per cui questo parallelismo non ha

luogo; ma ci dispenseremo dall' entrare in queste particolarità, per la stessa ragione che abbiamo allegata relativamente alle combinazioni oloedriche.

Quindi ci asterremo pure dall' esaminare partitamente le circostanze relative alla combinazione, sia del diacis-dodecaedro colle altre forme emiedriche a faccie parallele due a due, o che possono considerarsi come tali, cioè col pentagono-dodecaedro, sola altra forma emiedrica di questa sorta, e colle forme oloedriche, che possono farne funzione, che sono l' icosi-tetraedro, il triacis-ottaedro, il rombo-dodecaedro, l' ottaedro, e il cubo, sia del pentagono-dodecaedro con queste ultime forme, in ciascuna delle quali combinazioni si dovrebbe considerare per dominante o per subordinata, o l'una o l'altra delle due forme.

Noterò solo a questo riguardo ciò che ci offrono di particolare le combinazioni del diacis-dodecaedro col cubo, e del pentagono-dodecaedro coll' ottaedro. In quella del diacis-dodecaedro col cubo, le sei faccie del cubo vengono in generale a formare troncature sui sei angoli formati da quattro faccie del diacis-dodecaedro al luogo dei sei angoli solidi dell' ottaedro fondamentale; nella fig. 73 sopra citata uno di questi angoli è per esempio l' angolo d, in cui concorrono i due spigoli A'', B'' della faccia F. Queste sei troncature, che formano rombi, unite alle 24 faccie del diacis-dodecaedro, producono in tutto 30 faccie, di cui quelle primitive del diacis-dodecaedro sono in generale ridotte alla forma di pentagoni. Ma se le faccie del cubo che formano le troncature, penetrano abbastanza in dentro, perchè gli spigoli più corti del diacis-dodecaedro, come A'' siano intieramente occupati dalle medesime, le faccie primitive del diacis-dodecaedro si ridurranno alla forma di quadrilateri, formati dai tre altri lati primitivi, di cui B'' sarà solamente raccorciato, e dallo spigolo di combinazione colle faccie del cubo. Questi quadrilateri saranno in generale trapezoidi isoscelici, ma se il diacis-dodecaedro fosse di quelli a spigoli paralleli, cioè di cui le faccie fossero trapezii, ove i due lati come B'', C'', sono paralleli, il che richiede, come abbiamo veduto, che si abbia per esso $m=n^2$, gli spigoli di combinazione sarebbero pure paralleli a C'', e le faccie primi-

tive del diacis-dodecaedro diverrebbero anch' esse rombi, come quelle delle troncature ; la forma risultante sarebbe così terminata da 30 faccie, aventi tutte la figura di rombi, ma tra cui le 24 appartenenti al diacis-dodecaedro sarebbero di specie diversa dalle sei delle troncature. Perchè questi 30 rombi divenissero tutti uguali e simili, e così questo *triacontaedro della cristallizzazione* divenisse il *triacontaedro regolare* della geometria, bisognerebbe supporre, come si trova cogli opportuni calcoli, che il diacis-dodecaedro con cui il cubo viene a combinarsi, avesse per valori dei coefficienti m e n,

$$m = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2, \quad n = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

cioè valori irrazionali, che non possono ammettersi in natura nella derivazione delle forme dalla forma fondamentale, onde questo triacontaedro regolare è impossibile a realizzarsi tra le forme cristalline.

Quanto alla combinazione del pentagono-dodecaedro coll' ottaedro, ne risultano in generale troncature degli angoli a tre faccie del pentagono-dodecaedro, in cui gli spigoli di combinazione sono paralleli alle diagonali isosceliche. Quando le faccie dell' ottaedro si avanzano in dentro al punto di raggiugnere gli angoli solidi irregolari del pentagono-dodecaedro, e di ridurre così le porzioni restanti delle faccie di questo a triangoli, ne risulta una forma chiusa da 20 triangoli, di cui le faccie però hanno un valor differente; le 12 faccie che rimangono dal pentagono-dodecaedro sono triangoli isosceli, e le 8 altre, originariamente appartenenti all' ottaedro, sono triangoli equilateri. Non è dunque questo l' icosaedro regolare della geometria, il quale non può presentarsi in natura; come abbiamo già veduto (n. 170) non potervisi realizzare il pentagono-dodecaedro regolare medesimo. In fatti se si cerca quale sarebbe il pentagono-dodecaedro cristallografico $\frac{\infty On}{2}$ per cui i 12 triangoli isosceli, nella sua combinazione coll' ottaedro, diverrebbero anch' essi equilateri, e per conseguenza tutti questi triangoli uguali, si trova che ciò richiederebbe che

nelle faccie di questo pentagono-dodecaedro, la metà della linea della base dei pentagoni avesse alla linea d' altezza il rapporto di $1:\sqrt{3}$. Ora questa metà della linea della base dei pentagoni, è in generale, per qualunque pentagono-dodecaedro, $A''=\frac{n-1}{n}$, e la linea d' altezza $B''=\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$, secondo quello che sopra abbiamo veduto. Si ha dunque, per la condizione cercata $(n-1)\sqrt{3}=\sqrt{n^2+1}$, d'onde segue $n=\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$, valore irrazionale che non può aver luogo in cristallografia.

È notabile la parte che ha questa quantità $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ nelle forme e combinazioni ideali del sistema regolare di cristallizzazione, che offrirebbero una più compiuta regolarità; in fatti, secondo quello che sopra abbiamo veduto, se indichiamo con k questa quantità, $\frac{\infty Ok}{2}$ sarebbe il pentagono-dodecaedro regolare; il diacis-dodecaedro $\frac{k^2Ok}{2}$ darebbe, combinandosi col cubo, il triacontaedro regolare; e il pentagono-dodecaedro $\frac{\infty Ok^2}{2}$ darebbe coll' ottaedro l' icosaedro regolare.

179. Quanto a ciò che riguarda in generale il calcolo della lunghezza degli spigoli, dei loro angoli diedri, e degli angoli piani di ciascuna faccia, in una forma risultante dalla combinazione di due forme derivate qualunque del sistema regolare di cui qui si tratta, ci limiteremo a dir qualche cosa del calcolo degli angoli diedri degli spigoli, che sono gli elementi più essenziali a determinarsi nei cristalli prodotti da queste combinazioni. In fatti la cognizione di questi angoli come funzioni dei coefficienti di derivazione delle due forme combinate, è indispensabile anche per la determinazione delle forme contenute in una combinazione, o per mezzo della comparazione delle forme che si siano supposte, colle misure prese sul cristallo osservato, o per un calcolo inverso, partendo da queste misure, quando gli angoli degli spigoli di combinazione siano soli suscettibili di misura, il che accade frequentemente.

Per trovare le formole di questo calcolo non si ha che a fare uso dell' espressione generale che la geometria analitica ci dà del cosseno d' inclinazione di due faccie o piani qualunque, di cui siano date le equazioni nello spazio, sostituendo i valori dei parametri che sono dati per le faccie delle forme che si combinano, e che debbono intersecarsi tra loro, in vece delle lettere a, b, c, a', b', c', che entrano nelle equazioni generali supposte delle due faccie.

Ciò posto si trova per l' angolo Π degli spigoli di combinazione tra le faccie di due esacis-ottaedri rappresentanti di qualunque combinazione oloedrica, mOn, e $m'On'$, l'espressione

$$\cos\Pi = -\frac{mm'(nn'+1)+nn'}{\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}\cdot\sqrt{m'^2(n'^2+1)+n'^2}}.$$

Sostituendo a m, n, m', n' in quest' espressione generale i valori ∞, od 1, che appartengono ad uno o più di questi coefficienti, o uguagliandone tra loro alcuni, secondo la natura delle diverse forme oloedriche derivate dal sistema regolare, si avranno le espressioni dei cosseni degli angoli degli spigoli nelle combinazioni di queste diverse forme prese due a due.

Nelle formole che se ne otterranno, si possono rappresentare con M, M' rispettivamente le quantità

$$\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2} \text{ e } \sqrt{m'^2(n'^2+1)+n'^2},$$

che rimangono senz' alterazione in alcune di queste formole.

Pei cosseni degli angoli degli spigoli delle forme emiedriche a faccie non parallele due a due, hanno luogo gli stessi valori che per le forme oloedriche generatrici rispettive. Ma per gli angoli degli spigoli Π' di combinazione di due esacis-tetraedri, rappresentanti di tutte le forme emiedriche di questo genere, in posizione inversa, $\frac{mOn}{2}$ e $-\frac{m'On'}{2}$, si trova, avuto riguardo ai segni dei coefficienti delle equazioni delle faccie che debbono intersecarsi,

$$\cos\Pi' = -\frac{mm'(nn'+1)-nn'}{\sqrt{m^2(n^2+1)+n^2}\cdot\sqrt{m'^2(n'^2+1)+n'^2}}$$

$$= -\frac{mm'(nn'+1)-nn'}{MM'},$$

M, M' ritenendo gli stessi valori di sopra; e da questa formola generale si possono dedurre quelle corrispondenti per tutte le forme emiedriche di questo genere, combinate due a due, in posizione inversa l' una all' altra.

Finalmente per ciò che riguarda gli spigoli di combinazione delle forme emiedriche di questo sistema a faccie parallele due a due, si dee osservare che nella combinazione di queste forme, per una conseguenza della loro qualità particolare, sono in generale da considerarsi tre specie di spigoli di combinazione, come si vede esaminando le combinazioni di due diacis-dodecaedri D e D', che ne sono i rappresentanti generali (fig. 74). In fatti supponendo primieramente queste forme in posizione simile, ciascuna faccia F' della forma subordinata D' viene in primo luogo a intersezione colla faccia F similmente posta della forma dominante D, e forma così uno spigolo di combinazione Π'', che è evidentemente identico collo spigolo di combinazione di due esacis-ottaedri, delle faccie alterne de' quali le faccie dei due diacis-dodecaedri sono estensioni, dipendenti dalla soppressione delle altre. Ma essa può inoltre intersecarsi, e s' intersecherà realmente nella maggior parte delle combinazioni, colla faccia $F_{,}$, o colla faccia $F_{,,}$, e formerà nel primo caso uno spigolo particolare di combinazione $\Pi_{,}''$, e nel secondo un' altra sorte di spigolo $\Pi_{,,}''$. Gli stessi rapporti hanno luogo per la posizione inversa delle due forme. Ora considerando la posizione delle faccie che vengono così a formare tra loro queste diverse sorta d' intersezioni, o spigoli di combinazione, se ne trovano le espressioni dei cosseni degli angoli, come segue:

Per una posizione simile,

$$\cos \Pi'' = - \frac{mm'(nn' + 1) + nn'}{M M'}, \text{ come per le combin. oloedriche:}$$

$$\cos \Pi_{,}'' = - \frac{m'n(m + n') + mn'}{M M'}; \quad \cos \Pi_{,,}'' = - \frac{mn'(m' + n) + m'n}{M M'}:$$

Per una posizione inversa ,

$$\cos \Pi'' = - \frac{m'n(mn' + 1) + mn'}{MM'} ;$$

$$\cos \Pi_{,}'' = - \frac{n'n(m' + m) + m'm}{MM'} ; \quad \cos \Pi_{,,}'' = - \frac{mm'(n' + n) + n'n}{MM'} .$$

Queste espressioni , che si riferiscono alla combinazione in generale di due diacis-dodecaedri ,

$$\left[\frac{mOn}{2}\right] \text{ e } \left[\frac{m'On'}{2}\right], \text{ ovvero } - \left[\frac{m'On'}{2}\right],$$

danno quelle relative alle combinazioni delle altre forme emiedriche a faccie parallele due a due, per mezzo della conveniente sostituzione dei valori dei coefficienti m, n, m', n'.

180. Quello che precede riguarda le combinazioni binarie, cioè di due sole forme, del sistema regolare. Quanto alle combinazioni ternarie , ossia di tre forme diverse , ci limiteremo come abbiamo annunziato da principio , a dire qualche cosa sull'applicazione dell' *equazione generale di combinazione* alle forme di questo sistema , onde venir a trovare i coefficienti dei parametri d' una forma ancora ignota , quando una faccia ad essa appartenente produca troncature degli spigoli di combinazione di due paia di altre forme di cui sono noti i coefficienti di derivazione, cioè presenti con due faccie combinate di ciascun paio di queste forme , intersezioni , o spigoli di combinazione paralleli all' intersezione che queste faccie formerebbero tra loro , o finalmente in altri termini appartenga ad un tempo a due zone diverse con tali due paia di forme combinate.

L' *equazione generale di combinazione* relativa alla combinazione dell' esacis-ottaedro mOn con un altro esacis-ottaedro $m'On'$, cioè l'equazione di condizione tra i parametri noti m, n, m',n' delle faccie di questi due esacis-ottaedri, e quelli ignoti m'', n'' della faccia d' una terza forma che produca una troncatura d' uno degli spigoli di combinazione dei medesimi , ossia tagli quelle faccie con due spigoli paralleli tra loro , e che perciò

rebbero paralleli al loro spigolo di combinazione, è la stessa
ıe quella che abbiamo indicata per qualunque sistema di cri-
allizzazione in generale, cioè

$$m''n''(m'n - mn') + m''(m - m')nn' + n''(n' - n)mm' = 0 .$$

Una simil circostanza presentata dalla stessa faccia con due
tre forme di esacis-ottaedro, contenute nella stessa combina-
one, e di cui i parametri fossero pur noti, come m_1, n_1, m'_1, n'_1,
ırebbe una simil equazione, che combinata colla precedente ci
rebbe conoscere i valori dei due parametri ancora ignoti m'', n''.
Quest' equazione di combinazione si simplifica pei diversi
ısi, in cui in vece di due esacis-ottaedri si avessero o un
ıacis-ottaedro, ed una delle altre forme oloedriche di questo
stema, o due di queste, mettendo per m, n, m', n' l' infi-
ito, o l' unità, o uguagliando m e n, od m', e n' tra loro
condo la natura di queste forme.
L' equazione di combinazione indicata appartiene ancora alle
rme emiedriche a faccie non parallele, cioè si applica in generale
la combinazione di due esacis-tetraedri, e in particolare, colle
esse simplificazioni, a quella delle altre forme emiedriche di
esta sorta, quando le due forme proposte siano nella
essa posizione tra loro; ma quando fossero in posizione in-
rsa, conviene farvi m' negativo, cosicchè l' equazione di
ı si tratta diverrà allora nella sua forma generale, cioè per
$\frac{On}{2}$ e $-\frac{m'On'}{2}$,

$$-m''n''(m'n + mn') + m''(m + m')nn' - n''(n' - n)mm' = 0 ,$$

cangiando tutti i segni dell' equazione,

$$m''n''(m'n + mn') - m''(m + m')nn' + n''(n' - n)mm' = 0 .$$

Questo però suppone che la terza forma, di cui la faccia
ma le intersezioni parallele, colle faccie delle due forme
ıiedriche, e che dee essere anch' essa emiedrica, abbia la
ssa posizione che la forma dominante a cui si riferiscono

le lettere senz' accenti; se essa fosse in posizione inversa, bisognerebbe fare ancora m'' negativo, nella prima o nella seconda delle formole indicate rispettivamente, secondo che le due prime forme saranno supposte in posizione simile o inversa.

