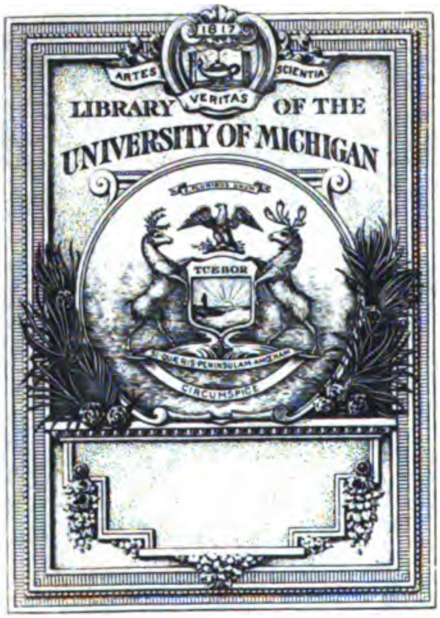

1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

Riccati, Vincenzo, conte

COMPENDIO D' ANALISI

DI

GIROLAMO SALADINI

Canonico della Metropolitana, Professore d' Analisi nell' Università, e Socio dell' Instituto delle Scienze di Bologna,

E MAESTRO DELLA REALE ACCADEMIA

DEI CADETTI

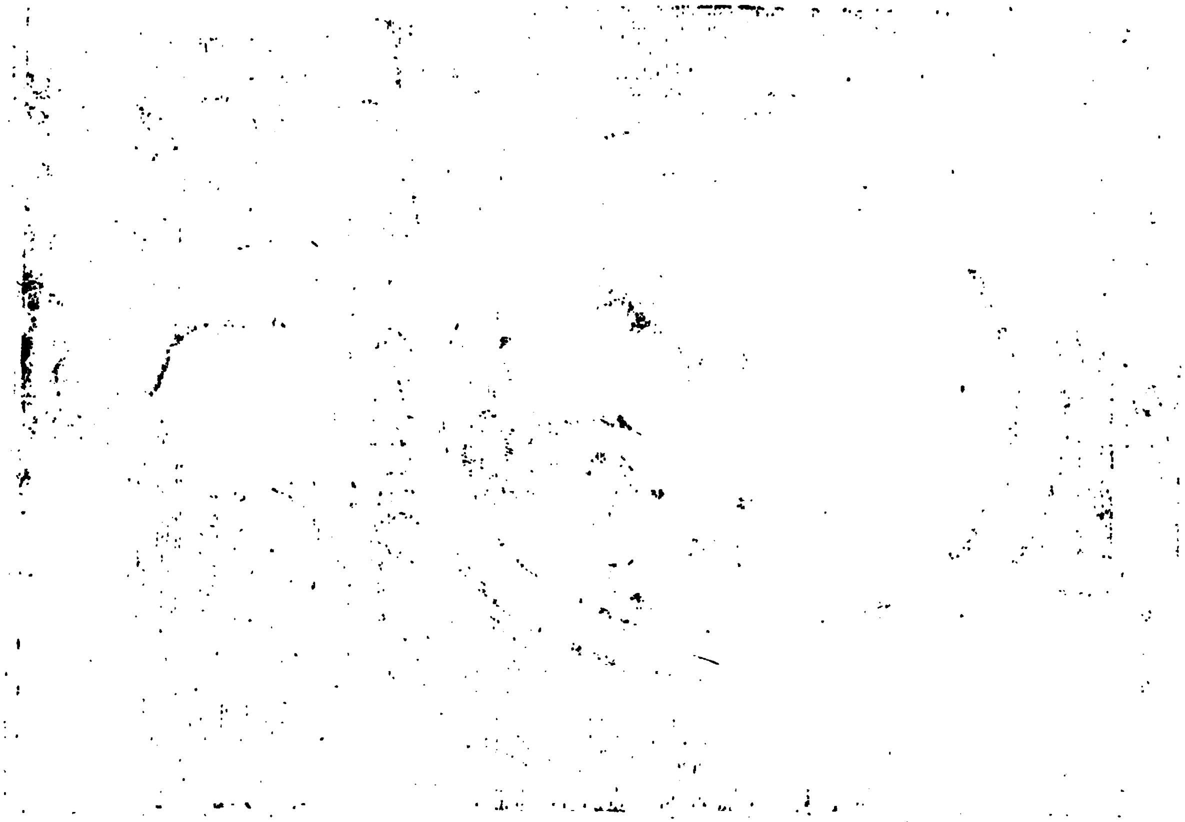
DI SUA MAESTÀ SICILIANA.

IN BOLOGNA MDCCLXXV.

Nella Stamperìa di S. Tommaso d' Aquino.

Con licenza de' Superiori.

5-18-34 14RI




FERDINANDO IV. RE
DELLE DVE SICILIE E DI
GERVSALEMME &c.
Gioanni Fabbri fece

ALLA SACRA REAL MAESTÀ

DI

FERDINANDO IV.

RÈ

DELLE DUE SICILIE

DI GERUSALEMME

&c. &c. &c.

SACRA REAL MAESTÀ.

IL magnanimo cuore onde la SACRA REAL MAESTA' VOSTRA usa di accogliere tutto ciò, che può eſſere utile in alcuna maniera al genere umano, e ſpecialmente ai voſtri fortunatiſſimi Sudditi, mi fà coraggio di offe-

offe-

offerirvi questa Operetta, la quale col più umile ſentimento dell' animo mio conſagro all' Auguſtiſſimo Vostro Nome. Qualunque ella ſiaſi alla Sagra Maesta' Vostra ſi appartiene, e a Voi la debbo; imperciocchè nel ſoſtenere io quì in Bologna da molti Anni l' onorevole offizio di ammaeſtrare nella Filoſofia, e nelle Matematiche gli Alunni del Real Vostro Collegio Ancarano, conobbi in eſperienza l' utilità, che avrebbe a loro recato un Compendio delle Inſtituzioni Analitiche, che già furono raccolte dal rinomatiſſimo Conte Vincenzo Riccati, e da me; e mentre la Sovrana Providenza Vostra nel pubblicare le Coſtituzioni del nuovo Inſigne Battaglione dei Cadetti, di cui mi avete a sommo mio decoro creato Maeſtro, dichiarò che ſi doveſſe loro in compendioſa maniera le medeſime Inſtituzioni inſegnare; mi diedi a ſtrignere queſto trattato, e mi luſingai che non Vi dovefvesse essere discara una fatica immediatamente diretta al Real Vostro Servigio. Degnatevi dunque di accoglierla con quel Cuore generosissimo, per cui siete la delizia dei vostri Sudditi, e l' ammirazione delle Genti. Io riporrò sempre la gloria mia nel procurarmi il Real Vostro Patrocinio, e non cesserò di porgere voti al Cielo perchè feliciti lungamente la preziosa Vita di Vostra Maestà, la quale sia sempre da tutti bramata, finchè sarà cara agli Uomini la Scienza, e la Virtù, e finchè viverà l' amore, e il desiderio della pubblica felicità.

Della Sacra Real Maestà Vostra

Umilissimo Servitore, e Suddito
Girolamo Saladini.

Non enim fecimus altos nimis, & obscuros in his rebus Quæstionum sinus, sed primitias quasdam, & quasi libamenta ... dedimus.

A. Gell. Prefaz.

LIBRO PRIMO

Dell' Algoritmo, e delle Equazioni di primo, e secondo grado.

CAPO PRIMO.

Algoritmo delle quantità intere.

I. Ogni quantità, qualor venga espressa con lettere alfabetiche, chiamasi *quantità algebraica*: così due linee, due velocità, due numeri &c. se vengano espressi colle lettere *a*, *b* &c. si chiamano quantità algebraiche. Altre di queste son dette *semplici*, altre *composte*. La quantità semplice è quella, che vien espressa da una, o più lettere, senza frapporvi alcuno di questi segni $+$, $-$, che or ora spiegheremo, come a, ab, aac &c. La composta poi è quella, che vien espressa con più lettere, mà trà loro dai predetti segni separate, come $a+b$, $aa-ff+bb$ &c., $a+b$ s' appella *binomio*, ovvero di due termini, $aa-ff+bb$ si chiama *trinomio*, ovvero di tre termini &c. e quella di più termini in genere si chiama *polinomio*.

II. La somma delle quantità semplici si fà colla seguente crocetta $+$; onde volendosi sommare la quantità a con la quantità b si scriverà $a+b$, ovvero $b+a$, che è lo stesso; la quale espressione significa a più b, ovvero b più a, cioè la somma delle due quantità b ed a. Se le quantità fossero espresse con la medesima lettera, cioè se fosse da sommarsi a con a, in vece di scrivere $a + a$, si scrive $2a$; il numero 2, affisso alla lettera a, si chiama *coefficiente*, il di cui vero officio è indicare, che $2a$ stà ad a, come esso coefficiente 2 all' unità: alla quantità, in cui non havvi alcun coefficiente, s' intende per coefficiente l' unità. Che se le quantità da sommarsi, espresse con la medesima lettera, abbiano coefficienti, si sommino questi come nella volgare Aritmetica, e la somma si premetta alla lettera comune, così la somma di $2a$ più $3a$ sarà $5a$.

III. La sottrazione delle quantità semplici si fà colla seguente lineola orizzontale —, la quale dee preporsi alla quantità sottraenda: così se si avrà da sottrarre a da b si farà $b - a$. Se le quantità fossero espresse con la medesima lettera, basterebbe sottrarre un coefficiente dall' altro, e premettere il residuo alla lettera comune: così se sarà da sottrarsi $2a$ da $4a$, si farà $2a$. E qui bisogna notare, che se, dovendo sottrarre a da b, a è minore di b, la differenza trà b ed a sarà maggiore del zero, per lo che essa si chiama *positiva*; che se a è uguale a b, la differenza sarà nulla, cioè uguale al zero; e finalmente, che se a è maggiore di b, la differenza sarà minore del zero, per lo che essa viene chiamata *negativa*.

IV. Quantunque le quantità negative siano minori del zero, non è però da credere essere tali quantità impossibili, assorde, o immaginarie, che anzi sono da tenersi per vere e reali, come lo sono le positive; Imperocchè siccome le positive denotano veri, e reali eccessi sopra il zero, così la natura delle negative è di denotare veri e reali difetti dal zero; onde nelle espressioni seguenti $o + b$, $o - b$, la quantità b è reale

ugual-

ugualmente, tutta la diversità consistendo, che nel primo caso b denota eccesso sopra il zero, nel secondo denota difetto dal zero; cioè, che le due espressioni $o + b$, $o - b$ denotano doversi prendere la quantità b in parti totalmente opposte, principiando da dove la quantità è zero: Così se nel primo caso b denotasse l' altezza di un monte sopra il piano orizzontale, nel secondo caso b denoterebbe la profondità d' una valle sotto il medesimo piano: se b nel primo caso denotasse il viaggio fatto da Bologna verso Roma, nel secondo caso b denoterebbe il viaggio fatto da Bologna verso Modena, parte totalmente opposta.

V. Da ciò che abbiamo detto si ricava in primo luogo, che la somma delle quantità negative si debba fare per lo segno $-$ non per lo segno $+$, perchè altrimenti non si sommerebbero già le qnantità negative, mà da negative si farebbero positive; quindi la somma di $-b$, e $-a$ si scriverà $-b-a$, ovvero $-a-b$, che è lo stesso. Se le quantità negative saranno espresse con la medesima lettera, cioè se sarà da sommarsi $-a$ con $-a$, invece di scrivere $-a-a$, si scriverà $-2a$; ed in vece di $-3a-5a$, si scriverà $-8a$. Si ricava in secondo luogo, che la sottrazione delle quantità negative si debba fare per lo segno $+$ da premettersi alla quantità sottraenda, e non per lo segno $-$, perchè altrimenti non si farebbe sottrazione, mà somma, e però se sarà da sottrarsi $-a$ da $-b$, si farà $-b+a$, ed in questa maniera verrà determinata la differenza frà $-a$ e $-b$, quando in altra maniera verrebbe determinata la somma di $-a-b$. Se le quantità sono espresse con la medesima lettera, basta sottrarre un coefficiente dall' altro: cioè dovendo sottrarre $-2a$ da $-5a$ si fà $-3a$. Quì ancora è da osservare, che se dovendo ſottrarre $-a$ da $-b$, $-a$ ſarà minore di $-b$, allora la differenza ſarà negativa, che ſe $-a$ è eguale a $-b$, la differenza ſarà zero, e finalmente, che ſe $-a$ è maggiore di $-b$, la differenza ſarà poſitiva: il che può ſchiarare non poco ciocche abbiamo detto di ſopra delle quantità negative.

VI. Similmente ſe ſi vorrà ſommare una quantità negativa con una poſitiva non vi ſarà altro biſogno, che di ſcrivere una quantità dietro l' altra coi ſegni riſpettivi; così la ſomma di più a con $-b$, ſarà $a-b$. E qui avvertaſi, che una quantità poſta ſola, o nel principio d' una fila ſenza ſegno alcuno s' intende ſempre col ſegno poſitivo. Se le quantità foſſero deſignate con la medeſima lettera, allora la ſomma paſſerebbe in ſottrazione; onde baſterebbe ſottrarre una quantità dall' altra, e alla differenza premettere il ſegno della quantità maggiore: così la ſomma di $2a-5a$, ſarà $-3a$, e la ſomma di $5a-2a$ ſarà $+3a$, e la ſomma di $2a-2a$ ſarà zero. Se ſi vorrà ſottrarre una negativa da una poſitiva, ſi muterà il ſegno alla quantità ſottraenda negativa, e poi ſi ſcriverà una dietro l' altra; cioè volendoſi ſottrarre $-a$ da $+b$, ſi farà $b+a$, ed in fatti la differenza, che paſſa trà $+b$ e $-a$, è $b+a$; ſe ſi vorrà ſottrarre b da $-a$ ſi farà $-a-b$, e tale appunto è la differenza, che paſſa tra $-a$, e $+b$. Le quali coſe facilmente s' intenderanno, da chi abbia ben compreſo quanto ſi è detto al §. 4.

VII. La moltiplicazione delle quantità ſemplici ſi denota per la ſola congiunzione delle lettere; e però volendoſi moltiplicare a per b ſi fà ab. Le quantità da moltiplicarſi ſi chiamano *fattori*, e ciò che naſce dalla moltiplicazione ſi chiama *prodotto*. Mà comecchè le quantità da moltiplicarſi poſſono eſſere tutte due poſititive, o tutte due negative, o una positiva, e l'altra negativa; quindi per lo segno da premettersi al prodotto in tutti questi casi diamo la seguente regola: cioè, che quando le quantità da moltiplicarsi hanno il medesimo segno, al prodotto si dee premettere il segno positivo; quando hanno diverso segno, allora al prodotto si dee premettere il segno negativo: così se si avrà da moltiplicare $+a$ per $+b$, ovvero $-a$ per $-b$, il prodotto sarà $+ab$; se poi si avrà da moltiplicare $-a$ per $+b$, ovvero $+a$ per $-b$, il prodotto sarà $-ab$: La ragione di ciò è, che il moltiplicatore non altro denota, che il numero delle volte per cui si dee prendere la quantità moltiplicanda; e però posta la quantità moltiplicanda positiva, se il moltiplicatore è positivo, non havvi dubbio, che la quantità positiva presa per lo numero di volte da esso moltiplicatore indicato sia positiva, e che tanto sia maggiore quanto è maggiore esso numero, e che tanto sia minore, quanto esso numero è minore, onde se il numero sarà zero, la quantità moltiplicata pure sarà zero, e per conseguenza se il numero sarà negativo, cioè minore del zero, la quantità moltiplicata non potrà essere, che minore del zero, cioè negativa; dal che si fà chiaro, che il prodotto di una quantità positiva moltiplicata per una positiva dovrà essere positivo, moltiplicata per zero dovrà essere zero, e moltiplicata per una quantità negativa dovrà essere negativo; al contrario se posta la quantità da moltiplicarsi negativa il moltiplicatore denoti un numero positivo, la quantità presa per questo numero sarà negativa, e tanto sarà maggiore quanto è maggiore questo numero, e tanto sarà minore quanto questo numero è minore, onde essendo questo numero eguale al zero, la quantità negativa moltiplicata diventa ancor essa zero; e per conseguenza posto il mol-

moltiplicatore negativo, cioè minore del zero, la quantità moltiplicata non può essere che maggiore del zero, cioè positiva; dal che si fà chiaro, che il prodotto d'una quantità negativa per una positiva dovrà essere negativo, per una quantità uguale a zero, dovrà essere zero, e per una quantità negativa dovrà essere positivo; Quindi nasce la regola generale per gli segni da mettersi innanzi ai prodotti: cioè dee il segno essere positivo se i fattori hanno i medesimi segni; negativo se hanno segni differenti. Se le quantità da moltiplicarsi fossero più di due, prima si moltiplicano due, e il prodotto loro si moltiplica per la terza, e così di mano in mano sino all'ultima: se dunque saranno da moltiplicarsi $+a$, $-b$, $+c$, si moltiplicherà $+a$ per $-b$, ed il prodotto $-ab$ si moltiplicherà per $+c$, facendo $-abc$. Se le quantità da moltiplicarsi avessero coefficienti, si moltiplicano questi come nella volgare Aritmetica, e il prodotto si premette alle quantità congiunte con il segno ricavato dalla regola data: così dovendosi moltiplicare $-3a$ per $+10b$, il prodotto sarà $-30ab$. Si noti inoltre, che il prodotto delle due quantità a, e b viene egualmente denotato dall'espressione ab, che dall'espressione ba; perchè si riduce allo stesso moltiplicare a per, b, che b per a, come si ricava ancora dall'Aritmetica volgare.

VIII. Quando le quantità da moltiplicarsi sono due uguali, e coi medesimi segni, per cagione di esempio se si debba moltiplicare a per a, il prodotto aa si chiama *seconda podestà* di a, ovvero *quadrato* di a, l'a poi si chiama *prima potestà* di se stessa. Quando le predette quantità sono tre il prodotto aaa si chiama terza potestà di a, ovvero cubo, se sono quattro, il prodotto $aaaa$ si chiama quarta potestà, e così

così successivamente. In vece però di scrivere aa, aaa, $aaaa$ si scrive a^2, a^3, a^4, i quali numeri 2, 3, 4, si chiamano *esponenti*, o *indici* delle potestà, perchè espongono una potestà di a; così in a^2 il 2 indica la seconda potestà di a, o sia a moltiplicata una volta per se stessa, in a^3 il 3 indica la terza potestà di a, o sia a moltiplicata due volte per se stessa &c. e generalmente a^n indica una qualunque podestà di a, la quale chiamasi n, o sia a moltiplicata per se stessa tante volte quante unità sono nel numero indicato da n diminuito dell' unità; si rifletta dunque esservi gran differenza tra $2a$, e a^2, perchè il $2a$ significa il doppio di a, e a^2 significa la seconda potestà di a, se a fosse uguale a 4, $2a$ sarebbe uguale a 8, e a^2 sarebbe uguale a 16.

IX. È facile raccogliere, che, per moltiplicare le potestà d' una medesima quantità, si debba sommare gli esponenti, e che questa somma sia l' esponente della nuova potestà nata dalla moltiplicazione di tali potestà; perchè se si avesse da moltiplicare aa per aaa, il prodotto sarebbe $aaaaa$; in cui l' a sarebbe posta tante volte, quante è posta nei due fattori presi insieme, ma gli esponenti dei fattori denotano il numero delle volte che a è posta nei due fattori stessi; onde la somma loro denota il numero delle volte che a è posta nel prodotto; cioè la somma degli esponenti dei fattori è l' esponente del prodotto: quindi per moltiplicare a^2 per a^3 si dee fare a^5. Dalle cose dette si ricava ancora la maniera d' inalzare una data quantità a qualunque potestà, altro per ciò fare non si dee, che prendere l' esponente della data quantità tante volte, quante unità sono nell' esponente della potestà, cioè, che moltiplicare l' espo-

nen-

nente della quantità per l' indice della potestà: così per inalzare b^2 alla potestà terza si dee prendere l' esponente 2 tre volte, essendo il tre l' indice della potestà terza, cioè si dee moltiplicare l' esponente due per l' indice tre, e scrivere b^6, che sarà la terza potestà di b^2; la potestà seconda di a^3 sarà a^6, la potestà terza, sarà a^9, e generalmente la potestà n di a^m sarà a^{mn}; similmente la potestà seconda di $a^2 b^3$ sarà $a^4 b^6$, e la podestà p di $a^m b^n$ sarà $a^{mp} b^{np}$. Alle volte senza fare attualmente l' operazione giova sol tanto indicarla col tirare una linea sopra la quantità, ed accanto alla linea collocando l' indice della potestà in questa guisa $\overline{a\,b}|^n$, per indicare la podestà n di $a\,b$, cioè $a^n b^n$; ed $\overline{a^2 b^3}^m$ per indicare la potestà m della quantità $a^2 b^3$ cioè $a^{2m} b^{3m}$.

X. Nella divisione risolvendosi ciò che è stato composto colla moltiplicazione, ne viene per conseguenza, che dovendo dividere una quantità per un' altra, convenga dalla dividenda togliere il divisore, onde quello che rimane sarà ciò che si domanda *quoto*; ed in fatti moltiplicando di nuovo questo quoto per lo divisore si restituisce il dividendo: così poichè ab è il prodotto di a in b, ne viene che dividendosi $a\,b$ per a il quoto sia b, e dividendo $a.b.c$ per $a.b$, che abbiasi c. La regola dei segni da premettersi al quoto è la stessa di quella data per la moltiplicazione; cioè che i medesimi segni portano segno positivo, ed i diversi negativo: così se si dividerà $a\,b$ per $-a$, ovvero $-a\,b$ per a il quoto sarà $-b$; e se si dividerà $a\,b$ per a, ovvero $-a\,b$ per $-a$ il quoto sarà b: avvertasi che se si divida a per a il quoto è l' unità, perchè que-

questi fattori rimoltiplicati restituiscono il prodotto coi suoi segni rispettivi.

XI. Se le quantità hanno coefficienti si divide il coefficiente del dividendo per lo coefficiente del divisore, il quoto che risulta si affige al quoto delle quantità con la regola dei segni data; così divisa $4ab$ per $-2a$, sarà il quoto $-2b$.

XII. Se la quantità dividenda non ha lettera alcuna commune col divisore, la divisione s' indica come le frazioni numeriche, cioè, si disegna con una linea orizzontale, sopra cui si pone il dividendo, e sotto, il divisore coi segni rispettivi, così dividendo $3ab$ per $-c$ sarà il quoziente $\frac{3ab}{-c}$ uguale a $\frac{-3ab}{c}$, perchè il valore della frazione, cioè il quoto è negativo nell' uno, e nell' altro caso num. 7. così ancora il quoto di $-5ab$ diviso per $-3cd$ è $\frac{-5ab}{-3cd}$ eguale a $\frac{5ab}{3cd}$ essendo nell' uno, e nell' altro caso il quoto positivo. La quantità sopra la linea orizzontale si chiama *numeratore*, e quella sotto *denominatore*, come nelle frazioni aritmetiche. Se nel dividendo vi sono lettere simili a quelle del divisore, si tolgano, ed i residui si scrivano a guisa di frazioni siccome abbiamo detto, così il quoto di ab diviso per xb sarà $\frac{a}{x}$: perchè il divisore moltiplicato per lo quoto, dee essere uguale al dividendo, che sempre s' intende moltiplicato per l' unità; adunque il divisore al dividendo, come l' unità al quoto, e nel caso nostro è xb ad ab, come l' unità ad $\frac{ab}{xb}$; mà la ragione di xb ad

ab è la steſſa della ragione di $x : a$, come ſi sà dalle regole delle proporzioni; onde eſſendo ſimilmente x ad a come l' unità ad $\frac{a}{x}$, l' unità ha la steſſa ragione alle due frazioni $\frac{ab}{xb}$, $\frac{a}{b}$, adunque queſte due frazioni ſono uguali.

XIII. La diviſione poi delle poteſtà ſi fà colla ſottrazione degli eſponenti; cioè ſe ſi abbia da dividere a^4 per a^2, il quoto è a^{4-2} uguale ad a^2, perchè appunto la moltiplicazione delle poteſtà ſi fà per la ſomma degli eſponenti; Se l' eſponente del diviſore è minore dell' eſponente del dividendo, l' eſponente del quoto ſarà poſitivo; ſe uguale ſarà zero, ſe maggiore negativo; così l' eſponente del quoto di a^4 diviſo per a^2 ſarà 2; l' eſponente del quoto di a^4 diviſo per a^4 ſarà zero, e l' eſponente di a^4 diviſo per a^6 ſarà -2, e però nel primo caſo il quoto ſarà a^2, nel ſecondo ſarà 1, nel terzo a^{-2}, le quali eſpreſſioni equivalgono alle ſeguenti, cioè ad aa nel primo caſo, ad 1 nel ſecondo, e ad $\frac{1}{aa}$ nel terzo, perchè il quoto di a^4 diviſo per a^2 è $\frac{aaaa}{aa}$ uguale ad a^2, il quoto di a^4 diviſo per a^4 è uguale ad $\frac{aaaa}{aaaa}$ uguale ad 1, uguale ad a^0; e finalmente il quoto di a^4 diviſo per a^6 è uguale ad $\frac{aaaa}{aaaaaa}$ uguale ad $\frac{1}{aa}$, uguale ad a^{-2}. Queſte poteſtà con l' eſponente negativo ſi chiamano *poteſtà negative*; le quali in realtà non diſegnano altro, che l' unità diviſa per tal poteſtà; onde a^{-2},

a^{-3},

a^{-3}, a^{-4} sarà lo stesso, che $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^4}$.

XIV. Dall' Algoritmo delle quantità semplici nasce chiaramente l' Algoritmo delle quantità composte: per sommare dunque le quantità composte non vi sarà altro bisogno, che di scriverle per fila una dietro l' altra coi segni rispettivi; Per sottrarle poi si dovrà mutare tutti i segni alla quantità sottraenda, e poi fare la somma. Si avverta però tanto nella somma, quanto nella sottrazione di ridurre ad una sola quantità semplice quelle espresse con le medesime lettere, siccome abbiamo insegnato al §. 2. 3. Siano da sommarsi le quantità composte $a + b - c$, $3a - d + c$, la somma sarà $4a + b - d$, e la somma delle quantità composte $6x + 9y$, $10x - 3y$ sarà $16x + 6y$, e delle quantità $ab - 2ac + z^2$, $-ab + 2ac + z^2$ sarà $2z^2$. Se poi dalla quantità $4x + 3b$ si dovrà sottrarre $a + y$, il residuo sarà $4x + 3b - a - y$; se da $x + b$ si sottrarrà $-a - b$ il residuo sarà $x + a + 2b$. Se da $ab + c^2$ si sottragga $-ab + c^2$, il residuo sarà $2ab$.

XV. L' uso à insegnato agli Analisti di scrivere in linea verticale tutte le quantità sommande, e sottraende, le quali siano espresse colle stesse lettere: onde i termini delle quantità sommande A, B, C si disporranno nella seguente maniera per ottenere facilmente la somma D.

$$
\begin{array}{lrrrrr}
A. & a^3 & -3a^2x & +4ax^2 & -2x^3 & \\
B. & 2a^3 & -a^2x & -2ax^2 & +x^3 & \\
C. & -a^3 & & +2ax^2 & +2x^3 & +b^3 \\
\hline
D. & 2a^3 & -4a^2x & +4ax^2 & +x^3 & +b^3
\end{array}
$$

Se da A si dovrà sottrarre B facilmente si otterrà la differenza C

$$\begin{array}{ll} A. & 3a^5 - 2a^2b^3 + 4a^4b + a^4y \\ B. & a^5 - 3a^2b^3 + 3a^4b + b^4y \\ \hline C. & 2a^5 + a^2b^3 + a^4b + a^4y - b^4y \end{array}$$

XVI. La moltiplicazione delle quantità composte si fà moltiplicando un fattore per ciascun membro dell' altro fattore, e sommando tutti questi parziali prodotti secondo le regole date. Eccone gli esempi: Sia da moltiplicarsi A per B, il prodotto sarà C.

$$\begin{array}{ll} A & a + b - c \\ B & y \\ \hline C & ay + by - cy \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} A & a + b - c \\ B & y - a \\ \hline & ay + by - cy \\ & -a^2 - ba + ca \\ \hline C & ay + by - cy - a^2 - ba + ca \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} A & 3abc + 2x^3 \\ B & -a^2 + 3x^2 \\ \hline & -3a^3bc - 2x^3a^2 \\ & +9x^2abc + 6x^5 \\ \hline C & -3a^3bc - 2x^3a^2 + 9x^2abc + 6x^5 \end{array}$$

XVII. Quando la moltiplicazione delle quantità composte non si vuole attualmente fare, mà solamente accennare, si tira una retta sopra ciascuno dei moltiplicatori, e fra essi si pone o il punto, ovvero questo segno $\times$ nella seguente maniera $\overline{a+b}\,.\,\overline{c-d}$, ovvero $\overline{a+b}\times\overline{c-d}$, che significa $a+b$ moltiplicato per $c-d$; quando si vuole indicare le potestà della quantità composta si tira sopra questa una retta, a cui si premette

l' esl' esponente, che dee indicare la potestà; cioè $\overline{a+b}^2$ significa la seconda potestà di $a+b$, cioè $a+b$ per $a+b$ moltiplicati; $\overline{a+b}^3$ significa la terza potestà di $a+b$, cioè $a+b$ moltiplicata due volte per $a+b$; e generalmente $\overline{a+b}^n$ significa la potestà n di $a+b$, cioè $a+b$ moltiplicata per $a+b$ tante volte quante unità sono nel numero $n-1$, come si raccoglie dal §. 8.

XVIII. Non sembrami fuor di proposito confermare con qualche esempio, che i segni diversi dei fattori portino segno negativo al prodotto, e che i segni negativi dei fattori al prodotto portino segno positivo: sia dunque da moltiplicarsi $2a-a$, uguale ad a, per $3a-2a$, uguale ad a^1, è chiaro che il prodotto sarà a^2; dico che questo prodotto non si può salvare se non nella regola dei segni data; si faccia la moltiplicazione, e si lascino per ora da parte i segni dei prodotti eccettuatene quello del primo termine, che è senza alcun contrasto positivo; avremo dunque secondo le regole della moltiplicazione $3a-2a$ moltiplicata per $2a-a$ uguale a $6a^2 * 4a^2 * 3a^2 * 2a^2$. Il primo termine $6a^2$ è sestuplo di a^2, onde acciocchè tutto il prodotto sia uguale ad a^2, bisogna necessariamente, che fra gli altri tre termini, ve ne siano di negativi; se fossero negativi tutti tre, il prodotto resterebbe $-3a^2$ diverso da a^2, se uno solo dei tre fosse negativo pure il prodotto non sarebbe uguale ad a^2, ne tampoco si salverebbe, se fosse negativo l' ultimo con un altro, ma soltanto si salva, quando si ponghino negativi i due termini di mezzo, e positivo l' ultimo, ed in fatti $6a^2-4a^2-3a^2+2a^2$ è uguale ad a^2, come si richiede.

XIX.

XIX. Nella divisione delle quantità composte fa d' uopo distinguere due casi; o il divisore è ancor egli composto, o nò; se non è composto, si divide ciascun termine del dividendo per lo divisore; per cagion d' esempio il quoto di $ab + cb - db$ diviso per b sarà $a + c - d$. Se il dividendo non à lettera comune col divisore, il quoto si indica a guisa di frazioni, e però il quoto di $ab + cb - db$ diviso per x sarà $\frac{ab + cb - db}{x}$. Se alcuni membri del dividendo avessero lettere simili a quelle del divisore, ed altri nò; allora la divisione si può indicare a guisa di frazioni; ovvero si può dividere i membri divisibili, ed indicare il rimanente del quoto a guisa di frazioni; così se si avesse da dividere $ab + bc - cd$ per b, il quoto o sarebbe $\frac{ab + bc - cd}{b}$, o $a + c - \frac{cd}{b}$, nel qual caso il quoto parte sarebbe intiero, e parte fratto.

XX. Quando il divisore ancor egli è quantità composta, allora bisogna ordinare il dividendo, e il divisore relativamente ad una lettera, che sembrerà più a proposito; cioè si scriverà tanto nel divisore, quanto nel dividendo in primo luogo quel termine, in cui essa lettera è alzata alla massima potestà; in secondo luogo si scriverà quel termine in cui essa lettera è alla potestà prossima, e così successivamente; la quantità composta $y^3 + xy^2 + x^2y + x^3$ è ordinata secondo la lettera y, per ordinarla poi secondo la lettera x bisogna scrivere $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$. Preparati in questa maniera il dividendo, e il divisore si divide il primo termine del dividendo per lo primo termine del divisore; ed il quoziente si scrive a parte: per questo quoziente si moltiplica tutto il divisore, ed il prodotto si sottrae dal dividendo; fatta la sottrazione, e ordinati i termini di nuovo si divide nella stessa maniera per lo primo termine del divisore il primo termine del residuo, ed il quoto si scrive presso l' altro col proprio segno; e ciò si replichi fino a tanto che dalla sottrazione nulla rimanga; la somma poi di tutti i quoti parziali sarà il quoto totale.

XXI. Sia da dividersi A per B; si ordini l' una e l' altra formula ex. g. per la lettera a, come si vede in C ed E; poi si divida il primo termine di C, per lo primo termine di E, ed il quoziente a con il suo segno si ponga in D; poi per questo quoziente si moltiplichi E, ed il prodotto si sottragga da C, avremo il residuo M; di nuovo si divida il primo termine di M per lo primo termine di E, ed il quoto $-d$ si scriva in D con il suo segno; per questo quoto si moltiplichi E, ed il prodotto si sottragga da M, avremo zero per residuo; onde D è il quoto totale; ed in fatti moltiplicando D per E si restituisce A.

$$
\begin{array}{llll}
A & ba - db - da + aa, & B & b + a \\
C & aa + ba - da - db, & E & a + b \\
 & -aa - ba & D & a - d \\
\hline
M & \quad -da - db & & \\
 & \quad +da + db & & \\
\hline
 & \quad\ 0 \quad\ 0 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{Dividendo} & 5x^4 - 14x^3a - 6x^2ab - 3x^2a^2 + 2xa^2b \\
 & + a^2b^2, \quad \text{Divisore } 5x^2 + xa - ab \\
\text{Primo resto} & -15x^3a - 5x^2ab - 3x^2a^2 + 2xa^2b \\
 & + a^2b^2. \quad \text{Quoto } x^2 - 3ax - ab \\
\text{Secondo resto} & \qquad -5x^2ab - xa^2b + a^2b^2 \\
\hline
\text{Terzo resto} & \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0
\end{array}
$$

Di-

Dividendo $9x^2 - y^2 + ab$, Divisore $3x - y$
Primo residuo $+3xy - y^2 + ab$ Quoto $3x + y$
Secondo residuo ab

Non potendosi questo residuo in alcuna maniera dividere per $3x - y$, è segno, che la divisione non si può ottenere perfetta; onde il quoto sarà $3x + y$ con la frazione $\frac{ab}{3x - y}$, alle volte il quoziente d' una frazione si disegna in questa maniera $\overline{9x^2 - y^2 + ab} : \overline{3x - y}$, ovvero $[9x^2 - y^2 + ab] : [3x - y]$.

CAPO II.

Algoritmo delle Frazioni.

I. Non dovrà maravigliarsi alcuno se cominciamo l' Algoritmo delle frazioni dalla moltiplicazione, e divisione; per indi passare alla somma, e alla sottrazione; Imperocchè siccome l' Algoritmo delle quantità intere fù cominciato dalla somma, e dalla sottrazione, per essere tali operazioni le più semplici, e le più vicine alle prime nozioni delle quantità intere, così delle frazioni essendo la moltiplicazione e divisione operazioni più semplici, e più prossime alle nozioni loro fondamentali, dalle medesime si dee cominciare.

II. Prima d' ogn' altra cosa però avvertire conviene, che v' è una perfetta analogia trà la proporzione, e la frazione; imperocchè la proporzione altro non essendo, che il rapporto di continenza, che ha l' antecedente al conseguente, il qual rapporto si disegna dividendo l' antecedente per lo conseguente, il va-il valore della proporzione ſarà ottimamente diſegnato per lo valore d' una frazione, il numeratore di cui ſia l' antecedente, e il denominatore il conſeguente, i quali ſi ſogliono chiamare *termini* della frazione; onde la ragione di a a b ſi diſegnerà per $\frac{a}{b}$, a ſarà il numeratore, b il denominatore; e comecchè due quantità moltiplicate, e diviſe per la ſteſſa quantità non mutano proporzione, così la frazione non muterà valore, ancorchè ſi moltiplichi, e ſi divida il numeratore, e denominatore per la medeſima quantità; e però $\frac{a}{b}$ ſarà uguale ad $\frac{ac}{bc}$.

III. Similmente ſiccome nella proporzione quando l' antecedente è uguale al conſeguente l' unità eſprime queſta ragione di continenza, e quando è maggiore, la ragione di continenza è eſpreſſa da un numero maggiore dell' unità, e quando è minore, da un minore; così nella frazione $\frac{a}{b}$ ſe il numeratore a è uguale al denominatore b, il valore d' eſſa frazione ſarà uguale all' unità, ſe a è maggiore di b, il predetto valore ſarà maggiore dell' unità; e ſe a è minore di b, ſarà minore. Tutto ciò naſce dalla dottrina delle proporzioni di cui ſupponiamo inſtruito, chi ſi applica allo ſtudio dell' Algebra. Si veda il cap. 1. §. 10. 12.

IV. Ora per moltiplicare una frazione ver. gr. $\frac{a}{b}$ per una quantità intiera c, baſta moltiplicare il numeratore a per la quantità intiera c, perchè $\frac{a}{b}$ in c non è che il prodotto di a in c diviſo per b; e però ſe la quantità moltiplicante la frazione foſſe uguale al denominatore, ſi reſtituirebbe la quantità intiera,

per-

perchè $\frac{a}{b}$ moltiplicato in b è uguale ad $\frac{ab}{b}$, uguale ad a, per quello che si è detto di sopra.

V. Essendo poi la divisione una operazione totalmente opposta alla moltiplicazione, a dividere $\frac{a}{b}$ per c bisognerà moltiplicare non già il numeratore a, mà il denominatore b per c, e fare $\frac{a}{bc}$, perchè col moltiplicare ancora a per c ottenendosi la frazione $\frac{a}{b}$ tramutata in $\frac{ac}{bc}$, si inferisce, che il moltiplicare il numeratore per una quantità, sia una operazione totalmente opposta al moltiplicare il denominatore per la medesima quantità; dunque trovandosi l' istessa opposizione ancora trà la moltiplicazione, e la divisione, ne avviene che moltiplicare il denominatore di una frazione per una quantità sia lo stesso, che dividere la frazione per quella quantità. Se poi la quantità intiera c si divida per la frazione $\frac{a}{b}$, si avrà un' altra frazione il cui numeratore sarà c, ed il denominatore sarà $\frac{a}{b}$, e moltiplicato tanto il numeratore c, quanto il denominatore $\frac{a}{b}$ per la quantità b, il numeratore diverrà cb, ed il denominatore a, onde la detta frazione si muterà nella equivalente $\frac{cb}{a}$; per dividere dunque una quantità intiera per una frazione si ha questa regola generale: cioè si tramuta nella frazione il numeratore in denominatore, e il denominatore in nu-

numeratore, e poi si moltiplica la frazione così rovesciata per la data quantità.

VI. Se si divida una frazione per un' altra ve. gr. $\frac{a}{b}$ per $\frac{y}{x}$, si avrà una nuova frazione, il cui numeratore sarà $\frac{a}{b}$, ed il denominatore $\frac{y}{x}$; e moltiplicato il numeratore, e il denominatore di questa frazione per bx, il primo diverrà ax, il secondo by, e la frazione $\frac{ax}{by}$, vale a dire la divisione di una frazione per un' altra si avrà, se si moltiplicherà il numeratore della dividenda per lo denominatore del divisore, e il denominatore della dividenda per lo numeratore del divisore.

VII. Comecchè tale operazione viene disfatta dal moltiplicare numeratore per numeratore, e denominatore per denominatore, quindi moltiplicando numeratore per numeratore, e denominatore per denominatore si otterrà la moltiplicazione d' una frazione per l' altra; così se vorrò moltiplicare $\frac{a}{b}$ per $\frac{y}{x}$ dovrò fare $\frac{ay}{bx}$. Se poi voglio la frazione $\frac{a}{b}$ a seconda potestà, cioè moltiplicare $\frac{a}{b}$ per $\frac{a}{b}$ devo alzare a seconda potestà il numeratore, e il denominatore; onde abbia $\frac{a^2}{b^2}$ potestà seconda di $\frac{a}{b}$; e generalmente la potestà m della frazione $\frac{a}{b}$ è $\frac{a^m}{b^m}$.

VIII. Ciocchè abbiamo detto fin qui, benchè sia stato illustrato con esempi di quantità semplici positive, vale ancora, come è chiaro, nelle quantità composte qualunque positive o negative che siano, e però $\frac{a+b}{c-d}$ sarà uguale ad $\frac{ax+bx}{cx-dx}$, $\frac{yab-cab}{2xab}$ è uguale a $\frac{y-c}{2x}$, e $\frac{ab-ac}{-xb+xc}$ è uguale ad $\frac{a}{-x}$, uguale a $\frac{-a}{x}$. Similmente a moltiplicato per $\frac{a-x}{c+d}$ sarà $\frac{aa-xa}{c+d}$, ed $\frac{a-x}{c-d}$ diviso per a sarà $\frac{a-x}{ca-ad}$, ed a diviso per $\frac{x+y}{z}$ sarà $\frac{az}{x+y}$, così $\frac{x+y}{a-z}$ moltiplicato in $\frac{x-y}{a+z}$ sarà $\frac{x^2-y^2}{a^2-z^2}$, ed $\frac{x+z}{c}$ diviso per $\frac{-d^2}{x+z}$ sarà $\frac{x^2+2xz+z^2}{-cd^2}$. E finalmente $\frac{\overline{x^2+y^2}^m}{\overline{p+q}^m}$ sarà la potestà m della frazione $\frac{x^2+y^2}{p+q}$.

IX. Avanti di passare alla somma, e alla sottrazione delle frazioni fra di loro, e con interi, bisogna in primo luogo dar la maniera di ridurre gl' interi e le frazioni a frazioni, che abbiano il medesimo denominatore, dopo che facilissime si renderanno le predette operazioni. Per ridurre un' intero allo stesso denominatore d' una frazione si moltiplica l'intiero per lo denominatore della frazione, e al prodotto, tirata la solita lineola orizzontale, si sottoscrive lo stesso denominatore; così volendo ridurre a ad una frazione dello stesso denominatore di una data $\frac{x}{y}$ si fà $\frac{ay}{y}$. Due

fra-

frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{x}{y}$ facilmente si riducono alla stessa denominazione; si moltiplichi il numeratore, ed il denominatore della prima per lo denominatore della seconda, ed il numeratore, e denominatore della seconda per lo denominatore della prima, si otterranno $\frac{ay}{by}$, $\frac{bx}{by}$ dello stesso denominatore uguali alle proposte.

X. Se le frazioni da ridursi al medesimo denominatore fossero più di due ex. gr. $\frac{3a}{2b}$, $\frac{8a+5c}{a-c}$, $\frac{y}{x}$, prima si riduchino al medesimo denominatore due ve. gr. $\frac{3a}{2b}$ ed $\frac{y}{x}$ tramutandole in $\frac{3ax}{2bx}$ e $\frac{2by}{2bx}$, e poi si riduchino al medesimo denominatore $\frac{2by}{2bx}$, ed $\frac{8a+5c}{a-c}$, tramutandole in $\frac{2bya-2byc}{2bxa-2bxc}$, e $\frac{16abx+10bxc}{2bxa-2bxc}$, al qual denominatore sarà ridotta ancora la frazione $\frac{3ax}{2bx}$, se si moltiplichi il di lei numeratore, e denominatore per $a-c$, cioè sarà $\frac{3a^2x-3axc}{2bax-2bxc}$. Da ciò si raccoglie che si ridurranno più frazioni al medesimo denominatore, se si prenderà per comune denominatore il prodotto di tutti i denominatori, e poi si moltiplicherà ciascuno numeratore per lo prodotto de' denominatori, escluso il denominatore di quella frazione, di cui si moltiplica il numeratore. Siano da ridursi al medesimo denominatore le frazioni, $\frac{c}{a+b}$, $\frac{y^2}{a-b}$, $\frac{x+z}{u}$, si prenda il prodotto dei denominatori a^2u-b^2u

per

per comune denominatore, e poi si moltiplichi c per $au - ub$, e si faccia la frazione $\frac{auc - ubc}{a^2u - b^2u}$, poi si moltiplichi y^2 per $au + ub$, e si faccia l'altra frazione $\frac{y^2au + y^2ub}{a^2u - b^2u}$, finalmente si moltiplichi $x + z$ per $a^2 - b^2$, e facciasi la frazioue $\frac{a^2z + a^2x - b^2z - b^2x}{a^2u - b^2u}$, e così le tre date frazioni saranno ridotte a tre altre dello stesso denominatore, ed equivalenti alle prime.

XI. Con più semplicità si ridurrebbero al medesimo denominatore le frazioni se il denominatore d'una fosse divisore del denominatore dell' altra, come succede in $\frac{a}{b}$, e $\frac{cx}{yb}$, in cui è b divisore di yb; perchè ritrovato il quoto y col dividere il denominatore yb per b, si moltiplicherà il numeratore, e denominatore della frazione $\frac{a}{b}$ per esso quoto y, cioè si farà $\frac{ay}{by}$.

XII. Sapendosi ridurre le frazioni al medesimo denominatore facil cosa è la somma, e sottrazione loro: siano da sommarsi le frazioni $\frac{c}{b}$, $\frac{x}{a-b}$, $\frac{z+d}{u}$. Si riducano in primo luogo le dette frazioni al comune denominatore facendo $\frac{cau - cbu}{bau - b^2u}$, $\frac{bxu}{aub - b^2u}$, $\frac{zab + dab - zb^2 - db^2}{bau - b^2u}$, poi si sommino i numeratori secondo l' Algoritmo delle quantità intiere, e a questa somma si sottoponga il comune denominatore, cioè si faccia

$\frac{cau - cbu + bxu + zab + dab - zb^2 - db^2}{bau - b^2 u}$, e questa sarà, come è chiaro la somma delle proposte frazioni. Sia da sottrarsi la frazione $\frac{c}{b}$ da $\frac{x+z}{a+u}$, si riducano queste frazioni al medesimo denominatore, cioè si faccia $\frac{ac+uc}{ba+bu}$, ed $\frac{xb+zb}{ba+bu}$, e poi si sottragga il numeratore della prima del numeratore della seconda, e alla differenza si sottoponga il comune denominatore: cioè si faccia $\frac{-ac-uc+xb+zb}{ba+bu}$, e sarà fatta la sottrazione. Se si abbia da fare somme e sottrazioni con intieri, e coi fratti, basta considerare l' intero come fratto, tirando sotto l' intero una lineola orizzontale, e sottoscrivendo a questa l' unità nella seguente guisa $\frac{a}{1}$, $\frac{mn}{1}$ &c. perchè ciascun intero si può sempre considerare diviso per l' unità, senza che venga ad alterarsi il suo valore.

XIII. Avvi un' altra operazione intorno alle frazioni di non mediocre importanza, ed è di ridurre le frazioni alla più semplice espressione possibile; imperocchè accade alle volte, che il numeratore, ed il denominatore della frazione sian divisibili per la stessa quantità; dunque diviso per questa l' uno, e l' altro, sarà la frazione ridotta ad una dello stesso valore espressa con termini più semplici: per cagion d' esempio se si dividerà il numeratore, ed il denominatore della frazione $\frac{ab}{cb}$ per la quantità b, sarà la frazione $\frac{ab}{cb}$ tramutata in un' altra più semplice $\frac{a}{c}$, e quanto

più

più ſarà compleſſo tal diviſore tanto più ſemplici ancora ſaranno i termini della frazione equivalente; onde ſe il diviſore ſarà il maſſimo, la frazione allora ſarà ridotta a termini minimi; così la frazione $\frac{abn+cbn}{xbn}$ perchè à diviſibile per n il numeratore, ed il denominatore, ſi può ridurre alla frazione più ſemplice $\frac{ab+cb}{xb}$; ma inoltre oſſervo, che i termini di queſta frazione ſono diviſibili per b; onde ancor queſta ſi può ridurre alla più ſemplice $\frac{a+c}{x}$; la qual eſpreſſione ſarebbe ſtata da me ritrovata, ſe dal principio aveſſi diviſo i termini della data frazione $\frac{abn+cbn}{xbn}$ per lo maſſimo loro diviſore bn, e non per n ſoltanto. Non ſi può però ſempre a prima occhiata ſcoprire i maſſimi diviſori delle quantità ancorchè realmente vi ſiano, conviene adunque ricorrere al ſeguente metodo.

$$\begin{array}{ll|ll}
A & x^3 + ax^2 - c^2x + ac^2 & B & x^2 + \overline{a-y}\cdot x + ay \\
M & x^3 + ax^2 - yx^2 + ayx & Q & x^2 + ax \\
\hline
C & yx^2 + \overline{c^2+ay}\cdot - x + ac^2 & P & -xy + ay \\
N & yx^2 - ayx + y^2x - ay^2 & K & -xy + ay \\
\hline
D & \overline{c^2+y^2}\cdot - x + ac^2 + ay^2 & & 0 \quad 0
\end{array}$$

Quoti

$$x$$

$$-y$$

$$\frac{x}{c^2+y^2}$$

$$\frac{y}{c^2+y^2}$$

XIV.

XIV. Sia dunque da cercarsi il comun divisore delle quantità A, B, e siano queste quantità ordinate secondo una lettera ve. gr. x; si divida il primo termine di A, in cui x è alzata a potestà superiore per lo primo termine di B, in cui x è a potestà inferiore, ed il prodotto M del quoto x nel divisore B, sottratto dalla quantità A, dà di residuo C; e perchè in C la quantità x è alzata alla medesima massima potestà, che nel divisore B, si seguiti a dividere il primo termine del residuo C per lo primo termine del divisore B, e similmente sottratto il prodotto N di questo ultimo quoto $-y$ nel divisore B, si avrà il residuo D; e comecchè nel residuo D la quantità x è a minor potestà, che nel divisore B, però si inverta l' ordine; cioè fatto il divisore B dividendo, ed il residuo D divisore si seguiti secondo il solito la divisione, e sottratto Q prodotto solito da B, si avrà il residuo P: Questa quantità P avendo x alla medesima potestà di D si divida per D, e sottratto il solito prodotto K da P si avrà finalmente zero. Onde P ultimo residuo è il comune divisore: imperocchè se diviso P per D il residuo è zero, segno è che D pur è divisibile esattamente per P; perchè chiamato R il quoto nato dalla divisione di P per D, sarà P uguale a DR, e dividendo tanto P, quanto DR per R sarà $\frac{P}{R}$ uguale a D, cioè $P \times \frac{1}{R}$ uguale a D, dunque D si può risolvere in due fattori P, $\frac{1}{R}$; il che quì significa, che D sia esattamente divisibile per P. Onde il prodotto di D in $\frac{x}{c^2+y^2}$ uguale a Q sarà ancor egli esattamente divisibile per P; perciò $Q+P$, cioè B sarà divisibile per P, similmente sarà B moltiplicato per $-y$, cioè N, pure divisibile per P; ed essendo ancora D divisibile per P, sarà $N+D$, cioè C, divisibile per P: similmente B moltiplicato in x, cioè M, è divisibile per P; onde $M+C$, cioè A, sarà ancor egli divisibile per P; e però P è il comun divisore delle due quantità A, e B. Sarà poi il massimo, perchè un maggiore non dividerebbe perfettamente l' ultimo residuo, cioè il P, come richiede la natura dei comuni divisori.

$$\begin{array}{ll|l} Q & ab^2 - b^2f + x^2a - x^2f,\ P\ ab - bf + ca - cf & \text{Quoti} \\ C & \underline{-cab + cfb + ax^2 - x^2f} & b \\ D & ax^2 - x^2f + c^2a - c^2f & -c \end{array}$$

XV. Si cerchi il divisore delle due quantità Q, P ordinate secondo la lettera b; si divida Q per P, e avremo il primo residuo C, questo residuo diviso pure per P si ritroverà il secondo residuo D, il quale non è più divisibile per P ordinato secondo la lettera b: ma non per questo si dee conchiudere, che le predette quantità Q, P non abbiano massimo comun divisore; imperocchè se si ordineranno per la lettera a, o per la lettera f si troverà il comun divisore $a-f$; e la ragione è, che per ritrovare il massimo comun divisore di due quantità, bisogna che esse quantità siano ordinate per una lettera del medesimo comune divisore come si vede nell' esempio addotto; e comecche non si sà, che lettera contenga il comun divisore; però prima di decidere del massimo comun divisore di due quantità, bisogna ordinarle per tutte le lettere; se poi fatta tal prova non si riuscirà nell' intento, segno è che tali quantità non hanno alcuno comun divisore.

XVI. Con tutto che una quantità c non possa dividersi per un' altra quantità $a+b$ esattamente, e che

che per disegnare il quoto di questa divisione siamo obbligati a scrivere $\frac{c}{a+b}$; però si può benissimo intorno le predette quantità esercitare l' operazione solita della divisione. Diviso dunque c per a avremo per quoto $\frac{c}{a}$, sottratto secondo il solito dalla quantità c il prodotto di questo quoto nel divisore $a+b$, uguale a $c+\frac{cb}{a}$, avremo per residuo $\frac{-cb}{a}$; questo residuo di nuovo si divida per a, e risulterà il quoto $\frac{-cb}{a^2}$; si moltiplichi questo quoto nel divisore $a+b$, e sarà il prodotto $\frac{-cb}{a}\ \frac{-cb^2}{a^2}$, questo prodotto si sottragga secondo il solito dalla quantità $\frac{-cb}{a}$, e sarà il nuovo residuo $\frac{+cb^2}{a^2}$; questo residuo ancora si divida per a, e avremo il quoto $\frac{cb^2}{a^3}$; e così continuando l' operazione, la divisione anderà all' infinito, ed il quoto totale, uguale al valore della frazione $\frac{c}{a+b}$, sarà una serie composta di infiniti termini, cioè sarà

$$\frac{c}{a}-\frac{cb}{a^2}+\frac{cb^2}{a^3}-\frac{cb^3}{a^4}+\frac{cb^4}{a^5}\ \&c.$$

XVII. Se b fosse uguale ad a, allora la frazione diventerà $\frac{c}{2a}$, e la serie diventerà $\frac{c}{a}-\frac{c}{a}+\frac{c}{a}-\frac{c}{a}+\frac{c}{a}$ &c. il cui valore sommando termini di numero pari è uguale a zero; sommando poi ter-

 mi-

mini di numero dispari è uguale a $\frac{c}{a}$; onde il valor della somma dei termini è sempre ugualmente distante dal valor della frazione, ora per eccesso, ora per difetto, perchè il valor della frazione $\frac{c}{2a}$ è maggiore del zero per la quantità $\frac{c}{2a}$, è minore poi di $\frac{c}{a}$ pure della quantità $\frac{c}{2a}$, e per questo motivo la serie in tal caso si dice *parallela*; se b è maggiore di a, allora i termini della serie continuamente crescono, perchè il termine susseguente è sempre uguale all' antecedente moltiplicato per $\frac{b}{a}$, la quale quantità in questa supposizione è maggiore dell' unità: dunque la somma dei termini tanto pari, che dispari sempre si scosta dal vero valore della frazione, la prima per difetto, la seconda per eccesso, e però tal serie è detta *divergente*. Se finalmente b è minore di a, allora per una ragion contraria alla addotta di sopra i termini della serie continuamente si diminuiranno; onde la somma dei termini della serie si accosterà sempre più al vero valore della frazione, e però si arriverà a tale accostamento, che si potranno senza sensibile errore disprezzare tutti i susseguenti termini della serie, e prendere la somma di un certo determinato numero di termini per lo valore della frazione d' onde è nata tal serie: Per questo accostamentò tal serie viene detta *convergente*. Bisogna però avvertire, che la predetta somma se sarà, d' un numero pari di termini, sarà altresì minore del vero valore della frazione; se poi sarà d' un numero dispari di termini, supererà il vero valore della frazione; si avverta in oltre, che

quan-

quanto più b è minore d' a tanto più si diminuiscono i termini della serie; e per conseguenza tanto più pochi termini vi vorranno per ricavare il prossimo valore della frazione.

XVIII. Se b fosse quantità negativa tutti i termini della serie saranno positivi, come è chiaro dall' operazione, e la somma dei termini sarà sempre minore del valore della frazione.

XIX. Quantunque la frazione da noi ridotta in serie abbia per numeratore la quantità semplice c e per denominatore il binomio $a+b$; con tutto ciò la predetta operazione si estende a qualunque frazione, perchè qualunque quantità composta si può considerare come semplice, e come un binomio: così $\frac{c+d-e}{a+b+x+z}$ denominando $c+d-e=n$, ed $a+b+x=m$ si tramuterà in $\frac{n}{m+z}$, intorno la quale frazione fatta la solita operazione, e finalmente in vece di n ed m sostituiti i loro valori rispettivi, si avrà una somma equivalente alla proposta frazione.

CAPO III.

Algoritmo dei radicali.

I. Cosa siano le potestà delle quantità è stato esposto al Cap. I. §. 8. Presentemente si dee notare con riflessione, che la quantità da cui nasce la potestà può essere positiva, o negativa; se positiva, tutte le sue potestà saranno quantità positive; come a^2, a^3, a^{-2}, a^{-3} &c. perchè ad ottenere tali potestà si moltiplica

sem-

sempre positivo per positivo. Se poi la quantità d' onde nasce la potestà è negativa, allora bisogna distinguere le potestà d' indice, o di esponente pari, da quelle d' indice dispari. La potestà pari di quantità negativa è quantità positiva, perchè finalmente si moltiplica negativo, per negativo; la potestà dispari è negativa, perchè l' ultima moltiplicazione è di positivo in negativo; così la potestà seconda di $-a$ è a^2, perchè nasce da $-a \times -a$, la potestà terza è $-a^3$, perchè nasce da $a^2 \times -a$, la quarta è a^4, perchè nasce da $-a^3 \times -a$. Da ciò raccogliesi, che la potestà n pari d' una quantità $a+b$ positiva possa ugualmente nascere da $-a-b$ negativa, e che però l' espressioni $\overline{a+b}^2$, $\overline{-a-b}^2$ denotino la medesima quantità positiva; laonde sarà impossibile ritrovar quantità positiva, o negativa, dalla cui moltiplicazione nasca una potenza pari, che sia quantità negativa: così $-a^2$ non denoterà potestà di alcuna quantità; ma il prodotto di $-a$ in $+a$. Le potestà poi dispari, se saranno quantità negative, nasceranno dalla moltiplicazione di quantità negativa; se saranno quantità positive nasceranno dalla moltiplicazione di quantità positiva.

II. L' espressione $-a^n$ è equivoca potendo significare $-a$ alzata alla potestà n, ovvero la potestà n d' a presa negativamente, le quali cose sono diversissime; per togliere adunque quest' inconveniente, quando si saranno alzate quantità negative a qualche potestà, avanti la quantità negativa si metta una lunula, ed i segni, che appartengono alla potestà si ponghino avanti quella; così dovendo sommare la potestà n di $-a$ si scriva $+(-a^n$, se si vorrà sottrarre si scriva $-(-a^n$: similmente $+(\overline{a-b}^2$ significa doversi ag-

aggiungere il quadrato di $a - b$, $-\overline{a-b}^2$ significa doversi sottrarre.

III. Nascendo le potestà dispari positive, da quantità positive, e le negative da negative, succede, che per sottrarre da c^3 la potestà $\overline{-a-b}^3$, che è negativa, o $\overline{a+b}^3$, che è positiva si possa scrivere $c^3+\overline{a+b}^3$, o $c^3-\overline{a-b}^3$; imperocchè siccome si muta dà positiva in negativa, o da negativa in positiva la quantità d' onde nasce la potestà dispari, così da positivo in negativo, o da negativo in positivo si muta il valore della potestà. Ma di questo metodo non ci possiamo servire per sottrarre le potestà di numero pari, perchè quantunque si mutino i segni alla quantità d' onde nasce la potestà pari, la potestà è sempre quantità positiva; onde $c^2+\overline{a+b}^2$, e $c^2-\overline{a-b}^2$ denotano la medesima quantità; per poter poi operare sopra il valore delle potestà pari, si dee ricorrere alla lunula come nel §. precedente.

IV. Siccome ogni quantità si può alzare a qualunque potestà col moltiplicarla successivamente per se stessa, come abbiamo indicato Capo I. §. 8.; così ogni quantità potrà essere qualunque potestà, in riguardo però a diverse quantità; così a^6 sarà sesta potestà di a, sarà terza potestà di a^2, sarà seconda potestà di a^3; perchè a moltiplicata sei volte per se stessa dà a^6, a^2 moltiplicata tre volte per se stessa dà a^6, e a^3 moltiplicata due volte per se stessa pure dà a^6: questa quantità, in riguardo a cui un' altra si chiama potestà, viene detta *radice* di lei, la quale si dice *quadrata* o *seconda* se la potestà sarà quadrata o seconda; come a^3 in riguardo ad a^6; si chiama *cuba*, o *terza*, se se la potestà sarà cuba o terza, come a^2 riguardo a^6; e generalmente la radice si chiama n, se n sarà l' indice delle potestà.

V. Cade subito sotto l' occhio, che il ritrovare o estrarre le radici date dalle quantità sia una operazione totalmente opposta all' alzare le quantità alle potestà; e comecchè le quantità si alzano alle potestà con moltiplicare gli esponenti delle quantità per l' esponente della potestà, cap. 1. §. 9.; per estrarre la radice data da una quantità, basterà dividere l' esponente di questa per l' indice della radice: così per alzare a alla sesta potestà facendosi $a^{1\times6}$, cioè a^6, per estrarre da a^6 la sesta radice si farà $a^{\frac{6}{6}}$, uguale ad a, per estrarre da a^6 la terza potestà si farà $a^{\frac{6}{3}}$, cioè a^2, e per estrarre la seconda si farà $a^{\frac{6}{2}}$, cioè a^3, similmente per estrarre dalla frazione $\frac{a^2}{b^2}$ la radice seconda si fà $\frac{a^{\frac{2}{2}}}{b^{\frac{2}{2}}}$ uguale ad $\frac{a}{b}$.

VI. In quanto poi ai segni da premettersi alle radici bisogna osservare, che posta positiva la quantità, da cui si vuole estrarre la radice, se la radice sarà d' indice dispari, sarà positivo ancora il valore della radice; se poi la radice sarà d' indice pari, il valor della radice sarà doppio, cioè sarà positivo, e negativo, perchè moltiplicando coi segni assegnati le radici secondo il numero dell' indice si restituisce di nuovo la potestà coi proprj segni: così la radice seconda d' a^2 sarà doppia, cioè $+a$, e $-a$, perchè tanto $+a$, quanto $-a$, moltiplicata in se stessa, dà a^2. Quindi per esprimere amendue le radici in una volta

si adosi adopra il segno $\pm$, così la radice seconda di aa sarà $\pm a$; col che s' indica, che doppia è la radice, cioè negativa, e positiva. Posto poi, che la quantità d'onde si vuole estrarre la radice, sia negativa, se la radice à l' indice dispari il suo valore sarà negativo, ma se la radice è d' indice pari, allora il valor della stessa non potrà essere positivo, ne negativo, perchè non si potrà ritrovare alcuna quantità positiva, o negativa, la quale moltiplicata in se stessa secondo il numero dell' indice pari restituisca la potestà di valor negativo, siccome abbiamo visto di sopra: onde la radice in tal caso si dice *impossibile*, o *immaginaria*, tal sarebbe la radice quadrata di $-a^2$, la quale non può essere ne $-a$, ne $+a$, e perciò dicesi impossibile.

VII. Dalla maniera di cavar le radici delle quantità con la divisione degli esponenti delle quantità stesse per l' indice delle radici si raccoglie, che la radice abbia per esponente il quoto nato dalla predetta divisione. Così la radice terza di $\overline{a+b}^{6}$ essendo $\overline{a+b}^{\frac{6}{3}}$, cioè $\overline{a+b}^{2}$, à per esponente il 2 quoto nato dalla divisione di 6 per 3. Spessissime volte accade, che questo quoto non sia quantità intiera, come avviene se cerchiamo la radice seconda di $\overline{a+b}^{3}$, nel qual caso tal radice non si può esprimere, che nella maniera seguente $\overline{a+b}^{\frac{3}{2}}$; quindi si intende cosa siano le potestà d' esponente fratto, che si chiamano ancora *imperfette*; altro dunque esse non sono che radici; così $a^{\frac{4}{3}}$, è la radice terza di a^4, e $\overline{b+c}^{\frac{m}{n}}$ è la radice n di $\overline{b+c}^{m}$, e $\dfrac{\overline{z^2+y^2}^{\frac{1}{n}}}{\overline{p+q}^{\frac{1}{n}}}$ è la radice n di $\dfrac{z^2+y^2}{p+q}$.

VIII. Vi è un' altra maniera di eſprimere le poteſtà imperfette col ſeguente ſegno $\sqrt{}$ detto *radicale*, ſotto di cui ſi tiene per così dire vincolata la quantità di che ſi vuol la radice, e ſopra cui ſi ſcrive l' indice della radice: così la radice quadrata di $\overline{a+b}^3$ ſi denota ancora per $\sqrt[2]{\overline{a+b}^3}$, $\sqrt[3]{a^2}$ ſarà lo ſteſſo di $a^{\frac{4}{3}}$, $\sqrt[n]{\overline{b+c}^m}$ equivalerà a $\overline{b+c}^{\frac{m}{n}}$, queſte quantità così denotate ſi chiamano *radicali*. Avvertaſi che al ſegno radicale ſenza indice ſi intende l' indice 2, onde nel primo eſempio ſi poteva queſt' indice tralaſciare. Con queſto ſegno ſi denotano ancora le radici immaginarie, e impoſſibili, così la radice 2 immaginaria di $-a^2$ ſi denota per $\sqrt{-a^2}$, e la radice n numero pari della quantità negativa $-a^m$ ſi denota per $\sqrt[n]{-a^m}$. Se ſi vogliano eſprimere le radici immaginarie colli eſponenti fratti, biſogna uſare artificio per ſcanſare gli equivoci: Sia da eſtrarſi la radice quadrata da $-a^2$, ſe ſi ſcriva $-a^{\frac{2}{2}}$ rimarrà il dubbio, ſe tal eſpreſſione diſegni $-a$, ovvero la radice quadrata di $-a^2$, per togliere adunque qualſiſia equivoco ci ſerviamo di due lunule nella ſeguente guiſa $\overline{(-(a^2}^{\frac{1}{2}}$ per diſegnare la radice ſeconda di $-a^2$, e generalmente $\pm\overline{(-(a^m}^{n}$, per diſegnare qualunque radice pari della quantità negativa $-a^m$.

IX. Se una quantità ſi alzerà a poteſtà di eſponennente fratto positivo, in cui il numeratore sia uguale al denominatore, essa quantità rimarrà la medesima, così $\overline{x+y}^{\frac{2}{2}}$, o $\overline{x+y}^{\frac{3}{3}}$, o $\overline{x+y}^{\frac{n}{n}}$ sarà uguale a $x+y$, perchè $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{n}{n}$ sono uguali all' unità, siccome abbiamo visto nell' algoritmo dei fratti; e comecchè $\overline{x+y}^{\frac{n}{n}}$ si può tramutare in $\sqrt[n]{\overline{x+y}^{n}}$, così una quantità si potrà convertire in radicale dato senza mutar valore, se detta quantità prima alzata alla potestà denotata dall' indice del radicale si porrà sotto il radicale del dato indice. Inoltre sapendosi ridurre le frazioni al medesimo denominatore senza mutar valore, si potranno ridurre le potestà che anno esponente fratto di diverso denominatore a potestà, le quali abbiano esponenti fratti del medesimo denominatore: così $\overline{a+b}^{\frac{2}{3}}$, $\overline{x+y}^{\frac{1}{2}}$ si ridurranno ad $\overline{a+b}^{\frac{4}{6}}$, ed $\overline{x+y}^{\frac{3}{6}}$, ma $\overline{a+b}^{\frac{2}{3}}$, $\overline{x+y}^{\frac{1}{2}}$ equivagliono a $\sqrt[3]{\overline{a+b}^{2}}$, e $\sqrt[2]{x+y}$, ed $\overline{a+b}^{\frac{4}{6}}$, $\overline{x+y}^{\frac{3}{6}}$ equivagliono a $\sqrt[6]{\overline{a+b}^{4}}$, e $\sqrt[6]{\overline{x+y}^{3}}$; quindi si ricava la regola di ridurre i radicali di diverso indice a radicali d' un indice medesimo, cioè il prodotto degli indici sarà l' indice comune, e la quantità sotto un radicale si alzerà alla potestà indicata dall' indice dell' altro radicale, così $\sqrt[m]{x^{n}}$, e $\sqrt[n]{y^{r}}$ si ridurranno al medesimo radicale facendo $\sqrt[mn]{x^{nn}}$, e $\sqrt[mn]{y^{mr}}$. Se le potestà di esponente fratto, o i radicali fossero più di due, allora basta prima ridurne due, e poi gli altri fuccessivamente, siccome si è operato nelle frazioni al Capo 2. §. 10.

X. Se poi l' indice di un radicale divide perfettamente l' indice dell' altro radicale, come sarebbe in $\sqrt[2]{\overline{a+b}^{3}}$, e $\sqrt[6]{\overline{a+y}^{7}}$, in cui l' indice 2 divide perfettamente l' indice 6, allora per lo quoto nato da tal divisione, cioè per tre si moltiplichi l' indice 2, e la quantità $\overline{a+b}^{3}$ sotto il radicale dell' indice 2 si alzi alla potestà che abbia per esponente il quoto 3, e sarà fatta la riduzione, cioè sarà $\sqrt[6]{\overline{a+b}^{9}}$, e la ragione è, perchè quei radicali equivagliono ad $\overline{a+b}^{\frac{3}{2}}$, $\overline{a+y}^{\frac{7}{6}}$, le quali con la regola già data nei fratti di tal condizione si riducono ad $\overline{a+b}^{\frac{9}{6}}$, $\overline{a+y}^{\frac{7}{6}}$.

XI. Per sommare le quantità radicali basta scriverle una dietro l' altra coi proprj segni, e per sottrarle si mutino i segni, che precedono il segno radicale, a quelle che si vogliono sottrarre, ricordandosi sempre di ridurre ad un termine i termini simili: eccone gli esempi.

Per la somma

$$\begin{array}{r} \sqrt[2]{ab}+c \\ -2\sqrt[2]{ab}-\sqrt[3]{abc} \\ \hline c-\sqrt[2]{ab}-\sqrt[3]{abc} \end{array}, \qquad \begin{array}{r} 3\sqrt[2]{ab}-\sqrt[3]{abc} \\ -4\sqrt[2]{ab}+2\sqrt[3]{abc} \\ \hline -\sqrt[2]{ab}+\sqrt[3]{abc} \end{array},$$

$$\begin{array}{l} \overline{a+b}^{\frac{3}{4}} + c^{\frac{2}{3}} \\ \overline{a+b}^{\frac{3}{4}} - c^{\frac{2}{3}} \\ \hline 2 \,.\, \overline{a+b}^{\frac{3}{4}} \end{array}$$

Per la sottrazione

$$\begin{array}{l} \sqrt[2]{xy} \quad + c \\ \sqrt[3]{cx} \quad + y \\ \hline \sqrt[2]{xy} + c - \sqrt[3]{cx} - y \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} 4\sqrt{ac} - 3\sqrt[3]{acb} \\ 2\sqrt{ac} + 3\sqrt[3]{acb} \\ \hline 2\sqrt{ac} - 6\sqrt[3]{acb} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -\frac{1}{3}\,(\overline{x+y}^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}} \\ -\,(\overline{x+y}^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}\, z^{\frac{3}{2}} \\ \hline \frac{2}{3} \times \overline{x+y}^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{4}\, z^{\frac{3}{2}} \end{array}$$

XII. Per moltiplicare le potestà d' espònente fratto si farà la congiunzione delle lettere secondo il solita: così $a^{\frac{1}{2}}$ in $b^{\frac{1}{2}}$ farà $a^{\frac{1}{2}}\, b^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$ in $a^{\frac{2}{3}}$ farà $a^{\frac{1}{3}}\, a^{\frac{2}{3}}$, ed $x^{\frac{1}{n}}$ in $y^{\frac{1}{n}}$ farà $x^{\frac{1}{n}}\, y^{\frac{1}{n}}$, ma comecchè dalla dottrina delle proporzioni si sà, che essendo $1 : a :: b : ab$, è ancor $1 : a^n :: b^n : \overline{ab}^n$; dunque $a^n \,.\, b^n$ prodotto dei medii sarà uguale per la stessa dottrina ad $\overline{ab}^n$ prodotto degli estremi, e perciò

$a^{\frac{1}{2}}$

$a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$ equivalerà ad $\overline{ab}^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}}$ equivalerà $a^{\frac{3}{3}}$, uguale ad a, ed $x^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}}$ equivalerà a $\overline{xy}^{\frac{1}{n}}$; ma $x^{\frac{1}{n}}$, è lo stesso che $\sqrt[n]{x}$, ed $y^{\frac{1}{n}}$ che $\sqrt[n]{y}$, ed $\overline{xy}^{\frac{1}{n}}$, che $\sqrt[n]{xy}$; quindi si raccoglie, che per moltiplicare i radicali del medesimo indice basti moltiplicare le quantità esistenti sotto il segno radicale; se i radicali avranno coefficienti, o quantità che li siano congiunte fuori del segno radicale, si moltiplicheranno ancora queste fra di loro. Così il prodotto di $a\sqrt[n]{x}$ in $\sqrt[n]{y}$, sarà $a\sqrt[n]{xy}$, ed $a\sqrt[n]{y}$ in $b\sqrt[n]{x}$ sarà $ab\sqrt[n]{yx}$, $5\sqrt[3]{a}$ in $4\sqrt[3]{b}$ sarà $20\sqrt[3]{ab}$, come è chiaro dalla moltiplicazione delle potestà di esponente fratto. Si avverta però, che il prodotto di $\pm\sqrt{b}$ in $\pm\sqrt{b}$, e $\pm\sqrt{bb}$, cioè $\pm b$, perchè i segni dei radicali predetti sono doppi, come tante volte si è detto; il che richiede particolar attenzione quando si tratta di radicali. Se i radicali non anno il medesimo indice si riducano a tali per le cose dette.