Nell' applicazione poi delle equazioni di combinazione alle combinazioni di forme emiedriche a faccie parallele due a due, bisogna aver riguardo alla diversa natura delle faccie che vengono ad intersecarsi, secondo la distinzione che sopra ne abbiamo fatta relativamente a due diacis-dodecaedri D e D' rappresentanti generali di queste forme. Abbiamo chiamato Π'' lo spigolo d' intersezione della faccia F' della forma subordinata colla faccia analoga F della forma dominante, Π_i'' quello d' intersezione della stessa faccia F' colla faccia F_i della forma dominante, e Π_{ii}'' quello della stessa faccia F' colla faccia F_{ii} della forma dominante. Ora si trova, considerando la relazione di queste diverse faccie tra loro, e con quelle della terza forma che venga ad intersecarle, e supponendo dapprima i tre diacis-dodecaedri in posizione simile, che l' equazione di combinazione relativamente allo spigolo Π'' è

$$m''n''(m'n - mn') + m''(m - m')nn' + n''(n' - n)mm' = 0,$$

di qualunque natura sia la faccia troncante F'' della terza forma, vale a dire è la stessa che quella generale per le forme oloedriche, e per le forme emiedriche similmente poste, sovra indicata; e che le equazioni di combinazione, relativamente agli spigoli Π_i'' e Π_{ii}'', sono rispettivamente

$$m''n''(m' - nn')m - m''(mm' - n)n' + n''(mn' - 1)m'n = 0,$$

e $$m''n''(m'm - n')n - m''(m'n - 1)mn' + n''(n'n - m)m' = 0,$$

quando la faccia F'' della terza forma è della natura di F;

$$n''(m' - nn')m - m''n''(mm' - n)n' + m''(mn' - 1)m'n = 0,$$

e $$n''(m'm - n')n - m''n''(m'n - 1)mn' + m''(n'n - m)m' = 0,$$

quando la faccia F'' della terza forma è della natura di F_i;

$$m''(m' - nn')m - n''(mm' - n)n' + m''n''(mn' - 1)m'n = 0,$$

e $$m''(m'm - n')n - n''(m'n - 1)mn' + m''n''(n'n - m)m' = 0,$$

quando la faccia F'' della terza forma è della natura di F_{ii}.

Per una posizione inversa dei due diacis-dodecaedri D e D' anno luogo le stesse formole, con iscambio delle lettere e' e n' tra loro. E se anche il terzo diacis-dodecaedro D'' si rovasse in posizione inversa relativamente a D, si dovrebbero i ciascuna di queste formole così ottenute scambiare inoltre tra oro le lettere m'', n''. Le stesse formole poi si applicheranno alle ombinazioni dei pentagono-dodecaedri, e delle altre forme che ossono appartenere a questo genere di combinazioni, dando d m, n, m', n' i valori che convengono alle forme proposte.

§ 3.°

Del sistema tetragonale.

ARTICOLO PRIMO

i questo sistema in generale, e della sua forma fondamentale.

181. Il sistema tetragonale è come si è, detto di sopra, ormato dal complesso di tutte le forme cristalline che possono iferirsi, per mezzo di coefficienti di derivazione razionali, a tre ssi rettangolari, di cui due sono uguali tra loro, e il terzo da quelli disuguale. Il nome con cui l' indichiamo è tratto alla figura della sezione trasversale di tutte le sue forme, he è sempre o un quadrato (*tetragonos*), o almeno una fiura a cui si può iscrivere, o circoscrivere un quadrato. Da Weiss fu detto sistema *quaternario*, o *quadrimembre*, a cagione ella simmetria in cui vi si presentano le quattro estremità ei due assi uguali tra loro. Altri lo chiamarono *monodimeico*, e Weiss istesso *bi-uni-asse*, nomi relativi alla natura e' suoi assi o dimensioni fondamentali; Mohs lo addimandò *sistema piramidale*, perchè molte delle sue forme sono oppie piramidi. Quello dei tre assi, che è disuguale dai due ltri, si dice in questo sistema *asse principale*, e gli altri due guali tra loro *assi secondarii*, od *accessorii*. Sono inoltre da onsiderarsi in questo sistema due *assi intermedii* simili tra loro, he si trovano nel piano della base tra i due assi accessorii, e incli-

nati ugualmente su ciascuno di essi di 45°. Chiameremo sezioni principali quelle che si facciano passare per l'asse principale, e per uno degli assi accessorii, o degli assi intermedii, *normali* le prime, *diagonali* le seconde. Si dee prendere in questo sistema per forma fondamentale quella di cui i parametri hanno tra loro i rapporti $1 : 1 : a$, le due unità rappresentando i semi-assi accessorii, e a il semi-asse principale che differisce in lunghezza degli altri due, e può avere con loro rapporti diversi, espressi generalmente da a, nelle specie diverse di sostanze che appartengono per la loro cristallizzazione a questo sistema. Questa forma presenta necessariamente la riunione di 8 faccie, che sono triangoli isosceli, e formano una doppia piramide di base quadrata, ossia un ottaedro allungato o raccorciato relativamente ad un ottaedro regolare, in vece che quest' ottaedro regolare era la forma fondamentale del sistema precedente; la linea che unisce i due estremi di quest'ottaedro, nella direzione più lunga o più corta, è l' asse principale, di cui abbiamo indicata la metà colla lettera a, le linee che uniscono gli altri angoli solidi dell' ottaedro due a due, e che sono uguali tra loro, sono gli assi secondarii, di cui abbiamo indicato la metà con 1. Il simbolo di questa forma fondamentale sarà P, iniziale di *piramide*.

Lo stagno ossidato (*zinnstein*) lo *zircon*, la *pirite di rame* che è un solfuro di rame e di ferro ecc., ci offrono esempi di sostanze appartenenti a questo sistema di cristallizzazione. Tra queste la *pirite di rame* non presenta in generale che forme emiedriche.

Il rapporto della lunghezza dell' asse principale a quella dei due assi accessorii, varia come abbiamo detto da una sostanza all' altra; si suole rappresentare la prima con una quantità radicale del secondo grado, prendendo la seconda per unità. Così l' asse principale dello zircon è prossimamente, in quest' unità, uguale a $\sqrt{\frac{5}{11}}$, quello della pirite di rame, a $\sqrt{\frac{33}{34}}$, ec.

ARTICOLO SECONDO

Delle forme derivate del sistema tetragonale.

A. *Derivazione di queste forme per semplici considerazioni geometriche.*

182. Le forme che si derivano in una maniera più semplice ed immediata dalla forma fondamentale di questo sistema sono gli *ottaedri*, ossia le *doppie piramidi tetragonali*, cioè a base quadrata, o come alcuni dicono i *quadrato-ottaedri*, che chiameremo *della prima specie* per distinguerli da altri, di cui parleremo in appresso; essi hanno la stessa base, e la stessa posizione di faccie relativamente ai due assi secondarii, che la bipiramide, ossia doppia piramide fondamentale, ma con assi principali o più lunghi, o più corti dell' asse di questa. Per formarle basta moltiplicare l' asse principale a della forma fondamentale per un coefficiente razionale m, che può essere o > 1 o < 1, e applicare quindi su ciascuno spigolo della base della bipiramide fondamentale due piani che vadano a toccare l' uno la punta superiore, l' altro la punta inferiore dell' asse principale così allungato o raccorciato; ne risulterà per ciascun valore di m una doppia piramide o più acuta o più ottusa della fondamentale P; ciascuna di queste bipiramidi avrà pel rapporto dei suoi parametri $1 : 1 : ma$ in vece di $1 : 1 : a$ che apparteneva a P, e prenderemo conseguentemente mP per suo simbolo. In questa forma di doppia piramide di prima specie le faccie sono perpendicolari alle sezioni principali diagonali, e per conseguenza ugualmente inclinate sulle sezioni principali normali del sistema degli assi, onde potremo distinguere questa prima specie di doppie piramidi tetragonali dalle altre, che lo stesso sistema ci presenterà, col nome di *normali*. Poichè, come abbiamo detto, in queste forme m può essere > 1 o < 1, cosicchè i due limiti del suo valore sono o ed ∞, esse formano una serie, che si può rappresentare come segue :

$$oP \qquad \overset{m<1}{mP} \qquad P \qquad \overset{m>1}{mP} \qquad \infty P \qquad (1).$$

Chiameremo questa serie la *serie principale del sistema tetragonale*; il carattere comune di tutti i suoi membri è di avere la stessa base e disposizione di faccie che la forma fondamentale. I limiti di questa serie sono oP e ∞P. Il primo limite rappresenta una bipiramide tetragonale d'asse infinitamente piccolo, e della stessa base di P, cioè *questa base stessa*. L'ultimo limite è una bipiramide d'asse infinitamente lungo, e della stessa sezione trasversale, cioè un prisma tetragonale, ossia quadratico di lunghezza indefinita; non possono mostrarsi, nè l'una nè l'altra, queste due forme-limiti isolate, poichè non chiudono lo spazio, ma solamente in combinazione l'una coll'altra, o colle altre forme. Del resto si dee estendere la significazione del simbolo oP in maniera da rappresentare non solamente la base stessa, ma in generale ogni faccia parallela alla base. Quindi il segno di combinazione $\infty P . oP$ significa un prisma tetragonale con faccie perpendicolari alle sezioni principali diagonali del sistema, indeterminato per se stesso in lunghezza, ma terminato alle due estremità da faccie basiche.

La fig. 75 presenta questa forma, con entro inchiusa la bipiramide tetragonale primitiva da cui deriva, e da cui si passa a quella forma prismatica, allungando successivamente il semi-asse principale Oa, mentre si lasciano invariabili i semi-assi accessorii $O1$, onde risultano bipiramidi sempre più allungate.

Da ciascun membro mP della serie principale, si può derivare una serie di bipiramidi di-tetragonali, ossia ottogonali, o come alcuni le chiamano *di-ottaedri*, e una bipiramide tetragonale di cui le faccie sono perpendicolari alle sezioni principali

---

(1) Nel sistema di notazione di Weiss, il simbolo della bipiramide quadratica fondamentale sarebbe $(a : a : c)$, e quello di una bipiramide di questa prima specie $(a : a : mc)$. È facile seguire l'analogia di tale notazione per le altre forme di questo sistema di cristallizzazione, delle quali si parla qui appresso.

normali, e ugualmente inclinate alle sezioni principali diagonali, il che forma una *seconda specie* di bipiramidi tetragonali, ossia ottaedri, che questo sistema ci presenta. Non si ha per questo che ad allungare l' uno degli assi accessorii di mP secondo un coefficiente razionale qualunque n maggiore dell'unità, e applicar piani ai parametri ma, n, ed 1, e ciò ugualmente per amendue gli assi accessorii scambiati tra loro, poichè questi assi hanno nel sistema lo stesso valore. Il segno della bipiramide di-tetragonale così prodotta è mPn. Siccome n può prendere tutti i valori razionali da 1 a ∞, si ottiene così da ciascun membro mP della serie principale un numero infinito di bipiramidi di-tetragonali, che formeranno la serie

$$mP \ldots\ldots mPn \ldots\ldots mP\infty .$$

Per $n=1$ la base di-tetragonale si riduce di nuovo alla base quadrata della forma fondamentale, e la bipiramide diviene semplicemente la bipiramide quadratica normale mP; per $n=\infty$ al contrario questa base della bipiramide diviene il quadrato regolarmente circoscritto a quella. In conseguenza i limiti di questa serie sono da una parte la bipiramide normale mP, dall' altra di nuovo una bipiramide tetragonale $mP\infty$ dello stesso asse che mP, ma di specie diversa, per la posizione delle sue faccie, come abbiamo annunziato, e che possiamo indicare col nome di *bipiramide tetragonale diagonale*, perchè ha le sue faccie ugualmente inclinate sulle sezioni principali diagonali del sistema, come la prima specie le ha ugualmente inclinate sulle sezioni principali normali. La fig. 76 rappresenta le figure che prende successivamente la base di queste bipiramidi, dalla forma quadrata 1 1 1 1 che è quella corrispondente a mP, ossia alla bipiramide tetragonale normale, passando alla forma ottogona $1\ a\ 1\ a\ 1\ a\ 1\ a$, per l'applicazione dei piani di cui $1\ an$, $1\ an$ ecc. rappresentano le sezioni colla base, il che corrisponde alla bipiramide ditetragonale; e quindi alla forma di nuovo quadrata coi lati perpendicolari agli assi 1' 1' 1' 1', per l' applicazione delle faccie di cui $\infty\ 1\ \infty$, $\infty\ 1\ \infty$ ecc. rappresentano le sezioni colla base, onde risulta la bipiramide tetragonale diagonale. Si osserverà che i triangoli che

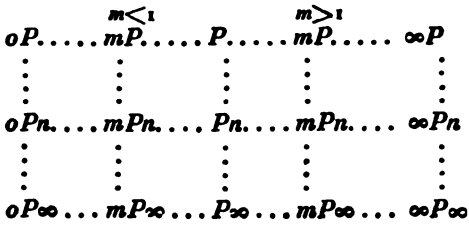
formano le faccie delle bipiramidi ditetragonali comprese tra i due limiti indicati non possono essere isosceli, sebbene lo siano quelli che appartengono alle due forme-limiti tetragonali, onde queste bipiramidi non possono divenire bipiramidi ottangolari regolari.

Siccome poi, come abbiamo detto, da ciascun membro della serie principale si può derivare la serie or ora indicata, così anche da ∞P, ossia dal prisma tetragonale che è il limite delle piramidi tetragonali mP, si dedurrà una serie analoga che sarà di questa forma

$$\infty P \ldots\ldots \infty P n \ldots\ldots \infty P\infty .$$

Tutti i membri di questa serie, all' eccezione dei due estremi, sono *prismi ditetragoni*, ossia ottangolari di diverse sezioni trasversali, secondo i diversi valori di n, mentre da una parte il prisma stesso tetragonale ∞P, che distingueremo pure col nome di *normale*, e dall' altra ancora un prisma tetragonale, ma con faccie perpendicolari agli assi, e ugualmente inclinate sulle sezioni principali diagonali, e a base quadrata circoscritta a quella di ∞P, formano i limiti della serie; indicheremo anche quest' ultimo prisma col nome di *prisma tetragonale diagonale*. Del resto niuno di questi prismi può formare isolatamente una forma chiusa, senza la combinazione di altre faccie inclinate o perpendicolari all' asse principale. La fig. 77 rappresenta uno di questi prismi di-tetragonali terminato da basi piane, con entro una delle bipiramidi ottogonali di base con esso comune, e da cui si può concepire che esso si formi per l' allungamento de' suoi assi principali all' infinito. Si osserverà poi che il prisma ottangolare regolare, come forma semplice, è impossibile, non meno che la bipiramide ottangolare regolare. A dir vero la combinazione $\infty P . \infty P\infty$, cioe dei due prismi tetragonali, *normale*, e *diagonale*, presenta un prisma ottangolare a angoli uguali, e che può anche accidentalmente, cioè quando le due forme combinate si suppongano d' ugual estensione, aver i lati uguali; ma le faccie di questo prisma hanno una situazione ben diversa relativamente agli assi, che le faccie del prisma ottangolare a angoli uguali, che potrebbe derivarsi da ∞P per mezzo di un coefficiente n irrazionale.

Le forme di cui abbiamo parlato esauriscono tutto il sistema tetragonale oloedrico ; se ne può rappresentare il complesso colla figura o schema seguente , combinando le serie delle bipiramidi ditetragonali colla serie principale.



La prima serie orizzontale di questa figura è la serie principale; si può distinguere l' ultima serie col nome di *serie accessoria*, e le serie comprese tra quelle, e di cui ve ne possono essere tante quanti valori razionali si vogliono dare ad *n*, con quello di *serie intermedie.* Ciascuna serie verticale comprende forme di ugual lunghezza d' asse , e della stessa sezione normale.

Le faccie di tutte queste forme possono appartenere a diverse zone parallele a diverse linee della forma fondamentale; così le faccie laterali dei prismi quadrangolari , od ottangolari formano zone, che hanno per asse l'asse principale del sistema, e che si distinguono col nome di *zone orizzontali* ; le forme in cui $n=\infty$ appartengono a zone, che hanno per assi gli assi accessorii , e che sono esse medesime disposte verticalmente , epperciò diconsi *zone verticali.*

183. Passiamo alle forme emiedriche di questo sistema. La bipiramide ditetragonale di cui il simbolo è *mPn* essendo il rappresentante il più generale di tutte le forme oloedriche del medesimo , a quella debbono riferirsi dapprima tutte le modificazioni emiedriche , per particolarizzarle quindi relativamente alle diverse forme. Per determinare le diverse specie di modificazioni emiedriche di questa bipiramide di-tetragonale , indicheremo col nome di *membro* di questa forma , ciascun quaternario di faccie compreso nello stesso quadrante della base , ossia in due ottanti , superiore , e inferiore , del sistema degli assi coordinati. L' emiedria non si presenta nei cristalli di

questo sistema, che in ciascun membro separatamente, cioè per soppressione alternativa di faccie comprese in uno stesso membro, e così nelle tre maniere seguenti: *a.* per soppressione alternativa delle paia di faccie superiori e inferiori dei diversi membri, come nella fig. 78 n. 1, ove le paia di faccie soppresse si sono lasciate in bianco; *b.* per la soppressione alternativa delle paia a destra o a sinistra dei diversi membri, come nella stessa figura n. 2; *c.* per la soppressione in ciascun membro di una delle faccie superiori a destra, ed una delle faccie inferiori a sinistra o reciprocamente, e così alternativamente da un membro all' altro, come nella stessa figura n. 3.

Secondo i diversi risultati o forme emiedriche che queste tre sorta di emiedria producono, e che passiamo ad esaminare, chiameremo la prima emiedria *scalenoedrica*, o *sfenoidica*, la seconda *piramidale*, la terza *trapezoidica*.

a. Emiedria scalenoedrica o sfenoidica. Il risultato di questa emiedria applicata al caso generale, è una forma emiedrica a faccie non parallele due a due, che chiameremo *scalenoedro tetragonale*. Questa forma è terminata da 8 triangoli scaleni, di cui gli spigoli di mezzo ossia trasversali, non sono posti in uno stesso piano, ma ascendono e discendono in *zig-zag*, come si vede nella fig. 79 che rappresenta una di queste forme, in *abcd*; gli assi accessorii $O1$ riuniscono in questa forma i punti di mezzo di tali spigoli tra gli angoli a, b, c, d, opposti due a due. In fatti nel n. 1 della figura precedente che rappresenta questa prima specie di emiedria, si vede che per la soppressione delle paia di faccie lasciate in bianco, e l' ampliazione delle altre sino alla loro mutua intersezione, gli spigoli di mezzo orizzontali scompaiono, e la faccia A per esempio viene a tagliare la faccia B, prolungandosi l' una e l' altra, in uno spigolo che non sarà più orizzontale; ed è facile vedere che gli spigoli alterni così formati saranno posti in piani tra loro diversi, cosicchè la forma che ne risulterà, avuto anche riguardo alle altre intersezioni, sarà quale l' abbiamo indicata. Il simbolo di questo scalenoedro è in generale $\frac{mPn}{2}$; tuttavia ciascuna bipiramide ditetragonale dà due corpi opposti uguali e simili in posizione inversa, scambiando tra loro le paia di faccie

che si sopprimono, o che si lasciano sussistere, corpi che saranno distinti tra loro nel simbolo dai segni + o —.

Nel caso particolare in cui $n=1$, cioè in cui la forma oloedrica a cui si applica l'emiedria, è la piramide tetragonale in vece della ditetragonale, ciascun paio di faccie di questa, che abbiamo considerato in questa prima specie d'emiedria, sarà ridotto ad una sola faccia che scomparirà, e si prolungherà alternativamente, ed è facile vedere che ne risulterà una forma terminata da quattro triangoli isosceli, e così un tetraedro che si potrebbe chiamare *isoscelico*, ma che per esprimere la sua forma di conio con una sola parola, e per indicare nello stesso tempo la sua dipendenza dal sistema cristallino di cui qui parliamo, si è detto *sfenoide tetragonale*. Due degli spigoli di questo tetraedro, o sfenoide si trovano attraversare perpendicolarmente l'asse principale alle due estremità, ciascuno parallelamente ad uno degli assi intermedii; l'asse principale riunisce i due punti di mezzo di quegli spigoli. Gli altri quattro spigoli del tetraedro riuniscono le estremità dei due primi, ascendendo, e discendendo attorno all'asse principale, e avendo i loro punti di mezzo riuniti due a due dagli assi secondarii; V. fig. 80, ove *ab*, *cd* sono i due spigoli terminali riuniti tra loro nei loro punti di mezzo dall'asse principale *mOm*, e paralleli agli assi intermedii *ef*, *gh*, e gli altri quattro spigoli *ac*, *ad*, *bd*, *bc* riuniscono le estremità dei due primi, e sono riuniti essi medesimi due a due pei loro punti di mezzo dagli assi secondarii $1O1$, $1O1$.

Questo sfenoide tetragonale non è propriamente se non la forma-limite dello scalenoedro, corrispondente a $n=1$. Se si prende al contrario $n=\infty$, la bipiramide di-tetragonale, alla quale avevamo dapprima applicata l'emiedria di cui si tratta, si cangia in una bipiramide tetragonale della serie accessoria $mP\infty$, cioè in una bipiramide tetragonale diagonale; e se si applica a questa la stessa legge di emiedria, non si cangia nulla alla sua forma, che resta sempre $mP\infty$, e ciò perchè le paia di faccie che dovrebbero sopprimersi non esistono nella bipiramide tetragonale della serie accessoria, se non come prolungamenti delle faccie che debbono restare, e che si dovrebbero ugualmente prolungare, per produrre l'emiedria, al

dissopra di quelle da sopprimersi. Così la bipiramide della serie accessoria, ossia della specie che abbiamo chiamata diagonale, tanto è limite dello scalenoedro come forma emiedrica, quanto lo è della bipiramide ditetragonale, come forma oloedrica, e può entrare per conseguenza come forma emiedrica nelle combinazioni con altre forme emiedriche, del genere di cui qui parliamo, non altrimenti che nelle combinazioni oloedriche. Quanto alle forme ∞Pn, ∞P, e $\infty P\infty$, cioè ai prismi di-tetragonale, tetragonale normale, e tetragonale diagonale, la legge dell' emiedria scalenoedrica vi è pure senza influenza; le apparenze di questi prismi non ne subiscono alcun cangiamento, le paia di faccie o le faccie che dovrebbero essere soppresse nella parte superiore delle bipiramidi, di cui essi son limiti, confondendosi coi prolungamenti delle paia di faccie o delle faccie che dovrebbero sussistere nella parte inferiore alla base, e reciprocamente; tuttavia bisogna osservare che le paia di faccie alterne di ∞Pn, cioè del prisma ditetragonale, e le faccie alterne di ∞P, cioè del prisma tetragonale normale, ottengono con ciò una significazione diversa, dovendo essere così riferite le une alla parte superiore, le altre all' inferiore della base del sistema che vi si può concepire; quest' osservazione può avere in certi casi qualche importanza per la teoria.

Si può qui notare che lo scalenoedro che abbiamo derivato immediatamente per emiedria dalla bipiramide ditetragonale, può anche dedursi da uno sfenoide, derivato esso medesimo da una bipiramide tetragonale particolare normale. Per questo si osserverà primieramente, che gli spigoli del mezzo, ossia trasversali in *zig-zag* di qualunque scalenoedro $\frac{mPn}{2}$ dedotto per emiedria scalenoedrica dalla bipiramide di-tetragonale mPn, possono essere considerati anche come quelli d' uno sfenoide che si può chiamare *iscritto* a questo scalenoedro, come si vede nella fig. 79 già citata, ove gli spigoli trasversali dello scalenoedro essendo ab, bc, cd, da, basta riunire gli angoli solidi a, c tra loro, e b, d tra loro, con linee ac, bd che passino per l' interno dello scalenoedro, per avere un tetraedro, o sfenoide iscritto $acbd$, di cui ac, bd sono gli spigoli

terminali. Per trovare la lunghezza del semi-asse principale di questo sfenoide iscritto allo scalenoedro $\frac{mPn}{2}$, e che è necessariamente diverso da quello che avesse lo stesso semi-asse principale *am* dello scalenoedro di cui si tratta, si osserverà che siccome in ogni sfenoide la distanza degli angoli solidi dalla base del sistema, ossia dal piano degli assi secondarii, che è quanto dire la distanza di ciascuno dei due spigoli terminali da questo piano, è uguale al semi-asse principale, non si tratta, per determinare questo semi-asse, che di conoscere la distanza degli angoli solidi dello scalenoedro proposto, che divengono pur quelli dello sfenoide iscritto, da questo stesso piano degli assi secondarii. Ora si trova, per mezzo delle equazioni nello spazio, degli spigoli che formano colla loro intersezione questi angoli solidi, che tale distanza ha per valore $\frac{ma}{n}$; questo sarà dunque il semi-asse principale dello sfenoide iscritto allo scalenoedro $\frac{mPn}{2}$, mentre il suo semi-asse secondario sarà l'unità, secondo il carattere dello sfenoide. Se dunque si considera ora questo sfenoide iscritto come la forma fondamentale del sistema a cui si voglia riferire lo scalenoedro, nel modo che una bipiramide tetragonale si riferisce alla bipiramide fondamentale del sistema, il simbolo dello scalenoedro diverrà $n\left(\frac{\frac{m}{n}P}{2}\right)$, comprendendo tra le parentesi il simbolo primitivo della forma che si vuol ora considerare come fondamentale, onde per passare dallo sfenoide iscritto allo scalenoedro, basterà moltiplicare l'asse principale dello sfenoide per n, e applicare quindi ai suoi spigoli laterali faccie che vadano a toccare, al dissopra e al dissotto, l'asse principale così prolungato. Se dunque si volesse prendere per forma fondamentale $\frac{m'P}{2}$ semplicemente, cioè lo sfenoide che avesse per semi-asse principale $m'a$, e sempre per semi-asse secondario l'unità, il simbolo dello scalenoedro diverrebbe $n\left(\frac{m'P}{2}\right)$, che si può scrivere $m'S^n$, o semplicemente

mS^n, la lettera n posta a guisa d'esponente sulla lettera S indicando che si intende per S l'emiedria scalenoedrica della forma fondamentale di tutto il sistema (emiedria che nella notazione primitiva avrebbe per simbolo $\frac{P}{2}$) e che bisogna moltiplicare per n il coefficiente m dello sfenoide, che se ne fosse derivato. Se in questo simbolo mS^n si fa $n = 1$, mS sarà il simbolo dello sfenoide medesimo, di cui il simbolo primario relativamente alla forma fondamentale del sistema era $\frac{mP}{2}$. In questi simboli secondarii mS^n e mS dello scalenoedro, e dello sfenoide, m ed n possono del resto prendere tutti i valori razionali da o sino all'∞, come nei simboli primitivi; questi simboli dovranno poi essere affetti dai segni + o — al solito, per indicare la posizione diversa di tali forme emiedriche.

b. Emiedria piramidale. Questa porzione dell'emiedria del sistema tetragonale non dà che una sola specie di forma, che è una *terza specie* di bipiramide tetragona, e che per la posizione variabile delle sue faccie, intermedia tra quelle della bipiramide normale, e quelle della bipiramide diagonale, può chiamarsi *bipiramide tetragonale anormale*. Essa si fa, come abbiamo detto, per la soppressione ed ampliazione delle paia alternative di faccie aggiacenti ad uno stesso spigolo trasversale della bipiramide ditetragonale; ed è chiaro che dee risultarne una doppia piramide avente ancora lo stesso piano per base comune, ma quadrilatera soltanto, e di cui tuttavia la posizione delle faccie non sarà quella nè delle faccie della bipiramide normale, nè della bipiramide diagonale, ma quella intermedia che avevano le faccie della bipiramide ditetragonale che si sono conservate e ampliate, e che dipende dal coefficiente n dei parametri di quelle faccie. Così se il quadrato *aaaa*, fig. 81, rappresenta la base comune della doppia piramide tetragonale normale, di cui gli assi secondarii del sistema formano le diagonali, *bbbb*, che è il quadrato regolarmente circoscritto a quello, sarà la base della bipiramide tetragonale diagonale, e *cccc*, quadrato irregolarmente circoscritto al primo, sarà la base della bipiramide tetragonale anormale di cui si tratta. Ora perchè questa emiedria lascia

sussistere la forma di doppia piramide a base piana comune, si è essa indicata col nome di *emiedria piramidale*.