XIII. Essendo il prodotto di $\sqrt[n]{x}$ in $\sqrt[n]{x}$ uguale a $\sqrt[n]{x^2}$, e $\sqrt[n]{x^2}$ in $\sqrt[n]{x}$ essendo $\sqrt[n]{x^3}$ &c. si raccoglie, che per alzare $\sqrt[n]{x}$ a una data potestà m bisognerà alzare alla potestà m la quantità x esistente sotto il segno radicale con fare $\sqrt[n]{x^m}$, la quale espressione equivalendo a $x^{\frac{m}{n}}$, però ad alzare $x^{\frac{1}{n}}$ alla potestà m bisognerà moltiplicare l' esponente $\frac{1}{n}$ per m.

XIV. Se i radicali avessero fuori del segno quanti-tità, ancora queste si alzeranno alla potestà m come si raccoglie dalla moltiplicazione di tali radicali; onde $a\sqrt[n]{x}$ alzata alla potestà m sarà $a^m\sqrt[n]{x^m}$, e per conseguenza $ax^{\frac{1}{n}}$ alzata alla potestà m sarà $a^m x^{\frac{m}{n}}$, il che si indica ancora in questa maniera $\overline{ax^{\frac{1}{n}}}^{\,m}$.

XV. Per alzare una quantità radicale a una potestà, che abbia per esponente l' indice del radicale basterà togliere il vincolo radicale, così $\sqrt[n]{x}$ alzato alla potestà n sarà x come è chiaro: bisogna però aver l' occhio ai segni posti avanti il segno radicale quando si toglie tal segno; per sfuggire ogni errore si avverta, che il radicale (come qualunque altra quantità) è moltiplicata per l' unità con quel segno, che è posto avanti al radicale, così $\sqrt[n]{a+b}$ è $1\times\sqrt[n]{a+b}$, e $-\sqrt[2]{a+b}$ è $-1\times\sqrt[2]{a+b}$; onde moltiplicare $\sqrt{a+b}$ in $-\sqrt{a+b}$ è lo stesso che moltiplicare $1\times\sqrt{a+b}$ in $-1\times\sqrt{a+b}$, il cui prodotto è $-1\times\overline{a+b}$, cioè $-a-b$.

XVI. Dovendosi colla divisione disfare ciò, che si è composto colla moltiplicazione, perciò a dividere le quantità radicali del medesimo indice si dividono le quantità esistenti sotto il segno, e le quantità esistenti fuori del segno fra di loro, così $ab\sqrt[n]{xy}$ diviso per $-a\sqrt[n]{x}$ dà il quoto $-b\sqrt[n]{y}$, e $a^2\sqrt[n]{cd}$ diviso per $a^2\sqrt[n]{fg}$ dà per quoto $\sqrt[n]{\frac{cd}{fg}}$, e diviso

$x\sqrt[n]{a}$ per $y\sqrt[n]{b}$ si à per quoto $\frac{x}{y}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, ed $x\sqrt[n]{a}$ diviso per $y\sqrt[n]{a}$ ne darà il quoto $\frac{x}{y}$. E per conseguenza ancora $\overline{ab.xy}^{\frac{1}{n}}$ diviso per $-a\times x^{\frac{1}{n}}$ sarà $-b\times y^{\frac{1}{n}}$. Se le quantità radicali non avessero il medesimo indice, si riducano a tali, ovvero si noti la divisione a guisa di frazione: così $a\sqrt[n]{b}$ diviso per $x\sqrt[m]{b}$ sarà $\frac{a\sqrt[n]{b}}{x\sqrt[m]{b}}$.

XVII. Comecchè $\sqrt[n]{x^n b+x^n c}$ equivale a $\sqrt[n]{b+c}$ moltiplicata in $\sqrt[n]{x^n}$ cioè moltiplicata in x, ovvero ad $x\sqrt[n]{b+c}$; si raccoglie, che, se tutta la quantità esistente sotto il segno sarà moltiplicata per una potestà, che abbia per esponente l' indice della radice, si possa dividere tutto il prodotto esistente sotto il segno radicale per detta potestà, lasciare il quoto sotto il segno radicale, e porre fuori del segno la radice di detta potestà, senza che l' intera quantità radicale muti valore, come si è visto nell' addotto esempio; e viceversa per porre una quantità esistente fuori del segno radicale sotto il segno radicale, bisogna alzare la quantità fuori del segno alla potestà dell' indice del segno, e per questa potestà moltiplicare la quantità sotto il segno; così $x\sqrt[n]{a+c}$ equivale a $\sqrt[n]{ax^n+cx^n}$.

XVIII. Per estrarre la radice dai radicali vi bisogna il contrario di ciò, che si è fatto per alzare i radicali alle potestà, cioè bisogna estrarre la radice dalla la quantità esistente sotto il segno radicale; onde la radice quadrata di $\sqrt[n]{a^4}$ sarà $\sqrt[n]{a^2}$, e la radice m di $\sqrt[n]{x^m}$ sarà $\sqrt[n]{x}$, e radice terza di $\sqrt[2]{a}$ sarà $\sqrt[2]{a^{\frac{1}{3}}}$, in vece però di $\sqrt{a^{\frac{1}{3}}}$, si scrive ancora $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$, che significa appunto radice terza di radice seconda di a, e questi si chiamano *radicali di radicali*, i quali si trattano come gli altri radicali.

XIX. Se le quantità radicali, da cui deesi estrarre la radice fossero espresse cogli esponenti fratti, si dovrà dividere l' esponente per l' indice della radice: così la radice seconda di $\overline{a+b}^{\frac{1}{3}}$ sarà $\overline{a+b}^{\frac{1}{6}}$, e radice m di $\overline{x-y}^{\frac{1}{n}}$ sarà $\overline{x-y}^{\frac{1}{nm}}$. Dalle cose fin quì dette si vede, che per moltiplicare, dividere, alzare a potestà, ed estrarre le radici da potestà di esponente fratto si debba operare nella medesima maniera, che sopra le potestà di esponente intero; il che ha aggevolato moltissimo il calcolo dei radicali: Di questa invenzione, siamo obbligati a Newton, e a Leibnitz.

XX. La moltiplicazione delle quantità composte radicali si fà col moltiplicare ciascun termine di un fattore per l'altro fattore, come nelle quantità intere. Eccone gli esempj.

Fattori	$3\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}-4d$
	$-3\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}$
	$-9ab-6a\sqrt{bc}+12d\sqrt{ab}$
	$+6a\sqrt{bc}+4ac-8d\sqrt{ac}$
Prodotto	$-9ab+4ac+12d\sqrt{ab}-8d\sqrt{ac}$

$$\begin{array}{ll}
\text{Fat-} & 3\times\overline{ab}^{\frac{1}{2}}+2\times\overline{ac}^{\frac{1}{2}}-4d \\
\text{tori} & -3\times\overline{ab}^{\frac{1}{2}}+2\times\overline{ac}^{\frac{1}{2}} \\
\hline
 & -9\times ab-6a\times\overline{cb}^{\frac{1}{2}}+12d\times\overline{ab}^{\frac{1}{2}} \\
 & \qquad\qquad +6a\times\overline{cb}^{\frac{1}{2}}+4ac-8d\times\overline{ac}^{\frac{1}{2}} \\
\hline
\text{Prodotto} & -9ab+4ac+12d\times\overline{ab}^{\frac{1}{2}}-8d\times\overline{ac}^{\frac{1}{2}}
\end{array}$$

XXI. La divisione dei radicali composti si fa con le stesse regole, che la divisione delle altre quantità composte.

Dividendo

$$\begin{array}{ll}
 & -9ab+4ac+12d\sqrt{ab}-8d\sqrt{ac} \\
 & +9ab-6a\sqrt{bc} \\
\hline
\text{Ref. I.} & 0-6a\sqrt{bc}+4ac+12d\sqrt{ab}-8d\sqrt{ac} \\
 & \quad +6a\sqrt{bc}-4ac \\
\hline
\text{Ref. II.} & 0 \qquad\qquad 0 \quad +12d\sqrt{ab}-8d\sqrt{ac} \\
 & \qquad\qquad\qquad -12d\sqrt{ab}+8d\sqrt{ac} \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|l}
\text{Divisore} & \text{Quoto} \\
-3\sqrt{ab}+2\sqrt{ac} & +3\sqrt{ab} \\
 & +2\sqrt{ac} \\
 & -4d
\end{array}$$

XXII. Se la quantità esistente sotto il segno radicale sarà negativa, e l' esponente dell' indice sarà numero pari, abbiamo detto che il valore di tale radice

dice sia impossibile, ed immaginario, come appunto sarebbe $\sqrt{-a^2}$; nientedimeno tali immaginarii si sommano, si sottraggono, si moltiplicano, e si dividono dagli Analisti nella stessa maniera, che gli altri radicali, così la somma di $\sqrt{-a^2}$, e $-3\sqrt{-a^2}$ sarà $-2\sqrt{-a^2}$, e $-\sqrt{-x^2}+\sqrt{-y^2}$ sarà la somma di $-\sqrt{-x^2}$ con $\sqrt{-y^2}$, e la somma di $b+\sqrt{-a^2}$ con $b-\sqrt{-a^2}$ è $2b$; così sottratto $\sqrt{-a^2}$ da $-3\sqrt{-a^2}$ il residuo è $-4\sqrt{-a^2}$, e sottratto $b+\sqrt{-x^2}$ da $c+\sqrt{-x^2}$ il residuo è $c-b$.

XXIII. Per moltiplicare $\sqrt{-b}$ in $\sqrt{-a}$ si dee operare come negli altri radicali; si avverta però che facilmente si può sbagliare nei segni da premettersi al segno radicale del prodotto; per togliere dunque ogni occasione di errare i predetti fattori si sciolgano nella seguente maniera $\sqrt{-1}\times\sqrt{+b}$ in $\sqrt{-1}\times\sqrt{+c}$, e poi fatta la moltiplicazione secondo il solito troveremo per prodotto $-1\times\sqrt{bc}$, cioè $-\sqrt{bc}$, se non si avesse avuta l' indicata avvertenza si sarebbe ottenuto il prodotto $\sqrt{bc}$, il quale si potrebbe agevolmente riguardare come positivo, mentre in realtà è negativo. La cagione di tutto questo è, che $\sqrt{-a}$ ver. gr. in $\sqrt{-a}$ dee dare $-a$, e non $+a$, perchè siccome $\sqrt{-a}$ nasce ponendo il segno radicale alla quantità $-a$, così $-a$ si restituirà levando il predetto segno radicale; ciò quando le quantità sotto il segno radicale sono identiche si vede manifestamente; onde non essendo identiche tali quantità, come nella moltiplicazione di $\sqrt{-a}$ in $\sqrt{-b}$, si ricorre all' esposto artificio. E facile vedere non esservi mistero alcuno che due immaginarii moltiplicati insieme diano un reale, perchè nascendo l' immaginario coll' estrarre la radice seconda da -1 per cagion d' esempio, è necessario, che alzando a potestà seconda questo radicale immaginario si restituisca la quantità reale -1, il che ben inteso svanisce ogni paradosso. Per dividere $\sqrt{-bc}$ per $\sqrt{-c}$, pure si faccia $\sqrt{-1} \times \sqrt{bc}$ diviso per $\sqrt{-1}$ $\times \sqrt{c}$, il quoto sarà $1 \times \sqrt{b}$, cioè $\sqrt{b}$; perchè $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ è uguale all' unità; nè dee far maraviglia, che un' immaginario diviso per un immaginario dia un reale, perchè il rapporto di continenza frà due immaginarii può essere reale. E ciò basti intorno agli immaginarii e i radicali: alcune altre operazioni particolari, che d' alcuni si sogliono quì aggiungere, si troveranno con più profitto disperse in questo Compendio, dove il bisogno il richiegga.

XXIV. Prima di dar fine a questo nostro compendioso Algoritmo, stimiamo opportuno, anzi necessario d' insegnare la maniera con cui si estraggono soltanto le radici quadrate, e cube dalle quantità composte, riserbandoci in altro luogo di dare un metodo generale per l' estrazione di qualunque radice. Il metodo di estrarre la radice quadrata dalle quantità composte si deduce dal metodo di alzarle a quadrato. Si alzi dunque a quadrato il binomio $x+a$, ovvero $-x-a$ sarà il prodotto, cioè il quadrato in ambedue i casi $x^2+2ax+a^2$. Dal che si ricava che il quadrato di un binomio è uguale ai quadrati dei membri delle radici, più al doppio prodotto dei predetti membri; potendosi inoltre qualunque quantità composta $b-c+d$ &c. considerare come binomio, il cui primo membro sia $b-c$

&c.

&c. fino alla penultima, e l' altro membro sia l' ultima; quindi si ricava la regola universale per alzare a quadrato qualunque polinomio $b - c + d$ &c. cioè prima si alzerà a quadrato il binomio $b - c$, che sarà $b^2 - 2bc + c^2$, a cui si aggiungerà il quadrato del d, cioè d^2, ed a questi si aggiungerà il prodotto $\overline{b - c}$ in $2d$, ed in tal guisa continuando, $b^2 - 2bc + c^2 + 2db - 2dc + d^2$ &c., sarà il quadrato del dato polinomio. Ciò premesso sia da estrarsi la radice quadrata dalla quantità $a^2 + 2ax + x^2$; si consideri questa come quadrato di qualche binomio, e si estragga in primo luogo la radice da a^2; la quale è $\pm a$, che si deve tenere come primo termine del binomio; si sottragga il quadrato a^2 dalla proposta quantità, ed il residuo $2ax + x^2$, dee uguagliare il quadrato dell' altro termine della radice più il prodotto di questo in $2a$, come si è detto quì sopra. Per trovare tal termine si divida per $\pm 2a$ quel termine del residuo, che si può; nel presente caso il quoziente è $\pm x$, il quadrato di cui x^2, col prodotto di $\pm 2a \times \pm x$ sottratto dal residuo $2ax + x^2$ niente lasciando, è segno, che il binomio $a + x$, ovvero $-a - x$ è la radice quadrata della quantità proposta.

XXV. Sia da cavarsi la radice quadrata dalla quantità $b^2 - 2bc + c^2 + 2db - 2dc + d^2$; si ordini questa quantità secondo una lettera ver. gr. c, cioè si faccia $c^2 \begin{array}{l} -2b \\ -2d \end{array} . c + 2db + b^2 + d^2$: si cavi la radice quadrata dal primo termine c^2 la quale sarà $\pm c$, e questo sarà un termine della radice quadrata totale; per $\pm 2c$ si divida il termine della quantità in cui è c, e si avrà per quoto $\mp b \mp d$, questi saranno gli altri termini della radice ricercata; ed in fatti il quadrato di $b + d - c$, ovvero di $-b - d + c$ è la quantità proposta.

XXVI.

XXVI. Se poi intorno alla quantità data, da cui si vuol estrarre la radice quadrata, non riuscisse bene tale operazione, come sarebbe se si volesse la radice quadrata di $x^2 + a^2$, ovvero la radice quadrata di $x^2 + 2ax + b^2$, delle quali mentre investighiamo le radici, nascono continuamente nuovi termini senza mai venire al residuo uguale a zero; allora segno è, che da tali quantità non si può estrarre attualmente la radice quadrata; onde per denotare la radice quadrata delle quantità $x^2 + a^2$, e $x^2 + 2ax + b^2$ bisognerà servirsi del segno radicale, e scrivere $\pm\sqrt{x^2 + a^2}$, e $\pm\sqrt{x^2 + 2ax + b^2}$. Si avverta, che il segno radicale quadrato ha sempre due valori, cioè positivo, e negativo.

XXVII. Similmente prima di estrarre la radice cuba dalle quantità composte bisogna notare, che il cubo del binomio $x + a$ è $x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$, cioè è uguale ai cubi $x^3 + a^3$ dei termini della radice, più al triplo del quadrato x^2 moltiplicato in a, più al triplo del quadrato a^2 moltiplicato in x. Qualsivoglia polinomio $x + a + b$ &c. potendosi considerare come un binomio, si ricava facilmente la regola generale di alzare qualunque polinomio a cubo, come appunto si è ricavata di sopra la regola generale di alzare qualunque polinomio a quadrato; onde il cubo di $x + 2a + b$ &c. sarà $x^3 + 6x^2a + 12a^2x + 8a^3 + \overline{x + 2a}^2 \times 3b + 3b^2 \times \overline{x + 2a} + b^3$.

XXVIII. Abbiasi dunque da estrarre la radice cuba dalla quantità $x^3 + 3x^2a + 3a^2x + a^3$; la quale sia ordinata per una lettera ver. gr. x, si cavi la radice cuba dal primo termine x^3, la quale è x, e questa sarà un membro della radice cuba totale; per trovare gli altri membri si divida per lo triplo del quadrato xx, cioè per

per $3x^2$ il secondo termine della quantità ordinata per x, ed il quoto a sarà l' altro termine della radice cuba totale; ed in fatti il cubo di $x+a$ è la quantità proposta.

XXIX. sia da estrarre la radice cuba dalla quantità
$$\begin{array}{l} x^3 + 6ax^2 + 12a^2x + 8a^3 + 12a^2b + 6b^2a + b^3, \\ \quad\; 3bx^2 + 12abx \\ \qquad\quad + 3b^2x \end{array}$$
la quale sia ordinata per la lettera x; si cavi la radice cuba dal primo termine x^3, la quale è x: questa sarà il primo membro della radice cuba totale; per trovare gli altri termini della radice cuba si prenda il triplo del quadrato di x cioè $3x^2$, e per questo si divida il secondo termine della quantità in cui è x^2, ed il quoto $2a+b$ unito alla radice ritrovata x sarà la radice cuba totale di tutta la proposta quantità; ed in fatti $2a+b+x$ alzato a cubo restituisce la quantità proposta.

XXX. Quando intorno alla quantità proposta non si potesse fare tale operazione; come sarebbe se si volesse la radice cuba di x^3+a^3, ovvero la radice cuba di $x^3+3x^2a+3a^2x+b^3$, segno è, che da dette quantità non si può estrarre la radice cuba; onde per denotare la radice cuba di x^3+a^3 si farà $\sqrt[3]{x^3+a^3}$, e per denotare la radice cuba di $x^3+3x^2a+3a^2x+b^3$ si farà $\sqrt[3]{x^3+3x^2a+3a^2x+b^3}$.

XXXI. Quantunque dalla quantità x^2+a^2 non possa estrarsi la radice quadrata perfetta, però si può avere una radice quadrata tale, la quale differisca dal vero valore per una differenza minore di qualunque data; il chè si otterrà, se continuando l' operazione dell' estrazione della radice quadrata, venga questa radice quadrata espressa da una serie di infiniti termini,

ni,

ni, la quale sia convergente; perchè in tal caso, quantunque non si possa avere la somma di tutta la serie infinita, però si può sommare un numero di termini tale, che in riguardo alla somma di questi termini sia disprezzabile la somma degli altri termini fino all' infinito.

XXXII. Acciocchè questo più bene si comprenda, sia x^2+a^2, da cui debba estrarsi la radice seconda. Fingo che questa sia un binomio; ed estraggo dal primo termine x^2 la radice $\pm x$, che considero come primo termine del binomio ricercato; sottraggo il suo quadrato da x^2+a^2, dipoi per $2x$ divido il residuo, ed il quoto $\frac{a^2}{2x}$ sarà l' altro termine del binomio, e della serie; sottratto dal residuo a^2 il prodotto di questo quoto in $2x$, e il suo quadrato, sarà il residuo $\frac{-a^4}{4x^2}$; questo residuo fà che il binomio $x\frac{+a^2}{2x}$ non sia la perfetta radice della nostra quantità. Fingiamo ora, che $\frac{a^2}{2x}+x$, il quadrato di cui è stato già sottratto dalla quantità proposta, sia il primo termine della radice, e continuando l' operazione si cerchi il secondo. Divido adunque il residuo $\frac{-a^4}{4x^2}$ per $2x$, ed il quoto $\frac{-a^4}{8x^3}$ sarà il terzo termine della serie; sottraggo il suo prodotto nel doppio del primo termine del binomio, cioè in $2x+\frac{a^2}{x}$, ed assieme il suo quadrato, ed ottengo il residuo terzo $\frac{a^6}{8x^4}-\frac{a^8}{64x^6}$. In grazia di questo residuo considero ora come primo termine del binonomio i tre termini della ſerie $x + \frac{a^2}{2x} - \frac{a^4}{8x^3}$, e di nuovo divido il primo termine del reſiduo per $2x$, ed il quoto $\frac{a^6}{16x^5}$ quarto termine della ſerie moltiplicato nel doppio del primo termine del finto binomio, o ſia dei tre antecedenti termini della ſerie, col ſuo quadrato, ſe levisi dal reſiduo ſi otterrà un nuovo reſiduo, il primo termine di cui diviſo per $2x$ darà il quinto termine della ſerie, e così operando ſenza limite ſi determineranno ſempre nuovi termini della ſerie $x + \frac{a^2}{2x} - \frac{a^4}{8x^3} + \frac{a^6}{16x^5}$ &c. Acciocchè queſta ſerie ſia convergente il termine x^2 dee eſſere maggiore di a^2, e quanto maggiore ſarà l' eccesso tanto la ſerie ſarà convergente. Sapendo ridurre in ſerie la radice quadrata d' un binomio, ſi sà ancora ridurre in ſerie la radice quadrata di qualunque polinomio, potendoſi queſto ſiccome altre volte abbiamo detto conſiderare come un binomio.

XXXIII. Nella ſteſſa guiſa benchè non ſi poſſa eſtrarre perfettamente la radice cubica da $x^3 + a^3$, ſi può cio non oſtante ottenerla proſſimamente, mediante una ſerie convergente, che naſce continuando l' operazione dell' eſtrazione della radice terza. Si eſtragga la radice cubica del primo termine, cioè x, ſottratto il ſuo cubo, ſi divida il reſiduo a^3 per $3x^2$, cioè per lo triplo del quadrato del primo termine della ſerie, il quoto $\frac{a^3}{3x^2}$ ſarà il ſecondo termine; il prodotto di cui in $3x^2$, aſſieme col triplo ſuo quadrato moltiplicato in x, e col ſuo cubo ſi ſottragga dal reſiduo a^3; fatta la ſottrazione ſi ottiene il ſecondo reſiduo $\frac{-a^6}{3x^3} \frac{-a^9}{27x^6}$. Ora ſi dee ſingere che la quantità $x \frac{+a^3}{3x^2}$ ſia il primo termine del binomio della radice, il cubo di cui è ſtato già ſottratto dalla quantità x^3+a^3; ſi tiri adunque avanti l' operazione e per $3x^2$ ſi divida il primo termine del reſiduo, ed il quoto $\frac{-a^6}{9x^5}$ ſarà il terzo termine della ſerie. Si moltiplichi queſto per lo triplo del quadrato del primo termine del ſinto binomio, cioè per $3.\left(x+\frac{a^3}{3x^2}\right)^2$, di poi ſi moltiplichi il triplo del ſuo quadrato per $x+\frac{a^3}{3x^2}$, ſi prenda il ſuo cubo, ed il tutto ſottratto dal ſecondo reſiduo, ſi otterrà il reſiduo terzo; il primo termine di cui diviſo ſimilmente per $3x^2$ darà il quarto termine della ſerie: e così continuando l' operazione indefinitamente naſcerà la ſerie infinita $x+\frac{a^3}{3x^2}-\frac{a^6}{9x^5}$ &c., la quale acciocchè ſia convergente dee eſſere x^3 maggiore di a^3: e comecchè i polinomj ſi riducono a binomj, collo ſteſſo metodo ſi otterranno le radici cube di quelli. A ſuo luogo ſi darà un metodo generale per eſtrarre qualunque radice da qualunque quantità, con cui ſi otterranno ancora con maggior facilità le radici quadrate, e cube.

CA-

CAPO IV.

Risoluzione dell' Equazioni del primo grado.

I. Equazione non è che il rapporto d' uguaglianza, frà due quantità diversamente denominate, che s' indica col segno $=$ detto di ugualità, che tra quelle ponesi; come $ax + bx = cc$, che denota la quantità $ax + bx$ uguale alla quantità cc; la quantità avanti il segno, come $ax + bx$, chiamasi *primo membro dell' equazione*, quella dopo, come cc, chiamasi *secondo membro*, ovvero *omogeneo di comparazione*. Le lettere prime dell' alfabeto sogliono ordinariamente denotare le quantità cognite, le posteriori, le incognite, così $ax + bx = cc$, significa, che il quadrato cognito cc è uguale al prodotto della quantità cognita $a + b$ in una incognita, che si chiama x.

II. Se la quantità $ax + bx$ non fosse uguale a cc, ma maggiore, si indicherebbe così $ax + bx > cc$, se minore così $ax + bx < cc$. La seguente espressione $a : b :: x : y$ significa che la ragione di a a b è uguale alla ragione di x ad y. Le ragioni poi di a a b, e di x ad y si indicano con la interposizione di due punti, come si indica la divisione, perchè, come si è visto nell' Algoritmo dei fratti, la ragione di a a b e di x ad y non differisce da a diviso per b, e da x diviso per y. Se la ragione di a a b fosse maggiore della ragione di x ad y si scriverebbe $a : b \gtrdot x : y$, e se minore, $a : b \lessdot x : y$. Se tre quantità a, x, y sono in proporzione continua si esprimono così $a :: x :: y$, e da alcuni $\div a : x : y$ che significa, che a stà ad x, come x ad y. Nella stessa maniera, che si esprime la proporzionalità Geometrica, si esprime ancora l' Aritmetica, e l' Armonica, ma si avvisa, che di queste trattasi.

III. Dalla dottrina delle proporzioni Geometrica, Aritmetica, ed Armonica si ricava, che quando si abbia tali proporzionalità, si abbia ancora equazione; perchè nella proporzionalità geometrica il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei termini intermedii, o al quadrato del termine intermedio se la proporzionalità è continua; così se $a:b::x:y$, sarà $ay=bx$, e se $a::x::y$ sarà $ay=x^2$. Nella proporzionalità Aritmetica la somma degli estremi è uguale alla somma dei termini intermedii, o al doppio del termine intermedio se la proporzionalità è continua; così se saranno aritmeticamente $a:b::x:y$, sarà $a+y=b+x$, e se sarà $a:.x::y$ sara $a+y=2x$. La proporzione armonica riducesi alla geometrica; imperciocchè allora tre quantità diconsi in proporzione armonica, quando la prima all' ultima sia come la differenza tra la prima e la seconda alla differenza tra la seconda e la terza, così se sia armonicamente $a::x::y$ sarà geometricamente $a:y::a-x:x-y$, o sia $a:y::x-a:y-x$, e perciò si avrà $ay-ax=yx-ya$.

IV. L' equazioni che anno una sola incognita si chiamano equazioni *determinate*: tale sarebbe $ax+bx=cc$; l' equazioni che contengono più incognite si chiamano *indeterminate*: come $2xy+yc=4bc+a^2$.

V. L' equazione determinata si dice del *primo grado*, *semplice*, *e lineare*, quando l' incognita non passa la prima dimensione, come sarebbe $x+c=a$, $a^2x+b^3=c^3$. Si dice del *secondo grado*, *quadrata*, *e piana*, quando l' incognita ascenda a due dimensioni, come $xx+bx=cc$. Si dice del *terzo grado*, *cuba*, e *solida*, quando l' incognita ascende a tre dimensioni, co-

come $x^3 + x^2 p + x p^2 = c^3$; e generalmente si chiama del grado n, se il massimo esponente dell'incognita sia a n.

VI. Il fine primario per cui all' equazioni si fà ricorso è pe' ritrovare il valore della incognita; poichè operando intorno ai membri della equazione, or questi trasformando, or trasportando, ed in altra guisa alterando, sì fattamente però, che l'egualità tra quelli non turbisi, se potrassi fare che da una parte del segno di uguaglianza vi resti la sola incognita, e dall' altra un membro, che sole cognite contenga; avremo ritrovato il valore della incognita, il che si dice *aver sciolto l' equazione*; il valore poi della incognita così ritrovato si chiama *radice dell' equazioni*, che sarà secondo le circostanze or positiva, or negativa, ed or immaginaria. Non è però sì facil cosa saper che operazioni a tal fine debbansi fare, è la difficoltà, come vedremo, cresce a dismisura, quanto l' equazione a grado maggior si inalza; e ciò che è peggio, pochi sono i casi in cui la si sappia superare.

VII. Qualunque operazione poi l' equazione non turba se ciò che si fà al primo membro, all' altro ancor si faccia, così avverrà se ad ambo i membri dell' equazione $ax + cx = bb$ si aggiunga, o sottragga la quantità ff, cioè se si faccia $ff + ax + cx = bb + ff$, ovvero $ax + cx - ff = bb - ff$; se ambo i membri $ax + cx$, e bb si moltiplicheranno, o divideranno per la medesima quantità f, cioè se si farà $fax + fcx = fb^2$, ovvero $\frac{ax + cx}{f} = \frac{bb}{f}$; se ambo i membri ancora si alzino alla medesima potestà n, o se da questi si estragga qualunque radice n, cioè se si faccia $\overline{ax + cx}^{\,n} = b^{2n}$, ovvero $\overline{ax + cx}^{\,\frac{1}{n}} = b^{\frac{2}{n}}$; l' equazione

non

non si altera pure nel caso, che si sostituisca in vece d' una quantità un' altra che le sia uguale, così se sia $ax + cx = bb$, e $cx = \frac{n^2 x}{m}$, sostituito nella prima equazione in vece di cx il suo uguale $\frac{n^2 x}{m}$ resterà $ax + \frac{n^2 x}{m} = bb$, e se sia $x = a + b$, e $b = c + d$, sostituito nella prima equazione in vece di b la quantità $c + d$ sarà $x = a + c + d$, e questa è una operazione di cui gli Analisti fanno uso continuo.

VIII. Sì fatte operazioni generalmente parlando ci conducono a sciogliere l' equazioni. La difficoltà massima consiste nello scegliere opportunamente l'operazione necessaria, cioè la quantità da aggiungersi, o da sottrarsi, la sostituzione da farsi &c. per l' intento. Quel che gli Analisti intorno a ciò insegnano anderò con gradazione divisando.

IX. Cominciamo dalle equazioni del primo grado vale a dire da quelle in cui l' incognita non oltrepassa la prima dimensione. Pe' ritrovare il valore dell' incognita nelle equazioni di primo grado bisogna fare in maniera, che tutti i termini, che contengono l' incognita restino da una parte del segno d' uguaglianza, e gli altri dall' altra; il che facilmente si ottiene trasportando quei termini, che bisogna, dall' altra parte del segno di ugualità, mutandoli i segni rispettivi per questa non turbare, come non è malagevole a comprendere. Fatto ciò se l' incognita sarà moltiplicata per qualche quantità si divida per questa l' equazione, vale a dire ambo i suoi membri; se poi l' incognita è divisa per qualche quantità, per questa l' equazione si moltiplichi, che così resterà indubitatamente l' incognita sola da una parte del segno d' ugualità, e dall'

altra

altra resteranno tutti i termini di quantità note; onde resterà nota ancora l' incognita: veniamo agli esempii.

X. Sia da sciogliersi l' equazione $x - b + c = a$; per avere il valore della incognità bisogna togliere dal primo membro la quantità $- b + c$; ciò che facilmente si ottiene, se si sottrarrà dallo stesso membro la quantità $- b + c$; ma questa quantità non si può sottrarre dal primo membro, se non si sottragga ancora dal secondo, altrimenti sarebbe tolta l' eguaglianza; dunque per fare restare l' incognita x da una parte della nostra equazione senza alterare l'egualità converrà sottrarre dall'uno, e dall' altro membro la quantita $- b + c$, cioè fare $x - b + c + b - c = a + b - c$, cioè $x = a + b - c$, vale a dire converrà trasportare la quantità $- b + c$ nell' altro membro sotto segno contrario.

XI. Sia l' equazione semplice $a x + b c = m x + n a$, si trasporti la quantità $m x$ nel primo membro, e la $b c$ nel secondo sotto segno contrario, cioè si faccia $a x - m x$ o sia $\overline{a - m} \times x = n a - b c$, e così saranno tutti i termini, che contengono la x da una parte, e gli altri dall' altra; si dividano inoltre ambo i membri dell' equazione $\overline{a - m} \times x = n a - b c$ per la quantità $a - m$, che moltiplica l' incognita x, e sarà $\frac{\overline{a - m} . x}{a - m} = \frac{n a - b c}{a - m}$, cioè sarà $x = \frac{n a - b c}{a - m}$. Sia da sciogliersi l' equazione semplice $\frac{x}{b} - \frac{d}{m} = \frac{a}{c}$, si faccia $\frac{x}{b} = \frac{a}{c} + \frac{d}{m}$ trasportando il termine $\frac{d}{m}$, poi si moltiplichino ambo i membri di questa equazione per la quantità b, che divide l' incognita x, e sarà $\frac{x b}{b}$ cioè x =

$= \frac{ab}{c} + \frac{bd}{m}$.

XII. Sia da sciogliersi l' equazione semplice $\frac{ay}{c} - b = \frac{dy}{f} + \frac{mn}{g}$ in cui y è l' incognita. Si trasportino i termini secondo il solito facendo $\frac{ay}{c} - \frac{dy}{f}$, o sia $(\frac{a}{c} - \frac{d}{f}) \times y = \frac{mn}{g} + b$; poi si dividano i membri di questa equazione per la quantità $\frac{a}{c} - \frac{d}{f}$, che moltiplica l' incognita y, e sarà $y = (\frac{mn}{g} + b) : (\frac{a}{c} - \frac{d}{f})$.

XIII. Sia da sciogliersi l' equazione $\frac{a}{x} - \frac{m}{n} = \frac{c}{b}$; si moltiplichi tutta l' equazione per x, e sarà $a - \frac{mx}{n} = \frac{cx}{b}$, si trasporti $- \frac{mx}{n}$ dall' altra parte, e sarà $a = \frac{cx}{b} + \frac{mx}{n}$, cioè $a = \overline{\frac{c}{b} + \frac{m}{n}} . x$, divisa finalmente l' equazione per $\frac{c}{b} + \frac{m}{n}$ sarà $x = a : \overline{\frac{c}{b} + \frac{m}{n}}$, cioè $x = \frac{bna}{cn + bm}$.

XIV. Questa è la maniera con cui si opera pe' ritrovare il valore dell' incognita in una equazione semplice, in cui non vi è che una incognita, chiamata per ciò *solitaria*, ma se l' equazione contenesse più d' una incognita, allora purchè si abbiano tante equazioni, quante sono l' incognite, col seguente metodo si potranno ridurre ad una equazione, che contenga una sola incognita.

XV.

XV. Il metodo consiste in figurarsi tutte le incognite delle equazioni proposte come cognite eccettuatane una, di cui per le regole date si trova il valore, che sarà dato per le cognite, e l' altre incognite; questo valore ritrovato si sostituisca in luogo della sua incognita nell' altre equazioni, e sarà diminuito dell' unità il numero delle incognite, e delle equazioni; e così ripetuta l' operazione fino che sarà bisogno si verrà finalmente ad una incognita, e ad una equazione.

XVI. Siano due equazioni $ax + by = a^2$, $\frac{ay}{c} = b - \frac{fx}{a}$ dico, che facilmente si potranno determinare i valori delle incognite x, ed y; nella prima equazione si tratti y come cognita, e si trovi il valore di x per le regole date, cioè $x = \frac{-by + a^2}{a}$, poi si sostituisca nella seconda equazione in vece di x il suo valore ritrovato, cioè $\frac{-by + a^2}{a}$, e sarà $\frac{ay}{c} = b - \frac{f}{a} \cdot \frac{a^2 - by}{a} = b + \frac{-fa^2 + fby}{aa}$ equazione in cui vi è la sola incognita y alla prima dimensione, della quale si sa per le regole date ritrovare il di lei valore, che è $y = \frac{bca^2 - fca^2}{a^3 - fbc}$, e così sarà nota l' y; questo valore d' y sostituito nella equazione $x = \frac{-by + a^2}{a}$ in vece d' y, si avrà $x = \frac{-b^2ca + fcba}{a^3 - fbc} + a$, ovvero ridotti i due termini alla stessa denominazione, e cancellati quei che distruggonsi $x = \frac{a^4 - b^2 c a}{a^3 - f b c}$, ecco dunque determinati i valori di x, ed y: siccome nella prima equazione trattando y come cognita ho ritrovato la x, così trattando la x come cognita avrei ritrovato l' y; ed il suo valore sostituito nella seconda equazione in luogo di y si sarebbe ottenuta una equazione in cui vi sarebbe la sola incognita x ad una dimensione e per conseguenza solubile per le regole date; anzi siccome ò principiato l' operazione dalla prima equazione, potevo egualmente principiare dalla seconda, e fare le sostituzioni nella prima, ciò che basterà avere una volta avvisato.

XVII. Se l' equazioni fossero tre, e tre le incognite per mezzo d' una equazione si ritrovi il valore d' una incognita dato per le cognite mischiate con l' altre due incognite; questo valore si sostituisca in vece della sua incognita nell' altre due, e così avremo due equazioni, e due incognite, le quali già si sanno determinare: siano le tre equazioni $x + y = b + z$; $y + z = d$, $x + z = c$. Per la prima equazione si ha $z = x + y - b$, si sostituisca in vece di z il suo valore nelle altre due equazioni, e si avrà $2y + x - b = d$, e $2x + y - b = c$.

XVIII. Se fossero quattro equazioni, e quattro incognite, con lo stesso artificio si riducono a tre equazioni, e tre incognite, onde si scopre l' universalità del metodo.

XIX. Stimiamo opportuno esporre un altro metodo il quale benchè a prima faccia non sembri universale pure in realtà è tale, e di molto uso. Questo si adopra in primo luogo con vantaggio in due equazioni di due incognite, delle quali le medesime siano moltiplicate per la medesima quantità, ed i termini identici con-

contenenti una incognita abbiano il medesimo segno, e i termini identici, contenenti l' altra incognita segni differenti; quando ciò sia con la somma di dette equazioni si determina un' incognita, e con la sottrazione si determina l' altra.

XX. L' equazioni $ax+by=c^2$, $ax-by=n^2$ anno le predette condizioni, cioè i termini identici ax anno il medesimo segno, e gli identici by anno segno differente. Sommate queste due equazioni, sarà $2ax=c^2+n^2$; ed $x=\frac{c^2+n^2}{2a}$, cioè sarà x cognita: sottratta poi la seconda dalla prima sarà $2by=c^2-n^2$, ed $y=\frac{c^2-n^2}{2b}$, cioè sarà l' y determinata. Da questo metodo a guisa di corollario raccolgasi, che quando sia nota la somma, e la differenza di due quantità, si rendono note le medesime quantità; la qual cosa particolarmente avvertiamo, perchè grandissimo è l' uso, che si fà d' un tal teorema.

XXI. Se l' incognite x ed y non fossero moltiplicate per la medesima quantità in ambe l' equazioni, cioè se i termini di dette equazioni non fossero identici; con tutto ciò si ridurranno tali, parlo dei termini di una sola incognita, se vicendevolmente una equazione si moltiplicherà per la quantità moltiplicante la stessa incognita nell' altra equazione, e ciò potendosi fare, separatamente però, in riguardo a tutte due l' incognite; quindi con una somma, e una sottrazione si sapranno determinare l' x, e l' y ancora in questo caso. Siano dunque l' equazioni $ax+by=c^2$, $nx-my=n^2$, le quali non hanno identicità di termini, si moltiplichi la prima per m, e la seconda per b, ed avremo $max+mby=mc^2$, e $bnx-mby=bn^2$

$= b n^2$ equazioni che anno i termini della incognita y identici; onde sommando queste equazioni sarà $m a x + b n x = m c^2 + b n^2$, ed $x = \frac{m c^2 + b n^2}{m a + b n}$. In oltre si moltiplichi la prima equazione per n e la seconda per a; sarà $n a x + n b y = n c^2$, ed $a n x - a m y = a n^2$ equazioni, che anno i termini della incognita x identici; onde sottraendo la seconda dalla prima sarà $a m y + n b y = n c^2 - a n^2$, ed $y = \frac{n c^2 - a n^2}{a m + n b}$.

XXII. Questo metodo si estende a qualunque numero d' incognite e di altrettante equazioni come colla pratica apprenderà, chi vorrà intorno a ciò esercitarsi.

CAPO V.

Risoluzione dell' Equazioni del secondo grado.

I. L' Operazioni con cui abbiamo ottenuta la risoluzione dell' Equazioni del primo grado non sono bastevoli a darci la risoluzione di quelle del secondo. Fa d' uopo adunque ricorrere ad altri metodi.

II. In seguito proporremo l' Equazioni paragonate al zero, cioè con tutti i termini da una parte del segno d' uguaglianza, in maniera che dall' altra rimanga il solo zero; inoltre il termine, che contiene l' incognita alla massima potestà, non sarà moltiplicato, ne diviso per alcuna quantità, il che sempre si otterrà col dividere o moltiplicare tutta l' equazione per quella quantità, che moltiplicasse, o dividesse la massima potestà dell' incognita. Questa massima potestà

stà dell' incognita sempre si costituisce come primo termine dell' Equazione; tutti i termini, in cui l' incognita è alla potestà prossimamente minore, costituiscono il secondo termine di quella, e così successivamente fino all' ultimo termine, che sarà costituito dalla somma di tutti i termini noti; il che si chiama ordinare l' equazione per la lettera che esprime l' incognita.

III. Conviene ancora distinguere l' equazioni *pure*, o sia *incomplete*, dalle *affette*, o sia *complete*: le prime contengono la sola potestà seconda dell' incognita, come $ax^2 + bx^2 - ab = o$, l' altre, oltre la seconda potestà, contengono ancora la prima, come $x^2 + ax - bb = o$.

IV. Sia ora l' Equazione pura ed incompleta $x^2 - aA = o$, in cui x^2 è il quadrato dell' incognita, a è una qualunque quantità positiva, A poi può essere positiva o negativa secondo le circostanze, se si trasporti il termine $- aA$ dall' altra parte del segno d' uguaglianza, facendo $x^2 = aA$, e se si estragga la radice quadrata da amendue i membri, onde sia $x = \sqrt{aA}$, sarà risoluta l' equazione. Richiamando alla memoria ciò che si è detto nell' Algoritmo dei radicali al §. 6. cioè che il valore del radicale quadratico sia doppio vale a dire positivo, e negativo, ne inferiremo essere doppia ancora la radice della proposta equazione, cioè essere $x = +\sqrt{aA}$, $x = -\sqrt{aA}$, le quali sono reali se A esprima una quantità positiva come $b + c$, sono poi immaginarie, se esprima una quantità negativa come $- b - c$.

V. Ad operare con tutta esatezza, mentre estraemmo la radice seconda dall' Equazione, si doveva fare $\pm x = \pm\sqrt{aA}$, donde nascono quattro combina-

zio-

zioni $x = +\sqrt{aA}$, $-x = -\sqrt{aA}$, $x = -\sqrt{aA}$, $-x = +\sqrt{aA}$, ma comecchè le prime due non sono diverse, perchè l' una diventa l' altra colla mutazione dei segni, siccome accade ancora all' altre due; quindi due sol tanto sono propriamente le diverse combinazioni, cioè $x = +\sqrt{aA}$; $x = -\sqrt{aA}$, ovvero $x = \pm\sqrt{aA}$.

VI. Se i valori dell' incognita si trasportino dalla parte in cui ella esiste, nascono due equazioni uguali a zero $x - \sqrt{aA} = o$, $x + \sqrt{aA} = o$, le quali si chiamano *fattori* dell' equazione proposta del secondo grado, perchè appunto la restituiscono fatta la moltiplicazione di loro; ed in fatti dalla moltiplicazione loro nasce il prodotto $x^2 + \sqrt{aA}\,.\,x - \sqrt{aA}\,.\,x - aA = o$, cioè $x^2 - aA = o$.

VII. Con questo metodo si riducono l' Equazioni di grado superiore a grado inferiore, purchè siano pure e coll' esponente dell' incognita divisibile per 2. Sia l' Equazione di sesto grado $x^6 - a^5A = o$, sarà $x^6 = a^5A$, ed estratta la radice seconda, sarà $x^3 = \pm\sqrt{a^5A}$, equazione di terzo grado. Sia $x^4 - a^3A = o$, sarà $x^4 = a^3A$, ed estratta la radice quadrata sarà $x^2 = \pm\sqrt{a^3A}$, ed estratta di nuovo la radice quadrata sarà $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{a^3A}}$, equazione di primo grado: quattro sono i valori dell' incognita x, cioè le radici della proposta equazione, che nascono dalle quattro combinazioni dei segni $+\sqrt{+\sqrt{a^3A}}$, $+\sqrt{-\sqrt{a^3A}}$, $-\sqrt{+\sqrt{a^3A}}$, $-\sqrt{-\sqrt{a^3A}}$; onde quattro saranno ancora i fattori di questa equazione,

cioè

cioè $x - \sqrt{+\sqrt{a^3 A}} = 0$, $x - \sqrt{-\sqrt{a^3 A}} = 0$, $x + \sqrt{+\sqrt{a^3 A}} = 0$, $x + \sqrt{-\sqrt{a^3 A}} = 0$, i quali moltiplicati insieme restituiscono l' equazione data $x^4 - a^3 A = 0$. Or di queste radici, e di questi fattori due sono sempre immaginarii a motivo della quantità negativa $-\sqrt{a^3 A}$, sono poi tutti immaginarii quando A è quantità negativa; a supponendosi sempre positiva, il che si può fare salva l' universalità della formula, mai indurrà immaginarii.

VIII. Passiamo ora all' Equazioni complete del secondo grado, le quali tutte si contengono in questa formula generale $x^2 + Ax + aB = 0$; in cui A, e B denotano quantità positiva, o negativa secondo le circostanze. Ora essendo x^2 il quadrato d' x, ed Ax il doppio del prodotto $\frac{A}{2} \cdot x$, egli è cosa manifesta, che $x + \frac{A}{2}$ sarebbe la radice quadrata di $x^2 + Ax + aB$, se aB fosse il quadrato di $\frac{A}{2}$; mà ciò non essendo si ponga $x + \frac{A}{2} = z$, onde sia $x^2 + Ax + \frac{AA}{4} = z^2$, sarà $x^2 + Ax = z^2 - \frac{AA}{4}$; mà è $x^2 + Ax = -aB$, per l' equazione proposta; dunque sarà ancora $z^2 - \frac{AA}{4} = -aB$, e $z^2 - \frac{AA}{4} + aB = 0$, la quale equazione essendo incompleta si sà già sciogliere, troveremo adunque $z = \pm\sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$; ritrovato il valore di z, si trova ancora il valore d' x, il quale è uguale a $z - \frac{A}{2}$, essendosi posto $x + \frac{A}{2} = z$; onde sarà rà $x = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$, i quali valori della x potranno essere o tutti e due positivi, o negativi, o uno positivo, e l' altro negativo, secondo il valore di A, e B; saranno poi reali se posta positiva B, aB sia minore di $\frac{AA}{4}$, immaginarii, se maggiore. Alle quali cose è necessario che i principianti attentamente riflettino.

IX. Il metodo però più comune di risolvere le stesse equazioni è il seguente. A ciascun membro dell' Equazione $x^2 + Ax = -aB$ si aggiunga il quadrato della metà della quantità, che moltiplica l' x, o sia del coefficiente d' x, il quale quadrato è $\frac{AA}{4}$; con che il primo membro dell' Equazione diviene un quadrato perfetto, cioè $x^2 + Ax + \frac{AA}{4} = \frac{AA}{4} - aB$. Estratta adunque la radice quadrata, abbiamo $x + \frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$, ed $x = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - aB}$, come sopra.

X. Sia per esempio da sciogliersi l' equazione completa del secondo grado $x^2 \begin{array}{l} -nx \\ -cx \end{array} + n^2 = 0$; sarà $x^2 \begin{array}{l} -nx \\ -cx \end{array} = -n^2$, ed aggiunto il quadrato della metà del coefficiente $-n-c$, sarà $x^2 \begin{array}{l} -nx \\ -cx \end{array} + \frac{\overline{n+c}^{\,2}}{4} = -n^2 + \frac{\overline{n+c}^{\,2}}{4}$, ed estratta la radice quadrata sarà

$x -$

$x - \frac{n+c}{2} = \pm \sqrt[1]{-n^2 + \frac{\overline{n+c}^2}{4}}$, ed $x = \frac{n+c}{2} \pm \sqrt[1]{-n^2 + \frac{\overline{n+c}^2}{4}}$.

XI. Ritornando alle radici dell' Equazione generale $-\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$, $-\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$, se queste si trasporteranno dalla parte dell' incognita, acciò si abbiano i fattori dell' Equazione, cioè $x + \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{AA}{4} - aB} = o$, $x + \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{AA}{4} - aB} = o$, e se di questi si farà il prodotto, facilmente ci accorgeremo, che la somma dei termini cogniti, cioè delle radici sia uguale alla quantità A coefficiente del secondo termine dell' Equazione, e che il prodotto loro aB uguagli l' ultimo termine della stessa. Conducendo questa proprietà ad una cognizione più perfetta della natura dell' equazioni stimo giovevole fare intorno la stessa le seguenti riflessioni.

XII. Moltiplicati i fattori $x + a$, $x + b$ s' otterrà il prodotto $\begin{matrix} x^2 + bx + ab \\ + ax \end{matrix}$, che ordino in riguardo alla lettera x; subito ci avvedremo, che il coefficiente del secondo termine di questo prodotto, altro non sia, se non se la somma degli ultimi termini dei due fattori, e che l' ultimo termine ab, altro non sia, se non se il prodotto degli stessi ultimi termini dei fattori; per la qual cosa se avremo due quantità, le quali sommate insieme dieno il coefficiente del secondo termine d' una formula ordinata per qualche lettera, la quale sia nel primo termine elevata a seconda potestà e libera da coefficiente; e se l' ultimo termine della formulā altro non sia, che il prodotto delle due proposte quantità; immediatamente otterremo i due fattori della formula aggiungendo alle due quantità la lettera per cui la formula è stata ordinata.

XIII. Se poi uno dei due fattori $x+a$, $x+b$ sia uguale a zero, ovvero tutti e due, il che non può accadere se non nel caso, che a, sia uguale a b, il prodotto ancora sarà uguale a zero, perchè una quantità, ovvero il zero moltiplicato per zero dà zero, onde tal prodotto prenderà l' aspetto d' equazione del secondo grado, cioè di $\begin{array}{l} x^2+ax+ab=o \\ \quad\;\; +bx \end{array}$, in cui si verificano ancora le cose fin quì dette; adunque necessariamente acciò si abbia equazione uno dei fattori almeno dee essere uguale a zero; non si può per altro determinare qual sia, perchè ad ottenere l' equazione è indifferente, che il sia più tosto l' uno, che l' altro; sol tanto si può conchiudere con sicurezza, ché quando un fattore è uguale a zero, l' altro non possa esserlo, altrimenti la stessa numero quantità x per cagione di esempio sarebbe uguale alle due quantità $-a$, $-b$, il che è assordo, eccettuato il caso in cui a, e b sieno uguali: da ciò s' intenderà come la formula generale $x=-\frac{A}{2}\pm\sqrt{\frac{AA}{4}-aB}$ significhi non già che contemporaneamente x sia uguale a due valori disuguali, il che sarebbe assordo, ma sol tanto, che x debba ad uno dei due valori essere uguale acciò sussista l' equazione $x^2+Ax+aB=o$. Se si domanda come si abbia poi da rilevare quale dei fattori in realtà sia uguale a zero, rispondiamo che dalla natura

dell'

dell' Equazione mai ciò ſi potrà decidere, perchè come ò detto è per eſſa indifferente, che il ſia più toſto l' uno, che l' altro; ma ſe l' equazione ſi adopra per riſolvere qualche problema particolare, allora dalle circoſtanze del problema ſi può ottenere ciocchè ſi è domandato, come vedremo a ſuo luogo. Per ora ſol tanto ſi rifletta, che quella quantità, per cagion d' eſempio $-a$, ſarà una delle radici dell' Equazione $x^2 \begin{matrix} +ax \\ +bx \end{matrix} +ab = o$ la quale poſta in queſta in vece dell' incognita fà ſparire tutti i termini; perchè ciò non può avvenire, ſe l' incognita x meno queſta quantità non ſia un fattore dell' Equazione, e nel caſo preſente, ſe $x+a$ non ſia un fattore dell' Equazione $x^2 \begin{matrix} +ax \\ +bx \end{matrix} +ab = o$, perchè in queſta ſuppoſizione appunto ſuccede, che il prodotto ſvaniſca poſta $-a$ in vece d' x, eſſendo lo ſteſſo, che aver fatta la moltiplicazione per $-a+a$; ſe dunque $x+a$ dee eſſere neceſſariamente un fattore dell' Equazione acciocchè queſta ſvaniſca poſtavi l' a in vece d' x; ne viene in conſeguenza, che $-a$ ſia un valore dell' x, cioè una radice dell' Equazione.

XIV. Queſti metodi, che ſervono all' Equazioni di ſecondo grado, ſervono ancora a ſciogliere l' equazioni di grado ſuperiore, ovvero a ridurle a grado inferiore, purchè l' incognita ſi ritrovi ſol tanto in due termini, e ſia l' eſponente maſſimo di lei doppio del minimo: abbiaſi $x^4 + aAx^2 + a^3B = o$ equazione di quarto grado, in cui vi ſono le accennate condizioni; ſi traſporti il termine noto dall' altra parte, e ſi aggiunga d' ambe le parti il quadrato della metà del coefficiente del ſecondo termine ſarà, $x^4 + aAx^2$

$+\frac{a^2AA}{4}=-a^3B+\frac{a^2AA}{4}$, ed estratta la radice seconda sarà $x^2+\frac{aA}{2}=\pm\sqrt{\frac{a^2AA}{4}-a^3B}$, ed $x^2=-\frac{aA}{2}\pm a\sqrt{\frac{AA}{4}-aB}$, e di nuovo estratta la radice seconda sarà $x=\pm\sqrt{\frac{-AA}{2}\pm a\sqrt{\frac{AA}{4}-aB}}$.

XV. Quì cade in acconcio mostrare, come date due equazioni, ed una incognita, possa questa farsi svanire senza estrazione di radice, benchè elevata a quadrato. Sieno due equazioni del secondo grado $yy+Ay+B=0$, $yy+Cy+D=0$, si sottragga una equazione dall' altra, per esempio la prima dalla seconda, onde sia $\overline{C-A}.y+D-B=0$, ed $y+\frac{D-B}{C-A}=0$, e posta $\frac{D-B}{C-A}=E$, sia $y+E=0$; questa si moltiplichi per y, sarà $yy+Ey=0$, la quale sottratta dalla prima, nasce $\overline{A-E}.y+B=0$, ed $y+\frac{B}{A-E}=0$, posta $\frac{B}{A-E}=F$, avremo $y+F=0$; se questa si sottragga da $y+E=0$, avremo finalmente $E-F=0$ equazione in cui non havvi l' y.

XVI. Sieno le due equazioni $yy+2xy+2ax-aa+by+bx-bb=0$, $yy+2xy-ay+by+bx-bb=0$, in cui vi sono due incognite, si voglia farne sparire una, cioè si voglia giungere ad una equazione, in cui vi sia una sola incognita, e ciò senza estrazione di radice. Si sottragga dalla prima la seconda, onde sia $2ax+ay-aa=0$, e fatta la divisione per a, sia $y+2x-a=0$; si moltiplichi questa

sta equazione per, y ed avremo $yy + 2xy - ay = o$, questa si sottragga dalla seconda delle date Equazioni, onde sia $yb + xb - bb = o$, cioè $y + x - b = o$, la quale sottratta dall' equazione già trovata $y + 2x - a = o$, avremo finalmente $x - a + b = o$, in cui manca l' y, come si desiderava.

XVII. Egli è chiaro, che per ottener l' intento non si richiegga di dover sottrarre la prima equazione dalla seconda, più tosto che questa da quella, ne ancora di dover fare l' altre sottrazioni più tosto da una che dall' altra equazione; giova per altro scegliere più tosto una sottrazione, che l' altra per giungere in una maniera più spedita, e più semplice all' Equazion finale; della quale scelta non si può dare regola alcuna, dipendendo in tutto dall' esercizio, e dall' industria.

XVIII. Questo artificio non serve sol tanto in riguardo all' equazioni del secondo grado, ma ancora in riguardo a quelle di grado superiore, purchè l' incognita, che si vuole togliere di mezzo, sia elevata in tutte l' equazioni alla stessa massima potestà, il che si può sempre ottenere, moltiplicando l' equazione, in cui l' incognita è a minor potestà, per l' incognita ellevata a potestà, che sia la differenza delle due potestà.

XIX. Se fossero più di due equazioni, per esempio tre, e tre incognite, prima faremo sparire un incognita adoprando due equazioni per esempio la prima, e la seconda, dipoi faremo sparire la stessa incognita adoprando un altra combinazione, per esempio la prima colla terza; in questa guisa s' avranno due equazioni, in cui mancherà una delle tre incognite, col mezzo di queste due facendo svanire un' altra incognita, si arriverà finalmente ad una equazione, ne, in cui si ritroverà una incognita. Quindi apparisce l' universalità del metodo proposto.

XX. Collo stesso metodo si espellono alle volte dall' Equazioni le quantità radicali. Si denominino esse colle lettere x, y &c. e si abbiano tante equazioni quanti radicali differenti vi sono, con questo metodo si giungerà ad una equazione, in cui saravvi un solo radicale.

CAPO VI.

Risoluzione de' Problemi Aritmetici determinati, che non oltrepassano il secondo grado.

I. Problema altro non è, che una proposizione, in cui coll' ajuto di alcune quantità cognite si vogliono sapere altre, che sono pur anco incognite. Così per esempio, se dati due numeri quali che siansi se ne dimandasse la somma, o la differenza, o il prodotto si proporrebbe un Problema, il quale allora si dice sciolto, quando si è scoperto il valore delle incognite.

II. I Problemi sono di quattro sorti, cioè *Determinati*, *Indeterminati*, *semideterminati*, e *Piuchedeterminati*.

III. Proplema Determinato è quello in cui si può ottenere tante equazioni quante sono l' incognite, eccone subito un esempio: trovare due numeri la cui somma sia 6, la differenza 2. Si considerino questi due numeri, come se fossero noti, e si esprimano con due dell' ultime lettere dell' Alfabeto per esempio x, y. La prima condizione del Problema ci darà l' equazione $x+y=6$, la seconda $x-y=2$. Sommando queste

ste due equazioni avremo $2x = 8$, e perciò $x = \frac{8}{2} = 4$. Sottraendo la seconda dalla prima sarà $2y = 6 - 2$, e perciò $y = \frac{4}{2} = 2$, dunque 4, e 2 saranno i numeri cercati, essendo $4 + 2 = 6$, $4 - 2 = 2$. In questo problema come si vede chiaramente quante sono l' incognite tanto sono pure l' equazioni, e perciò si ripone nella Classe de' Problemi *Determinati*.

IV. Che se il numero dell' Equazioni fosse minore del numero delle incognite un tal Problema apparterrebbe alla Classe degli *Indeterminati*. Per ottenere lo scioglimento di questi conviene ad arbitrio determinare una o più delle quantità incognite, per arrivare così ad una equazione, in cui unica sia l' incognita. Voglio per esempio due numeri la cui somma sia eguale a 6, chiamati questi due numeri x, y, per quanta industria si adoperi, mai altra equazione otterremo, che questa $x + y = 6$. Si determini dunque il valore di x uguagliandolo ad un numero qualunque, per esempio a 5, e sarà $5 + y = 6$, e perciò $y = 6 - 5 = 1$, onde sarà sciolto il Problema, il quale chiara cosa è potersi sciogliere in tante maniere quanti sono i numeri, che possono sostituirsi ad x, che sono infiniti. Che se i numeri richiesti si volessero positivi, ed interi questa condizione del Problema ridurrebbe il numero delle soluzioni a cinque soltanto, ed un tal Problema chiamerebbesi *Semideterminato*.

V. Quando poi le quantità incognite sieno in minor numero dell' equazioni il Problema chiamasi *Piucchedeterminato*, e d' ordinario n' è impossibile lo scioglimento. Abbiamo veduto di sopra, che due numeri la cui somma sia 6, e la differenza 2 ci portano a que-

est

ste due equazioni $x+y=6$, $x-y=2$, ora se per terza condizion del Problema si volesse che il loro prodotto fosse 15 la terza equazione $xy=15$ ne renderebbe impossibile la soluzione. Poichè essendo $x=4$, $y=2$ sarà $xy=8$, e non già $=15$. Mà poniamo che la terza condizione del Problema sia appunto questa, che sia il prodotto $xy=8$, certo è che allora ne è possibile la soluzione, mà per un mero caso, giacchè vi si pone una condizion superflua, la quale discende necessariamente dalle due precedenti. Si fatte condizioni superflue si ravvisano facilmente dai termini identici, che si trovano in amendue i membri dell' equazione, come avviene nel caso nostro. Poichè avendosi, queste tre equazioni $x=4$, $y=2$, $xy=8$, sostituendo i due valori di x e d' y nella terza abbiamo $8=8$. La ragione è chiara, perchè come da diverse condizioni nascono diverse espressioni; così quando le condizioni sono identiche, identiche saranno pure le espressioni, e se havvi diversità consiste tutta nell' apparenza.

VI. Quindi si distinguono i Problemi dai Teoremi. Imperciocchè se dopo di avere espresse le condizioni tutte dell' apparente problema si arriva ad una equazione identica, è indicio sicuro, che tutte le quantità di quel genere di cui si tratta hanno naturalmente quella proprietà, che ci eravamo prefissi di ritrovare in alcune. Così se nella serie de' numeri naturali 1, 2, 3 ec. si cerchino quattro numeri successivi, e tali; che la somma degli estremi sia eguale alla somma dei medj, chiamando questi numeri x, y, z, u la natura della serie ci darà queste tre equazioni $x+1=y$, $y+1=z$, $z+1=u$, la condizion poi del Problema quest' altra $x+u=y+z$. In vigore delle due prime equazioni abbiamo $x+2=z$ da questa e dalla

ter-

terza se ne forma quest' altra $x + 3 = u$; sostituendo dunque il valore di y, di z, di u, l' equazione $x + u = y + z$ si riduce a questa equazione identica $2x + 3 = 2x + 3$. Per lo che è manifesto che la condizione apposta era superflua; essendo proprio di tutti i numeri di detta serie naturale, purchè sieno successivi, che la somma degli estremi sia eguale alla somma de' medj; onde non era questo un Problema, ma sibbene un Teorema; *o Proposizione, che espone proprietà*.

VII. Alle volte queste equazioni identiche ci fanno comparire determinati quei problemi, che in realtà non sono. Si cerchino per esempio quattro numeri x, y, z, u, tali, che la somma degli estremi sia uguale alla somma dei medj, e questa sia uguale a 7, ed il prodotto inoltre dei due primi sia uguale a 12; La prima condizione dà $x + u = y + z$, la seconda $y + z = 7$, la prima con la seconda $x + u = 7$, la terza $xy = 12$; onde sembra aversi tante equazioni quante incognite, è perciò essere il problema determinato; ma se nella prima equazione in vece di $x + u$, $y + z$, sostituiremo i valori loro dati per la seconda, e per la terza urteremo nell' equazione identica $7 = 7$, la quale ci farà subito accorgere, esserci noi serviti d' una condizione superflua inetta a determinare il problema; ed in realtà la terza equazione $x + u = 7$ non è egli affatto inutile includendosi necessariamente nell' altre due $x + u = y + z$, $y + z = 7$? Non potendosi poi per quanta diligenza si usi trovare altra equazione indipendente dalle accennate, il problema si dee annoverare fra gli indeterminati. Tutte le quali cose ci ammoniscono della diligenza con cui dobbiamo ricercare le condizioni indipendenti una dall' altra per ottenere l' equazioni utili alla determinazione del problema, di ciò non essendovi regola generale conviene ricorrere all' esercizio ed alla riflessione in grazia di che ci accingiamo allo scioglimento dei Problemi.

VIII. Problema primo. Cajo interrogato, che ora fosse, rispose, che le ore scorse dalla mezza notte alle ore, che rimanevano fino al meriggio erano come $2:3$. Si vuol sapere qual ora fosse accennata da Cajo. Le ore scorse dalla mezza notte fino a quel punto si chiamino x, dunque quelle, che rimangono al meriggio sono $12-x$; mà per la risposta di Cajo dee essere $2:3::x:12-x$, e perciò $3x=24-2x$, o sia $5x=24$, sarà dunque $x=\frac{24}{5}$, cioè ore $4:48$. dopo la mezza notte.

IX. Problema secondo. Un cane si dà ad inseguire una lepre in distanza di passi numero $=a$, e la velocità del cane è alla velocità della Lepre come $m:n$. Si cerca dopo quanti passi il cane giugnerà la lepre. Chiamisi x lo spazio, che à percorso la lepre prima di essere presa dal cane, da che il cane incominciò ad inseguirla; dunque lo spazio scorso dal cane, allorchè la giunge sarà $a+x$, ed essendo gli spazi percorsi nello stesso tempo come le velocità, avremo la proporzione $a+x:x::m:n$, e dividendo $a:x::m-n:n$. Onde sarà $x=\frac{an}{m-n}$. Se suppongasi $a=100$, $m=3$, $n=2$ sarà $x=\frac{200}{1}=200$, ed $a+x=300$, dunque dopo passi 300 il cane raggiungerà la lepre. Si possono sostituire ad arbitrio altri numeri, purchè m sia sempre maggiore di n, poichè se li fosse eguale, o minore il cane sarebbe sempre o egualmente, o più lontano dalla lepre.

X. Problema terzo. Sempronio volendo distribuire certi denari a certi poveri osserva, che se ne dà tre a ciascuno, ne mancano otto, se ne da' due, ne avanzano tre. Si vuol sapere il numero de' poveri, e de' denari. Pongasi il numero de' poveri $= x$, giacchè dando a ciascuno d' essi tre denari ne mancano otto sarà il numero de' denari $= 3x - 8$, e per la seconda condizione del Problema avanzandone tre col darne due, sarà il numero de' medesimi $2x + 3$; è dunque $3x - 8 = 2x + 3$, o sia $x = 11$; or sostituendo ad x il suo valore in $3x - 8$, o in $2x + 3$, che esprimono il numero de denari, saranno questi $= 25$.

XI. Problema quarto. Rispose Tizio ad un, che domandavagli quanti anni avesse: se il numero de' miei anni si moltiplichi per 4, ed al prodotto si aggiunga 15, si ha un numero, che di tanto eccede il 150, quanto il numero 100 eccede il numero de' miei anni. Si cerca il numero degli anni di Tizio. Questo numero pongasi $= x$; l' esposta condizione ci dà la proporzione Aritmetica $4x + 15 : 150 :: 100 : x$, dunque agguagliando la somma degli estremi, e de' medj sarà

$$5x + 15 = 150 + 100 = 250, \text{ e perciò } x = \frac{250 - 15}{5}$$

$= 47$; che è il numero degli anni, che si voleva sapere.

XII. Problema quinto. Cajo per mantenimento della sua famiglia spende il primo anno scudi 380, il rimanente dell' entrata lo mette a traffico, ed il frutto, che ne trae è un quarto della somma messa a traffico; il secondo anno spesi i soliti 380 scudi pone il rimanente a guadagno, e ne ricava pure un quarto; lo stesso in tutto, e per tutto gli succede nel terzo anno; passato il quale si accorge, che la sua entrata è cresciuta di un sesto. Si vuol sapere quanta fosse nel primo anno l' entrata di Cajo. Pongasi l' entrata del primo anno $= x$; e gli scudi $380 = a$, sarà il residuo del primo anno $x - a$ ed i frutti ricavati dal traffico $= \frac{x-a}{4}$, dunque l' entrata del secondo anno sarà $= x + \frac{x-a}{4}$; ed il residuo $= x + \frac{x-a}{4} - a$, o sia ridotti gl' interi alla stessa frazione $\frac{5x-5a}{4}$, il cui provento nel secondo anno $= \frac{5x-5a}{16}$ farà sì che l' entrata del terzo anno ascenda ad $x + \frac{x-a}{4} + \frac{5x-5a}{16}$, la quale per l' esposta condizion del Problema sarà $= x + \frac{x}{6}$; dunque ridotte le frazioni al comune denominatore sarà $\frac{16x+4x-4a+5x-5a}{16}$, cioè $\frac{25x-9a}{16} = \frac{7x}{6}$; o sia $38x = 54a$, ed $x = \frac{54a}{38} = \frac{27a}{19} = \frac{10260}{19} = 540$, dunque l' entrata del primo anno era di scudi 540, del secondo anno $540 + \frac{160}{4} = 580$, e nel terzo anno $580 + \frac{200}{4} = 630$, il qual numero è appunto $540 + \frac{540}{6}$, l' entrata cioè del primo anno accresciuta di un sesto.

XIII. Problema sesto. Si fà una cena, che importa 12 scudi. Due de' commensali non pagano; gli altri sborsano uno scudo di più di quello, che avrebbono dato, se la spesa si fosse egualmente ripartita in tutti i commensali: Ciò supposto si vuol sapere quanti ti essi sono. Pongasi il numero loro $= x$, sarà dunque il numero di quelli, che hanno contribuito $x-2$, ed il valore della contribuzione per cadauno $\frac{12}{x-2}$, se tutti però avessero contribuito sarebbe $\frac{12}{x}$; dunque dovendo essere il primo valore maggiore d' uno scudo del secondo sarà $\frac{12}{x-2} - \frac{12}{x} = 1$, o sia $\frac{12x - 12x + 24}{x^2 - 2x} = 1$, e però $x^2 - 2x = 24$; ed aggiunta l' unità all' uno, e all' altro membro $x^2 - 2x + 1 = 25$, dunque $x - 1 = \pm 5$, ed $x = 6$, $x = -4$; la radice negativa non può aver luogo nel caso presente, dunque i commensali furono 6. Si vuol notare però, che la radice negativa ha tutte le condizioni analitiche della positiva essendo $\frac{12}{-4-2} - \frac{12}{-4} = 1$.

XIV. Se il Problema fosse stato proposto in tal maniera che amendue le radici fossero riuscite positive, vi sarebbe qualche cosa di indeterminato. Pongasi per esempio, che la cena costasse scudi 75, che uno dei commensali ne sborsasse 19, che il resto essendosi diviso egualmente fra gli altri ciascuno desse uno scudo meno di quello, che avrebbe dato se tutta la spesa si fosse egualmente ripartita in tutti i commensali. Il numero di questi pongasi $= x$, se uno non avesse sborsato 19 scudi, la contribuzione di ciascuno sarebbe stata $= \frac{75}{x}$, mà nel caso presente sarà $= \frac{75 - 19}{x - 1} = \frac{56}{x-1}$; or questa importa uno scudo di meno, dun-

que

que per eguagliarla alla prima conviene fare $\frac{56}{x-1}+1=\frac{75}{x}$, e tolte le frazioni $56x+x^2-x=75x-75$, $x^2-20x=-75$, dunque aggiungendo 100 all' uno, e all' altro membro $x^2-20x+100=25$, o sia $x-10=\pm5$, e prendendo la radice 5 positiva, $x=15$, prendendo la negativa, $x=5$. Dunque il problema non è affatto determinato potendo essere il numero de' commensali o 15, o 5, e a chi avesse fatto simil quesito, altro rispondere non si potrebbe, che il numero dei Commensali sarà o 5, ovvero 15, non vi essendo contrassegno alcuno per scegliere più tosto l' un che l' altro.