Del resto anche questa specie di emiedria può esercitarsi su paia di faccie diverse, per esempio conservando quelle che sono a destra in uno dei quadranti della base che si rivolga verso l'osservatore, e sopprimendo le altre due, o viceversa; ma siccome tutte queste paia di faccie sono simmetricamente poste relativamente all' asse principale, non ne risultano realmente due forme emiedriche diverse, la parte che è a destra passando a sinistra, e viceversa, col solo rovesciamento nella posizione dell' asse principale, onde il simbolo di questa forma emiedrica sarà sempre $\frac{mPn}{2}$, o se si vuole $\left[\frac{mPn}{2}\right]$ per distinguerla dallo scalenoedro.

Per $n=1$ quest' emiedria ci fa ricadere nella stessa forma mP oloedrica che le corrisponderebbe, cioè nella bipiramide tetragonale normale con tutte le sue faccie, e per $n=\infty$ nella bipiramide tetragonale diagonale, poichè le faccie che dovrebbero sopprimersi non sono in queste due forme che la continuazione di quelle che si lascierebbero sussistere. Lo stesso si dica dei prismi corrispondenti che hanno luogo quando inoltre $m=\infty$. Così queste forme possono considerarsi indifferentemente come oloedriche, o come emiedriche, e come tali entrare nelle combinazioni di forme.

c. Emiedria trapezoedrica. Il risultato di questa specie di emiedria che si esercita sulle faccie alternative isolate della bipiramide ditetragonale, come abbiamo detto, è una forma che chiameremo *trapezoedro tetragonale*. Essa è rinchiusa da 8 trapezoidi isosceli; i suoi spigoli *mediali*, ossia trasversali all'asse principale, non sono posti in un piano, ma in *zig-zag*, come si vede nella fig. 82. Gli assi accessorii $1O1$ riuniscono i punti di mezzo degli spigoli mediali alternativi *bc*, *de*, *fg*, *ha*; chiameremo questi spigoli mediali *normali*, e gli altri spigoli mediali *cd*, *ef*, *gh*, *ab*, *diagonali*; gli spigoli che si riuniscono alle due estremità dell'asse principale, cioè *mb*, *md*, *mf*, *mh*, *m'a*, *m'c*, *m'e*, *m'g*, si diranno al solito spigoli *polari*. Per concepir la derivazione di questa forma per emiedria dalla bipiramide ditetragonale, si dee

osservare che ciascuna faccia di questa ha tre faccie *attigue*, cioè in contatto con essa pei suoi tre lati, e 4 faccie *alterne* con queste, e che non la toccano che pei loro angoli piani; per esempio nella figura 78, n. 3, la faccia A ha attigue le tre faccie B, B', B'', e alterne le faccie A', A'', A''', e una quarta faccia A^{IV}, che è quella attigua alla faccia B, e che si trova nella parte posteriore non rappresentata nella figura. Quando adunque le faccie attigue svaniscono, e le alterne crescono colla prima faccia stessa A, questa subirà dopo l' ampliazione quattro intersezioni, e diverrà così una figura quadrilatera; ed è facile vedere che queste intersezioni formeranno due spigoli polari uguali tra loro, e due spigoli mediali, ossia trasversali disuguali, cosicchè la figura di ciascuna faccia sarà un trapezoide isoscele. Si concepisce anche che gli spigoli mediali non saranno più in uno stesso piano, ma alternativamente ascendenti e discendenti, il che dà la forma indicata del trapezoedro tetragonale.

Ciascuna bipiramide ditetragonale può dare per questa emiedria, due trapezoedri che nei loro elementi di limitazione sono perfettamente uguali e simili, ma per riguardo alla maniera in cui sono riuniti, si distinguono per una relazione a destra, o a sinistra, secondo che si sarà soppressa o ritenuta in uno degli ottanti la faccia a sinistra o a destra, il che indicheremo preponendo al loro simbolo le lettere d, e s; nè questi due corpi possono farsi coincidere, se non rovesciandone uno come un guanto, e rendendone così esteriore la superficie interiore, in vece che la bipiramide tetragonale anormale, risultante dall' emiedria piramidale, non offre realmente che una forma sola, come abbiamo detto, a questo riguardo.

Del resto il trapezoedro tetragonale non si è trovato ancora esistente d' una maniera certa in natura.

Si potrebbero forse distinguere le tre specie di emiedria qui sopra indicate colla diversa posizione di punti che si porrebbero avanti al divisore 2, e che imiterebbe quella delle paia di faccie che vi si sopprimono, o si estendono; così il segno $\pm \frac{mPn}{..2}$ indicherebbe lo scalenoedro, $\frac{mPn}{:2}$ la bipiramide te-

tragonale anormale, e $\frac{mPn}{\cdot'2}$, $\frac{mPn}{'\cdot2}$ i trapezoedri destro, e sinistro.

Per $n=\infty$ il trapezoedro si cangia nel prisma ditetragonale ∞Pn, di cui tuttavia le faccie alternative debbono allora essere riferite alle metà opposte dell' asse principale, cosicchè quattro fanno funzioni di superiori, e quattro d' inferiori, e sotto tale aspetto questo prisma può considerarsi come forma emiedrica. Per $n=1$ risulta la bipiramide tetragonale normale mP colle sue otto faccie compiute; e così anche per $n=\infty$, risulta la bipiramide diagonale compiuta $mP\infty$, l' emiedria non potendo qui produrre il suo effetto, per la stessa ragione che in altri casi analoghi. In generale adunque nell' emiedria trapezoedrica del sistema tetragonale, le forme della serie principale, e della serie accessoria si mantengono compiute, le bipiramidi di-tetragonali si mostrano come trapezoedri, e i prismi di-tetragonali di nuovo sotto la lor forma compiuta.

Si noterà poi in complesso sulle forme emiedriche di questo sistema, che la bipiramide tetragonale anormale è la sola che abbia le faccie parallele due a due come le forme oloedriche.

B. *Calcolo delle forme del sistema tetragonale.*

184. Questo calcolo si dee stabilire prima relativamente alle forme oloedriche, poi alle emiedriche nelle loro tre divisioni separatamente; e sempre fondandolo sulla forma che si dee considerare come il loro rappresentante generale.

Cominciamo dal calcolo delle forme oloedriche. Il rappresentante generale di queste forme è la bipiramide di-tetragonale mPn; di essa dobbiamo adunque occuparci per dedurne quindi quello che appartiene alle altre forme oloedriche.

E primieramente la lunghezza degli assi intermedii si determina nella stessa maniera affatto, che quella degli assi intermedii quadranziali nel sistema regolare. Il rapporto dei parametri in qualunque bipiramide di-tetragonale essendo $ma : n : 1$, l'equazione d'una F delle due faccie situate nell'ottante dei semi-assi positivi, prendendo l'asse delle x sull'asse principale, e quelli delle y, z sugli accessorii, sarà $\frac{x}{ma} + \frac{y}{n} + z = 1$; le equazioni

del semi-asse intermedio situato nello stesso ottante, sono $x=0$, $y-z=0$; combinandole con quella della faccia F, si trovano i valori delle coordinate del suo punto estremo, cioè del vertice dell' angolo solido mediale ossia laterale, che gli corrisponde, $x=0$, $y=z=\frac{n}{n+1}$, e quindi la lunghezza di questo semi-asse $R=\frac{n\sqrt{2}}{n+1}$.

Per $n=1$, ossia per la bipiramide tetragonale normale mP, si ha per conseguenza $R=\sqrt{\frac{1}{2}}$, e se si riguarda questo valore come il valore fondamentale degli assi intermedii di tutte le forme, il coefficiente richiesto per ottenerne quello d'una bipiramide mP_n qualunque, sarà $r=\frac{2n}{n+1}$, come per l'asse intermedio quadraziale nel sistema regolare relativamente a quello dell' ottaedro fondamentale.

Passiamo alla determinazione della lunghezza degli spigoli. Essi sono di tre sorta nella bipiramide di-tetragonale, di cui 16 polari, cioè che vanno dalla base ai poli ossia punte dell' asse principale, ma 8 di essi *polari normali* che vanno dalle estremità degli assi secondarii a quei poli, e 8 *polari diagonali* che vanno dalle estremità degli assi intermedii agli stessi poli; e 8 spigoli *mediali* o *trasversali*, che formano il contorno della base. Indichiamo nella fig. 83 uno degli spigoli polari normali con X, uno degli spigoli polari diagonali con Y, e uno degli spigoli trasversali con Z. I punti terminali di questi tre spigoli sono: (1) il vertice dell' angolo solido polare posto alla estremità dell' asse principale, di cui le coordinate sono, prendendo le x nella direzione dell' asse principale medesimo, $x=ma$, $y=0$, $z=0$; (2) il punto dell' angolo solido mediale, che è all' estremità dell' asse secondario, e che perciò chiameremo *normale*, di cui le coordinate sono, considerando per esempio quello che si trova sull' asse delle z, $x=0$, $y=0$, $z=1$; (3) il punto dell' angolo solido mediale posto alla estremità dell'asse intermedio, che chiameremo *diagonale*, e di cui le coordinate sono $x=0$, $y=\frac{n}{n+1}$, $z=\frac{n}{n+1}$.

Lo spigolo X è limitato dai punti (1) e (2), Y da (1) e (3), Z da (2) e (3). Quindi combinando le coordinate di questi punti due a due, secondo la regola conosciuta, si trova per la distanza tra loro, ossia per la lungezza degli spigoli,

$$X=\sqrt{m^2a^2+1},\quad Y=\frac{\sqrt{m^2a^2(n+1)^2+2n^2}}{n+1},\quad Z=\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}.$$

Si osserverà che per rendere lo spigolo X uguale ad Y, cioè per fare che i triangoli della bipiramide fossero isosceli, e per conseguenza questa divenisse una bipiramide ottangolare regolare, si richiederebbe, come si ricava uguagliando tra loro i valori trovati di X e Y, che $n=1+\sqrt{2}$, valore irrazionale, non ammessibile nel sistema della cristallizzazione, e che prova che questo caso, come già l' abbiamo annunziato, non può realizzarsi esattamente in natura. Questo ci fa vedere nello stesso tempo che lo spigolo X è più lungo o più corto di Y, secondo che n è minore o maggiore di $1+\sqrt{2}$, cioè di 2,414....

Gli angoli piani delle faccie della bipiramide di-tetragonale sono pure di tre specie; indicheremo con ξ, ν, ζ quelli rispettivamente opposti in una qualunque delle faccie agli spigoli X, Y, Z. Se si cercano, per mezzo della combinazione delle equazioni delle linee degli spigoli, nella maniera che già si è adoperata pel sistema precedente, i cosseni di questi angoli, che sono formati dalle loro intersezioni due a due, e se ne deducono quindi i seni, e finalmente si dividono i seni pei cosseni, si troveranno per le loro tangenti, che ne sono le funzioni più comode per l' uso, le espressioni

$$\text{tang}\,\xi=\frac{M(n+1)}{n(n-1)},\quad \text{tang}\,\nu=M,\quad \text{tang}\,\zeta=\frac{M}{m^2a^2(n+1)+n},$$

ove si è fatto per abbreviare $\sqrt{m^2a^2(n^2+1)+n^2}=M$.

Per determinare ora gli angoli degli spigoli della bipiramide di-tetragonale, osserveremo, che se si prende $\frac{x}{ma}+\frac{y}{n}+z=1$, come sopra, per l' equazione di una delle faccie che indiche-

remo con F, quelle delle tre faccie F', F'', F''' che formano con F gli spigoli X, Y, Z, saranno

$$\frac{x}{ma} - \frac{y}{n} + z = 1\,, \quad \frac{x}{ma} + y + \frac{z}{n} = 1\,, \quad -\frac{x}{ma} + \frac{y}{n} + z = 1\,.$$

Se si combinano i parametri dell' equazione di F successivamente coi parametri di queste tre equazioni, secondo la formola per trovare i cosseni degli angoli di inclinazione dei piani, di cui le equazioni sono date, si trova

$$\cos X = -\frac{m^2a^2(n^2-1)+n^2}{m^2a^2(n^2+1)+n^2}\,, \quad \cos Y = -\frac{n(2m^2a^2+n)}{m^2a^2(n^2+1)+n^2}\,,$$

$$\cos Z = -\frac{m^2a^2(n^2+1)-n^2}{m^2a^2(n^2+1)+n^2}\,.$$

I cosseni delle metà di questi angoli sono quindi, come si deduce dalla relazione conosciuta fra il cosseno d' un arco, e quello della sua metà,

$$\cos\frac{1}{2}X = \frac{ma}{M}\,, \quad \cos\frac{1}{2}Y = \frac{ma(n-1)}{M\sqrt{2}}\,, \quad \cos\frac{1}{2}Z = \frac{n}{M}\,,$$

M ritenendo il valore di sopra; da queste espressioni si deducono le proporzioni

$$\cos\frac{1}{2}X : \cos\frac{1}{2}Z :: ma : n\,; \quad \cos\frac{1}{2}Y : \cos\frac{1}{2}Z :: ma(n-1) : n\sqrt{2}\,;$$

$$\cos\frac{1}{2}X : \cos\frac{1}{2}Y :: \sqrt{2} : n-1\,.$$

Ne risulta che per ottenere ang. X= ang. Y, si richiederebbe che $n = 1+\sqrt{2}$, cioè la stessa condizione, impossibile nella cristallizzazione, che si è già trovata per l' uguaglianza di lunghezza di questi spigoli X e Y, ossia perchè la bipiramide di cui si

tratta divenisse ottangolare regolare, come ciò dovea essere.

Si ottengono pure per le tangenti delle stesse metà degli angoli, le espressioni

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}X=\frac{n\sqrt{m^2a^2+1}}{ma},\quad \text{tang}\,\frac{1}{2}Y=\frac{\sqrt{m^2a^2(n+1)^2+2n^2}}{ma(n-1)},$$

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}Z=\frac{ma\sqrt{n^2+1}}{n}.$$

Da queste formole per le bipiramidi di-tetragonali mPn si possono dedurre, come abbiamo annunziato, quelle corrispondenti relative alle altre forme oloedriche. E in primo luogo pei prismi di-tetragonali ∞Pn, se si fa nelle formole precedenti $m=\infty$, si ottengono le espressioni seguenti:

$r=\frac{2n}{n+1}$, pel coefficiente dell' asse intermedio;

$$\cos X=-\frac{n^2-1}{n^2+1},\quad \cos Y=-\frac{2n}{n^2+1},\quad \cos Z=-1$$

per gli angoli degli spigoli; l' espressione di cos Z ci dà l' angolo di questo spigolo, di 180°, cioè l'annullamento dello spigolo stesso, che ha luogo infatti nel prisma.

Per la bipiramide tetragonale normale mP, bisogna fare $n=1$ nelle formole della bipiramide di-tetragonale. Si ottengono così le espressioni corrispondenti, come segue:

Pel coefficiente dell' asse intermedio, $r=1$, come ciò dee essere, poichè abbiamo preso l' asse intermedio di questa forma per l' unità di quelli delle altre.

Per le lunghezze degli spigoli,

$$X=\sqrt{m^2a^2+1},\quad Y=\sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot\sqrt{2m^2a^2+1},\quad 2Z=\sqrt{2};$$

la linea Z che diverrebbe qui $\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}}$ non è che la metà

dello spigolo mediale della bipiramide tetragonale, il quale risulta dall' unione due a due degli spigoli della bipiramide di-tetragonale, epperciò si indica qui il valore di $2Z$ che è quello dello spigolo intiero. Quanto agli altri due spigoli si osserva che gli spigoli Y svaniscono come tali, e Y significa qui solamente la linea d' altezza del triangolo isoscele di mP.

Per gli angoli piani delle faccie:

$$\text{tang}\,\xi = \infty\,, \text{ e per conseguenza } \xi = 90^\circ\,,$$

$$\text{tang}\,v = \sqrt{2m^2a^2+1}\,, \quad \text{tang}\,2\zeta = \frac{\sqrt{2m^2a^2+1}}{m^2a^2};$$

l' angolo piano polare essendo qui formato dalla riunione di due angoli ζ, per la disparizione dello spigolo Y.

Per gli angoli degli spigoli:

$$\cos X = -\frac{1}{2m^2a^2+1}\,,$$

$\cos Y = -1$, e quindi ang. $Y = 180^\circ$, cioè annullamento dello spig.

$$\cos Z = -\frac{2m^2a^2-1}{2m^2a^2+1}\,.$$

Da questi valori si può dedurre $\cos\frac{1}{2}X : \cos\frac{1}{2}Z :: ma : 1$;

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}X = \frac{\sqrt{m^2a^2+1}}{ma}\,, \quad \text{tang}\,\frac{1}{2}Z = ma\sqrt{2}.$$

Si otterranno le espressioni corrispondenti per la bipiramide tetragonale diagonale $mP\infty$, facendo $n=\infty$ nelle formole generali per mPn, come segue:

Coefficiente dell' asse intermedio, $r=2$;

Linee degli spigoli,

$$X = \sqrt{m^2a^2+1}\,, \quad Y = \sqrt{m^2a^2+2}\,, \quad 2Z = 2\,;$$

la linea Z è anche qui la metà della linea intiera dello spigolo trasversale, il quale è formato dalla riunione di due spigoli di mPn. La linea dello spigolo X svanisce come tale, e significa qui solamente la linea d' altezza del triangolo isoscele di $mP\infty$, per la riunione delle faccie che la formavano, in un sol piano;

Angoli piani delle faccie:

$$\text{tang}\,\xi = \sqrt{m^2a^2+1}\,;$$

tang $\nu=\infty$, e quindi $\nu=90^\circ$, conseguentemente alla coincidenza delle linee degli spigoli Z due a due in una linea retta nel vertice di quest'angolo;

$$\text{tang}\,2\zeta = \frac{2\sqrt{m^2a^2+1}}{m^2a^2}\,,$$ ove 2ζ è l'angolo piano intiero al polo della bipiramide, formato dalla somma degli angoli ζ di due faccie che si riuniscono in un sol piano.

Angoli degli spigoli:

cos $X=-1$, onde ang. $X=180^\circ$, come ciò dee essere per la disparizione indicata dello spigolo X;

$$\cos Y = -\frac{1}{m^2a^2+1}\,,\quad \cos Z = -\frac{m^2a^2-1}{m^2a^2+1}\,.$$

Se ne deduce ancora $\cos\frac{1}{2}Y : \cos\frac{1}{2}Z :: ma : \sqrt{2}$;

$$\text{e tang}\,\frac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{m^2a^2+2}}{ma}\,;\quad \text{tang}\,\frac{1}{2}Z = ma.$$

Tutte le formole precedenti possono anche servire, mediante le convenienti inversioni e combinazioni, al calcolo inverso, cioè dei coefficienti di derivazione supposti ignoti, per mezzo degli angoli piani, e degli angoli diedri, e lunghezze di spigoli osservati in un cristallo appartenente a questo sistema, e che ne presenti una forma oloedrica; ma ci dispensiamo dall'entrare nelle particolarità di questo calcolo, per la ragione allegata a tale riguardo relativamente al sistema regolare.

185. Passiamo al calcolo delle forme emiedriche.

a. Calcolo dello scalenoedro tetragonale. Indicheremo per ciascuno scalenoedro $\pm\frac{mPn}{2}$ (fig. 84), lo spigolo polare più lungo con Y, lo spigolo polare più corto con X, e lo spigolo mediale con Z. Segniamo inoltre la faccia posta nell'ottante dei semi-assi positivi con F, e le tre faccie che formano con quella gli spigoli Y, X, Z, con F', F'', F'''; finalmente gli angoli piani della faccia F opposti agli spigoli Y, X, Z, con ν, ξ, ζ.

Supponiamo ora che l' equazione del piano della faccia F sia $\frac{x}{ma}+\frac{y}{n}+z=1$; si avrà per F' l'equazione $\frac{x}{ma}+y+\frac{z}{n}=1$, per F'' l'equazione $\frac{x}{ma}-y-\frac{z}{n}=1$, e per F''' l' equazione $-\frac{x}{ma}-\frac{y}{n}+z=1$.

Risultano inoltre dalle combinazioni successive delle equazioni di F e F', F e F'', F e F''', le equazioni delle linee degli spigoli,

per Y, $\frac{x}{ma}+\frac{(n+1)y}{n}=1$, $y-z=0$;

per X, $\frac{x}{ma}-\frac{(n-1)y}{n}=1$, $y+z=0$;

per Z, $\frac{x}{ma}+\frac{y}{n}=0$, $z=1$.

Gli spigoli polari cadono così nei piani delle sezioni principali diagonali, e gli spigoli mediali sono paralleli alle sezioni principali normali.

Finalmente si deducono dalla combinazione successiva delle equazioni di Y e X con quelle di Z, i valori delle coordinate dei punti dei due angoli solidi mediali, che sono pure gli apici degli angoli piani ξ, ν, cioè:

per l' angolo solido in ξ, $x=-\frac{ma}{n}$, $y=1$, $z=1$;

e per l'angolo solido in ν, $x=\frac{ma}{n}$, $y=-1$, $z=1$.

La distanza dei punti degli angoli solidi mediali all' asse è dunque costante in tutti gli scalenoedri, poichè i coefficienti m, n non entrano nei valori di y, z da cui essa dipende, e questa distanza è uguale a $\sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{2}$.

Ciò posto si potranno risolvere, per gli scalenoedri, i problemi diversi ad essi relativi, come segue:

Il coefficiente degli assi intermedii ritiene il suo valore originario, cioè quello della forma oloedrica, $r = \frac{2n}{n+1}$;

Pel calcolo della lunghezza degli spigoli si osserverà che i tre angoli solidi che limitano queste linee nella faccia F hanno per coordinate,

(1) l'angolo solido polare, $x = ma$, $y = 0$, $z = 0$;

(2) l'angolo solido mediale inferiore, $x = -\frac{ma}{n}$, $y = 1$, $z = 1$;

(3) l'angolo solido mediale superiore, $x = \frac{ma}{n}$, $y = -1$, $z = 1$.

Lo spigolo Y è limitato dai punti (1) e (2); lo spigolo X da (1) e (3); e lo spigolo Z da (2) e (3). Quindi si trova colle note formole

$$Y = \frac{\sqrt{m^2a^2(n+1)^2+2n^2}}{n}, \quad X = \frac{\sqrt{m^2a^2(n-1)^2+2n^2}}{n},$$

$$Z = \frac{2\sqrt{m^2a^2+n^2}}{n}.$$

I cosseni degli angoli piani delle faccie si trovano per mezzo delle indicate equazioni delle linee degli spigoli, di cui formano le intersezioni; se ne deducono quindi i seni, e in seguito le tangenti che si trovano essere:

$$\text{tang}\,\xi = \frac{Mn}{m^2a^2(n+1)+n^2}, \quad \text{tang}\,\upsilon = \frac{Mn}{m^2a^2(n-1)-n^2},$$

$$\text{tang}\,\zeta = \frac{2Mn}{m^2a^2(n^2-1)},$$

M significando sempre come sopra $\sqrt{m^2a^2(n^2+1)+n^2}$.

Gli angoli degli spigoli Y sono evidentemente identici con quelli degli spigoli dello stesso nome della forma generatrice,

poichè questi spigoli sono formati dalle stesse faccie ritenute nell'emiedria; onde si ha, come per la bipiramide ditetragonale,

$$\cos Y = -\frac{n(2m^2a^2+n)}{m^2a^2(n^2+1)+n^2}.$$

Quanto agli angoli degli spigoli X e Z, combinando i parametri delle equazioni delle faccie F e F'', F e F''', si trova per mezzo della nota espressione,

$$\cos X = \frac{n(2m^2a^2-n)}{m^2a^2(n^2+1)+n^2}, \quad \cos Z = -\frac{m^2a^2(n^2-1)-n^2}{m^2a^2(n^2+1)+n^2};$$

Quindi si deduce anche

$$\cos\frac{1}{2}X = \frac{ma(n+1)}{M\sqrt{2}}, \quad \cos\frac{1}{2}Y = \frac{ma(n-1)}{M\sqrt{2}},$$

d' onde segue la proporzione $\cos\frac{1}{2}X : \cos\frac{1}{2}Y :: n+1 : n-1$; e

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}X = \frac{\sqrt{m^2a^2(n-1)^2+2n^2}}{ma(n+1)}, \quad \text{tang}\,\frac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{m^2a^2(n+1)^2+2n^2}}{ma(n-1)}.$$

Se nelle formole che abbiamo trovate così per lo scalenoedro $\frac{mPn}{2}$ si fa $n=1$, si otterranno le formole corrispondenti pel calcolo dello sfenoide tetragonale $\frac{mP}{2}$. Possiamo dispensarci dal particolarizzare questa facile applicazione. Noteremo soltanto che Y diviene qui la linea d' altezza delle faccie, formate da quelle dello scalenoedro riunite due a due; che lo spigolo polare è formato di $2X$; che $\text{tang}\,\zeta=\infty$, e per conseguenza $\zeta=90°$; che $\text{tang}\,\nu$ diviene $=\cot\xi$; e che $\cos Y=-1$, in conseguenza della disparizione di questo spigolo.

Se nelle formole per lo scalenoedro si fa al contrario $n=\infty$, esse si troveranno cangiate in quelle che abbiamo già trovate per la bipiramide tetragonale diagonale, ossia della serie

accessoria, come ciò dee essere, poichè come abbiamo già osservato, questa bipiramide ritiene nella sua emiedria scalenoedrica la sua forma stessa.

Così anche per $m=\infty$ si ritrovano le formole del prisma ditetragonale.

Tutti i risultati precedenti del calcolo si riferiscono alla derivazione primitiva dello scalenoedro, e alla sua notazione. Se si desidera d' avere i loro analoghi relativamente alla derivazione secondaria di cui sopra abbiamo parlato, e conseguentemente al simbolo mS^n, non si ha che a mettere nelle formole sopra trovate in vece di m la quantità mn, poichè il simbolo mS^n significa la stessa cosa che $\frac{nmPn}{2}$ nella notazione primitiva, come $\frac{m}{n}S^n$ vi corrisponderebbe immediatamente a $\frac{mPn}{2}$.

b. Calcolo del trapezoedro tetragonale. Distingueremo in ciascun trapezoedro, destro, o sinistro relativamente alla forma fondamentale, $d\frac{mPn}{2}$, $s\frac{mPn}{2}$ (fig. 85), lo spigolo mediale normale, cioè quello alla metà di cui si termina l' asse accessorio, con Z, lo spigolo mediale diagonale con Z', lo spigolo polare con X, e distingueremo, in ciascuna faccia che vi si consideri, lo spigolo particolare aggiacente a Z' con X', sebbene esso sia uguale all' altro X, sia quanto alla lunghezza, sia quanto al suo angolo diedro. In oltre indicheremo la faccia posta nell' ottante dei semi-assi positivi con F, e le quattro faccie che formano con quella gli spigoli X, X', Z, Z' con F', F'', F''', e F^{IV}; finalmente distingueremo i diversi angoli piani di ciascun trapezoide, cioè l' angolo tra X e X' con ζ, quello tra Z e Z' con ρ, quello tra X e Z con σ, e quello tra X' e Z' con ξ. Se prendiamo ora per l' equazione di F, $\frac{x}{ma}+\frac{y}{n}+z=1$, le equazioni delle altre faccie saranno,

per F', $\frac{x}{ma}-y+\frac{z}{n}=1$; per F'', $\frac{x}{ma}+y-\frac{z}{n}=1$;

per F''', $-\frac{x}{ma}-\frac{y}{n}+z=1$; per F^{IV}, $-\frac{x}{ma}+y+\frac{z}{n}=1$;

la combinazione successiva dell' equazione di F con quelle delle altre faccie ci conduce alle equazioni seguenti delle quattro linee degli spigoli ;

per X, $\frac{(n-1)x}{ma} - \frac{(n^2+1)y}{n} = n-1$; $\frac{y}{n-1} + \frac{z}{n+1} = 0$;

per X', $\frac{(n+1)x}{ma} + \frac{(n^2+1)y}{n} = n+1$; $\frac{y}{n+1} - \frac{z}{n-1} = 0$;

per Z, $\frac{x}{ma} + \frac{y}{n} = 0$; $z = 1$;

per Z', $-\frac{x}{ma(n-1)} + \frac{y}{n} = \frac{1}{n+1}$; $y+z = \frac{2n}{n+1}$.