XV. Problema Settimo. Una libra di oro è del valore $=a$, una libra di argento del valore $=b$, di questi due metalli se ne vuol fare un composto, il valore di cui per ogni libra sia $=c$; che porzione d' oro, e che porzione di argento si dee prendere? La porzione dell' oro pongasi $=x$, la porzion dell' argento $=y$. La regola del tre c' insegna, che se una libra d' oro è del valore $=a$ una porzione di oro x, sarà del valore $=ax$, essendo $1:a::x:ax$, ed essendo per la stessa ragione $1:b::y:by$ la porzione dell' argento sarà del valore $=by$, e poichè queste due porzioni di oro, e di argento x, y hanno da fare una libra sarà $x+y=1$, ed essendo il valore di questa libra $=c$ sarà $ax+by=c$. Or moltiplicando la prima equazione per b e poi sottraendola dalla seconda sarà $ax-bx=c-b$, dunque $x=\frac{c-b}{a-b}$; moltiplicando poi la prima per a, e da quella sottraendo la seconda sarà $ay-by=a-c$; che però $y=\frac{a-c}{a-b}$:

Dun-

Dunque farà $x:y::c-b:a-c$; Onde dividendosi in questa ragione la libra si avrà la quantità d'oro, e di argento, che è necessaria per formare il detto composto. Per esempio sia $a=21$, $b=11$, $c=15$, sarà $c-b=4$, $a-c=6$. Dividasi dunque la libra in parti, che abbiano la ragione $4:6$, o sia $2:3$; queste sono $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, dunque $\frac{2}{5}$ di una libra d' oro, e $\frac{3}{5}$ di una libra di argento fanno una libra di un metallo composto del valore $=15$.

XVI. Problema ottavo. Vi sono due botti, in cui il vino è mescolato coll' acqua, in una botte il vino è all' acqua come $a:b$ nell' altra come $c:f$, cercasi che quantità di liquore estrar si debba dalla prima botte, che quantità dalla seconda, per empirne una terza botte, in cui il vino sia all' acqua come $m:n$. L' acqua ed il vino esprimansi colle lettere A, U; dunque il liquore contenuto nella prima botte sarà $aU+bA$, e nella seconda $cU+fA$; il liquore, che dee estrarsi dalla prima botte pongasi $=x$, quello che dee estrarsi dalla seconda $=y$, sarà dunque $axU+bxA+cyU+fyA=mU+nA$; ma nella terza botte dee essere $axU+cyU=mU$, e $bxA+fyA=nA$; dunque $ax+cy=m$, e $bx+fy=n$, che però $x=\frac{fm-cn}{af-cb}$, ed $y=\frac{an-mb}{af-cb}$. Se pongasi $a=7$, $b=3$, $c=4$, $f=6$, $m=n=6$ si troverà essere $x=\frac{2}{5}$, $y=\frac{4}{5}$.

XVII. Questo metodo si può rendere generale nella maniera che segue. Se da più composti in cui le quantità componenti A, B, C sono nella ragione indicata dalle formole seguenti $aA+bB+cC$, $eA+fB+gC$,

gC, $hA + iB + kC$ si prendano le quantità x, y, z, cosichè nel nuovo composto A, B, C sieno nella ragione m, n, p

Avremo
$$\begin{aligned} &axA + bxB + cxC \\ &eyA + fyB + gyC = mA + nB + pC \\ &hzA + izB + kzC \end{aligned}$$
Quindi ne nascono tre equazioni colle quali si scioglie il Problema, cioè $axA + eyA + hzA = mA$, $bxB + fyB + izB = nB$, $cxC + gyC + kzC = pC$. Da queste tre equazioni si cava facilmeute il valore delle tre incognite x, y, z; e con questo metodo si viene alla soluzione di qualunque problema di simil fatta per grande che sia il numero delle quantità componenti un qualche misto.

CAPO VII.

Risoluzione dei Problemi semideterminati.

I. I Problemi semideterminati propriamente appartengono alla classe degl' indeterminati, non potendosi in questi avere tante equazioni, quante sono le incognite; nondimeno col mettervi alcune condizioni ricevono un determinato numero di soluzioni, e qualche volta neanco questo. Diciamone alcuna cosa, perchè non giungano affatto nuovi agli studiosi dell' Algebra. Fra le condizioni, che vi si possono apporre consideriamone soltanto di due spezie: la prima, che i numeri siano interi e positivi; la seconda, che siano quadrati. Quanto alla prima, ridotte l' equazioni tutte ad una sola, in cui supponiamo due essere l' incognite, conviene in primo luogo determinare i limiti, che oltrepassati essendo una, o più quantità diverrebbono ne-

negative; poi si assegnino successivamente diversi valori ad una delle due incognite, tali però, che l' altra incognita non debba essere una frazione; così si avranno tutte le soluzioni possibili. Spieghiamo la cosa con alcuni esempi.

II. Problema primo. Si vogliono due numeri x, y tali, che sia $3x - 5y = 9$, dunque $y = \frac{3x - 9}{5}$. Per evitare il numero negativo dovrà essere $3x > 9$, cioè $x > 3$, e per evitare le frazioni converrà, che $3x - 9$ possa dividersi perfettamente per 5; Ora quei soli numeri possono dividersi perfettamente per 5, che finiscono in zero, o in 5; mà $3x - 9$ non può terminare in zero, se $3x$ non termina in 9, ne $3x - 9$ può terminare in 5; se $3x$ non termina in 4: dunque quei soli numeri ci danno il valore di x, che moltiplicati essendo per 3 finiscono in 9, ovvero in 4. Il minimo di tutti questi sarà l' 8, dopo il 13, poi 18 &c. Quindi si ricava il valore di $y = 3, 6, 9$ &c. come vedesi nella tavoletta. Notisi che i due valori di x, ed y formano due serie aritmetiche crescenti. La differenza della prima serie è 5, della seconda 3; dal che si vede, che, potendo queste due serie andare in infinito, e tutti i numeri che crescono nelle dette differenze soddisfacendo al Problema, questo ha infinite soluzioni.

$x = 8$	$y = 3$
13	6
18	9
23	12

III. Problema secondo. Si vogliono due numeri x, y tali, che sia $3x + 2y = 20$, ovvero $x = \frac{20 - 2y}{3}$. E' chiaro, che essere dee $y < 10$, altrimenti x sarebbe un numero negativo, e perchè y non sia negativo, dovrà essere $x < 7$, e poichè $\frac{20}{3}$ non è una pura frazione, così esporremo l' equazione $x = 6 + \frac{2 - 2y}{3} = 6 + 2 . \frac{1 - y}{3}$. Volendosi che dalla frazione ne nasca un intero, e posto che sia $y < 10$ facilmente si scopre, che y può avere questi tre soli valori $7, 4, 1$, a cui corrispondono i valori $x = 2, 4, 6$, i primi in serie aritmetica decrescente, la cui differenza è 3, i secondi in una serie crescente, la cui differenza e 2, e sono i soli numeri, che sciolgono il problema.

$y = 7$	$x = 2$
4	4
1	6

IV. Problema terzo. Le Coturnici costano soldi 2, i tordi 1, i passeri $\frac{1}{2}$; non si hanno se non che 70 soldi, e si vorrebbe comprare 100 capi di questi augelli: si cerca quanti se ne debba comprare di ogni specie. Pongasi il numero delle coturnici $= x$, de' tordi $= y$, de' passeri $= z$, si avrà queste due equazioni $x + y + z = 100$, $2x + y + \frac{1}{2} z = 70$, dalla seconda moltiplicata per 2 si sottragga la prima, sarà $3x + y = 40$, d' onde si deduce, che dovrà essere $x < 14$, ed $y < 40$. Ciò supposto si consideri la formola $y = 40 - 3x$; Se pongasi $x = 13$ sarà $y = 1$, $z = 86$, se pongasi $x = 12$, sarà $y = 4$, $z = 84$, e così discorrendo, come

$x = 13$	$y = 1$	$z = 86$
12	4	84
11	7	82
10	10	80
9	13	78
8	16	76
7	19	74
6	22	72
5	25	70
4	28	68
3	31	66
2	34	64
1	37	62

come può offervarfi nella tavola annessa. Il Problema dunque può scioglierfi in 13 maniere ne più, ne meno, poichè uscendo fuori dei limiti prescritti i numeri verranno ad effere negativi. Si offervi, che i valori delle tre incognite formano tre ferie aritmetiche, la prima è decrescente colla differenza di 1, la seconda crescente colla differenza di 3, la terza decrescente colla differenza 2.

V. Problema quarto. Trenta, parte uomini, parte donne, e parte ragazzi pranzarono insieme; la spesa montò a 75 paoli, ma gli uomini ne pagarono 5, le donne 3, i ragazzi 2. Si cerca qual fosse il numero degli uomini, delle donne, e de' ragazzi. Pongasi il numero degli uomini $= x$, quello delle donne $= y$, quello de' ragazzi $= z$. Sarà dunque $5x + 3y + 2z = 75$, $x + y + z = 30$, si moltiplichi la seconda equazione per 2, e si sottragga dalla prima, sarà $3x + y = 15$; dunque $x < 5$, $y < 15$; si moltiplichi ora la seconda equazione per 3, e dal prodotto sottraggasi la prima, sarà $-2x + z = 15$; dunque $z = 15 + 2x$: mà $2x < 10$, dunque $z < 25$. Ora essendo i limiti di x i più ristretti si facciano queste due equazioni $y = 15 - 3x$, $z = 15 + 2x$. Si ponghi $x = 4$ sarà $y = 3$, $z = 23$. Quattro sono le soluzioni che ammette il problema, che formano tre progressioni aritmetiche.

$x = 4$	$y = 3$	$z = 23$
3	6	21
2	9	19
1	12	17

VI. Or diciamo alcuna cosa di que' Problemi soltanto, ne quali si chiede per condizione, che i numeri sieno quadrati altro non permettendo il presente ristretto. Questi non escludono i numeri fratti, ma sibbene gl' irrazionali, onde tutta l' arte consiste in nominare per sì fatto modo le quantità incognite, che si tengan lontane le quantità sorde.

VII Problema quinto. Trovare due numeri, i cui quadrati sommati insieme diano un numero anch' esso quadrato. Ecco lo scioglimento con un metodo semplicissimo, se al quadrato $m^4 - 2m^2n^2 + n^4$ aggiungasi l' altro quadrato $4m^2n^2$, sarà la somma $m^4 + 2m^2n^2 + n^4$, che è un numero quadrato, dunque i numeri cercati sono $m^2 - n^2$, $2mn$, i cui quadrati sommati insieme sono $= \overline{m^2 + n^2}^2$. In fatti ponendosi $m = 2$, $n = 1$ si avranno i due numeri quadrati $16 + 9 = 25$.

VIII. Colla stessa arte sciogliesi quest' altro problema. Trovare due numeri tali che dal quadrato dell' uno, sottraendo il quadrato dell' altro, la differenza sia un numero quadrato. Questi saranno $m^2 + n^2$, $m^2 - n^2$, essendo la differenza de' loro quadrati $4m^2n^2$ numero parimente quadrato, la cui radice è $2mn$. I numeri cercati possono essere ancora $m^2 + n^2$, $2mn$, che elevati essendo al quadrato hanno per differenza $m^4 - 2m^2n^2 + n^4$, la cui radice è $m^2 - n^2$.

IX. Problema sesto. Trovare tre numeri tali che tanto la somma di tutti, quanto la somma di due di essi quali che siansi dia un numero quadrato. Sieno i tre numeri $4x$, $x^2 - 4x$, $2x + 1$, la somma di tutti sarà $x^2 + 2x + 1$, la somma del primo, e del secondo x^2, la somma del secondo, e del terzo $x^2 - 2x + 1$, che sono tutti numeri quadrati. Dunque per sciogliere il problema conviene dare ad x un tal valore, che $6x + 1$, che è la somma del primo, e del terzo sia un numero quadrato. Pongasi $6x + 1 = m^2$, dunque $x = \frac{m^2 - 1}{6}$, dunque i tre numeri sono $\frac{2m^2 - 2}{3}$,

$m^4 -$

$\frac{m^4 - 26m^2 + 25}{36}$, $\frac{m^2 + 2}{3}$.

X. Problema settimo. Sempronio compra del vino di due sorta; il vino di una vale 8 paoli la misura, dell' altra vale 5. La somma della spesa è un numero quadrato, cui se aggiungasi 60 si ha un altro quadrato, la cui radice dà il numero delle misure dell' uno e dell' altro vino comprato da Sempronio. Si cerca quale sia il numero delle misure. Pongasi questo $= x$; dunque per la condizion del Problema $x^2 - 60$ sarà il numero de paoli, co' quali si è fatto la compra di tutto il vino. Questo numero, come si è detto ha da essere quadrato; per averlo tale convien definire i limiti di x; se per comprare quella sorta di vino, che vale meno, cioè 5 Sempronio avesse sborsato il danaro $x^2 - 60$, il numero delle misure sarebbe $\frac{x^2 - 60}{5}$, il quale dee essere maggior di x; dunque $x^2 - 60 > 5x$, perchè collo stesso danaro si ha maggior numero di misure del vino, che costa meno, che del vino, porzione di cui costi più. Per consimile ragione sarà $x^2 - 60 < 8x$; dunque abbiamo $x^2 - 5x > 60$, $x^2 - 8x < 60$, ora aggiungendo i quadrati della metà del coefficiente, sarà $x^2 - 5x + \frac{25}{4} > \frac{265}{4}$, $x^2 - 8x + 16 < 76$; supponiamo ora per trovare le radici, che il primo quadrato sia maggiore di $\frac{289}{4}$, ed il secondo quadrato sia minore di 64, i quali quadrati perfetti sono i più prossimi ai numeri $\frac{265}{4}$ e 76 che non sono quadrati, ed avremo $x^2 - 5x + \frac{25}{4}$

>

$> \frac{289}{4}$, $x^2 - 8x + 16 < 64$, ed estratte le radici sarà $x - \frac{5}{2} > \frac{17}{2}$, $x - 4 < 8$, o sia $x > \frac{22}{2} = 11$, $x < 12$. Trovati dunque i limiti di x convien procurare, che $x^2 - 60$ sia un numero quadrato. Si supponga $x^2 - 60 = \overline{x-y}^2 = x^2 - 2xy + y^2$, dunque $x = \frac{y^2+60}{2y}$, ma x dee essere maggiore di 11, e minore di 12; dunque il valore di $\frac{y^2+60}{2y}$ sta fra l' 11, e 12; per la prima di queste condizioni $\overline{y-11}^2 > 121 - 60 = 61$, suppongasi $\overline{y-11}^2 > 64$, dunque $y - 11 > 8$ ed $y > 19$, essendo poi per la seconda condizione $\overline{y-12}^2 < 144 - 60 = 84$, suppongasi $\overline{y-12}^2 < 81$, dunque $y - 12 < 9$, ed $y < 21$. Ora poichè y è maggiore di 19, e minore di 21, vediamo se ponendo lo $= 20$ si sciolga il problema. Dovrà dunque essere $x^2 - 60 = \overline{x-20}^2 = x^2 - 40x + 400$, o sia $x = \frac{460}{40} = 11\frac{1}{2}$. Convien dunque dire, che il numero delle misure sia $11\frac{1}{2} = \frac{23}{2}$, il cui quadrato è $\frac{529}{4}$, da cui in fatti sottraendo $60 = \frac{240}{4}$, il residuo sarà $\frac{289}{4}$ numero quadrato, la cui radice è $\frac{17}{2}$; dunque il numero de paoli è $\frac{289}{4} = 72\frac{1}{4}$.

XI. Resta ora da trovare il numero delle misure di ciascuna sorte. Il numero di quelle, che costan 5 sia z, sarà il loro valore $5z$; il numero delle altre sarà necessafariamente $11 \frac{1}{2} - z$, ed il valore corrispondente $92 - 8z$, e perciò il prezzo di tutte insieme $92 - 3z$; ma questo esser dee $= 72 \frac{1}{4}$, dunque $92 - 3z = 72 \frac{1}{4}$, che però $3z = 19 \frac{3}{4}$, e $z = 6 \frac{7}{12}$ numero delle misure di cui ciascuna è del valore di 5. Se questo numero sottraggasi da $11 \frac{1}{2}$ il residuo sarà $4 \frac{11}{12}$ che è il numero delle altre. Di questi problemi, i quali come ognuno vede richiedono non piccola industria, oltre Diofanto, ed i Commentatori di lui Xilandro, Bachet, e Fermat, ne hanno con ingegno trattato Presteto, Ozanam, e Sonderson.

CAPO VIII.

Costruzione dei Problemi geometrici del primo, e secondo grado.

I. QUando abbiasi in animo applicare l' operazioni algebraiche alla soluzione de' Problemi geometrici, fà d' uopo esprimere le quantità di questi per le lettere dell' Alfabeto, indi far passaggio all' equazioni coll' ajuto delle condizioni del Problema. Queste a tal fine si dovranno attentamente considerare, imperciocchè quantunque non sia cosa difficile qualche fiata ottenere l' equazioni, che si desiderano, non di rado tutta volta accade, che a ciò si richiegga riflessione, ed artificio, come condurre parallele, alzare perpendicolari, formare angoli, delineare circoli, eoli, conviene ancora rivolgersi a' triangoli simili, agli angoli costanti, al celebre Teorema pittagorico, cioè alla prop. 47 del lib. 1. di Euclide &c. Ne havvi regola generale, che possa farci la scorta, onde tutte le speranze sono nell' esercizio, e nell' industria.

II. Se l' equazioni ritrovate non passano il grado secondo, si sanno già sciorre, cioè si sà determinare il valore dell' incognita espresso con sole quantità cognite; non per tanto trattandosi di Problemi geometrici l' operazione è compita, bisogna inoltre esprimere con quantità geometriche il valore algebraico dell' incognita, il che non essendo senza difficoltà, perciò daremo alcune regole, che vengono sotto il nome di *costruzioni*, *o luoghi geometrici* de' quali a questo capo appartengono sol quelli del primo, e secondo grado.

III. Come nelle equazioni di primo grado il valore analitico dell' incognita s' ottiene colla somma, colla sottrazione, moltiplicazione, e divisione, così il valor geometrico s' ottiene colla somma, e sottrazione delle linee, o al più col ritrovare la terza, o la quarta proporzionale. Sia $x = a - b + c$, dalla somma delle due rette $a + c$ sottratta b il residuo sarà l' incognita x. Sia $x = \frac{ab}{c}$, colle operazioni geometriche volgari dopo le rette c, a, b si ritrovi la quarta proporzionale, che sarà la x, perchè dovendo essere il rettangolo di c in questa quarta proporzionale uguale al rettangolo di a in b, sarà questa quarta proporzionale in $c = ab$; e perciò sarà essa $= \frac{ab}{c} = x$. Sia $x = \frac{cc - bb}{c - d}$, il numeratore di questa frazione si può risolvere in due fattori $c - b$, $c + b$, onde sia $x =$

$\overline{c + b}$.

$\frac{\overline{c+b}\,.\,\overline{c-b}}{c-d}$, si ritrovi la quarta proporzionale dopo le tre rette $c-d$, $c-b$, $c+b$, che sarà l' x. Sia $x=\frac{ab}{c}+\frac{bd}{n}$, si trovi la quarta proporzionale dopo le tre rette c, a, b, che chiamo f, dipoi si determini l' altra dopo le tre rette n, b, d, che chiamo g, sarà $x=f+g$, cioè uguale alla somma delle due rette $f+g$.

IV. Quando il numeratore della frazione non può risolversi in due fattori lineari, allora vi è bisogno di qualche artificio. Sia $x=\frac{ab+cd}{m+n}$, si prenda una retta d' uno dei due termini del numeratore per esempio a e si trovi la quarta proporzionale dopo queste e le due rette c, d dell' altro termine, che chiamo f, sarà $af=cd$, dunque sarà $x=\frac{ab+af}{m+n}$, e dopo $m+n$, $b+f$, a, trovata la quarta proporzionale, avremo la x. Sia $x=\frac{fdcn}{abm}$, questa frazione si può considerare come il prodotto delle due frazioni $\frac{fd}{a}.\frac{cn}{b}$ diviso per m, si trovino le due quarte proporzionali $\frac{fd}{a}$, $\frac{cn}{b}$, la prima delle quali chiamo p, l'altra q, sarà $x=\frac{pq}{m}$, e trovata dopo le tre rette m, p, q la quarta proporzionale sarà questa la x. Sia $x=\frac{aa+bb}{c}$ avremo $x=\frac{aa}{c}+\frac{bb}{c}$, si trovino le due terze continue propornali dopo c, a, è dopo c, b la somma loro sarà la x. Sia $x = \frac{abc - def}{gh + ki}$ si faccia $ef = am$, $gh = an$, $ki = ap$, acciocchè sia l' equazione $x = \frac{abc - adm}{an + ap}$ cioè $x = \frac{bc - dm}{n + p}$, si ponga di nuovo $dm = bq$, acciocchè sia $x = \frac{bc - bq}{n + p}$, si ritroverà finalmente la x quarta proporzionale dopo le rette $n + p$; $c - q$, b; le rette m, n, p, q si determinano col ritrovare le quarte proporzionali; così per esempio sarà $m = \frac{ef}{a}$ quarta proporzionale dopo le rette a, e, f, lo stesso si intende facilmente dell' altre.

V. Si osservi, che in tutti gli addotti esempi le dimensioni nei termini del numeratore, sono d' un grado superiore alle dimensioni del denominatore; ma sempre ciò non si verifica, perchè avviene, che alle volte nei termini del numeratore siavi ugual numero di lettere, alle volte minore, che nel denominatore, come sarebbe in $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{nn}$, nel qual caso a non smarrirsi è da sapere che ciò succede, quando trà le rette appartenenti al problema, o ve n' è una arbitraria, che si considera come unità, o ve n' è una denominata coll' unità, onde quante dimenzioni mancano al bisogno, altrettante debbono essere rimesse dall' unità, così per trovare la retta $\frac{a}{b}$ si faccia $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 1}{b}$, per trovare la retta $\frac{b}{n^2}$, si puone $\frac{b}{nn} = \frac{b \cdot 1 \cdot 1}{nn}$, per la retta $\frac{p + nn}{qq + rr}$, si scrive $\frac{p \cdot 1 \cdot 1 + nn \cdot 1}{qq + rr}$, e per 1 s' in-
ten-

tende una retta arbitraria, ovvero quella denominata 1 come si rileverà dal Problema, e poi si operi al solito: lo stesso milita se le dimensioni necessarie mancano nel denominatore. Con questi metodi senza dubbio verremo al possesso di tutti i valori geometrici corrispondenti ai valori analitici nelle equazioni del primo grado.

VI. Rivolgendoci ora alle equazioni del secondo grado, comecchè queste si sciolgono colla estrazione delle radici quadrate, contenendo perciò il valore dell' incognita quantità radicali del secondo grado, fa di mestiere insegnare come queste geometricamente si esprimano. Sia $x = \sqrt{ab}$ si alzi a quadrato sarà $xx = ab$, dunque sarà $a : x : : x : b$, dunque x, o sia $\sqrt{ab}$ sarà media proporzionale frà a e b; la quale si ritrovi coi soliti metodi geometrici.

VII. Sia $x = \sqrt{aa + bb}$ (*Fig.* 1. *Tom. I.*). Si mettano ad angolo retto le due linee rette AB, BC, e sia $AB = a$, $BC = b$, e si conduca AC; per la proposizione 47 del libro primo di Euclide, sarà il quadrato $AC^2 = AB^2 + BC^2$, dunque sarà $AC^2 = aa + bb$, e la $\sqrt{AC^2}$, cioè AC uguale $\sqrt{aa + bb}$; sarà adunque x uguale ad AC, cioè uguale all' ipotenusa del triangolo rettangolo, i cateti di cui sono le rette a e b.

VIII. Sia $x = \sqrt{cc - aa}$. Si descriva il semicircolo ACB (*Fig.* 2. *T. I.*) col diametro AB uguale alla retta c, e fatto centro in B coll' intervallo BC uguale alla retta a, si delinei un arco, che seghi il semicircolo in C, e si tiri la CA. Per la prop. 31 del lib. 3. di Euclide l' angolo ACB è retto; dunque per la 47 del lib. I. sarà $AB^2 = AC^2 + BC^2$, cioè $AB^2 - BC^2$

$= AC^2$; dunque $cc - aa = AC^2$, ed in confeguenza $x = \sqrt{AC^2} = AC$. Altro adunque non è $\sqrt{cc - aa}$ se non se il lato del triangolo rettangolo, l' ipotenusa di cui è uguale a c, ed un cateto uguale ad a. Le tre formule fin qui costruite sono generali, ed a queste si riducono con picciola industria tutte le radici quadratiche.

IX. Sia $x = \sqrt{\frac{a^3}{b} + cd}$, questa si può ridurre alla prima formula nella maniera che segue. Si faccia $\frac{a^2}{b} = f$, col ritrovare la terza continua proporzionale dopo b ed a, e colla sostituzione si ottiene $x = \sqrt{af + cd}$; si ponga $cd = fg$, la retta g sarà nota, col trovare la quarta proporzionale dopo f, c, d, fatta di nuovo la sostituzione sarà $x = \sqrt{af + gf} = \sqrt{f \cdot \overline{a + g}}$, sarà dunque x media proporzionale trà le due rette f, ed $a + g$. Si rifletta, che si poteva costruire la formula dopo che si ottenne colla prima sostituzione $x = \sqrt{af + cd}$, col trovare due medie proporzionali, trà a, f, e trà c, d, e con mettere quelle ad angolo retto; imperciocchè condotta l' ipotenusa, sarebbe questa uguale a $\sqrt{af + cd}$.

X. Sia $x = \sqrt{aa + bc}$, posta $bc = nn$, sarà $x = \sqrt{aa + nn}$. Sia $x = \sqrt{aa + bb - cc - nn}$, si faccia $aa + bb = ff$, $cc + nn = gg$, sarà $x = \sqrt{ff - gg}$, la quale formula è la terza generale. Sia $x = \sqrt{aa + \sqrt{c^4 + b^4}}$, si faccia $bb = cf$, sarà $b^4 = ccff$; e $\sqrt{c^4 + b^4} = \sqrt{c^2 f^2 + c^4} = c\sqrt{ff + cc}$ per lo §. 17. del

del Cap. 3., di nuovo si faccia $\sqrt{ff+cc}=g$; sarà $\sqrt{b^4+c^4}=cg$, dunque $x=\sqrt{aa+cg}$, la quale si sà costruire.

XI. Avvertasi, che le dimensioni delle quantità esistenti sotto il segno radicale quadratico debbono essere due, perchè così estratte le radici si trova una quantità lineare uguale ad x; se qualche termine fosse espresso con frazione, allora la dimensione del numeratore meno quella del denominatore dee essere similmente del secondo grado; tal condizione non può mancare purchè nel problema non siavi qualche retta arbitraria o qualcuna denominata r, nel qual caso si supliscano le dimensioni necessarie, come si è fatto trattando della costruzione delle Equazioni del primo grado.

XII. Quantunque le cose fin qui dette siano bastevoli alla costruzione geometrica di qualunque valore analitico o lineare, o radicale del grado secondo, ciò non ostante spesso si urta in costruzioni lunghe e poco eleganti, le quali per altro si ponno evitare col ben considerare le circostanze del problema, collo scegliere certe linee, certe posizioni di rette, certi angoli, che fanno più al proposito; al che il solo esercizio e la sola industria può servire di guida.

XIII. A rendere manifesto quanto vaglia l' industria in queste materie, esponiamo un altro metodo di costruire l' equazioni del secondo grado, di cui n' è l' Autore il dottissimo Rabuelio. Si à dalla Geometria (*Fig.* 3. *T.* I.) che, se la linea GH seghi i due circoli concentrici ABC, GHF la porzione GA compresa tra i due perimetri da una parte, sia uguale alla porzione BH compresa tra i medesimi dall' altra. Ciò posto per costruire l' equazione $zz+az=bc$

tira-

tirate a capriccio le due rette EF, GH, che si seghino nel punto A, e presa in una la $AB = a$, e nell' altra la $AF = b$, ed $FC = c$, per gli tre punti A, B, C si delinei un circolo, il cui centro sia D, poi coll' intervallo DF si descriva un altro circolo concentrico al primo, il quale segherà AB nei punti G, H, ed AC in E, dico che AH sarà la radice positiva, ed AG la negativa della proposta equazione; perchè abbiamo $AE = FC = c$; dunque il rettangolo $EAF = bc$; inoltre chiamata $AH = z$, sarà $GA = BH = z - a$, ed il rettangolo $GAH = zz - az$; onde sarà $zz - az = bc$ per la 35 prop. di Euclide del lib. 3., che è appunto la proposta equazione, e se si chiami $AG = -z$, sarà $AH = a - z$, ed il rettangolo $GAH = zz - az = bc$, come sopra; adunque AH, ed AG sono le due radici z, $-z$ della proposta equazione. Se si abbia da costruire $zz + az = bc$, la costruzione è la stessa con questa sola differenza, che GA è la radice positiva, AH la negativa.

XIV. Sia da costruirsi l' equazione $zz - az = -bc$ (*Fig.* 4. *T. I.*) condotte a qualunque angolo le rette AB, AC nella prima si prenda $AB = a$, nella seconda $AF = b$, ed $FC = c$, e per gli tre punti A, B, C si descriva un cerchio il centro di cui sia D; coll' intervallo DF si delinei un altro cerchio, che segherà la retta AB nei punti G, H, e la retta AC in E, dico, che le due AH, ed AG sono le due radici positive della nostra equazione, il che si dimostra come sopra. La stessa costruzione serve per l' Equazione $zz + az = -bc$ col divario, che le AH, ed AG saranno radici negative. In questa avviene che se $\frac{aa}{4} < bc$, il circolo descritto col raggio DF non seghi

la

la retta AB, il che indica essere immaginarie le radici della proposta equazione, e per ciò essere impossibile la soluzione del problema.

CAPO IX.

Si sciolgono alcuni Problemi geometrici di primo, e di secondo grado.

I. PRoblema primo. Essendo data la retta (*Fig.* 5. *Ta.* 1.) AB, divisa in C comunque siasi, conviene allungarla verso E per tal modo, che il rettangolo AEB sia eguale al quadrato CE. Pongasi $AB = a$, $CB = b$, e l' incognita $BE = x$: Dovendo essere $AE.EB = CE^2$, sarà $\overline{a+x} \cdot x = \overline{b+x}^2$, cioè $ax + xx = b^2 + 2bx + x^2$, o sia $ax - 2bx = bb$; onde $x = \frac{bb}{a-2b}$; è dunque $a - 2b : b :: b : x$, la quale analogia dimostra, che l' incognita $BE = x$ è la terza proporzionale ad $a - 2b$, b. Quindi ne nasce questa costruzione.

II. Si prenda $CD = b$ affinchè sia $AD = a - 2b$. Dai punti C, B si alzino due parallele CL, BH, la prima delle quali sia $= AD$, l' altra $= CB$, ed i punti L, B si congiungano colla retta LB; a questa si tiri una parallela HE, che concorra colla retta AB prodotta nel punto E, questa determina l' incognita BE, che si cercava. Poichè essendo simili i triangoli LCB, HBE, sarà $CL = a - 2b : CB = b ::$ $BH = b : BE = \frac{bb}{a-2b}$.

III. Si dimostra anche col metodo sintetico. Per la costruzione è $AD = CL : DC = CB :: CB = BH :$

BE,

BE; dunque componendo
$AC : CB :: CE : BE$, ed alternando
$AC : CE :: CB : BE$, e componendo
$AE : CE :: CE : BE$, dunque CE è media proporzionale frà AE, BE; dunque $AE . BE = CE^2$, il che doveasi dimostrare.

IV. Quì si vogliono fare alcune osservazioni. Essendo $b < \frac{a}{2}$ il punto D sempre caderà tra A, e C, ed allora ha sempre luogo la nostra costruzione; ma se fosse $b = \frac{a}{2}$ il punto D caderà in A, e sarà $AD = 0$, e perciò anche $CI = 0$, ed il punto I caderà in C, e la retta LB giacerà sulla retta CB; dunque HE parallela ad LB non si incontrerà mai colla retta AB. Finalmente essendo $b > \frac{a}{2}$, il punto D caderà oltre il punto A, e la linea AD [illegible] sotto il zero sarà negativa, perciò la CI [illegible] dal punto C [illegible] nella parte opposta alla CI positiva, cioè sotto AB, dal che ne viene, che HE parallela ad LB taglierà la linea AB nella parte opposta, cioè dalla parte del punto A.

V. Problema secondo. Dati due circoli i cui centri sono A, B, (Fig. 3. Tav. I.) tirare una linea, che gli tocchi ambedue. Sia CD la tangente ricercata, che s'incontri colla linea AB nel punto E; si tirino a' punti del contatto le perpendicolari AC, BD, pongasi $AB = a$, $AC = b$, $BD = c$, $BE = x$; essendo retti gli angoli C, D, [illegible] AC, BD saranno paralleli, dunque saranno simili i triangoli EAC, EBD, e sarà [illegible] il [illegible] una [illegible]. Si [illegible] comunque

que due raggi AL, BM, purchè sieno paralleli, ed i punti L, M si congiungano colla retta LM, che continuata dalla parte M taglierà la retta AB in E, e questo sarà il punto d' onde la tangente tirata ad un circolo, sarà tangente ancora dell' altro, e scioglierà il problema; poichè essendo simili i triangoli EAL, EBM, sarà $LA : MB :: AE : BE$; dunque dividendo $LA - BM : MB :: AB : EM$, o sia $R - r : r :: a : BE = x$.

VI. E' chiaro, che dal punto E potrà tirarsi un' altra tangente Ed, che sarà tangente dell' altro circolo nel punto c. E' chiaro ancora, che questa soluzione è buona per tutti i circoli, che hanno i diametri disuguali, nel qual caso la tangente comune concorre colla linea, che congiunge i due centri dalla parte del circolo minore: che se i circoli fossero uguali divenendo allora la tangente parallela alla linea AB il punto E sarà infinitamente distante; ma in questa ipotesi si rende più facile la soluzione; poichè allora il raggio perpendicolare alla linea AB in A, dove taglia la circonferenza, ivi determina il punto, da cui si dee tirare la tangente comune.

VII. Sebbene dal punto E non possano tirarsi più di due tangenti, non si creda però, che due soltanto sieno le soluzioni del Problema; perciocchè due altre tangenti possono tirarsi da un punto F posto frà B, ed A: nel qual caso ponendo $BF = x$, facilmente si vedrà essere $R : r :: a - x : x$, e componendo $R + r : r :: a : x$; Ora producendo il raggio MB in N, e congiungendo i due punti L, N colla linea LN, il punto F, in cui questa taglia AB sarà quello da cui tirando le tangenti ad un de circoli saran tangenti ancor dell' altro, e le due nuove tangenti saranno KH, kb. Dal che si vede, che questo problema benchè si esprima con una equazione di primo grado, pure si ritrova avere quattro diverse soluzioni; le due, che dà il punto f sono immaginarie, se i circoli si taglino; se poi un cerchio cada dentro l' altro, sono immaginarie tutte quante.

VIII. Problema terzo. Dato il cerchio AEF (*Fig.* 7. *T. I.*) e fuori di esso il punto B congiunto col centro dalla retta CB, a cui è perpendicolare BD, si cerca in questa un punto D tale, che tirando dal centro la linea CD, sia la $DE = DB$. Pongasi il raggio $CA = r$, $BA = a$, $BD = DE = x$, sarà $CB = r + a$, $CD = r + x$. Essendo retto l' angolo B, è $CD^2 = CB^2 + DB^2$, o sia $\overline{r+x}^2 = \overline{r+a}^2 + xx$, o sia $rr + 2rx + xx = rr + 2ar + aa + xx$, o sia $2rx = 2ra + aa$, donde si ha questa proporzione $2r : 2r + a :: a : x$.