Dalle equazioni di Z e Z' risulta che gli spigoli mediali normali sono paralleli alle sezioni principali normali, e che gli spigoli mediali diagonali sono paralleli alle sezioni principali diagonali. La combinazione delle equazioni di Z e Z', conduce anche alle coordinate del punto dell' angolo solido mediale inferiore, posto all' angolo ρ, e la combinazione delle stesse equazioni con quelle di F' e F'', conduce alle coordinate dei punti degli angoli solidi posti agli angoli σ e ξ, cioè :

Per l' angolo solido

in ρ, $x = -\frac{ma(n-1)}{n(n+1)}$, $y = \frac{n-1}{n+2}$, $z = 1$,

in σ, $x = \frac{ma(n-1)}{n(n+1)}$, $y = -\frac{n-1}{n+1}$, $z = 1$,

in ξ, $x = \frac{ma(n-1)}{n(n+1)}$, $y = 1$, $z = \frac{n-1}{n+1}$.

Posto ciò tutto, siccome gli assi intermedii anche nel trapezoedro conservano il loro valore primitivo, dobbiamo in primo luogo occuparci del calcolo delle linee degli spigoli.

I punti che limitano queste linee sono: (1) Il punto dell'angolo solido del polo, di cui le coordinate sono $x=ma$, $y=0$, $z=0$; (2) il punto dell' angolo solido mediale in σ; (3) quello dell' angolo in ρ; (4) quello dell'angolo in ξ. Lo spigolo polare X è limitato dai punti (1) e (2); lo spigolo mediale Z dai punti (2) e (3); lo spigolo mediale Z' dai punti (3) e (4). Se ne deduce per la lunghezza di queste linee

$$X = X' = \frac{\sqrt{n^2+1}\,.\,\sqrt{m^2a^2(n^2+1)+2n^2}}{n(n+1)},$$

$$Z = \frac{2(n-1)\sqrt{m^2a^2+n^2}}{n(n+1)}, \quad Z' = \frac{2\sqrt{m^2a^2(n-1)^2+2n^2}}{n(n+1)}.$$

Secondo questi valori, perchè gli spigoli mediali Z, Z' fossero uguali, e per conseguenza le faccie divenissero trapezoidi simmetrici, o deltoidi, bisognerebbe che si avesse $n=1+\sqrt{2}$, che è la condizione che abbiamo già trovata per la bipiramide ottangolare regolare tra le forme oloedriche, onde segue che questa sola potrebbe produrre un tal trapezoedro, e che questo è così impossibile come la detta bipiramide nella cristallizzazione.

Passando agli angoli piani delle faccie, i cosseni di questi angoli ζ, ρ, σ e ξ si ottengono facilmente per mezzo della sostituzione successiva dei parametri delle equazioni di X e X', Z e Z', X e Z, X' e Z', in vece dei coefficienti della formola che la geometria analitica ci dà per trovare il cosseno dell' angolo tra due linee, di cui le equazioni sono conosciute. Si ottengono quindi i seni degli stessi angoli, e poi le tangenti che sono le espressioni più comode per l' uso, cioè

$$\text{tang}\,\zeta = \frac{2nM}{m^2a^2(n^2+1)}, \quad \text{tang}\,\rho = -\frac{nM}{m^2a^2(n-1)-n^2},$$

$$\text{tang}\,\sigma = -\frac{n(n+1)M}{m^2a^2(n^2+1)-n^2(n-1)},$$

$$\text{tang}\,\xi = -\frac{2n^2M}{m^2a^2(n^2+1)(n-1)-2n^2}.$$

Gli angoli diedri degli spigoli si determinano dalle espressioni dei loro cosseni, dati dalle equazioni delle faccie F, F', F''' e F^{IV} del trapezoedro, sopra stabilite, per mezzo della formola più volte citata; si trova così:

$$\cos X = \cos X' = -\frac{n^2}{m^2a^2(n^2+1)+n^2},$$

$$\cos Z = -\frac{m^2a^2(n^2-1)-n^2}{m^2a^2(n^2+1)+n^2}, \quad \cos Z' = -\frac{n(2m^2a^2-n)}{m^2a^2(n^2+1)+n^2}.$$

Il paragone di questi valori con quelli che abbiamo trovati per gli angoli degli spigoli dello scalenoedro ci mostra: 1.° che ang. Z' è il supplemento dell' ang. X dello scalenoedro: 2.° che ang. Z = ang. Z dello scalenoedro, il che è una conseguenza necessaria della maniera di derivazione di questa forma.

Se in queste diverse formole relative al trapezoedro si fa $n=1$, si ottengono le espressioni sopra trovate per la bipiramide tetragonale normale, e se vi si mette $n=\infty$, si ottengono quelle trovate per la bipiramide tetragonale diagonale, il che conferma ciò che sopra abbiamo detto su queste emiedrie.

c. Calcolo della bipiramide tetragonale anormale. Gli assi intermedii restano ancora qui senza alterazione. Quanto alle lunghezze degli spigoli, egli è chiaro, che le faccie che formano la metà superiore o inferiore di questa forma emiedrica sono le stesse, dall' estensione in fuori, che formavano la metà dello stesso nome del trapezoedro, poichè secondo che per le faccie superiori alterne d' una bipiramide di-tetragonale, le faccie inferiori similmente, o contrariamente poste sono quelle che si estendono, ne risulta una bipiramide tetragonale anormale, o un trapezoedro. Gli spigoli polari del trapezoedro $d\frac{mPn}{2}$, o $s\frac{mPn}{2}$, sono così, sia quanto alla misura dell' angolo, sia quanto alla posizione, identici cogli spigoli polari della bipiramide tetragonale anormale $\frac{mPn}{2}$ considerata come destra o sinistra. Ma la lunghezza dello spigolo è qui determinata dalla

sua intersezione col piano della base, di cui l'equazione è $x=0$. Se dunque si mette nelle equazioni degli spigoli X e X' del trapezoedro sopra stabilite, la coordinata $x=0$, si ottengono pei loro punti terminali inferiori, nella bipiramide anormale, le coordinate,

$$\text{per } X,\quad y=-\frac{n(n-1)}{n^2+1},\quad z=\frac{n(n+1)}{n^2+1},$$

$$\text{per } X',\quad y=\frac{n(n+1)}{n^2+1},\quad z=\frac{n(n-1)}{n^2+1},$$

e se ne deduce X o $X'=\frac{\sqrt{m^2a^2(n^2+1)+2n^2}}{\sqrt{n^2+1}}$.

I suddetti due punti sono nello stesso tempo le estremità di uno spigolo mediale Z della bipiramide, onde si ricava $Z=\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}}$.

Quanto agli angoli piani delle faccie essi sono, nella bipiramide tetragonale anormale, di due specie soltanto; l'angolo polare ζ ne è identico coll'angolo dello stesso nome del trapezoedro; e la tangente dell'angolo laterale ξ si trova facilmente per mezzo delle linee conosciute X e Z, cioè $\text{tang}\,\xi=\frac{M}{n}$.

Finalmente gli angoli diedri degli spigoli sono già conosciuti; perchè l'angolo dello spigolo polare X è lo stesso che l'angolo di X del trapezoedro, e l'angolo dello spigolo mediale Z è lo stesso che quello dello spigolo Z della bipiramide ditetragonale.

Per $n=1$, o $n=\infty$, le formole della bipiramide tetragonale anormale si cangiano in quelle trovate per mP, o $mP\infty$, il che conferma che queste ultime forme non si cangiano per l'emiedria.

ARTICOLO TERZO

Delle combinazioni delle forme derivate dal sistema tetragonale.

186. Anche per le combinazioni delle forme di questo sistema ci limiteremo, come per quelle del sistema regolare, alle combinazioni binarie, cioè delle forme due a due; di cui considereremo, l' una come dominante, l' altra come subordinata.

Cominciando dalle combinazioni di forme oloedriche, osserveremo che siccome la bipiramide di-tetragonale è il rappresentante generale di loro tutte in questo sistema, dobbiamo primieramente considerare i rapporti di combinazione di due di queste bipiramidi mPn e $m'Pn'$. Se concepiamo queste due forme in posizione parallela attorno al loro centro comune, i punti terminali dei loro assi accessorii coincideranno, questi punti formando come i punti cardinali del sistema, che conservano la loro posizione primitiva in tutte le forme derivate. Ma in vece che nel sistema regolare questa coincidenza avea luogo per tutti tre gli assi del sistema, essa non si applica più nel sistema tetragonale al terzo degli assi delle coordinate, cioè all' asse che abbiamo considerato come principale in tale sistema, quest' asse nelle diverse forme derivate prendendo lunghezze più o meno grandi, secondo che più o men grande è il valore del coefficiente m nelle medesime. Questa differenza tra i due sistemi è una conseguenza di che nel sistema tetragonale l' asse principale si distingue dagli altri per la lunghezza, in vece che nel sistema regolare tutti tre gli assi nelle direzioni delle coordinate erano uguali, ed esercitavano la stessa influenza su tutto il sistema; quindi nel sistema tetragonale, mentre il parametro delle faccie d' una forma derivata dee sempre essere supposto uguale all' unità relativamente a uno dei due assi accessorii, quello relativo all' asse principale può prendere per tutte un valore qualunque determinato dal valore di m, in vece che nel sistema regolare i tre assi essendo uguali, la simmetria delle forme richiedeva che le diverse faccie avessero sempre un parametro uguale all' unità relativamente ad uno qualunque di loro. Quindi nel sistema tetragonale la condizione comune alle estremità dei due assi accessorii, di servire

di punto di partenza di una faccia in ciascun ottante, limitando tutte le forme nella direzione di questi assi, lascia indeterminata l' estensione delle medesime nella direzione dell' asse principale, in vece che questa stessa condizione comune nel sistema regolare a tutti gli assi, ne limitava le forme, per la mutua intersezione delle faccie, agli assi medesimi della forma fondamentale. Quanto agli assi intermedii, essi possono variare nel sistema tetragonale, come le due specie d' assi intermedii nel sistema regolare. Ciò posto per le ragioni che abbiamo allegate, parlando delle combinazioni delle forme del sistema regolare, possiamo qui considerare dapprima i rapporti di combinazione tra le forme combinate, in cui si suppongano uguali gli assi accessorii, e questi rapporti dipenderanno da quelli di uguaglianza, o disuguaglianza degli assi principali delle due forme, e degli assi intermedii delle medesime, come pel sistema regolare abbiamo dapprima riguardate le due forme combinate come coincidenti relativamente alle estremità dei loro tre assi principali, e abbiamo trovato che i rapporti di combinazione ne dipendevano da quelli di uguaglianza, o disuguaglianza delle due specie d' assi intermedii, quadranziale, e ottanziale. Dai rapporti di combinazione determinati in quest' ipotesi, dipenderanno poi i diversi accidenti di bisellamenti e troncature degli spigoli, di smuzzamenti e troncature d' angoli solidi, che avranno luogo nelle diverse combinazioni, quando si daranno alle due forme dimensioni diverse l' una dall' altra, come abbiamo veduto nel sistema regolare.

I rapporti di combinazione delle diverse forme mPn e $m'Pn'$ combinate tra loro, in quell' ipotesi dell' identità dei due assi secondarii, dipendono dunque da che si abbia, quanto agli assi principali, che indicheremo con h e h', $h' >$, o $=$, o $< h$, il che corrisponde evidentemente a $m' >$, o $=$, o $< m$; e quanto agli assi intermedii $r' >$, o $=$, o $< r$, il che accadrà, secondo l'espressione che abbiamo trovata per r, dall'essere $n' >$, o $=$, o $< n$; e quanto ai quozienti $\frac{h'}{r'}$ e $\frac{h}{r}$, che indicheremo rispettivamente con q', e q, da che si trovi $q' >$, o $=$, o $< q$, il che, giusta i valori delle quantità h, r, h', r', e quindi di questi quozienti, suppone

che si abbia $\frac{m'(n'+1)}{n'} > , o = , o < \frac{m(n+1)}{n}$.

Quello che abbiamo detto dei diversi aspetti e accidenti, che le combinazioni di forme del sistema regolare debbono presentare, nei diversi casi, per le diverse relazioni delle due specie di assi intermedii di quel sistema, può dare una sufficiente idea della maniera con cui quelle indicate tra h, h', r, e r', nel sistema di cui qui si tratta, debbono influire sull' aspetto e sugli accidenti delle combinazioni di forme del medesimo; ci dispenseremo quindi di entrare nelle particolarità di quest' applicazione, tanto riguardo alle forme combinate mPn, $m'Pn'$ che le rappresentano tutte in una maniera generale, quanto alle altre forme derivate oloedriche di questo sistema, che se ne possono riguardare come casi particolari.

187. Passiamo alle combinazioni delle forme emiedriche, e primieramente di quelle scalenoedriche, ossia sfenoidiche.

La teoria di queste combinazioni, che sono le più importanti delle combinazioni emiedriche di questo sistema, riposa sui rapporti di combinazione di due scalenoedri $\frac{mPn}{2}$ e $\frac{m'Pn'}{2}$, di cui il primo è considerato come forma dominante, e l' altro come forma subordinata. Dalle equazioni delle tre specie di spigoli dello scalenoedro, che abbiamo sopra stabilite, si possono dedurre facilmente le condizioni relative alle diverse maniere in cui può presentarsi la combinazione di queste due forme. Bisogna però aver riguardo anche qui, come in generale per le combinazioni emiedriche, all' ambiguità della posizione, potendosi le due forme combinare o nella stessa posizione, o in posizione inversa; cioè bisogna considerare i rapporti di combinazione, sia di $\pm\frac{mPn}{2}$ con $\pm\frac{m'Pn'}{2}$, che sono nella stessa posizione, sia di $\pm\frac{mPn}{2}$ con $\mp\frac{m'Pn'}{2}$, che sono in posizione inversa. Da questi rapporti poi di combinazione di due scalenoedri, si possono dedurre quelli che hanno luogo nella combinazione, sia dello scalenoedro con altre forme che appartengono, o possono considerarsi come appartenenti a questa emiedria, sia di queste forme tra loro. Gli

aspetti e gli accidenti delle forme che risultano da questa specie di combinazione emiedrica sono molto varii, e notabili, tanto più che questa emiedria comprende anche le forme della serie principale del sistema in una maniera effettiva, in vece che le altre specie d' emiedria di questo stesso sistema non hanno influenza reale sulle forme oloedriche della serie principale, cioè di quella in cui $n=1$, vale a dire non ne alterano il numero delle faccie. Ma le particolarità di questi aspetti ed accidenti ci condurrebbero troppo lungi, e non ci pare indispensabile d' entrarvi in questa esposizione dei principii fondamentali della teoria della cristallizzazione.

Quanto alla combinazione delle forme emiedriche piramidali, osserveremo che siccome la specie di emiedria a cui queste forme appartengono, non può esercitarsi efficacemente se non sulle forme della serie intermedia di questo sistema, cioè sulle bipiramidi di-tetragonali, mentre le forme delle serie principale ed accessoria, ossia le bipiramidi tetragonali, conservano, come abbiamo veduto, la loro apparenza oloedrica, nell' applicazione di quest' emiedria, la teoria di tali combinazioni non è che la teoria leggermente modificata delle combinazioni oloedriche di queste bipiramidi di-tetragonali; ed esse non furono altronde osservate se non tra le varietà di un picciol numero di specie di sostanze cristallizzate; onde non vi ci tratterremo.

Tanto meno ci occuperemo delle combinazioni trapezoedriche, questa sorta di combinazioni emiedriche del sistema tetragonale, non essendosi finqui presentata ancora in natura.

188. Dopo aver così indicato in generale i risultati della combinazione delle forme tanto oloedriche che emiedriche di questo sistema, ci resterebbe a parlare del calcolo delle linee ed angoli tanto piani che diedri in queste combinazioni di forme; ma ci limiteremo anche qui, come pel sistema regolare a dir qualche cosa del calcolo degli spigoli di combinazione. Quelli delle combinazioni di forme oloedriche sono generalmente rappresentati dallo spigolo di combinazione Π prodotto dalle faccie di due bipiramidi di-tetragonali mPn e $m'Pn'$; per cui procedendo come per gli spigoli di combinazione del sistema regolare, si trova la formola

$$\cos \Pi = - \frac{mm'a^2(nn'+1)+nn'}{\sqrt{m^2a^2(n^2+1)+n^2}.\sqrt{m'^2a^2(n'^2+1)+n'^2}}.$$

Per adattare questa formola alla determinazione degli angoli degli spigoli, nella combinazione delle altre forme oloedriche di questo sistema, sia colla bipiramide di-tetragonale, sia tra loro, non si ha che a dare a m, m', n, n' i valori convenienti a queste forme.

Quanto agli spigoli delle combinazioni emiedriche, limitandoci a quelle dell' emiedria scalenoedrica, distingueremo il caso in cui le due forme si trovano nella stessa posizione, $\pm \frac{mPn}{2}$ con $\pm \frac{m'Pn'}{2}$, da quello in cui vi si trovano in posizione inversa, $\pm \frac{mPn}{2}$ con $\mp \frac{m'Pn'}{2}$. Nel primo caso vi sono due sorta di spigoli di combinazione da considerare; gli uni sono quelli formati dalle faccie della parte superiore o inferiore d'uno degli scalenoedri, lasciate sussistere dall'emiedria, colle faccie pur rimanenti della stessa parte rispettivamente dell'altro scalenoedro; questi spigoli sono i medesimi che le stesse faccie avrebbero formati nella combinazione oloedrica delle bipiramidi di-tetragonali corrispondenti, cioè il loro angolo è l'angolo Π, di cui abbiamo or ora indicata l' espressione del cosseno per queste forme oloedriche. Gli altri spigoli sono quelli formati dall' intersezione delle faccie appartenenti ad una delle metà superiore o inferiore di una delle forme combinate, colle faccie appartenenti all'opposta metà, inferiore o superiore, dell'altra forma; intersezione che non ha luogo, se non per la soppressione delle altre faccie prodotta dall' emiedria, onde questi spigoli sono proprii alle forme emiedriche. Chiamando Π' uno di questi spigoli di combinazione di seconda specie, si trova in generale, adoperando la formola conosciuta per determinare l' angolo di inclinazione di due piani di cui sono date le equazioni, e mettendo qui i parametri ma, n, 1 della faccia superiore in una delle equazioni generali dei piani in vece de' suoi coefficienti, e $-m'a$, $-n'$, 1, parametri della faccia inferiore, nell' altra equazione,

$$\cos \Pi' = - \frac{mm'a^2(nn'-1)-nn'}{MM'},$$

ove M ritiene la significazione che si è data qui sopra a questa lettera, e M' è la quantità corrispondente nella seconda delle forme combinate.

Nel secondo caso, cioè delle due forme in posizione inversa, in vece delle due sorta di spigoli Π e Π', vi sono due altre sorta di spigoli da considerare, ciascuna faccia superiore d'una delle forme venendo a intersecarsi da una parte con una faccia appartenente ad un paio di faccie superiore della seconda forma, e dall'altra con una faccia d' un paio inferiore di questa seconda forma, prese, tali paia di faccie, in posizione diversa nelle due forme. Se indichiamo la prima specie di spigoli di combinazione in questo caso con $\Pi_,$, e la seconda con $\Pi_,'$, si avrà per mezzo della formola citata, mettendovi per la prima specie i parametri ma, n, 1, e $m'a$, $-n'$, 1 delle faccie che si intersecano, e per la seconda specie i parametri $-ma$, $-n$, 1, e $m'a$, $-n'$, 1,

$$\cos \Pi_, = - \frac{mm'a^2(nn'-1)+nn'}{MM'},$$

$$\cos \Pi_,' = - \frac{mm'a^2(nn'+1)-nn'}{MM'}.$$

Si possono dedurre ugualmente da queste formole quelle corrispondenti per tutte le forme d' una combinazione sfenoidica, mettendovi in vece di m, n, m', n' i coefficienti di derivazione che appartengono alle forme combinate proposte.

189. Quanto alle combinazioni ternarie delle forme di questo sistema, ci ristringeremo ancora qui ad indicare alcuna cosa riguardo alle *equazioni di combinazione*, di cui abbiamo già veduto l' applicazione generale a qualunque sistema di cristallizzazione, e in particolare al sistema regolare. Per le forme oloedriche l' equazione di combinazione generale, per mPn con $m'Pn'$, rimane anche qui la stessa, come pel sistema regolare, cioè

$$m''n''(m'n-mn')+m''(m-m')nn'+n''(n'-n)mm'=0,$$

e si particolarizza poi senza difficoltà per le combinazioni delle

altre forme che si riferiscono a quelle come casi particolari. Per le combinazioni emiedriche, limitandoci qui alle scalenoedriche ossia sfenoidiche, osserveremo che due scalenoedri tetragonali formano spigoli di combinazione, come già abbiamo detto, gli uni dipendenti da intersezioni di faccie appartenenti all' istessa metà superiore o inferiore, cioè che si riuniscono allo stesso polo o estremità dell' asse principale, gli altri da intersezioni di faccie appartenenti alle due metà o poli opposti delle due forme, e che in questo si dee ancora aver riguardo alla diversa posizione delle medesime forme. L' equazione di combinazione per gli spigoli di combinazione della prima specie che si possono chiamare spigoli di combinazione *etero-polari*, e per una stessa posizione delle due forme, è identica con quella or ora indicata per la combinazione delle forme oloedriche mPn e $m'Pn'$, cioè di due bipiramidi di-tetragonali, senz'altra distinzione, perchè la terza forma dee necessariamente aver la stessa posizione che le due altre. Ma se le due forme, a cui si riferiscono i coefficienti senz'accento e con un accento, si trovano in posizione inversa, si dee primieramente prendere n' negativo, e considerare quanto alla terza forma, a cui si riferiscono i coefficienti con due accenti, se essa si trovi nella stessa posizione colla prima, o colla seconda; in quest' ultimo caso anche n'' dee essere negativo. Possiamo dunque in generale stabilire per gli spigoli di combinazione prodotti da faccie appartenenti ad una stessa metà polare di due scalenoedri tetragonali $\frac{mPn}{2}$, e $\frac{m'Pn'}{2}$, l' equazione di combinazione

$$m''n''(m'n \mp mn') \pm m''(m - m')nn' - n''(n \mp n')mm' = 0,$$

nella quale i segni superiori servono per una stessa posizione, e i segni inferiori per una posizione inversa delle due forme; se la terza forma ha la stessa posizione che $\frac{mPn}{2}$, non vi è altro cangiamento da fare a questa formola; se al contrario la terza forma ha la stessa posizione che $\frac{m'Pn'}{2}$, nella supposizione che questa sia diversa da quella di $\frac{mPn}{2}$, si dee pren-

dere n'' negativo. Per gli spigoli poi di combinazione formati da faccie appartenenti alle metà polari opposte delle due prime forme, e che possono distinguersi col nome di spigoli di combinazione *amfi-polari*, dobbiamo nell' equazione stessa suddetta relativa alle forme oloedriche, prendere, pel caso di una posizione simile di $\frac{mPn}{2}$, e $\frac{m'Pn'}{2}$, m ed n negativi, e per quello d' una posizione inversa, inoltre ancora n' negativo; l' equazione generale di combinazione, per gli spigoli di questa seconda specie della combinazione di due scalenoedri tetragonali, diviene così

$$m''n''(m'n \mp mn') \mp m''(m + m')nn' + n''(n \pm n')mm' = 0 ;$$

in quest' equazione i segni superiori servono per una stessa posizione, e gli inferiori per una posizione inversa delle due forme; ma la determinazione del segno di m'' e n'' vi dipende poi ancora tanto dalla posizione della terza forma, in se stessa, quanto da quella delle sue faccie che smuzzano gli spigoli di combinazione, relativamente alle faccie delle due prime forme.

190. Osserveremo ancora, terminando ciò che riguarda le combinazioni di forme in questo sistema, che le forme semplici del sistema regolare potrebbero, matematicamente parlando, considerarsi, come appartenenti a queste combinazioni. Se cioè si riguarda l' ottaedro, forma fondamentale di quel sistema, come una bipiramide tetragonale P in cui si abbia $a = 1$, prendendo così uno dei suoi tre assi uguali per asse principale, si troverà che qualunque esacis-ottaedro mOn, che è il rappresentante generale delle forme oloedriche del sistema regolare, dovrà essere considerato come una combinazione di tre bipiramidi di-tetragonali, di cui i segni saranno $\frac{1}{n} P \frac{m}{n}$, nPm, e mPn, cosicchè il segno di questa combinazione sarà $mPn \,.\, nPm \,.\, \frac{1}{n} P \frac{m}{n}$. Quindi si troverà, quanto alle altre forme, che mOm del sistema regolare diviene $mPm \,.\, \frac{1}{m} P$ del sistema tetragonale; che mO diviene $mP \,.\, Pm$; che ∞On

intersezioni di facce appartenenti alle due
delle due forme, e che in questo si dee a
alla diversa posizione delle medesime for
combinazione per gli spigoli di combinazio
cie che si possono chiamare spigoli di combi
e per una stessa posizione delle due for
quella or ora indicata per la combinazione
driche mPn e $m'Pn'$, cioè di due bipira
senz'altra distinzione, perchè la terza forma
aver la stessa posizione che le due altre. Ma
cui si riferiscono i coefficienti senz'accento e co
vano in posizione inversa, si dee primieramente
vo, e considerare quanto alla terza forma, a
coefficienti con due accenti, se essa si trovi n
colla prima, o colla seconda; in quest' ul
dee essere negativo. Possiamo dunque in g
gli spigoli di combinazione prodotti da
ad una stessa metà polare di due scal
$\frac{mPn}{2}$, e $\frac{m'Pn'}{2}$, l' equazione di combinazio

$$m''n''(m'n \mp mn') \pm m''(m - m')nn' - n''(n \mp$$

nella quale i segni superiori servono per u
e i segni inferiori per una posizione invers

se la terza forma ha la stessa posizione che

dere n' negativo. Per gli spigoli poi di combinazione formati da faccie appartenenti alle metà polari opposte delle due prime forme, e che possono distinguersi col nome di spigoli di combinazione *amfi-polari*, dobbiamo nell' equazione stessa suddetta relativa alle forme oloedriche, prendere, pel caso di una posizione simile di $\frac{mPn}{2}$, e $\frac{m'Pn'}{2}$, m ed n negativi, e per quello d' una posizione inversa, inoltre ancora n' negativo; l' equazione generale di combinazione, per gli spigoli di questa seconda specie della combinazione di due scalenoedri tetragonali, diviene così

$$n''n''(n'n \mp mn') \mp m''(m+m')nn' + n''(n \pm n')mm' = 0 ;$$

in quest' equazione i segni superiori servono per una stessa posizione, e gli inferiori per una posizione inversa delle due forme; ma la determinazione del segno di m'' e n'' vi dipende poi ancora tanto dalla posizione della terza forma, in se stessa, quanto da quella delle sue faccie che smuzzano gli spigoli di combinazione, relativamente alle faccie delle due prime forme.

190. Osserveremo ancora, terminando ciò che riguarda le combinazioni di forme in questo sistema, che le forme semplici del sistema regolare potrebbero, matematicamente parlando, considerarsi, come appartenenti a queste combinazioni. Se cioè si riguarda l' ottaedro, forma fondamentale di quel sistema, come una bipiramide tetragonale P in cui si abbia $a=1$, prendendo così uno dei suoi tre assi uguali per asse principale, si troverà che qualunque esacis-ottaedro mOn, che è il rappresentante generale delle forme oloedriche del sistema regolare, dovrà essere considerato come una combinazione di tre bipiramidi di-tetragonali, di cui i segni saranno $\frac{1}{n}P\frac{m}{n}$, nPm, e mPn, cosicchè il segno di questa combinazione sarà $mPn \cdot nPm \cdot \frac{1}{n}P\frac{m}{n}$. Quindi si troverà, quanto alle altre forme, che mOm del sistema regolare diviene $mPn \cdot \frac{1}{n}P$ del sistema tetragonale, che mO diviene $mP \cdot Pn$, che mO

diviene $\infty Pn \,.\, nP\infty \,.\, \frac{1}{n} P\infty$; che ∞O diviene $\infty P \,.\, P\infty$; e che $\infty O\infty$ diviene $\infty P\infty \,.\, oP$. Ma questa espressione delle forme del sistema regolare relativamente al sistema tetragonale conduce, come si vede, a combinazioni complicate in vece di forme semplici, e non può presentare alcun vantaggio, nè avere alcuna connessione colle relazioni naturali di queste forme.