IX. Questi termini analitici ci portano ad una elegante costruzione. Producendo il raggio AC fino al punto F della circonferenza; sarà $FA = 2r$, $FB = 2r + a$: alzando dunque sulla retta AB la perpendicolare $AG = AB = a$, e congiunti i punti F, G colla retta FG, questa linea, prodotta che sia, taglierà la retta BD nel punto D, che si cercava. Poichè per la somiglianza de' triangoli sarà $FA = 2r : FB = 2r + a :: AG = a$, $BD = x$. Dunque tirata la linea CD sarà la DE, compresa frà il punto D ed il cerchio, uguale a DB.

X. Il Problema potrebbe proporsi più generalmente così. Stante le dette condizioni trovare un punto D, a cui tirata la linea CD sia $BD : DE :: a : n$. Allora ponendo $DB = x$ sarà $DE = \frac{nx}{a}$, e $CD = r + \frac{nx}{a}$.

Per-

Perciò essendo retto l' angolo B, sarà $\overline{r+\frac{nx}{a}}^2 = \overline{r+a}^2 + x^2$, dalla qual equazione usando de' soliti metodi si trarrebbe il valore di x, che sarebbe $x = \pm \frac{(n^2 a^4 + 2 n^2 a^3 r - a^6 - 2 a^5 r + n^2 a^2 r^2)^{\frac{1}{2}} - n a r}{n^2 - a^2}$. Si può quindi ricavare la costruzione, ma saria poco semplice, onde volendo aver riguardo alla eleganza rivolgiamo l' animo ad un altro genere di analisi.

XI. Suppongasi, che la linea CED (*Fig.*8. *Ta.*I.) ci dia la soluzione del Problema. Si tiri il raggio CO parallelo alla retta BD, a cui per lo punto E si tiri la perpendicolare FEG, e la parallela EH. Chiamisi $CB = FG = a$, il raggio $= r$, $FB = EH = x$, $EF = y$, onde sarà $EG = HC = a - y$, ed essendo $CH : HE :: CB : BD$, sarà $a - y : x :: a : BD = \frac{ax}{a-y}$; dunque $DF = \frac{ax}{a-y} - x = \frac{xy}{a-y}$, e per la somiglianza de' triangoli CEG, DEF, è $CG : CE :: DF : DE$; dunque $x : r :: \frac{xy}{a-y} : DE = \frac{ry}{a-y}$; Ora per la condizion del Problema $BD : DE :: a : n$, dunque $\frac{ax}{a-y} : \frac{ry}{a-y} :: a : n$, o sia $ax : ry :: a : n$.

XII. In vigor di questa analogia si potrebbe fare sparire una delle due incognite, giacchè essendo $CE^2 = CH^2 + EH^2$ abbiamo quest' altra equazione $rr = \overline{a-y}^2 + xx$, ma questo metodo ci porterebbe ad una equazione di secondo grado, e la costruzione ne riuscirebbe alquanto intrigata; onde per averla più semplice battiamo un alrra strada. Essendo $BF = x : FE = y :: r : n$, dal punto O tirata la linea OM parallela a CB si faccia $BM = r$, e si prenda nella linea OM la parte $MN = n$, e si congiungano i due punti B, N colla linea BN, da quale che siasi punto della retta BN si tiri una normale a BM, come per esempio RQ sarà sempre $BP : PQ :: r : n$, dunque il punto E sarà necessariamente nella linea BN, ma questo stesso punto dee essere nella circonferenza del circolo, dunque sarà dove si taglia il circolo, e la linea BN; dunque se per lo punto E si tiri la linea CED, sarà questa la linea cercata.

XIII. Ma si vogliono divisare alquanto le varie determinazioni. Dal punto B (*Fig. 9. T. I.*) si tiri la tangente BK, la quale producendosi taglierà MO in L, sarà $BK = \sqrt{aa - rr}$, il che è evidente tirato che siasi il raggio CK. Di più i triangoli BKC, LBM sono simili. Dunque $KC : KB :: MB : ML$, ma $KC = MB$, dunque $ML = KB = \sqrt{aa - rr}$, dunque essendo $n = \sqrt{aa - rr}$, la linea BN passa ad essere la linea BL, e tocca il circolo, e si ha soltanto una soluzion del Problema; se $n < \sqrt{aa - rr}$, come per esempio $M2N$ allora $B2N$ non incontrando mai il circolo, tutte le soluzioni saranno immaginarie. Se fosse $n > \sqrt{aa - rr}$, ma $< a$, come MN si avranno due soluzioni, avendosi due intersecazioni del circolo fra i punti A, O; se pongasi $n = a$, cioè $= MO$, correndo allora la proporzion d' uguaglianza, oltre il punto, che abbiamo trovato nel problema sciolto di sopra, vi sarà ancora il punto O per cui tirata essendo la linea CO va questa all' infinito senza mai incontrarsi colla linea BM, e così le linee, le quali

deo-

deono essere uguali divengono infinite; se finalmente sarà $n > a$, come $M3N$, tirando la linea $B3N$ questa taglierà il circolo frà i punti A, O, la qual intersecazione ci dà una soluzione somigliante alle prime; e la taglierà ancora nel punto I di là dai punti N, O da cui tirata la linea IC, che passi pel centro, e s' incontri colla linea MB in R, si dimostra, che sarà $BR : RI :: BC$, $M3N :: a : n$; e l' espressioni delle due rette che sono $\frac{ax}{a-y}$, $\frac{ry}{a-y}$ per essere $y > a$, saranno negative.

XIV. Chi porrà mente a questa analisi, vedrà che essa è di un' amplissima estensione; imperciocchè non è necessario, che l' angolo MBC sia retto, ma basta, che le linee MO, FG, PQ sieno parallele a BC. Osservisi ancora l' arte onde mediante la intersecazione del circolo, e di una retta si perviene a questa elegante costruzione. Si fatti metodi sono utilissimi allora quando nel problema vien dato un circolo.

XV. Noi abbiamo seguite queste traccie particolarmente per manifestare gli artificii dell' analisi; poichè a prima vista non sempre vien fatto di scorgere il metodo più semplice. Del rimanente questo problema così prestamente si scioglie. Dal centro C (*Fig.* 10. *Tav.I.*) si tiri la linea COR parallela a BD; si tagli la linea CR in modo, che sia $CO : CR :: DE : BD$, e si congiungano i due punti B, R colla linea BR: per lo punto E, dove questa taglia il circolo tirata la linea CED, questa determinerà il punto D; imperciocchè essendo simili i triangoli CER, BED, si avrà $DE : DB :: CE = CO : CR$ che è la ragione data.

XVI. Problema quarto. Date nella retta AB (*Fig.* 11. *T.II.*) le due parti, AC maggiore, e CB minore, ed e-

retti

retti sovra di esse due triangoli equilateri se ne congiungano i vertici colla retta EF, che prodotta essendo si incontrerà colla linea AB, anch' essa prodotta, in D. Fatto centro in questo punto D col raggio DC si descriva il circolo CM; si cerca nella circonferenza di lui un punto M, da cui tirate le linee MA, MB sia $AC : BC :: MA : MB$: Prima si trovi il valore del raggio DC. Per la somiglianza de' triangoli DAE, DCF sarà $AE : CF$ o sia $AC : CB ::$ $AD : CD$; dunque dividendo $AC - CB : CB :: AC :$ CD, ed in termini analitici $a - b : b :: a : CD =$ $\frac{ab}{a-b}$, chiamando $CA = a$, $CB = b$; sia MP normale ad AB, e $CP = x$, $MP = y$ l' equazione al circolo espressa sarà dalla formola $\frac{2ab}{a-b} . x - xx = yy$, ed essendo retto l' angolo P sarà $AM = \sqrt{\overline{a+x}^2 + yy}$, e per la stessa ragione $MB = \sqrt{\overline{b-x}^2 + yy}$; dunque per la condizione del problema che richiede $CA : CB$ $:: MA : MB$, sarà $a : b :: \sqrt{\overline{a+x}^2 + yy} : \sqrt{\overline{b-x}^2 + yy}$ o sia $a^2 : b^2 :: \overline{a+x}^2 + y^2 : \overline{b-x}^2 + y^2$; ed elevando al quadrato i due binomj, e sostituendo ad yy il suo valore espresso dall' equazione al circolo sarà

$$a^2 : b^2 :: aa + 2ax + xx + \frac{2abx}{a-b} - xx : bb - 2bx + xx + \frac{2abx}{a-b} - xx ::$$

$$aa + \frac{2a^2x}{a-b} : bb + \frac{2b^2x}{a-b},$$ e permutando in prima, e poi dividendo $a^2 : \frac{2a^2x}{a-b} :: b^2 : \frac{2b^2x}{a-b}$, o sia $a - b$ $: x ::$

$: x :: a - b : x$, nella qual proporzionalità essendo i termini identici si scopre, che questo è un Teorema, non già un Problema, onde dovunque prendasi il punto M, sarà sempre $AC : BC :: AM : BM$.

XVII. Problema quinto. Sulla base BC (*Fig.* 12. *T. II.*) ergere un triangolo isoscele, il cui angolo al vertice sia la metà dell' angolo alla base. Questo problema, che fu già sciolto da Euclide, si propone quì per far vedere come si dee cercare l' uso, che hanno le radici dell' equazione. L' uno de' due angoli alla base del triangolo ABC si divida in due parti uguali dalla linea CD, così i tre angoli A, BCD, ACD saranno eguali, ed il triangolo ACB sarà simile al triangolo CDB essendo comune l' angolo B, e l' angolo A eguale all' angolo DCB, quindi ponendosi $AC = AB = x$, $BC = a$, sarà $x : a :: a : BD = \frac{aa}{x}$; Ma $DA = CD = BC = a$; dunque $BA = \frac{aa}{x} + a = x$; dunque $xx - ax = aa$, la qual equazione, così si risolve $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{aa + \frac{aa}{4}}$. A cagion de' segni $\pm$ è chiaro, che due sono le radici, l' una e l' altra così geometricamente si determina. Dal punto B si tiri la linea $BE = \frac{a}{2}$ perpendicolare alla base, poi si congiunga il punto E col punto C tirando la linea $EC = \sqrt{aa + \frac{aa}{4}}$, a cui se si aggiunga $EF = \frac{a}{2}$ sarà $CF = \frac{a}{2} + \sqrt{aa + \frac{aa}{4}}$, e sottraendo $Ef = \frac{a}{2}$ sarà

Cf

$Cf = \frac{a}{2} - \sqrt{aa + \frac{aa}{4}}$, che ſono le due radici dell' equazione la prima poſitiva, la ſeconda negativa; una ſola però ſcioglie il problema, ed è la poſitiva CF; poichè coſtruito con queſta il triangolo BAC, e tagliata $AD = a$, ſarà $BD = \sqrt{aa + \frac{aa}{4}} - \frac{a}{2}$, che è appunto la terza proporzionale dopo AB, BC; dunque condotta CD ſarà il triangolo BCD ſimile al triangolo ABC; onde ſarà $BC = DC = DA$, e però ſarà l' angolo $ACB = ABC = BDC = A + DCA$, e l' angolo $A = DCA$: dunque l' angolo ACB è doppio dell' angolo A. Nel ſecondo caſo, fatto colla Cf il triango BAC (*Fig.* 13. *Tav. II.*) ſe ſi prolonghi BA in D, onde ſia $AD = a$, ſaranno, come ſi rileva dai valori analitici, BD, BC, BA in proporzion continua, onde i triangoli ACB, BCD ſaranno ſimili; dunque gli angoli B, D, ACB ſono eguali: ma l' angolo DCA, o ſia DAC è eguale a i due angoli B, ACB preſi inſieme, e l' angolo CAB è parimente eguale a i due angoli DCA, D preſi inſieme. Dunque è l' angolo $CAB = B + D + ACB$, o ſia, che viene a riuſcir lo ſteſſo l' angolo CAB al vertice è triplo dell' angolo alla baſe. Dunque inſieme col propoſto problema ſe ne è ſciolto pure un altro.

XVIII. Per intendere la cagione, ond' è che delle due radici trovate l' una ſcioglie il primo problema l' altra ne ſcioglie un altro aſſai diverſo dal primo, baſta oſſervare in che maniera ſiamo pervenuti all' equazione. Abbiamo fatto l' angolo $BCD = BAC$, d' onde ſi deduce l' uguaglianza delle linee BC, CD, DA, la qual coſtruzione ſe facciaſi ancora in riguardo al ſecondo triangolo; ſi rileverà ſimilmente eſſere le

tre

tre rette BC, CD, DA uguali. Inferimmo inoltre essere $AB:BC::BC:BD$, analogia propria anche del secondo Problema. Perciò essendo nel primo caso $BD=x-a$, nel secondo $=x+a$ l'equazione del primo problema sarà $xx-ax=aa$, l'equazion del secondo $xx+ax=aa$, che si cangia nella prima ponendo x negativa; essendo dunque tutte queste cose comuni all'uno, e all'altro problema non è da maravigliarsi che dalla stessa equazione si tragga la soluzion di amendue.

XIX. Ma perchè meglio conoscano gli studiosi dell'algebra ciò che importa la diversità delle radici, e perchè apprendano come per diverse strade si può arrivare alla soluzione dello stesso problema, voglio qui soggiungere un altro scioglimento, che serve ai due triangoli isosceli, cioè a quello che ha l'angolo al vertice la metà dell'angolo alla base, ed a quello che l'ha triplo. (*Fig.* 14, 15 *Tav.* 2.) ABC sia il triangolo ricercato, la cui base BC sia $=a$, il lato $AB=x$, si conducano le rette AM, AN in maniera, che gli angoli MAB, NAC eguaglino l'angolo BAC, l'istesse linee si producano, fino che incontrino la base BC in D, ed E, prodotta quando sia bisogno. Nella prima figura essendo l'angolo $CBA=2BAC=2MAB$, sarà l'angolo $D=BAD$, onde il triangolo BDA è isoscele, come lo è ancora il triangolo CAE: nella seconda figura, essendo l'angolo $BAC=MAB$, e perciò $BAD=B+C$, cioè uguale a due quinti di due retti, e l'angolo B ad un quinto, sarà l'angolo BDA uguale a due quinti; onde il triangolo BAD è isoscele, come lo è il triangolo CAE: dunque sarà $BD=CE=x$, e $BE=a+x$ nella prima figura, ed $x-a$ nella seconda. Di più i triangoli ABC, EAB sono simili, onde sarà $CB:BA$

$::BA:BE$, ed analiticamente, nel primo triangolo sarà $a:x::x:a+x$, ed $xx=ax+aa$, e nel secondo $a:x::x:a-x$, ed $xx=aa-ax$, delle quali equazioni una nell' altra si converte, presa x negativamente.

XX. L' uno e l' altro triangolo ci dà la divisione della circonferenza in 5 parti uguali; imperciocchè se dentro qualunque circolo si inscriva un triangolo (*Fig.16.Tav.2.*) ABC isoscele il cui angolo A sia la metà di ciascuno degli altri due B, C l' arco BC sarà la quinta parte della circonferenza, e ciascun degli archi AB, AC due quinte. Per lo contrario inscrivendosi nel circolo un triangolo isoscele ADE, il cui angolo A sia triplo di ciascuno degli angoli D, E, degli archi AD, AE sarà ciascuno la quinta parte della circonferenza, e l' arco $DBCE$ ne conterrà tre quinte parti.

XXI. Problema sesto. Dato fuori del triangolo BAC [*Fig.17, e 18. T.2.*] il punto P tirare la PQX, che divida il triangolo in ragion data. Per lo punto P ai due lati AB, BC prodotti, frà cui esista il punto P, si tiri MPN parallela al lato AC. Sia $CX=x$, $PM=a$, $CM=b$. Essendo dato il triangolo CAB, e data la ragione, che à al triangolo CQX, sarà questo pur determinato, che chiamo $=\frac{mm}{2}$, onde la perpendicolare dal punto Q sopra CX sarà $\frac{mm}{x}$, che ancora è $=\frac{CQ.g}{b}$, chiamata g la perpendicolare dal punto M sopra CA, e perciò $\frac{mm}{x}=\frac{CQ.g}{b}$, e $CQ=\frac{mmb}{gx}$, e posto $\frac{mm}{g}=2c$, sarà $CQ=\frac{2bc}{x}$;

inol-

inoltre per la ſimilitudine dei triangoli CQX, MQP ſarà $a \pm x : x :: b : \frac{2bc}{x} :: x : 2c$; la $x + a$ appartiene alla figura prima, $a - x$ alla ſeconda; dunque $xx \mp 2cx = 2ac$, da cui ne viene $x = \pm c \pm \sqrt{2ac + cc}$. L' ambiguità dei ſegni dà quattro valori della x; i due in cui eſiſte $+c$ ſono per la figura prima, i due altri per la ſeconda. Eſſendo ſempre c minore del radicale, queſto preſo negativamente, renderà i due valori della x negativi, i quali non ſervono al problema, dovendoſi prendere in parte oppoſta a CX, e perciò al triangolo CAB.

XXII. Quì può accadere un caſo che merita molta rifleſſione, e che fà comprendere qual differenza mai ſiavi frà la ſoluzione dell' Equazione, e quella del Problema; può ſuccedere adunque, che il Problema non venga ſciolto da alcuna delle radici dell' Equazione; e ciò accade quando ſia la CX maggiore della CR determinata tirando per P, B, la PBR, cioè quando ſia il triangolo $QXC >$ di BRC; imperciocchè cadendo per eſempio X in $2X$; tirata la $P2X$ naſce il triangolo eſterno $SB2Q$, nel qual caſo ſarà il triangolo $C2Q2X$ ad $ABC - C2Q2X$ in ragion data; il che è ciò, che veramente ſi domanda all' Analiſi, ed a che ella eſattamente riſponde; ma non ſarà già diviſo il triangolo ABC nella ſteſſa ragione, il che propriamente all' analiſi non ſi è richieſto, ne viene incluſo nelle condizioni, che hanno ſervito all' Equazione, e perciò l' Analiſi non è in obbligo di riſpondere. Per ſchivare queſto inconveniente altro non ſi dee fare, che invertere la ragione data, ed in ſeguito ſi dee operare come ſopra; ſe il triangolo BKC ſia maggiore di QXC, e minore di BAK

il problema riceverà due soluzioni, perchè si possono fare due triangoli *CQX*, *AS2X* uguali. Se il punto *P* cade dentro il triangolo, quasi nella stessa maniera il problema può essere sciolto. Da' problemi risoluti in questo capo possono i Giovani bastantemente accorgersi quanto debbono essere scrupolosi nel ritorno dall' Algebra alla Geometria.

CAPO X.

Principii del calcolo dei Seni, e Cosseni circolari, e dell' altre linee trigonometriche.

IL Signor Leonardo Eulero Algebrista di profondo sapere, come a tutti è noto, è stato il primo, che à introdotto nell' Algebra il calcolo dei Seni, e dei Cosseni, con le altre linee trigonometriche, adoprandolo con molta felicità nelle ricerche più sublimi, e più ardue. L' utilità di questo novello calcolo è stata subito conosciuta; onde i migliori Analisti di tutte le Nazioni l' hanno abbracciato. Siccome adunque si fà gran uso di esso, così giudichiamo non solo opportuno, ma necessario esporne, e dimostrarne i principii nella maniera che segue.

I. Sia un circolo (*Fig*. 19. *T*. 2) qualunque *ANBM*, in cui si seghino due diametri *BA*, *MN* perpendicolarmente nel centro *C*, da cui si tiri una retta *CSQ* la quale faccia con *CA* qualunque àngolo, dal punto *S* della intersecazione della retta *CQ* con il circolo si cali sopra *CA* la perpendicolare *FS*, poi dai punti *A* ed *N* si tirino al circolo le tangenti, le quali vadano a secare la retta *CS* prodotta nei punti *P*, e *Q*. Il raggio *CA* del circolo si chiama *seno tutto*, e l' esprime-

reremo per la lettera *r*, la retta *S F* si chiama *seno* dell' arco *A S*, ovvero dell' angolo *A C S*, essendo nei circoli gli angoli al centro proporzionali agli archi; quindi ciò che diremo degli archi, si intende detto ancora degli angoli al centro; (quando i punti *F*, *S*, *P*, *Q* si nominano senza numeri si intende di parlare di tutti quei punti dove si trovano *F*, *S*, *P*, *Q*; quando poi vi si aggiunge il numero si intende di parlare di quel punto particolare), questa retta poi *S F* l' esprimeremo per *Sc*; la retta *C F* si chiama *cosseno*, e l' esprimeremo per *Cc*; la retta *A P* si dice *tangente*, e l' esprimeremo per *Tc*; La *N Q* *cotangente*, e l' esprimeremo per *Ctc*; la retta *C P* *secante*, e *C Q* *cossecante*, delle quali la prima si esprime *Sec*, la seconda *Csc*. Tutte le qnali denominazioni delle predette rette si intendono, in riguardo all' arco *A S*, ovvero all' angolo *A C S*. Gli archi di circolo si nomineranno con le lettere greche; onde *Sc*.π significa il seno dell' arco π, *Ctc*.ϕ significa la cotangente dell' arco ϕ. Intorno ai seni e cosseni conviene notare in primo luogo, che quando il seno *FS* è zero; allora il cosseno *CF* sarà uguale al raggio *CA*, a cui sarà uguale ancora la secante *CP*; la tangente *AP* sarà zero, e la cotangente *N Q* sarà infinita, siccome lo sarà la cossecante *C Q*. Se poi il cosseno *C F* è uguale a zero; la tangente *A P*, e la secante *C P* diventano infinite; il seno poi *FS*, e la cossecante *C Q* diventano uguali al raggio *C N*; onde quando il seno, o cosseno diventano zero, allora l' altre linee trigonometriche parte diventano zero, parte infinite, parte uguali al raggio; quando il seno è uguale al cosseno, allora la tangente ancora è uguale alla cotangente, e la secante alla cossecante, e l' angolo semiretto, e l' arco la metà del quadrante, tutte le quali cose sono per se stesse manifestissime.

II.

II. Esaminiamo adesso ciocchè avviene alle linee trigonometriche nelle varie grandezze degli archi circolari. Posto l' arco $A\,1\,S$ = zero il seno $1\,F\,1\,S$ pure sarà zero, e il cosseno $C\,1\,F$ sarà positivo, ed uguale al raggio CA; posto l' arco $A\,1\,S$ minore del quadrante AN, il seno $1\,F\,1\,S$, e il cosseno $C\,1\,F$ sono ambo positivi, se l' arco $A\,1\,S$ sarà uguale al quadrante AN, il seno diventerà uguale al raggio CN, e il cosseno sarà zero; quando l' arco $A\,2\,S$ diventa maggiore del quadrante, e minore della semicirconferenza, allora il seno $2\,F\,2\,S$ è positivo, ed il cosseno $C\,2\,F$ negativo, diventando l' arco uguale alla semiperiferia AB il seno diventa zero, ed il cosseno negativo diventa uguale al raggio CB. Ponghiamo presentemente l' arco maggiore della semiperiferia, e minore di tre quarti di essa, come $AB\,3\,S$, allora tanto il seno $3\,F\,3\,S$, quanto il cosseno $C\,3\,F$ saranno negativi; quando l' arco è uguale a tre quarti della periferia, come $ANBM$, allora il seno negativo diventa uguale al raggio CM; e il cosseno diventa zero; essendo l' arco maggiore di tre quarti della periferia, come $AM\,4\,S$, allora il seno $4\,S\,4\,F$ è negativo, ed il cosseno $C\,4\,F$ positivo; diventando finalmente l' arco uguale a tutta la periferia il seno diventa zero, ed il cosseno positivo diventa uguale al raggio. Se prenderemo un arco uguale a tutta la periferia più l' arco AS il seno sarà FS ed il cosseno CF; se l' arco fosse uguale a tre, quattro, ed infinite intiere periferie del circolo, più l' arco AS lo stesso seno FS, e cosseno CF servirebbero a tutti questi archi infiniti; il che si dee intendere ancora, come è chiaro, della tangente, e cotangente, secante; e cossecante dell' Arco AS.

III. Se poi l' arco si prendesse negativo minore del quadrante come $A\,4\,S$, questo avrebbe il seno $4\,S\,4\,F$ ne-

negativo, ed il cosseno positivo; onde il seno negativo, ed il cosseno positivo indica o un arco positivo maggiore di tre quadranti, o un arco negativo minore di un quadrante. Se l' arco negativo è maggiore del quadrante, ma minore della semiperiferia come *A* 3 *S* il seno ed il cosseno saranno negativi; onde seno e cosseno negativo ugualmente serve o a un arco positivo maggiore di due quadranti e minore di tre, o a un negativo minore di due, ma maggiore di uno; se l' arco negativo è maggiore di due quadranti, ma minore di tre, come è l' arco *AB* 2 *S* allora il cosseno *C* 2 *F* sarà negativo, ed il seno 2 *F* 2 *S* sarà positivo; appunto come quando l' arco *A* 2 *S* positivo è maggiore di un quadrante, e minore di due. Finalmente quando l' arco negativo è maggiore di tre quadranti, come *AB* 1 *S*, allora il seno 1 *F* 1 *S*, ed il cosseno *C* 1 *F* saranno positivi, come appunto quando l' arco *A* 1 *S* positivo è minore del quadrante. Noi però in pratica quando avremo seno e cosseno positivo, o seno positivo, e cosseno negativo prenderemo gl' archi positivi; quando poi avremo seno, e cosseno negativo, o seno negativo, e cosseno positivo prenderemo gli archi negativi; e la ragione è, che così verranno sempre presi archi minori della semiperiferia; onde passando dagli archi agli angoli saranno sempre indicati angoli minori di due retti; il che è necessario per servirsi dei seni nella dottrina dei triangoli.

IV. In riguardo poi alle tangenti, e alle cotangenti se l' arco *A* 1 *S* è positivo minore del quadrante la tangente *A* 1 *P*, e la cotangente N 1 *Q* sono positive. Se l' arco *A* 2 *S* è maggiore di un quadrante, ma minore di due la tangente *A* 2 *P*, e la cotangente N 2 *Q* sono ambe negative. Ciò forse recherà maraviglia ai Principianti, la quale si dissiperà se riflettano,

che

che la tangente del arco dee essere sempre in $2 P A 1 P$, la quale tocca il circolo nel punto A, donde l' arco à principio, e che essa viene determinata dalla sezione P del raggio C S prodotto colla linea $1 P 2 P$; ciò posto, comecchè è evidente, che il raggio $C 2 S$ non possa incontrare la retta $A 1 P$ dalla parte $A 1 P$, dunque l' incontrerà dalla parte opposta $A 2 P$, e per tale ragione sarà la tangente negativa. Si osservi che prima di fare questo passaggio la tangente diventa infinita quando appunto l' arco è uguale al quadrante $A N$. In riguardo poi alla cotangente la quale sempre si dee ritrovare nella linea $1 Q N 2 Q$ la cosa è chiarissima, sol tanto si noti che il passaggio dal positivo al negativo si fà per lo zero il che avviene qnando l' arco è uguale al quadrante $A N$. Se l' arco $A 3 S$ è maggiore di due quadranti, ma minore di tre, allora la tangente, e la cotangente tornano positive, se finalmente l'arco $A 4 S$ è maggiore di tre quadranti, allora la tangente, e cotangente tornano negative. Se si prenderà l arco $A 4 S$ negativo minore del quadrante si avrà tangente e cotangente negativa; se l' arco negativo $A 3 S$ sarà maggiore del quadrante, e minore di due, tangente e cotangente saranno positive; l' arco $A 2 S$ negativo maggiore di due quadranti, ma minore di tre, à tangente e cotangente negative; finalmente quando l' arco negativo $A 1 S$ è maggiore di tre quadranti, sarà la tangente e cotangente positiva. Onde tangente e cotangente positiva indica un arco positivo minore del quadrante, o un arco positivo maggiore di due quadranti e minore di tre, o un arco negativo maggiore del quadrante e minore di due, o un arco negativo maggiore di tre quadranti. Tangente e cotangente negativa indica o un arco positivo maggiore del quadrante, e minore di due, o un arco positivo maggiore di tre quadranti, o un arco nega-

ga-

gativo minore del quadrante, o un arco negativo maggiore di due quadranti, e minore di tre; onde ſi raccoglie, che tangente e cotangente poſitiva, o tangente e cotangente negativa poſſono ſempre indicare archi poſitivi minori della ſemicirconferenza, ovvero angoli minori di due retti; e che archi, i quali abbiano la tangente poſitiva, e la cotangente negativa, o al roveſcio ſieno impoſſibili. Finalmente notar ſi dee che il ſeno FS, la tangente AP, e la ſecante CP tanto ſervono all' arco AS, quanto all' arco BS complemento dell' arco AS alla ſemiperiferia ASB. Onde chiamato qualunque arco μ, e l' àngolo retto, o il quadrante ω, ſarà $Sc.\overline{2\omega-\mu}=Sc\mu$; $Sc.\overline{-2\omega+\mu}=Sc.\overline{-\mu}=-Sc\mu$, $Cc.\overline{-\mu}=Cc\mu$, $Cc.\overline{2\omega-\mu}=Cc.\overline{-2\omega+\mu}=-Cc.\mu$; conſimili equazioni ſi poſſono ritrovare per le altre linee trigonometriche.

V. Dalla ſimilitudine dei triangoli FCS, ACP, ſi ricavano i ſeguenti Teoremi.

$CF:FS::CA:AP$; cioè $Cc:Sc::r:Tc$
$CF:CS::CA:CP$; cioè $Cc:r::r:Sec$
$FS:AP::CS:CP$; cioè $Sc:Tc::r:Sec$

Dalla ſimilitudine dei triangoli ACP, CNQ ſi ricava

$AP:CA::CN:NQ$; cioè $Tc:r::r:Ctc$
$AC:CP::NQ:QC$; cioè $r:Sec::Ctc:Csc$
$AP:PC::CN:CQ$; cioè $Tc:Sec::r:Csc$

Dalla ſimilitudine dei triangoli FCS, CQN ſi ricava

$FS:CF::CN:NQ$, cioè $Sc:Cc::r:Ctc$
$CF:CS::NQ:CQ$, cioè $Cc:r::Ctc:Csc$
$FS:SC::CN:CQ$, cioè $Sc:r::r:Csc$.

VI. Si noti, che ogni qualvolta ſia dato il ſeno SF ſarà dato ancora il coſſeno CF, e al roveſcio, perchè eſſendo ſiſſato il raggio ſarà $CS^2=CF^2+FS^2$,

 e per-e perciò farà $r^2 = \overline{Cc}^2 + \overline{Sc}^2$. Adeſſo paſſiamo a quelle propoſizioni, le quali ſi deono ſtimare come il fondamento di queſta dottrina.

VII. Propoſizione I. Dati i ſeni PR, QF, (*Fig.* 20. *Tav.* 2.) ed i coſſeni CR, CF degli archi PQ, QA ritrovare il ſeno PL dell' arco PA uguale alla ſomma degli archi PQ, QA. Il ſeno PR ſi prolunghi fino, che vada a ſegare il raggio CA in T, chiamato l' arco $PQ = \pi$, $QA = \phi$; per la ſimilitudine dei triangoli CRT, CQF, farà $Cc\phi : Sc\phi :: Cc\pi : RT$; onde RT farà $= \frac{Cc\pi \times Sc\phi}{Cc\phi}$, e perciò farà PT $= \frac{Cc\pi \times Sc\phi + Cc\phi \times Sc\pi}{Cc\phi}$. Ma per la ſimilitudine dei triangoli TPL, FQC, $r : Cc\phi ::$ $\frac{Cc\pi \times Sc\phi + Cc\phi \times Sc\pi}{Cc\phi} : Sc\overline{\phi + \pi}$. Dunque farà

$$Sc\,\overline{\phi + \pi} = \frac{Cc\pi \times Sc\phi + Cc\phi \times Sc\pi}{r}.$$

VIII. Se i due archi ϕ e π foſſero uguali allora ſarebbe $Sc.\overline{\phi + \pi} = Sc\,2\pi = \frac{2\,Sc\pi \times Cc\pi}{r}$.

IX. Come ſi è trovato il ſeno della ſomma di due archi ſi può trovare quello della ſomma di tre, quattro &c. imperocchè dopo trovato il ſeno della ſomma di due archi, ſi trova il ſeno della ſomma di queſti due archi con il terzo arco, e così ſucceſſivamente; onde con facilità ſi può trovare il ſeno di un arco multiplo ſecondo qualunque numero.

X. Propoſizione II. Dati i ſeni e coſſeni di due archi diſuguali PA, QA ritrovare il ſeno della differenza PQ. Chiamato l' arco $PA = \pi$, e $QA = \phi$ per

per la similitudine dei triangoli QCF, OCL sarà $Cc\varphi : Sc\varphi :: Cc\pi : LO$, onde sarà $LO = \frac{Sc\varphi \times Cc\pi}{Cc\varphi}$, e PO sarà $= \frac{Sc\pi \times Cc\varphi - Sc\varphi \times Cc\pi}{Cc\varphi}$; ma per la similitudine dei triangoli RPO, QFC, $r : Cc\varphi :: \frac{Sc\pi \times Cc\varphi - Sc\varphi \times Cc\pi}{Cc\varphi} : Sc\overline{\pi - \varphi}$. Dunque sarà $Sc\overline{\pi - \varphi} = \frac{Sc\pi \times Cc\varphi - Sc\varphi \times Cc\pi}{r}$.

XI. Se si avesse da sommare un arco positivo con un negativo, o sottrarre da un positivo un negativo, la somma allora passa in sottrazione, e la sottrazione passa in somma.

XII. Proposizione III. Dati i seni, e i cosseni di due archi π, φ ritrovare il cosseno della somma dei due archi, cioè di $\pi + \varphi$. Per le cose dette abbiamo $r^2 = \overline{Cc}^2 + \overline{Sc}^2$; onde sarà $r^2 = \overline{Cc\pi}^2 + \overline{Sc\pi}^2$, ed $r^2 = \overline{Cc\varphi}^2 + \overline{Sc\varphi}^2$; dunque moltiplicando queste due equazioni frà loro, sarà $r^4 = \overline{Cc\pi}^2 . (\overline{Cc\varphi}^2 + \overline{Sc\varphi}^2) + \overline{Sc\pi}^2 . (\overline{Cc\varphi}^2 + \overline{Sc\varphi}^2)$; e però facendo attualmente la moltiplicazione, ed aggiungendo, e sottraendo dal secondo membro dell'Equazione la quantità $2\, Cc\pi . Cc\varphi . Sc\varphi . Sc\pi$, sarà $r^2 = \overline{Cc\pi . Cc\varphi}^2 - 2\, Cc\pi . Cc\varphi . Sc\pi . Sc\varphi + \overline{Sc\pi . Sc\varphi}^2 + \overline{Cc\pi . Sc\varphi}^2 + 2\, Cc\pi . Cc\varphi . Sc\pi . Sc\varphi + \overline{Cc\varphi . Sc\pi}^2$, tutto diviso per r^2, cioè sarà $r^2 = \frac{\overline{Cc\pi . Cc\varphi - Sc\pi . Sc\varphi}^2}{r^2} +$

$\frac{\overline{C c \pi . S c \phi + C c \phi . S c \pi}^{2}}{r^{2}}$; ma queſto ultimo è il quadrato del ſeno della ſomma dei due archi π e ϕ per la propoſizione prima; dunque il primo quadrato è il quadrato del coſſeno della ſomma de' due archi π e ϕ; e perciò ſarà la radice $\frac{C c \pi . C c \phi - S c \phi . S c \pi}{r} = C c \overline{\pi + \phi}$.

XIII. Se foſſe $\pi = \phi$ allora ſarà $C c 2 \phi = \frac{\overline{C c \phi}^{2} - \overline{S c \phi}^{2}}{r}$.

XIV. Propoſizione IV. Dati i ſeni, e coſſeni di due archi $\pi + \phi$ ritrovare il coſſeno della differenza $\pi - \phi$. Operando come nella Propoſizione precedente col ſolo divario, che ſi prenda poſitivo il prodotto $2 C c \pi . C c \phi . S c \pi . S c \phi$, dove ſi è preſo negativo, e al roveſcio; e che ſi faccia uſo della ſeconda propoſizione in vece della prima, ſi otterrà $C c . \overline{\pi - \phi} = \frac{C c \phi . C c \pi + S c \phi . S c \pi}{r}$.

XV. Propoſizione V. Date le tangenti di due archi π, ϕ ritrovare la tangente della ſomma $\overline{\pi + \phi}$. Per i Teoremi abbiamo $\frac{T c}{r} = \frac{S c}{C c}$. Onde ſarà $\frac{T c \overline{\pi + \phi}}{r} = \frac{S c \overline{\pi + \phi}}{C c \overline{\pi + \phi}} = \frac{S c \pi . C c \phi + S c \phi . C c \pi}{C c \pi . C c \phi - S c \pi . S c \phi}$, per le propoſizioni prima e terza; onde ſarà $T c \overline{\pi + \phi} : r :: S c \pi . C c \phi + S c \phi . C c \pi : C c \pi . C c \phi - S c \phi . S c \pi :: 1 + \frac{S c \phi}{C c \phi} . \frac{C c \pi}{S c \pi} : \frac{C c \pi}{S c \pi} - \frac{S c \phi}{C c \phi} :: 1 + \frac{T c \phi}{r} . \frac{r}{T c \pi} :$

r

$\frac{r}{Tc\pi} - \frac{Tc\phi}{r}$ per i Teoremi; cioè $Tc\,\overline{\pi+\phi} : r :: Tc\pi + Tc\phi : \frac{r^2 - Tc\phi \,.\, Tc\pi}{r}$; e però sarà $Tc\,\overline{\pi+\phi} = r^2 . \frac{Tc\pi + Tc\phi}{r^2 - Tc\phi \,.\, Tc\pi}$.

XVI. Se i due archi fossero uguali sarebbe $Tc\,2\pi = \frac{2\,Tc\pi \,.\, r^2}{r^2 - \overline{Tc\pi}^2}$.

XVII. Proposizione VI. Date le tangenti di due archi π, ϕ ritrovare la tangente della differenza $\pi - \phi$. Per i Teoremi è $\frac{Tc}{r} = \frac{Sc}{Cc}$, onde sarà $\frac{Tc\,.\,\overline{\pi-\phi}}{r} = \frac{Sc\,.\,\overline{\pi-\phi}}{Cc\,.\,\overline{\pi-\phi}} = \frac{Sc\pi \,.\, Cc\phi - Sc\phi \,.\, Cc\pi}{Cc\pi \,.\, Cc\phi + Sc\phi \,.\, Sc\pi}$ per la propos. 2., e 4., cioè sarà $Tc\,.\,\overline{\pi-\phi} : r :: Sc\pi \,.\, Cc\phi - Sc\phi \,.\, Cc\pi : Cc\pi \,.\, Cc\phi + Sc\phi : Sc\pi :: 1 - \frac{Sc\phi}{Cc\phi} \,.\, \frac{Cc\pi}{Sc\pi} : \frac{Cc\pi}{Sc\pi} + \frac{Sc\phi}{Cc\phi} :: 1 - \frac{Tc\phi}{r} \,.\, \frac{r}{Tc\pi} : \frac{r}{Tc\pi} + \frac{Tc\phi}{r} :: Tc\pi - Tc\phi : \frac{r^2 + Tc\pi \,.\, Tc\phi}{r}$. Dunque $Tc\,.\,\overline{\pi-\phi} = \frac{r^2 . \overline{Tc\pi - Tc\phi}}{r^2 + Tc\pi \,.\, Tc\phi}$.

XVIII. Proposizione VII. Date le cotangenti di due archi π e ϕ ritrovare la cotangente della somma. Essendo per i Teoremi $\frac{Tc}{r} = \frac{r}{Ctc}$ avremo $Ctc\,\overline{\pi+\phi}$

$: r :: r : Tc.\overline{\pi+\varphi} :: r : r^2 \frac{\overline{Tc\pi + Tc\varphi}}{r^2 - Tc\pi . Tc\varphi}$ per la prop 5. $:: r^2 - Tc.\pi.Tc.\varphi : r \times \overline{Tc\pi + Tc.\varphi} :: r^2 - \frac{r^4}{Ctc.\pi.Ctc.\varphi} : \frac{r^3}{Ctc.\pi} + \frac{r^3}{Ctc.\varphi} ::$
$\frac{Ctc\pi.Ctc.\varphi - r^2}{Ctc.\pi.Ctc.\varphi} : \frac{r}{Ctc.\pi} + \frac{r}{Ctc.\varphi} :: Ctc.\pi.Ctc.\varphi - r^2 : r \times \overline{Ctc.\varphi + Ctc.\pi}$, dunque $Ctc.\overline{\pi+\varphi} = \frac{Ctc.\varphi.Ctc.\pi - r^2}{Ctc.\pi + Ctc.\varphi}$.

XIX. Proposizione VIII. Date le cotangenti di due archi π; φ ritrovare la cotangente della differenza. Per la cotangente della differenza sarà $Ctc.\overline{\pi-\varphi} : r :: r : Tc.\overline{\pi-\varphi} :: r : \frac{r^2.\overline{Tc\pi - Tc\varphi}}{r^2 + Tc\pi.Tc\varphi}$, per la proposiz. *6.* $:: r^2 + Tc.\pi.Tc.\varphi : r.\overline{Tc.\pi - Tc.\varphi} :: r^2 + \frac{r^4}{Ctc.\pi.Ctc.\varphi} : \frac{r^3}{Ctc.\pi} - \frac{r^3}{Ctc.\varphi} :: Ctc.\pi.Ctc.\varphi + r^2 : r.\overline{Ctc.\varphi - Ctc.\pi}$, dunque $Ctc.\overline{\pi-\varphi} = \frac{Ctc.\pi.Ctc.\varphi + rr}{Ctc.\varphi - Ctc.\pi}$.

XX. Proposizione IX. Date le tangenti, e le seganti di due archi π, φ ritrovare la segante della somma. Per i Teoremi abbiamo $Cc : r :: r : Sec$; dunque $Cc.\overline{\pi+\varphi} : r :: r : Sec.\overline{\pi+\varphi}$, e perciò $Sec.\overline{\pi+\varphi} = \frac{r^2}{Cc.\overline{\pi+\varphi}} = \frac{r^3}{Cc\pi.Cc\varphi - Sc\pi.Sc\varphi}$ per la ter-

za

za proposizione, $= r^3 : \left(\frac{r^4}{Sec\pi . Sec\phi} - \frac{r^2 . Tc\pi . Tc\phi}{Sec\pi . Sec\phi} \right)$ per i Teoremi; $= \frac{r . Sec\pi . Sec\phi}{r^2 - Tc\pi . Tc\phi}$.

XXI. Proposizione X. Date le tangenti, e le seganti di due archi π, ϕ ritrovare la segante della differenza $\pi - \phi$; operando come nella proposizione precedente, ricorrendo per altro alla proposizione 4. invece della terza s' ottiene $Sec . \overline{\pi - \phi} = \frac{r . Sec\pi . Sec\phi}{r^2 + Tc\pi . Tc\phi}$. Se dalle espressioni delle seganti della somma, o della differenza di due archi si volesse eliminare la tangente ed introdurre il solo raggio, e le seganti date, basta avvertire, che è $Tc = \sqrt{\overline{Sec}^2 - r^2}$; onde fatte le sostituzioni necessarie si otterrebbe l' intento.

XXII. Proposizione XI. Determinare la cossegante della somma di due archi, π, ϕ date le loro cosseganti e cotangenti. Per i Teoremi abbiamo $\frac{Tc}{r} = \frac{Sec}{Csc}$, onde sarà $Csc . \overline{\pi + \phi} = \frac{r . Sec . \overline{\pi + \phi}}{Tc . \overline{\pi + \phi}} = \frac{r^2 . Sec\pi . Sec\phi}{r^2 - Tc\pi . Tc\phi} : \frac{r^2 . \overline{Tc\pi + Tc\phi}}{r^2 - Tc\pi . Tc\phi} = \frac{Sec\pi . Sec\phi}{Tc\pi + Tc\phi}$, essendo sostituite le espressioni della secante, e della tangente della somma di due archi; Ma è $Sec = \frac{Tc . Csc}{r}$, dunque sarà $Csc . \overline{\pi + \phi} =$

$\frac{Tc\pi . Csc\pi . Tc\phi . Csc\phi : r^2}{Tc\pi + Tc\phi}$; Ma è $Tc = \frac{r^2}{Ctc}$;

dun-

dunque sarà $Csc.\,\overline{\pi+\phi} = \frac{Csc\pi.\,Csc\phi}{Ctc\pi + Ctc\phi}$.

XXIII. Proposizione XII. Determinare la cossegante della differenza di due archi π, ϕ per le loro cosseganti, e cotangenti. Per la cossegante della differenza di due archi avremo dai Teoremi $Csc.\,\overline{\pi-\phi}$ $= \frac{r.\,Sec.\,\overline{\pi-\phi}}{Tc.\,\overline{\pi-\phi}} = \frac{r^2.\,Sec\pi.\,Sec\phi}{r^2 + Tc\pi.\,Tc\phi} : \frac{r^2.\,Tc\pi - Tc\phi}{r^2 + Tc\pi.\,Tc\phi} = \frac{Sec\pi.\,Sec\phi}{Tc\pi - Tc\phi}$; ma è $Sec = \frac{Tc.\,Csc}{r}$; dunque sarà $Csc.\,\overline{\pi-\phi} =$ $\frac{Tc\pi.\,Csc\pi.\,Tc\phi.\,Csc.\phi : r^2}{Tc\pi - Tc\phi}$; ma è $Tc = \frac{r^2}{Ctc}$; però sarà $Csc.\,\overline{\pi-\phi} = \frac{Csc\pi.\,Csc\phi}{Ctc\phi - Ctc\pi}$.

XXIV. Essendo $Ctc = \sqrt{\overline{Csc}^2 - r^2}$; quindi si potranno avere le cosseganti della somma, e della differenza di due archi per le sole cosseganti date.

XXV. Proposizione XIII. Il seno di un angolo stà al cosseno più il raggio, come la tangente della metà dell' angolo al raggio. Chiamato l' angolo ε sarà per i numeri ottavo, e decimoterzo. $Sc\varepsilon =$ $\frac{2Sc\frac{\varepsilon}{2}.\,Cc\frac{\varepsilon}{2}}{r}$, $Cc\varepsilon = \frac{\overline{Cc\frac{\varepsilon}{2}}^2 - \overline{Sc\frac{\varepsilon}{2}}^2}{r}$; dunque sarà $Sc\varepsilon : r + Cc\varepsilon :: 2Sc\frac{\varepsilon}{2} \times Cc\frac{\varepsilon}{2} : r^2 + \overline{Cc\frac{\varepsilon}{2}}^2$ —

$-\overline{Sc\frac{\varepsilon}{2}}^{2}$. Ma è $r^2-\overline{Sc\frac{\varepsilon}{2}}^{2}=\overline{Cc\frac{\varepsilon}{2}}^{2}$; Dunque sarà $Sc\,\varepsilon : Cc\,\varepsilon+r :: 2\,Sc\frac{\varepsilon}{2}.\,Cc\frac{\varepsilon}{2} : 2\,\overline{Cc\frac{\varepsilon}{2}}^{2} :: Sc\frac{\varepsilon}{2} : Cc\frac{\varepsilon}{2} :: Tc\frac{\varepsilon}{2} : r$.

FINE DEL PRIMO LIBRO.

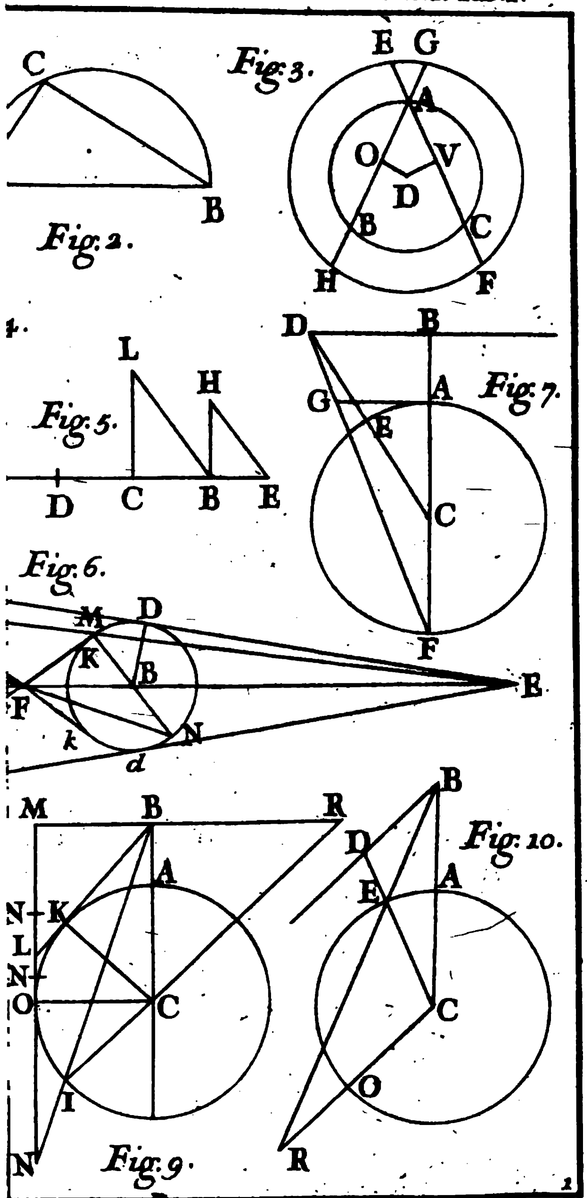


Fig. 2.
C
B
Fig. 3.
E G
A
O V
D
B C
H F
4.
Fig. 5.
L
H
D C B E
Fig. 6.
M D
K B
F E
k N
d
Fig. 7.
D B
G A
E
C
F
Fig. 9.
M B R
A
N K
L
N
O C
I
N
Fig. 10.
B
D
E A
C
O
R
2

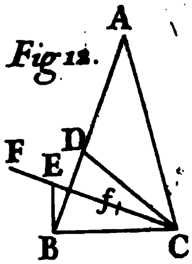


Fig. 12.

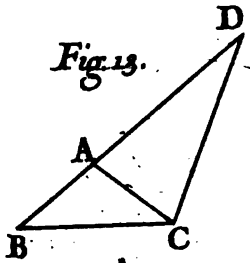


Fig. 13.

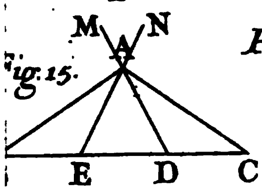


Fig. 15.

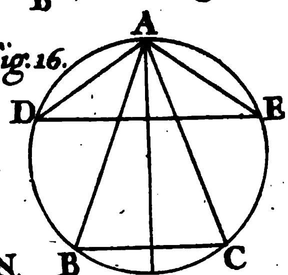


Fig. 16.

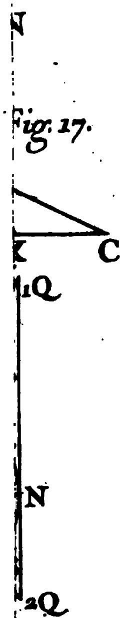


Fig. 17.

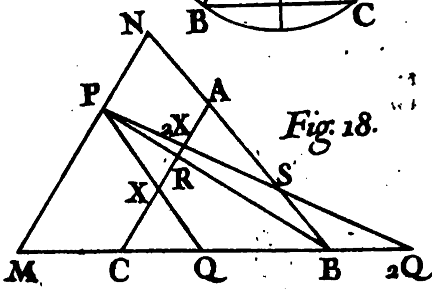


Fig. 18.

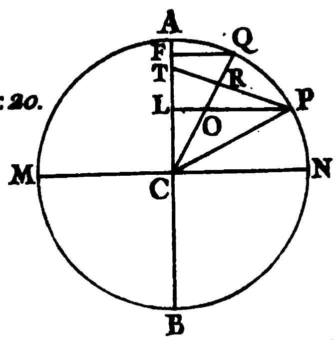


Fig. 20.

LIBRO SECONDO

Delle Linee, ovvero dei Luoghi del primo, e secondo grado, e delle Equazioni determinate del grado terzo, e quarto.

CAPO PRIMO.

Della linea del primo grado, delle varie specie di linee del grado secondo, e particolarmente della Parabola.

I. LA linea dicesi di primo o secondo grado se con questa si costruisca una equazione di due incognite, e perciò indeterminata, che sia di primo o di secondo grado. L' Equazione poi indeterminata di primo grado, mai ha termini, in cui l' incognite si trovino insieme, ed eccedano la prima dimensione; quella di secondo mai ha termini in cui l' incognite, anche insieme, oltrepassino la seconda dimensione, dovendo perciò se sono insieme essere ciascuna alla prima dimensione. La determinazione di una incognita in queste equazioni dipende dall' altra, a cui potendosi ad arbitrio dare valori infiniti, ancor la prima avrà valori infiniti; per tal motivo l' incognite quì si chiamano *indeterminate* o *variabili*, e alla costruzione di tali equazioni non soddisfanno che linee, come vedremo. Una delle due indeterminate s' intende presa su una retta data di posizione da un punto dato, e chiamasi *ascissa*; l' altra s' intende condotta per l' estremità dell' ascissa in modo che faccia con essa sempre un angolo dato, e dicesi *ordinata*: amendue insieme chiamansi *coordinate*.

II. Vuole il buon ordine, che dicasi prima delle linee del primo grado, dalle quali subito ci spediremo; Sono esse comprese nell' equazione generale o canonica $my + nx + pz = o$, in cui y, x sono le due indeterminate, m, n, p sono determinate, e possono essere positive, o negative, o anche nulle. Serve quest' equazione solo alla linea retta, che trovasi così. Sia la indefinita AB (*Fig.* 1. *T.* 1.), in cui s' intendano prese dal punto A le ascisse $AP = x$, positive verso B, e negative dalla parte opposta. Sia APV l' angolo delle coordinate x, y, di maniera che le ordinate y positive cadano al di sopra della linea delle ascisse AB, le negative sieno il prolungamento delle positive al di sotto della medesima AB. Presa da A sulla linea delle ascisse una qualunque AB, per B si tiri dalla parte delle ordinate y negative, parallela alle ordinate medesime, una BQ talmente che sia $AB : BQ :: m : n$, e conducasi per A, e Q la indefinita AQ. Similmente per A si conduca dalla parte delle ordinate y negative, parallela alle medesime, una $AO = \frac{p}{m}$, e per O tirisi una parallela ad AQ, la quale si prolunghi indefinitamente da una parte e dall' altra in T, e in C. Sarà la retta TOC la linea dell' equazione $my + nx + p = o$. Infatti presa qualsivoglia ascissa positiva $AP = x$, e nel dato angolo delle coordinate condotta la PV, e prolungata questa al di sotto di AB finchè incontri la retta TOC in M, onde sia l' ordinata negativa $PM = -y$, che incontri AQ in G, si avrà AB:

BQ

$BQ :: AP : PG$, cioè $m : n :: x : PG$, e perciò $PG = \frac{nx}{m}$. Si avrà ancora $GM = AO = \frac{p}{m}$. Dunque $PM = \frac{nx}{m} + \frac{p}{m} = -y$; donde risulta $nx + p = -my$, e finalmente $my + nx + p = o$; che è l' equazione proposta.

III. Se nell' equazione generale, essendo positivo il primo termine my, il secondo fosse negativo, la BQ nella costruzione si dovrebbe condurre dalla parte delle ordinate positive, cioè al di sopra di AB; e così pure se fosse negativo il terzo termine p, la AO si dovrebbe condurre dalla parte opposta, cioè al di sopra di AB, dalla parte delle ordinate positive. Se nell' equazione mancasse il terzo termine, cioè fosse $p = o$, la linea AO sarebbe nulla, e così OC cadrebbe su la AQ, e sarebbe AQ la linea dell' equazione. Se mancasse il secondo termine, cioè se fosse $n = o$, sarebbe nulla la BQ, e così la QC, linea dell' equazione sarebbe parallela alla AB. Se mancasse il primo, cioè se fosse $m = o$, presa su la linea delle ascisse dal punto A la $AR = \frac{p}{n}$ dalla parte dell' x negative, quando p, n sono affette dello stesso segno, e dalla parte delle x positive, quando p, n sono affette di segno contrario, e condotta per R una retta parallela alle ordinate, sarebbe essa la linea dell' equazione. Imperocchè generalmente abbiamo $QB : BA :: OA : AR$, cioè $n : m :: \frac{p}{m} : AR$; onde $AR = \frac{p}{n}$. Ma quando $m = o$, $AO = \frac{p}{m}$ è infinita, ed $AR = \frac{p}{n}$ punto non si al-si altera. Dunque allora la linea dell' equazione, cioè la RO, condotta per il punto R trovato col prendere $AR = \frac{p}{n}$, diventa parallela alla AO, cioè alle ordinate.

IV. Vengo ora alle linee del secondo grado, che nell' equazione generale
$$\begin{matrix} yy + lxy + mx^2 + q = 0 \\ + ny + px \end{matrix}$$
sono tutte comprese, eccettuate quelle, che corrispondono al caso, in cui manchi il termine yy, non potendo questo mai quì mancare per non avere yy coefficiente, che possa fingersi zero, del qual caso si dirà poi. Rappresenti ora CED (*Fig.* 2. *T.* 1.) una curva, qualunque ella siasi, che si supponga soddisfare alla nostra equazione. Sia $AB = x$, $BC = y$. E' facile il vedere dall' equazione, che due bisogna che sieno i valori dell' ordinata y corrispondenti alla stessa ascissa x; si finga che BC, e BD sieno i corrispondenti alla ascissa BA. Facciasi $y + \frac{lx+n}{2} = u$; onde sarà
$$\begin{matrix} yy + lxy \\ + ny \end{matrix} = u^2 - \frac{l^2x^2}{4} - \frac{lnx}{2} - \frac{n^2}{4},$$
e fatta la sostituzione nell' equazione canonica, diverrà essa
$$\begin{matrix} u^2 - \frac{l^2}{4}x^2 - \frac{ln}{2}x + q = 0. \\ + mx^2 + px - \frac{n^2}{4} \end{matrix}$$
A vedere qual mutazione risulti nella figura per la conversione dell' equazione canonica in quest' altra, in cui si è fatta sparire la y, e si è introdotta l' u, pel punto A conducasi parallela a CD la $AF = \frac{n}{2}$, e tirisi per F la FG paral

rallela ad AB. Sarà $FG = AB = x$, e $CG = y + \frac{n}{2}$. Presa ora da F sù la FG qualunque FI, conducasi per I parallela a CD una IK tale, che sia $FI : IK :: 2 : l$; e per i punti F, K tirisi la FKH. Sarà $GH = \frac{lx}{2}$; e quindi $CH = y + \frac{n}{2} + \frac{lx}{2}$, cioè $CH = u$. Altro dunque non s' è fatto con quella sostituzione, che trasferire la linea retta, in cui terminano le ordinate della curva, che ora sono le u da AB in FH.

V. Ma perchè le due indeterminate $CH = u$, $FG = x$, la relazion delle quali viene espressa dalla nuova equazione, non sono veramente coordinate, non terminando la u nella retta, in cui sono prese le x, perciò chiamata $FH = z$, ed espressa per $2 : k$ la ragione di FI ad FK, cioè di FG ad FH, o vogliam dire la ragione $x : z$, la qual ragione è data per la costruzione, sostituiscasi nell' equazione ritrovata in vece di x il suo valore $\frac{2z}{k}$, e diverrà essa

$$u^2 - \frac{l^2}{k^2} z^2 - \frac{ln}{k} z + q = o$$
$$+ \frac{4m}{k^2} z^2 + \frac{2p}{k} z - \frac{n^2}{4}$$

la quale è manifesto non essere niente meno generale della prima, non essendo tra esse e la prima altra differenza, se non che la prima riferisce i punti della curva alla linea delle ascisse AB mediante le ordinate CB, e questa riferisce i punti della stessa curva alla nuova linea delle ascisse FH mediante le nuove ordinate CH.

VI.

VI. Dall' equazione stessa apparisce, che due sono i valori di u, e questi fra di loro eguali, uno positivo, negativo l' altro. Questo ne mostra, che la linea DC, e così qualunque altra ad essa parallela, iscritta alla curva, resta divisa per metà dalla retta FH, che perciò *diametro* appellasi, e *asse*, se l' angolo FHC sia retto, il punto L, in cui il diametro, o l' asse incontra la curva, dicesi *vertice*. Quindi è che se pel vertice L condurrassi una parallela a CD, sarà ella *tangente*; poichè se incontrasse la curva in qualch' altro punto, non resterebbe divisa per metà dal diametro.

VII. Ora tre casi sono da distinguersi nell' equazione canonica ultimamente trovata; perciocchè o sarà $m = \frac{l^2}{4}$, o $m > \frac{l^2}{4}$, o $m < \frac{l^2}{4}$. Nel primo caso il secondo termine è $= o$, nel secondo è positivo, e nel terzo negativo. Però facendo $-\frac{l^2}{k^2} + \frac{4m}{k^2} = a$, quando non sia $= o$, e mutando z in x, u in y, i tre proposti casi verranno espressi dalle tre equazioni

$y^2 - bx - c = o$ dove la specie a dee sempre

$y^2 + ax^2 - bx - c = o$

$y^2 - ax^2 - bx - c = o$

considerarsi presa positivamente, b poi sta in luogo di $\frac{ln - 2p}{2}$, e c in luogo di $\frac{n^2}{4} - q$; e tanto b, quanto c può essere presa positivamente, e negativamente, ed anche essere nulla.

VIII. Posta x infinita, nella prima di queste tre formole viene $y = \pm\sqrt{bx}$, i quali due valori sono reali sempre che b ed x sieno amendue positive, o amendue negative; sono immaginarii, quando b, x sieno l' una positiva, l' altra negativa. Dunque la curva espressa dalla prima equazione avrà solamente due rami infiniti. Nella seconda equazione, posta x infinita, i valori di y sono $\pm\sqrt{-a\,x^2} = \pm x\sqrt{-a}$, i quali, o si consideri x come positiva, o come negativa, sono sempre immaginarii, poichè la specie a, come si è notato, dee sempre considerarsi presa positivamente. Dunque la curva espressa dalla seconda equazione non ha alcun ramo infinito. Finalmente nella terza equazione, posta x infinita, i valori di y sono $\pm\sqrt{a\,x^2}$, i quali sono reali, o si consideri x come positiva, o si consideri come negativa. Dunque la curva espressa dalla terza equazione ha quattro rami infiniti, due dalla parte delle x positive, e due dalla parte delle x negative. Sono queste pertanto tre specie diverse di curve del secondo grado; la prima delle quali porta curve dotate di soli due rami infiniti; e queste si chiamano *Parabole*; la seconda porta curve prive affatto di rami infiniti, e queste son dette *Ellissi*; la terza porta curve dotate di quattro rami infiniti, e queste diconsi *Iperbole*.

IX. Prima di venire all' esame di ciascuna specie à parte osservisi, che nella prima forma dell' equazione canonica (n. 4.) $\begin{array}{l} yy + lxy + mx^2 + q = o \\ \quad + ny + px \end{array}$, il trinomio $yy + lxy + mx^2$ formato dai termini, che contengono le indeterminate alla seconda dimensione, si risolve nei due fattori $y + x \,.\, \frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} - m}$, $y + x \,.\, \frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} - m}$, i quali, supposto $m = \frac{l^2}{4}$, il che, come di sopra si è notato, porta alla parabola, diventano eguali; supposto $m > \frac{l^2}{4}$; il che si è ve-dato, che porta all' ellisse, diventano immaginarii; finalmente supposto $m < \frac{l^2}{4}$, il che porta all' iperbola, sono reali, e diseguali. Dunque proposta un' equazione qualunque indeterminata del secondo grado, si conoscerà subito a quale specie di curve appartenga, se presa la somma dei termini, che contengono le indeterminate alla seconda dimensione, si risolverà questa somma in due fattori: poichè se i due fattori riusciranno eguali, la curva sarà una parabola; se riusciranno immaginarii, sarà la curva un' ellisse; se riusciranno reali e diseguali, la curva sarà un' iperbola.

X. Prendo ora ad esaminare partitamente le tre curve, e comincio dalla prima, l' equazione di cui è

$$yy - bx - c = o \text{ (n.7.)}, \text{ cioè } yy = bx + c = b \,.\, x + \frac{c}{b}.$$

Pongo $x + \frac{c}{b} = z$, con che altro non fo, che trasportare il principio delle ascisse dal punto F in un altro della retta FH distante da F dell' intervallo $\frac{c}{b}$. Sarà dunque l' equazione della parabola $yy = bz$, oppure $yy = bx$ mutando cioè z in x, ed $y = \pm\sqrt{bx}$. Sia AF (*Fig.* 3. *T.* 1.) la linea delle ascisse x, ed A il loro principio. Posta $x = o$, nell' equazione, si fa anche $y = o$, e però la parabola passa pel punto A. E' chiaro, che nella stessa equazione a qualsivoglia x corrispondono due valori di y eguali fra di loro, un positivo, e l' altro negativo: per la qual cosa a qualunque ascissa AF corrispondono due ordinate eguali FD, FE, una di quà e l' altra di là dalla stessa linea delle ascisse AF, la quale perciò è un *diametro*, oppur l' *asse* (n.6.), ed A il suo *vertice*. E' chiaro ancora, che

che al crefcere dell'afciffa x crefce pure l' ordinata y, tal che fattafi x infinita anche y è infinita. Dunque i due rami della parabola allontanandofi infinitamente dal vertice s' allontanano infinitamente ancora dal diametro o affe: e per riguardo all' affe è manifefto, che effendo le ordinate di effo a lui perpendicolari, i due rami parabolici verranno ad effere in tutto e per tutto egualmente difpofti l' uno da una parte, e l' altro dall' altra del medefimo, di modo che, pofto l' uno fopra l' altro, perfettamente fi combacierebbono. Prefa x negativa, cioè da A non verfo F, ma verfo la parte oppofta T, nell' equazione i valori di y diventano immaginarii; il che denota, che la curva dalla parte di T è immaginaria; cioè che da quella parte non vi ha curva. Che fe la linea determinata b, che fin' ora fi è fuppofta pofitiva, fi vorrà prendere negativa, onde l' equazione fia $yy = -bx$, è fubito manifefto non poter effere i valori di y reali, fe non fi prenda negativa anche x, cioè da A verfo T. Dunque allora la curva affatto manca dalla parte di F, e fi eftende tutta dalla parte di T. La linea indicata da b, che fa con qualfivoglia afciffa x un rettangolo eguale al quadrato della corrifpondente ordinata y, fi chiama *parametro* del diametro, o affe AF.

XI. Poniamo, che fia AF l' affe, A il vertice, b il fuo parametro. Sarà dunque retto l' angolo AFD (n. 6.). Sia ifcritta alla parabola una retta qualunque DN, che tagli l' affe AF in G fotto un dato angolo $DGF = \mu$. Chiamifi $AG = z$; $GD = u$. Pofto r il raggio, farà $r : Sc.\mu :: u : y = \frac{u.Sc.\mu}{r}$, e $r : Cc.\mu :: u : GF = \frac{u.Cc.\mu}{r}$, onde $x = z - \frac{u.Cc.\mu}{r}$.

 So-

Sostituiti questi valori di y, e di x nell' equazione $yy = bx$, si avrà $\frac{u^2 . \overline{Sc.\mu}^2}{r^2} = bz - \frac{bu . Cc . \mu}{r}$, che è l' equazione della parabola tra AG, e GD, supposte cioè iscritte alla curva infinite rette DN tutte fra di loro parallele, e formanti con l' asse AF un angolo $= \mu$.

XII. Fatta in quest' equazione $z = AG = o$, si trovano i due valori di u, uno $u = GD = o$, l' altro $u = GN = -\frac{br . Cc . \mu}{\overline{Sc.\mu}^2}$. Il che ne mostra, che passando DN in AH, il segmento GD svanisce, come infatti si vede, che svanir dee, e l' altro GN diventa la retta stessa AH, e questa è $= \frac{br . Cc . \mu}{\overline{Sc.\mu}^2}$. Il segno $-$, di cui è venuto affetto questo valore di u, altro non denota, se non che la AH cade appunto dalla parte di GN, cioè dalla parte delle u negative.

XIII. Intendasi AH divisa per metà in K, e tirata per K una retta parallela all' asse AF, che incontri DN in L. Sarà dunque $AK = GL = \frac{br . Cc . \mu}{2 . \overline{Sc.\mu}^2}$. facciasi $LD = u + \frac{br . Cc . \mu}{2 . \overline{Sc.\mu}^2} = y$, onde $\frac{u . Sc . \mu}{r} + \frac{b . Cc . \mu}{2 . Sc . \mu} = \frac{y . Sc . \mu}{r}$; e quadrando $\frac{u^2 . \overline{Sc.\mu}^2}{rr} +$

bu.

$\frac{bu.\overline{Cc.\mu}}{r} + \frac{b^2.\overline{Cc.\mu}^2}{4.\overline{Sc.\mu}^2} = \frac{yy.\overline{Sc.\mu}^2}{rr}$. Ma (n. 11.)

$\frac{u^2.\overline{Sc.\mu}^2}{rr} + \frac{bu.Cc.\mu}{r} = bz$. Dunque $bz +$

$\frac{b^2.\overline{Cc.\mu}^2}{4.\overline{Sc.\mu}^2} = \frac{yy.\overline{Sc.\mu}^2}{rr}$, cioè $\frac{br^2z}{\overline{Sc.\mu}^2} +$

$\frac{b^2r^2.\overline{Cc.\mu}^2}{4.\overline{Sc.\mu}^4} = yy$. Or questa ognun vede essere l' equazione della medesima parabola, trasferita solo la linea delle ascisse z da AG in KL; e posto il principio di esse in K. Ma in questa equazione y ha due valori eguali uno positivo, l' altro negativo. Dunque qualunque delle DN è divisa in L dalla linea delle ascisse KL per metà. Dunque KL parallela all' asse AF è un diametro: il che valendo egualmente, qualunque sia l' angolo μ, che fanno le ordinate LD con l' asse, cioè qualunque sia la distanza della KL dall' asse medesimo AF, ne segue, che nella parabola ogni retta parallela all' asse è diametro.

XIV. Sia I il vertice del diametro KL. Nel punto I (n. 6.) tanto LD, quanto LN diventa $= o$. Posta dunque nell' equazione $y = o$, il valore di z, che risulta, cioè $z = -\frac{b.\overline{Cc.\mu}^2}{4.\overline{Sc.\mu}^2}$, esprimerà KI, distanza del principio delle ascisse K dal vertice I; il qual valore è negativo, estendendosi la KI dal principio

del-

delle ascisse K verso la parte opposta al punto L, verso cui s' estendono le ascisse positive. E' dunque $KI = \frac{b.\overline{Cc.\mu}^2}{4.\overline{Sc.\mu}^2}$. Però facendo $z + \frac{b.\overline{Cc.\mu}^2}{4.\overline{Sc.\mu}^2} = x$, e sostituendo il valore di z nell' equazione si avrà una nuova equazione $\frac{b r^2 x}{\overline{Sc.\mu}^2} = yy$; che rappresenterà la stessa parabola riferita allo stesso diametro KL; trasportato solamente il principio delle ascisse da K nel vertice I del diametro medesimo. E' manifesto (n. 10.) che $\frac{b r^2}{\overline{Sc.\mu}^2}$ sarà il parametro di questo diametro.

XV. Per lo punto I condotta IT parallela ad HA, che sarà tangente (n. 6.), si venga a tagliare FA prodotta in T. Supponiamo ora, che l' angolo ISA non sia retto, ma un altro qualunque che chiamo φ, sarà similmente il parametro del diametro $AF = \frac{b r^2}{\overline{Sc.\varphi}^2}$. onde i parametri de' due diametri IK, AS sarebbero come $\frac{1}{\overline{Sc.\mu}^2} : \frac{1}{\overline{Sc.\varphi}^2}$, cioè come $\frac{1}{\overline{IS}^2} : \frac{1}{\overline{IT}^2}$; Ma IK, ed SA sono come $\overline{IT}^2 : \overline{IS}^2$ direttamente, e come i parametri $\frac{1}{\overline{IS}^2} : \frac{1}{\overline{IT}^2}$ reciprocamente; dunque IK, AS sono uguali, e perciò $AT = SA$. Per condurre adunque da un punto T la tangente, si tagli $AT = SA$, e si congiunga IT, che sarà la tangente.

XVI.

XVI. Per piccola riflessione che si faccia, si vedrà, che prese le x nella tangente della parabola, e le y nel diametro si abbia $by = xx$. Questa equazione adunque apparterà sempre alla parabola colle ascisse prese nella tangente.

CAPO II.

Dell' Ellisse.