§ 4.°

Del sistema esagonale.

ARTICOLO PRIMO

Di questo sistema in generale e della sua forma fondamentale.

191. Questo sistema, di cui trattiamo qui immediatamente al seguito del sistema tetragonale, per una notabile analogia che esso ha con quello, si distingue però dal medesimo, come da tutti gli altri, pel numero quaternario degli assi delle coordinate, a cui le sue forme si debbono riferire, in vece di tre soli assi che si considerano negli altri sistemi; di questi quattro assi, come abbiamo già veduto, tre sono uguali tra loro, e si tagliano in un solo piano ad angoli di 60°, mentre il quarto è loro perpendicolare. Il nome con cui indichiamo questo sistema è tratto dalla figura delle sezioni trasversali per mezzo, presentate da tutte le forme che gli appartengono, sezioni che sono o esagoni regolari, o tali che vi si possono iscrivere o circoscrivere questi esagoni. Weiss lo ha chiamato sistema *senario*, o *se-membre*, dal numero de' suoi semi-assi uguali, da cui dipende la simmetria delle sue forme; altri l' hanno chiamato *sistema romboedrico*, perchè molte delle sue forme sono romboedri; gli si è anche dato il nome di *sistema monotrimetrico*, ossia *uni-tri-asse*, che esprime immediatamente la natura de' suoi quattro assi, di cui uno disuguale dagli altri, e a loro perpendicolare.

In questo sistema, oltre all' asse *principale*, che è quello disuguale dagli altri tre, e a questi tre assi uguali tra loro,

che chiameremo *accessorii*, si debbono ancora considerare tre assi *intermedii*; essi si trovano nel piano della base, cioè dei tre assi accessorii, in posizione intermedia tra questi assi presi due a due, e fanno conseguentemente coi medesimi, angoli di 30°; chiameremo *sezioni principali normali* delle forme di questo sistema le sezioni che passano per l' asse principale, e per uno dei tre assi accessorii, e che appartengono ai piani coordinati del sistema, e *sezioni principali diagonali* quelle che passano per l' asse principale, e per uno degli assi intermedii.

Nella forma fondamentale di questo sistema saranno i tre semi-assi uguali, e ad angoli di 60°, rappresentati ciascuno da 1, e il semi-asse principale, ad essi perpendicolare, rappresentato da a; questa forma è limitata da 12 faccie triangolari, 6 al dissopra, e 6 al dissotto del piano degli assi accessorii, e presenta così una doppia piramide di base comune esagona, ossia un dodecaedro, di cui l' asse, da considerarsi in posizione verticale, ha la lunghezza $2a$; questa forma può del resto variare all' infinito da una specie all'altra di sostanza, secondo il valore che vi prenderà il semi-asse a, relativamente agli altri tre semi-assi che si sono presi per unità.

192. Il sistema di quattro assi disposti nella maniera indicata, è quello a cui si debbono riferire immediatamente le forme di questo sistema, e la loro derivazione, e notazione, per rappresentare così nella maniera la più semplice e naturale il carattere particolare di queste forme che offrono sei membri simmetricamente disposti attorno ad un asse principale. Anche i calcoli relativi a queste forme, debbono potersi riferire, quanto a risultati, a un tale sistema; ma non possono esserlo immediatamente, le operazioni stesse del calcolo coi metodi della geometria analitica, non potendo accordarsi con questa supposizione di quattro assi di coordinate. I calcoli adunque debbono sempre, anche in questo sistema, essere fondati sopra un sistema di tre assi soltanto, adottati sussidiariamente, sebbene le quantità su cui si calcola, e i risultati ottenuti come funzioni di queste quantità, si riferiscano al sistema primitivo di quattro assi; ed ecco come vi si può giungere. Le equazioni delle diverse faccie d' una forma deb-

bono essere derivate immediatamente dai loro segni cristallografici, che come abbiamo detto si riferiscono a quattro assi, e debbono per conseguenza essere in parte dipendenti da tutti essi quattro; chiameremo queste equazioni dedotte immediatamente dai segni cristallografici *equazioni rappresentative*; e le determineremo nella maniera seguente. Prendiamo l' asse principale per l' asse delle x, e i tre assi accessorii per gli assi delle y, z ed u, e indichiamo in generale i parametri cadenti in questi assi, per una faccia qualunque, con m, n, r, ed s. Per ciascun sestante della base, che si voglia dapprima considerare, chiamiamo un sestante immediatamente attiguo a quello, *sestante aggiacente*, un sestante che segua immediatamente a questo, *sestante coalterno*, e il sestante opposto al primo che si è considerato, *sestante opposto*. Se si parte da un sestante qualunque A (fig. 86), e si riguardino i due semi-assi accessorii che gli appartengono come i semi-assi delle coordinate $+y$ e $+z$, i semi-assi che cadranno ne' suoi sestanti aggiacenti B, B' saranno i semi-assi di $+z$ e $+u$, e quelli di $+y$ e $-u$; i semi-assi che cadranno nei sestanti coalterni C, C', saranno i semi-assi di $+u$ e $-y$, e quelli di $-u$ e $-z$; finalmente i semi-assi appartenenti al sestante opposto D saranno quelli di $-y$ e $-z$. Ora data una faccia qualunque F, si può considerare a piacimento il suo sestante come il primo; essa taglia dunque gli assi delle y e delle z nelle loro metà positive, e la sua equazione riferita a questi due assi, che del resto non sono qui rettangolari, ma obliqui, cioè ad angolo di 60° tra loro, potrà rappresentarsi in generale con

$$\pm\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{r}=1, \qquad (1)$$

il doppio segno di $\frac{x}{m}$ riferendosi alla sua posizione al dissopra, o al dissotto del piano degli assi accessorii. Ma se due faccie F e F' sono date, può accadere, relativamente alla loro situazione, uno dei tre casi seguenti:

1.° Le due faccie sono poste in uno stesso sestante, oppure anche in sestanti opposti; se si prende allora l' equazione

della faccia F quale l'abbiamo indicata, l' equazione della faccia F' sarà rappresentata ,

quando è nello stesso sestante, da $\pm\frac{x}{m'}+\frac{y}{n'}+\frac{z}{r'}=1$, (2)

e quando è nel sestante opposto, da $\pm\frac{x}{m'}-\frac{y}{n'}-\frac{z}{r'}=1$, (3)

il doppio segno di $\frac{x}{m'}$ riferendosi sempre alla posizione della faccia al dissopra o al dissotto della base.

2.° Le due faccie sono poste in sestanti immediatamente aggiacenti ; allora per la stessa equazione di F, l' equazione rappresentativa della seconda faccia F', secondo che essa sarà posta nell' uno o nell' altro dei due sestanti aggiacenti a quello della faccia F, avrà la forma

$$\pm\frac{x}{m'}+\frac{u}{s'}+\frac{z}{r'}=1, \qquad (4)$$

o $$\pm\frac{x}{m'}+\frac{y}{n'}-\frac{u}{s'}=1. \qquad (5)$$

3.° Le faccie sono poste in sestanti coalterni; allora l'equazione di F restando sempre la stessa come sopra, l' equazione rappresentativa di F' sarà , secondo la sua posizione nell' uno o nell' altro dei due sestanti coalterni , della forma

$$\pm\frac{x}{m'}-\frac{y}{n'}+\frac{u}{s'}=1, \qquad (6)$$

o $$\pm\frac{x}{m'}-\frac{u}{s'}-\frac{z}{r'}=1. \qquad (7)$$

Si tratta ora , pel calcolo cristallografico , di cacciare dalle quattro ultime di queste equazioni *rappresentative* l' ordinata u che vi entra , e farvi entrare quella delle due coordinate y o z

che vi manca, e di ridurre così il sistema quaternario d' àssi al sistema ternario, nel quale gli assi delle y e delle z si tagliano sotto un angolo di 60°, mentre l' asse delle x resta loro perpendicolare, come lo era agli assi delle z, y ed u; si debbono perciò cangiare le equazioni ove si trova il termine $\frac{u}{s}$ in altre in cui si trovi $\frac{y}{p'}$, o $\frac{z}{q'}$, secondo che o y o z mancava a queste equazioni, p' e q' essendo due altri coefficienti relativi agli assi y e z, e che si dovranno determinare convenientemente per questo, in maniera che quelle equazioni di faccie, che si riferivano agli assi delle z e delle u (oltre quello delle x) o agli assi delle y e delle u, vengano a riferirsi tutte agli assi delle y e delle z, tra le parti positive o negative de' quali queste faccie si trovano anche necessariamente. Per tale oggetto basta cercare a quali distanze dal centro delle coordinate, espresse queste distanze in funzioni di s', r', n', una superficie di cui l' equazione è data, relativamente ai due assi delle u, e delle z, o delle u e delle y, viene a tagliare gli assi delle y e delle z; queste distanze saranno le quantità che abbiamo indicate con p' e q'; ora si trova che queste distanze sono $p' = \frac{s'r'}{s'-r'}$, $q' = \frac{s'n'}{s'-n'}$. Sostituendo dunque

$$\frac{y}{\frac{s'r'}{s'-r'}} \text{ ossia } \frac{s'-r'}{s'r'}\,.\,y, \text{ oppure } \frac{z}{\frac{s'n'}{s'-n'}} \text{ ossia } \frac{s'-n'}{s'n'}\,.\,z, \text{ a } \frac{u}{s'}$$

nelle suddette quattro equazioni, secondo che loro manca il termine in y o il termine in z, esse si cangieranno nelle seguenti, cioè:

l' equazione (4) in $\pm\frac{x}{m'} + \frac{(s'-r')y}{s'r'} + \frac{z}{r'} = 1$,

l' equazione (5) in $\pm\frac{x}{m'} + \frac{y}{n'} - \frac{(s'-n')z}{s'n'} = 1$,

l' equazione (6) in $\pm\frac{x}{m'} - \frac{y}{n'} + \frac{(s'-n')z}{s'n'} = 1$,

l' equazione (7) in $\pm\frac{x}{m'} - \frac{(s'-r')y}{s'r'} - \frac{z}{r'} = 1$.

Queste equazioni sono ora tutte riferite agli assi obliqui delle z e delle y, che si tagliano tra loro ad angoli di 60° e di 120°, oltre quello delle x che loro è perpendicolare. Chiameremo in quel che segue equazioni *calcolative* le equazioni delle faccie così trasformate, e di cui dovremo far uso secondo i principii che la geometria analitica ci fornisce per la posizione delle linee, e delle superficie nello spazio, in un sistema di tre assi così disposti.

193. Avanti di passare alla descrizione delle forme derivate del sistema esagonale, osserveremo ancora che sebbene abbiamo riguardato l'asse principale di questo sistema, come disuguale dagli altri tre, a cui è perpendicolare, il carattere del sistema non sarebbe cangiato quand'anche venisse, in alcune specie di sostanze, ad essere uguale a questi, poichè esso ne sarebbe sempre distinto per la sua perpendicolarità agli altri, mentre questi, tutti tre in un piano, fanno tra loro angoli di 60°; solamente allora la quantità che abbiamo indicata in generale per a prenderebbe il valore particolare 1. Questo caso però non si è osservato in alcuna specie in natura.

Indicheremo con P la bipiramide esagonale, di cui abbiamo supposto le lunghezze dei semi-assi, espresse in generale da a, 1, 1, 1, come già abbiamo indicato con P la bipiramide tetragonale del sistema precedente, e a questa lettera si riferiranno i segni delle forme derivate (1).

Tra le sostanze di cui la cristallizzazione appartiene a questo sistema, arrecheremo per esempi la *pirite di ferro* detta *magnetica*, il quarzo ossia silicia cristallizzata, il talco, il *mica*

(1) Si noterà che nel sistema di notazione di Weiss dovendosi esprimere la posizione delle faccie relativamente a ciascuno dei quattro assi, la forma fondamentale stessa si trova aver per simbolo ($a : a : \infty a : c$), poichè una delle sue faccie qualunque, mentre passa per l'estremità dell' asse principale che si indica con c, e per quelle di due degli assi accessorii uguali tra loro, a, si trova necessariamente parallelo al terzo di questi assi accessorii. Le altre forme si esprimeranno, preponendo pure nel simbolo a ciascuno dei quattro assi a, a, a, c il conveniente coefficiente, secondo la posizione delle faccie che loro appartengono.

detto *a un solo asse*, il berillo o smeraldo ecc., che hanno in generale forme oloedriche; alcuni metalli nativi, come il tellurio, l' antimonio, e l' arsenico, il cinabro ossia solfuro di mercurio, il *corindone* (specie che comprende le pietre preziose più dure, come il *rubino* ecc., di cui la sostanza è l' alumina), il ferro ossidato anidro, detto da Haüy *ferro oligisto* (*eisenglanz*), lo spato calcare ossia calce carbonata ordinaria, la tormalina ecc. che offrono forme emiedriche.

Il rapporto della lunghezza dell' asse principale a ciascuno degli assi accessorii varia molto in queste diverse specie; e si può talvolta esprimere in una maniera più semplice per mezzo d' un radicale. Così prendendo per unità uno degli assi accessorii, l' asse principale si trova molto prossimamente uguale a $\sqrt{3}$ nella pirite di ferro magnetica, a $\sqrt{\frac{15}{8}}$ nel ferro ossidato, a $\sqrt{0,73}$ nella calce carbonata (1), a $\sqrt{0,2}$ nelle tormalina ecc. Nel quarzo il valore dell' asse principale è molto prossimamente espresso da 1,1; nel berillo o smeraldo da $\frac{1}{2}$ ecc.

Si potrebbe però anche cercare di esprimere con numeri razionali approssimati più o meno semplici quei rapporti che si sono espressi per mezzo di radicali. Così il valore $\sqrt{0,73}$, equivalente a 0,8544..., relativo alla calce carbonata, si può rappresentare molto semplicemente con $\frac{6}{7}$ equivalente a 0,8571... Si vede del resto che quest' asse principale è ora maggiore, ora minore degli assi accessorii, onde risultano per le forme primitive dodecaedri più o meno acuti od ottusi.

---

(1) Hauy avea anticamente ammesso nelle forme della calce carbonata certi rapporti, che supponevano $a = \sqrt{\frac{3}{4}}$ preciso, ossia $\sqrt{0,75}$ in vece di $\sqrt{0,73}$. Ma le osservazioni di Wollaston, Malus, e di altri cristallografi hanno fatto vedere che tale supposizione, per cui si simplificavano di molto i calcoli relativi alle forme di questa sostanza, non era sufficientemente esatta.