I. PRendo l'equazione $yy + ax^2 - bx - c = o$, che nel cap. preced. n. 8. abbiam veduto appartenere all' ellisse. (*Fig.4.T.1.*) Pongo $x - \frac{b}{2a} = z$, con che trasporto il principio delle ascisse dal punto F in un altro del diametro FH distante da F dell' intervallo $\frac{b}{2a}$. Fatta la sostituzione risulta l' equazione $yy = \frac{bb}{4a} + c - az^2$, oppure, convertendo z in x, $yy = \frac{bb}{4a} + c - ax^2$. Per maggior chiarezza sostituisco bb in luogo di $\frac{bb}{4aa} + \frac{c}{a}$, e $\frac{cc}{bb}$ in luogo di a. Così l' equazione ridotta a forma più semplice sarà $yy = \frac{cc}{bb} . \overline{bb - xx}$, onde $y = \pm \frac{c}{b} \sqrt{bb - xx}$. Quì apparisce, che niuna mutazione succede nel valore di y al cangiarsi delle ascisse x di positive in negative, o al contrario. Il che ne mostra, che a distanze eguali prese di quà e di là dal principio delle ascisse le ordinate sono eguali. Ora perchè y, e quindi la curva non sia immaginaria, biso-

bisogna che x non sia maggiore di b. Posto dunque in O il principio delle ascisse, e di quà e di là da esso tagliate sul diametro FH le due OL, OK, ciascuna $= b$, sarà OK il massimo valore di x positiva, e OL il massimo valore di x negativa: e perchè nell' equazione, posta $x = b$, diventa $y = o$, perciò è chiaro, che la curva passa per i due punti K, L. Al diminuire della x o positiva, o negativa, è evidente, che la quantità $bb - xx$, e perciò anche il valore di y, cresce; di maniera tale, che posta $x = o$, il valore di y diventa massimo. Ma posta $x = o$, è $y = \pm c$. Dunque condotta per O una parallela ad una qualunque DC, e prese in essa le OR, OS eguali ciascuna a c, passerà la curva per R, e S, e saranno questi i due punti della curva più rimoti dal diametro FH. Da tutte queste cose apparisce, che l' ellisse ritorna in se stessa, ed è posta di quà e di là dalla retta KL in maniera, che passando per i punti K, L, a distanze eguali da essi le rette iscritte alla curva parallele a DC sono eguali, e la massima di esse è la SR, che passa per lo punto di mezzo O della stessa KL. La KL è essa propriamente il *diametro dell' ellisse*, e i due punti K, L, con cui termina nella curva, sono i suoi *vertici*. Il punto di mezzo O dicesi *centro dell' ellisse*.

II. Essendo $OK = OL = b$, $OH = x$, $HC = y$, sarà $KH = b + x$, $HL = b - x$, e però il rettangolo $KHL = bb - xx$, e il quadrato $\overline{HC}^2 = yy$. Ora risolvendo in analogia l' equazione $yy = \frac{cc}{bb} . \overline{bb - xx}$ risulta $bb - xx : yy :: bb : cc$. Dunque nell' ellisse il rettangolo KHL dei segmenti del diametro ha al quadrato della corrispondente ordinata HC una ragione ne costante. Se questa ragion costante si esprimerà per quella del diametro $2b$ ad un' altra linea, che chiameremo p, dirassi la linea p *parametro del diametro* $KL = 2b$. Sarà pertanto $bb : cc :: 2b : p$, onde $p = \frac{2cc}{b}$. Però se nell' equazione $y = \frac{c}{b} \cdot \sqrt{bb - xx}$ in luogo di cc porrassi il suo valore $\frac{bp}{2}$, s' avrà l' equazione $yy = \frac{p}{2b} \cdot \overline{bb - xx}$, che dicesi *equazione al parametro*.

III. Prendasi dalla parte opposta ad OH l' ascissa OG eguale alla stessa OH, e condotta l' ordinata GV, tirisi la retta CV. E' manifesto, che essendo le due ordinate HC, GV parallele ad OR, le due CV, HG resteranno divise da questa OR proporzionalmente in I ed O, e per conseguenza sarà $IC = IV$. Ma per le cose dette le due ordinate HC, GV sono anche eguali; dunque la CV sarà parallela al diametro KL. Le quali cose valendo sempre, qualunque sia l' ascissa OH, a cui si prende eguale dalla parte opposta la OG, ne segue, che la SR taglia per metà tutte le rette iscritte all' ellisse parallele al diametro KL. Dunque SR è un altro diametro, le cui ordinate sono parallele al primo diametro KL. Di più essendo $OI = HC = y$, $OR = OS = c$, sarà $SI = c + y$, $IR = c - y$; e il rettangolo $SIR = cc - yy$. Già è $IC = OH = x$, e per l' equazione della curva abbiamo $yy = \frac{cc}{bb} \cdot \overline{bb - xx}$, donde si cava anche $xx = \frac{bb}{cc} \cdot \overline{cc - yy}$, e risolvendo in analogia $cc - yy : xx :: cc : bb$; Dunque il rettangolo SIR dei segmenti del diametro SR

al quadrato dell' ordinata corrispondente IC in una ragion costante. Compete pertanto al diametro SR la stessa proprietà che all' altro KL. E' facile il vedere, che il parametro del diametro SR è $\frac{2bb}{c}$. I due diametri KL, SR, uno dei quali è parallelo alle ordinate dell' altro, si chiamano *conjugati*.

IV. Fingiamo, che KL, SR sieno i due assi conjugati, cioè che l' angolo LOR sia retto. E' chiaro per le cose dette al n. 1., che la curva sarà tagliata dai due assi KL, SR in quattro quadranti in tutto eguali tra di loro, e simili. Per qualunque punto C dell' ellisse intendasi iscritta alla curva una retta CN, che tagli l' asse KL in E sotto un angolo dato μ, onde sia $LEC = \mu$. Fatta $OE = z$, $EC = u$, si avrà $r : Sc.\mu :: u : y = \frac{u \,.\, Sc.\mu}{r}$, e $r : Cc.\mu :: u : EH = \frac{u \,.\, Cc.\mu}{r}$, onde $x = z + \frac{u \,.\, Cc.\mu}{r}$. Fatte le sostituzioni di questi valori di x, e y nell' equazione all' asse $yy = \frac{cc}{bb} \,.\, \overline{bb - xx}$, si avrà l' equazione

$$\frac{u^2 \,.\, \overline{Sc.\mu}^2}{rr} = \frac{cc}{bb} \,.\, \overline{bb - zz - \frac{2uz \,.\, Cc.\mu}{r} - \frac{u^2 \,.\, \overline{Cc.\mu}^2}{rr}},$$

che esprime la relazione tra le OE, e le EC, nella qual equazione posta $z = b$, si ricava $u = o$, ed $u = -\frac{2bc^2 r \,.\, Cc.\mu}{b^2 \,.\, \overline{Sc.\mu}^2 + c^2 \,.\, \overline{Cc.\mu}^2}$. Dunque quando la OE diventa OL, la EC svanisce, come appunto si vede, che svanir dee, e la EN passa in LM, e diventa

$= \frac{2bc^2r \cdot Cc \cdot \mu}{b^2 \cdot \overline{Sc \cdot \mu}^2 + c^2 \cdot \overline{Cc \cdot \mu}^2}$, il qual valore è venuto affetto del segno $-$, perchè la EN, e però anche la LM cade dalla parte delle u negative.

V. Intendasi ora LM divisa per metà in T, e condotta per T e pel centro O la TO, che incontri la CN in Z, e la curva da una parte in B, dall' altra in P. Pongasi $OZ = x$, $ZC = y$, e l' angolo BOL chiamisi $= \varphi$, onde sarà $BTL = \mu + \varphi$. Avremo $OT : OL :: OZ : OE$, cioè $Sc \cdot \mu : Sc \cdot \overline{\mu + \varphi} :: x : OE = \frac{x \cdot Sc \cdot \overline{\mu + \varphi}}{Sc \cdot \mu}$. Avremo pure $OL : LT :: OE : EZ$, cioè $b : \frac{bc^2r \cdot Cc \cdot \mu}{b^2 \cdot \overline{Sc \cdot \mu}^2 + c^2 \cdot \overline{Cc \cdot \mu}^2} :: \frac{x \cdot Sc \cdot \overline{\mu + \varphi}}{Sc \cdot \mu} : EZ$, onde $EZ = \frac{c^2rx \cdot Cc \cdot \mu \cdot Sc \cdot \overline{\mu + \varphi}}{Sc \cdot \mu \cdot b^2 \cdot \overline{Sc \cdot \mu}^2 + c^2 \cdot \overline{Cc \cdot \mu}^2}$, e però $EC = u = y - \frac{c^2rx \cdot Cc \cdot \mu \cdot Sc \cdot \overline{\mu + \varphi}}{Sc \cdot \mu \cdot b^2 \cdot \overline{Sc \cdot \mu}^2 + c^2 \cdot \overline{Cc \cdot \mu}^2}$. Sostituiti questi valori di z, u nell' equazione del n. preced., e ridotti i termini si avrà $\frac{b^2 \cdot \overline{Sc \cdot \mu}^2 + c^2 \cdot \overline{Cc \cdot \mu}^2}{b^2r^2} yy = cc - \frac{c^2x^2 \cdot \overline{Sc \cdot \mu + \varphi}^2}{b^2 \cdot \overline{Sc \cdot \mu}^2 + c^2 \cdot \overline{Cc \cdot \mu}^2}$, cioè $yy =$

$$\frac{b^2c^2r^2 \cdot Sc \cdot \overline{\mu+\phi}^2}{\overline{b^2 \cdot \overline{Sc.\mu}^2 + c^2 \cdot \overline{Cc.\mu}^2}^2} \cdot \frac{\overline{bb.\overline{Sc.\mu}^2 + cc.\overline{Cc.\mu}^2}}{\overline{Sc.\mu+\phi}^2} - xx,$$

equazione dell' elliſſe tra le OZ, ZC. Qui facilmente ſi vede, che y ha ſempre due valori fra di loro eguali, e che così tutte le rette iſcritte alla curva parallele a CN vengono diviſe per metà dalla PB, la quale perciò è un diametro. Ma ſi vede inoltre, che la forma dell' equazione è la ſteſſa affatto che quella dell' equazione trovata al n. 1.. Dunque al nuovo diametro PB convengono le ſteſſe proprietà generali, che abbiam veduto competere al diametro, o aſſe KL. E ſiccome ciò vale qualunque ſia l' angolo μ, che fanno le CN con l' aſſe KL, così è chiaro, che nell' elliſſe qualſivoglia retta condotta per lo centro O è diametro; e riſpetto ai punti della curva gode ſempre delle medeſime generali proprietà.

VI. Perchè nell' equazione ritrovata divenga $y=0$, è manifeſto, che vuol eſſere $x = \frac{\sqrt{b^2.\overline{Sc.\mu}^2 + c^2.\overline{Cc.\mu}^2}}{\overline{Sc.\mu+\phi}}$: dunque queſto è il valore di ciaſcun ſemidiametro OB, OP. Poſta poi $x=0$, riſulta $y = \frac{bcr}{\sqrt{bb.\overline{Sc.\mu}^2 + cc.\overline{Cc.\mu}^2}}$, dunque queſto è il valore di ciaſcuno ſemidiametro conjugato OA, OQ. Quanto al parametro del diametro PB, è chiaro per le coſe dette al n. 2., che ſarà $= \frac{2.\overline{OA}^2}{OB} = \frac{2b^2c^2r^2.Sc.\overline{\mu+\phi}}{\overline{bb.\overline{Sc.\mu}^2 + cc.\overline{Cc.\mu}^2}^{\frac{3}{2}}}$. Dei

due

due angoli poi μ, e ϕ è facile definir l'uno per l'altro. Imperocchè essendo $OL : LT$, cioè $b : \frac{bc^2r.Cc.\mu}{bb.\overline{Sc.\mu}^2+cc.\overline{Cc.\mu}^2} :: Sc.\overline{\mu+\phi} : Sc.\phi$, sarà $b^2.\overline{Sc.\mu}^2+c^2.\overline{Cc.\mu}^2 : c^2r.Cc.\mu :: Sc.\overline{\mu+\phi} : Sc.\phi$. Ma (Lib. I. Cap. X. n. 7.) $Sc.\overline{\mu+\phi} = \frac{Sc.\mu.Cc.\phi+Sc.\phi.Cc.\mu}{r}$. Dunque $b^2.\overline{Sc.\mu}^2 + c^2.\overline{Cc.\mu}^2 : c^2r.Cc.\mu :: Sc.\mu.Cc.\phi+Sc.\phi.Cc.\mu : r.Sc.\phi$, cioè $b^2.\overline{Sc.\mu}^2+c^2.\overline{Cc.\mu}^2 : c^2r.Cc.\mu :: Sc.\mu+\frac{Sc.\phi}{Cc.\phi}.Cc.\mu : r.\frac{Sc.\phi}{Cc.\phi}$, oppure (Lib. I. Cap. X. n. 5.) $b^2.\overline{Sc.\mu}^2+c^2.\overline{Cc.\mu}^2 : c^2r.Cc.\mu :: Sc.\mu + \frac{Cc.\mu.Tc.\phi}{r} : Tc.\phi$, e però $b^2.\overline{Sc.\mu}^2.Tc.\phi + c^2.\overline{Cc.\mu}^2.Tc.\phi = c^2r.Cc.\mu.Sc.\mu + c^2.\overline{Cc.\mu}^2.Tc.\phi$, cioè $b^2.Sc.\mu.Tc.\phi = c^2r.Cc.\mu$, e $\frac{b^2.Sc.\mu.Tc.\phi}{Cc.\mu} = c^2r$, cioè $b^2.Tc.\mu.Tc.\phi = c^2r^2$, e finalmente $Tc.\phi = \frac{c^2r^2}{b^2.Tc.\mu}$.

VII. Supponganſi eguali i due aſſi conjugati KL, SR, onde ſia $b=c$. L'analogia $b : \frac{bc^2r.Cc.\mu}{bb.\overline{Sc.\mu}^2+cc.\overline{Cc.\mu}^2} :: Sc.\overline{\mu+\phi} : Sc.\phi$ diverrà $1 : \frac{r.Cc.\mu}{\overline{Sc.\mu}^2+\overline{Cc.\mu}^2} ::$

Sc.

$Sc.\overline{\mu+\phi} : Sc.\phi$, cioè (per essere $\overline{Sc.\mu}^2 + \overline{Cc.\mu}^2 = rr$) $r : Cc.\mu :: Sc.\overline{\mu+\phi} : Sc.\phi$, il che porta che sia $EC : EH :: OE : EZ$, e però l' angolo OZE eguale a EHC, cioè retto. Dunque gli altri due angoli OEZ, ZOE, cioè μ, ϕ presi insieme eguali ad un retto, e conseguentemente $Sc.\overline{\mu+\phi} = r$. Inoltre il semidiametro $OB = \frac{\sqrt{b^2.\overline{Sc.\mu}^2 + c^2.\overline{Cc.\mu}^2}}{Sc.\overline{\mu+\phi}}$ diverrà $= \frac{br}{Sc.\overline{\mu+\phi}} = b$, cioè eguale a ciascun dei semiassi OL, OR. Dunque allora le ordinate a qualsivoglia diametro gli sono perpendicolari, e tutti i diametri sono fra di loro eguali, e per conseguenza l' ellisse diventa un circolo. Dunque il circolo è della famiglia delle ellissi, e si può riguardare come un' ellisse, in cui tutti i diametri sono assi, e sono eguali fra di loro.

VIII. Dovunque si trovi l' asse dell' ellisse $KSLR$, sia ora KL un diametro qualsivoglia, che faccia con l' asse un angolo $= \phi$, essendo μ l' angolo, che con l' asse medesimo fanno le sue ordinate. Preso un qualunque punto B della curva suppongasi in esso condotta la tangente BX, che incontri il diametro KL in X; e sia BY l' ordinata dal medesimo punto al diamerro stesso KL. Sarà $Sc.OYB = Sc.\overline{\mu+\phi}$. Intendasi condotta da B per il centro O la retta BOP, che (n. 5.) sarà un diemetro anch' essa. Pongasi, che sia π l' angolo, che questo nuovo diametro fa con l' asse, e λ quello, che con il medesimo asse fanno le sue ordinate. Sia per L ordinata al diametro BP la LT, a cui sarà parallela la tangente BX (Cap. I. n. 6.);

n. 6.); e però sarà $O\Upsilon : OB :: OL : OX$. E' chiaro, che sarà l' angolo $OTL = \lambda + \pi$. Abbia il diametro KL per suo conjugato SOR, e PB abbia QOA.

Sarà (n. 6.) $OL = \frac{\sqrt{b^2.\overline{Sc.\mu}^2 + c^2.\overline{Cc.\mu}^2}}{Sc.\overline{\mu+\phi}}$, $OR = \frac{bcr}{\sqrt{b^2.\overline{Sc.\mu}^2 + c^2.\overline{Cc.\mu}^2}}$, e $OB = \frac{\sqrt{b^2.\overline{Sc.\lambda}^2 + c^2.\overline{Cc.\lambda}^2}}{Sc.\overline{\lambda+\pi}}$, $OA = \frac{bcr}{\sqrt{b^2.\overline{Sc.\lambda}^2 + c^2.\overline{Cc.\lambda}^2}}$

dove b, c rappresentano i due semiassi conjugati. E' certo, che sarà $LT : B\Upsilon$ nella composta di $LT : LO$, di $LO : OB$, di $OB : B\Upsilon$, cioè nella composta di $Sc.LOB : Sc.OTL$, di $\frac{\sqrt{b^2.\overline{Sc.\mu}^2 + c^2.\overline{Cc.\mu}^2}}{Sc.\overline{\mu+\phi}} : \frac{\sqrt{b^2.\overline{Sc.\lambda}^2 + c^2.\overline{Cc.\lambda}^2}}{Sc.\overline{\lambda+\pi}}$, e di $Sc.O\Upsilon B : Sc.LOB$.

Perciò sarà $LT : B\Upsilon ::$

$$\frac{Sc.O\Upsilon B.\sqrt{b^2.\overline{Sc.\mu}^2 + c^2.\overline{Cc.\mu}^2}}{Sc.\overline{\mu+\phi}} : \frac{Sc.OTL.\sqrt{b^2.\overline{Sc.\lambda}^2 + c^2.\overline{Cc.\lambda}^2}}{Sc.\overline{\lambda+\pi}}$$, cioè $LB : B\Upsilon ::$

$\sqrt{b^2.\overline{Sc.\mu}^2 + c^2.\overline{Cc.\mu}^2} : \sqrt{b^2.\overline{Sc.\lambda}^2 + c^2.\overline{Cc.\lambda}^2}$, giac-

chè

chè $Sc.OYB = Sc.\overline{\mu+\phi}$. e $Sc.OTL = Sc.\overline{\lambda+\pi}$. Ma anche $OA : OR :: \sqrt{b^2.\overline{Sc.\mu}^2 + c^2.\overline{Cc.\mu}^2} : \sqrt{b^2.\overline{Sc.\lambda}^2 + c^2.\overline{Cc.\lambda}^2}$. Dunque $LT : BY :: OA : OR$, e però anche $\overline{LT}^2 : \overline{OA}^2 :: \overline{BY}^2 : \overline{OR}^2$. Ma (n. 2. $\overline{OB}^2 - \overline{OT}^2 : \overline{TL}^2 :: \overline{OB}^2 : \overline{OA}^2$, e $\overline{OL}^2 - \overline{OY}^2 : \overline{BY}^2 :: \overline{OL}^2 : \overline{OR}^2$, e alternando da per tutto $\overline{OB}^2 - \overline{OT}^2 : \overline{OB}^2 :: \overline{TL}^2 : \overline{OA}^2$; e $\overline{OL}^2 - \overline{OY}^2 : \overline{OL}^2 :: \overline{BY}^2 : \overline{OK}^2$. Dunque $\overline{OB}^2 - \overline{OT}^2 : \overline{OB}^2 :: \overline{OL}^2 - \overline{OY}^2 : \overline{OL}^2$; onde $\overline{OB}^2.\overline{OL}^2 - \overline{OT}^2.\overline{OL}^2 = \overline{OB}^2.\overline{OL}^2 - \overline{OB}^2.\overline{OY}^2$, e $OT.OL = OB.OY$, e quindi $OY : OL :: OT : OB$. Dunque $OY : OL :: OL : OX$. Pertanto ſe da qualunque punto B dell' elliſſe ſi condurrà al diametro KL l' ordinata BY, e ſi prenderà OX terza proporzionale dopo l' aſciſſa OY, e il ſemidiametro OL, tirata la BX, ſarà eſſa tangente dell' elliſſe nel punto B.

CAPO III.

Dell' Iperbola.

I. NEll' equazione all' iperbola (Cap. I. n. 8.) $yy - ax^2 - bx - c = 0$ pongo $x + \frac{b}{2a} = z$; traſportando così il principio delle aſciſſe dal punto F (*Fig.* 5.) in un altro O del diametro FH, talchè

FO

$FO = \frac{b}{2a}$. L' equazione diventa $yy - az^2 + \frac{b^2}{4a} - e = o$, e convertendo z in x, e sostituendo bb in luogo di $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{e}{a}$, e $\frac{cc}{bb}$ in luogo di a, $yy = \frac{cc}{bb} \cdot \overline{xx - bb}$, onde $y = \pm \frac{c}{b} \sqrt{xx - bb}$. Quest' equazione resta affatto la stessa ancorchè si cangi la x di positiva in negativa, donde si conchiude, che a distanze eguali prese di quà e di là dal principio delle ascisse O corrispondono ordinate eguali. Perchè poi non sia y immaginaria, non dee essere x minore di b: dunque tagliate di quà e di là dal punto O sul diametro OH le due OK, OL, ciascuna $= b$, sarà OL il minimo valore di x positiva, e OK il minimo di x negativa. Ora posta $x = b$, si ha $y = o$; al crescer poi della x è manifesto, che cresce ancora la quantità $xx - bb$, e però anche il valore di y, di modo che posta x infinita, anche y diventa infinita. Dunque la curva passa per i due punti K, L, ed ha quattro rami LC, LD, KV, $K\&$, che allo scostarsi dal punto O si scostano anche dal diametro OH, talmente che a distanza infinita da O sono anche infinitamente distanti da OH prolungata in infinito da ambe le parti. Se OH fosse l' asse, cioè se fosse retto l' angolo OHC, è chiaro, che i quattro rami infiniti LC, LD, KV, $K\&$ sarebbero in tutto e per tutto eguali e simili fra di loro. Le due curve DLC, $\&KV$ si chiamano *iperbole opposte*, e quantunque sieno disgiunte l' una dall' altra, pure costituiscono una curva sola, essendo amendue comprese sotto una sola equazione. La parte KL di diametro, che resta fuori della curva, è dessa, che propriamente *diametro dell' iperbola*

bola appellasi. K, L sono i suoi *vertici*. Il punto di mezzo O dicesi *centro* delle opposte iperbole,

II. Il rettangolo KHL dei due segmenti KH, LH del diametro prolungato sta al quadrato della corrispondente ordinata HC in una ragion costante, che è la ragione $bb:cc$; il che si dimostra nella stessa maniera, in cui si è dimostrata una simile proprietà nell' ellisse al n. 2. cap. precedente. Anche quì se p indicherà la linea, a cui sta il diametro KL nella detta costante ragione $bb:cc$, sarà $p=\frac{2cc}{b}$, e la linea p dirassi *parametro del diametro* KL; e fatta nell' equazione $yy=\frac{cc}{bb}.\overline{xx-bb}$ la sostituzione di $\frac{bp}{2}$ in luogo di cc, la nuova equazione $yy=\frac{p}{2b}.\overline{xx-bb}$ chiamerassi equazione al parametro.

III. Sia condotta per lo centro O parallela alle ordinate HC una retta SOR indefinitamente prolungata da una parte e dall' altra. Indi presa al contrario di OH un' ascissa OG eguale alla stessa OH, sia condotta l' ordinata GV, e tirisi la VC, che taglierà la OR in I. Si dimostrerà, come al n. 3. del cap. preced., che CV sarà parallela al diametro KL, e resterà divisa per metà in I dalla OR: onde anche quì si dedurrà, che SOR taglia per metà tutte le CV, che possono iscriversi alle due iperbole opposte parallelamente al diametro KL. Sarà dunque la indefinita SOR un diametro anch' essa.

IV. Questo diametro SOR essendo parallelo alle ordinate HC, GV, viene insieme ad esser parallelo alle tangenti condotte nei due vertici K, L, e però resta tutto tra queste due tangenti; onde è impospossibile, che incontri mai la curva, che è tutta di quà e di là dalle tangenti stesse. Ciò però non ostante per una certa analogia all' ellisse sogliono prendere in esso da una parte e dall' altra del centro O le due OR, OS ciascuna $= c$, cioè media proporzionale tra il semidiametro $OK = b$, e il suo semiparametro $\frac{p}{2} = \frac{cc}{b}$, e chiamano la linea SR così stabilita *diametro secondo*, dando il nome di *diametro primo* all' altro XL. Il diametro primo XL, e il secondo SR diconsi *conjugati* uno dell' altro, e ognun di loro ha, come nell' ellisse, le sue ordinate parallele all' altro.

V. Non compete nell' iperbola ai due diametri conjugati la medesima proprietà; nel che è diversa questa curva dall' ellisse. Rispetto al diametro primo KL abbiam veduto n. 2.; che il rettangolo KHL, o vogliam dire la differenza tra il quadrato dell' ascissa OH, e il quadrato del semidiametro OL, ha al quadrato dell' ordinata HC una ragion costante: per lo diametro secondo SR è la somma del quadrato dell' ascissa OI, e del quadrato del semidiametro OR, che ha una ragion costante al quadrato dell' ordinata IV. Infatti abbiamo $OR = c$, $OI = HC = y$, $IV = OG = OH = x$. Ma per l' equazione della curva è $yy = \frac{cc}{bb} \cdot \overline{xx - bb}$ (n. 1.), cioè $b^2y^2 = c^2x^2 - b^2c^2$, e quindi $b^2y^2 + b^2c^2 = c^2x^2$, e risolvendo in analogia $yy + cc : xx :: cc : bb$, cioè $\overline{OI}^2 + \overline{OK}^2 : \overline{IV}^2 :: c^2 : b^2$. Dunque tramutate le x in y, e le y in x sarà $yy = \frac{bb}{cc} \cdot \overline{xx + cc}$, equazione all' iperbole prese le x nel secondo diametro. Quì pure la linea, a cui il diametro secondo OR ha la ragion costante della somma $\overline{OI}^2 + \overline{OR}^2$ al quadrato $\overline{IV}^2$, dicesi *parametro dello stesso diametro secondo* OR. Sarà dunque questo parametro $= \frac{2.\overline{OK}^2}{OK}$.

VI. Poniamo, che KL, SR sieno i due assi conjugati, onde l' angolo LOR sia retto. Per qualunque punto C d' una delle due opposte iperbole sia iscritta all' iperbola stessa una CN, che tagli l' asse KL in E sotto qualsivoglia angolo $OEC = \mu$: chiamisi $OE = z$, $EC = u$, e fatte le stesse cose del n. 4. del cap. preced. si avrà l' equazione tra le OE, e le EC

$$\frac{u^2.\overline{Sc.\mu}^2}{rr} = \frac{cc}{bb}.zz - \frac{2uz.Cc.\mu}{r} + \frac{u^2.\overline{Cc.\mu}^2}{rr} - bb.$$

Quì posta $z = b = OL$, dei due valori di u, uno EC risulta $= o$, l' altro negativo EN diventa $LM = \frac{2bc^2r.Cc.\mu}{bb.\overline{Sc.\mu}^2 - cc.\overline{Cc.\mu}^2}$. Però divisa questa LM per metà in T, e condotta per T, e per il punto O una retta, che taglierà la CN in Z, e la iperbola MLC in B, facendo $OZ = x$, $ZC = y$, e l' angolo $BOL = \phi$, onde sia $LTO = \mu - \phi$, e ripetuto il calcolo del n. 5. del cap. preced., si troverà l' equazione $yy =$

$$\frac{b^2c^2r^2.\overline{Sc.\mu - \phi}^2}{(bb.\overline{Sc.\mu}^2 - cc.\overline{Cc.\mu}^2)^2}.xx - \left(\frac{bb.\overline{Sc.\mu}^2 - cc.\overline{Cc.\mu}^2}{\overline{Sc.\mu - \phi}^2}\right)$$

esprimente la relazione tra le OZ, ZC. Nella qual equazione è chiaro, che y ha sempre due valori fra di loro eguali, uno positivo, e l' altro negativo: onde de apparisce, che OT è un diametro. Posta poi $y = 0$, è manifesto, che due valori risultano di x eguali fra di loro, uno positivo, e l'altro negativo, cioè $x = \pm \frac{\sqrt{bb.\overline{Sc.\mu}^2 - cc.\overline{Cc.\mu}^2}}{Sc.\overline{\mu - \phi}}$; il che ne mostra, che la OT taglia non solo l' iperbola MLC in B, ma anche l'opposta KV in P, di manièra che $OB = OP = \frac{\sqrt{bb.\overline{Sc.\mu}^2 - cc.\overline{Cc.\mu}^2}}{Sc.\overline{\mu - \phi}}$. Inoltre si vede, che l' equazione al diametro BP, che si è quì trovata, è similissima all' equazione al diametro, o asse KL ritrovata al n. 1. Dunque il nuovo diametro BP è dotato delle stesse proprietà generali, che competono al diametro, o asse KL. Finalmente dalla forma stessa dell' equazione si ricava, che $\frac{2bcr}{\sqrt{bb.\overline{Sc.\mu}^2 - cc.\overline{Cc.\mu}^2}}$ è il valore del diametro QA conjugato del BP. Il parametro poi di questo diametro BP sarà (n. 2.)

$$\frac{2.\overline{OA}^2}{OB} = \frac{2\,b^2c^2r^2.Sc.\overline{\mu - \phi}}{\overline{bb.\overline{Sc.\mu}^2 - cc.\overline{Cc.\mu}^2}^{\frac{3}{2}}}.$$

VII. Essendo $OL : LT$, cioè $b : \frac{bc^2r.Cc.\mu}{bb.\overline{Sc.\mu}^2 - cc.\overline{Cc.\mu}^2} :: Sc.\overline{\mu - \phi} : Sc.\phi$, ed essendo (Lib. I. Cap. X. n. 10.) $Sc.\overline{\mu - \phi} = \frac{Sc.\mu.Cc.\phi - Sc.\phi.Cc.\mu}{r}$, si avrà $bb.\overline{Sc.\mu}^2 -$

cc.

$cc.\overline{Cc.\mu}^2 : c^2 r.Cc.\mu :: Sc.\mu.Cc.\phi - Sc.\phi.Cc.\mu$ $: r.Sc.\phi$, e però $b^2.Sc.\phi.\overline{Sc.\mu}^2 - c^2.Sc.\phi.$ $\overline{Cc.\mu}^2 = c^2.Sc.\mu.Cc.\mu.Cc.\phi - c^2.Sc.\phi.\overline{Cc.\mu}^2$, cioè $bb.Sc.\phi.Sc.\mu = cc.Cc.\mu.Cc.\phi$, e $\frac{Sc.\phi}{Cc.\phi}.\frac{Sc.\mu}{Cc.\mu} = \frac{cc}{bb}$, oppure (Lib. I. Cap. X. n. 5.) $\frac{Tc.\phi.Tc.\mu}{rr} = \frac{cc}{bb}$; e però $Tc.\phi = \frac{c^2 r^2}{b^2.Tc.\mu}$. Ed ecco definito l' angolo ϕ per il μ appunto come nell' ellisse.

VIII. E' manifesto, che ogni qual volta sia $c.Cc.\mu > b.Sc.\mu$. il semidiametro $OB =$ $\frac{\sqrt{bb.\overline{Sc.\mu}^2 - cc.\overline{Cc.\mu}^2}}{Sc.\overline{\mu - \phi}}$ (n. 6.) diventa immaginario, e però non incontra più la curva da nissuna parte. Affinchè dunque una retta condotta per il centro O incontri la curva, e possa riguardarsi come un diametro primo, bisogna che non sia $c.Cc.\mu > b.$ $Sc.\mu$, cioè $\frac{c}{b} > \frac{Sc.\mu}{Cc.\mu}$, o vogliam dire $\frac{cr}{b} > Tc.\mu$. E poichè (n. 7.) $Tc.\mu = \frac{c^2 r^2}{b^2.Tc.\phi}$, perciò bisogna che non sia $\frac{cr}{b} > \frac{c^2 r^2}{b^2.Tc.\phi}$, cioè $Tc.\phi > \frac{cr}{b}$. Se fosse appunto $c.Cc.\mu = b.Sc.\mu$, si troverebbe anche $Tc.\phi = \frac{cr}{b}$. Ma $c.Cc.\phi = b.Sc.\mu$, è lo stesso che $Tc.\mu = \frac{cr}{b}$: dunque sarebbe $\mu = \phi$, e però OB $=$

$= \frac{\sqrt{bb.\overline{Sc.\mu}^2 - cc.\overline{Cc.\mu}^2}}{Sc.\overline{\mu-\phi}}$ (n. 6.) diverebbe $\frac{0}{0}$; della quale espressione si parlerà a suo luogo. Intanto per riconoscere che cosa significhi in questo caso, avvertasi, che essendo generalmente $OL : LT$, cioè $b : \frac{bc^2 r.Cc.\mu}{bb.\overline{Sc.\mu}^2 - cc.\overline{Cc.\mu}^2} :: Sc.\overline{\mu-\phi} : Sc.\phi$, si avrà

$$Sc.\overline{\mu-\phi} = \frac{Sc.\phi.\overline{bb.\overline{Sc.\mu}^2 - cc.\overline{Cc.\mu}^2}}{c^2 r.Cc.\mu}$$

, e però sostituito questo valore di $Sc.\overline{\mu-\phi}$ nell' espressione di OB, si avrà generalmente $OB = \frac{c^2 r.Cc.\mu}{Sc.\phi.\sqrt{bb.\overline{Sc.\mu}^2 - cc.\overline{Cc.\mu}^2}}$, dove posto $c.Cc.\mu = b.Sc.\mu$ diventa $= 0$ il solo denominatore. Dunque nel nostro caso OB diventa infinita, cioè non incontra la curva se non all' infinito.

IX. Sia dunque LK (*Fig. 6. T. 1.*) l' asse primo $= 2b$, O il centro; e condotta per il vertice L una perpendicolare all' asse KL, si prendan su di essa di quà e di là del punto L le due LH, LG ciascuna eguale al semiasse secondo c. Condotta la OH, e prodottala indefinitamente, sarà $OL : LH$, cioè $b : c :: r : Tc.LOH$, e però $Tc.LOH = \frac{cr}{b}$. Sarà pertanto OH la retta, che non incontra la curva se non all' infinito, e tutte l' altre rette, che per O si condurranno dentro l' angolo LOH, facendo con l' asse LK un angolo minore di esso LOH, la cui tangengente perciò sarà minore di $\frac{cr}{b}$, incontreranno l'iperbola, e saranno tanti diametri primi. E siccome l'asse primo KL divide l'iperbola MLC in due rami perfettamente eguali, perciò condotta anche la OG, e prodottala indefinitamente, dovrà dirsi d'essa lo stesso, che s'è detto della OH, e dell'angolo LOG lo stesso, che s'è detto del suo eguale LOH. Anzi ognun vede, che tutto ciò, che vale dell'iperbola MLC rispetto all'angolo HOG, dee aver luogo egualmente nell'iperbola KV opposta rispetto all'angolo al vertice gOb. Dentro dunque l'angolo HOG, o il suo al vertice sono compresi tutti i diametri primi dell'iperbola: ogni retta condotta fuori di quest'angolo non incontra mai la curva, e non può esser riguardata se non come diametro secondo. Le due rette OH, OG si chiamano *asintoto*, e l'angolo HOG, che insieme fanno, dicesi angolo degli asintoti. Le due iperbole opposte rimangono dunque interamente dentro l'angolo HOG, e il suo al vertice gOb. Secondo che quest'angolo è retto, o acuto, o ottuso, che è lo stesso che dire, secondo che il semiasse primo b è eguale al semiasse secondo c, o maggiore di esso, o minore, l'iperbola dicesi equilatera, o acuta, o ottusa.

X. Sia OB un semidiametro primo qualsivoglia, ZC una qualunque delle sue ordinate, che tagli l'asse in E. Prolunghisi quest'ordinata di quà e di là finchè incontri la curva dall'altra parte in M, e gli asintoti in N, Q. Sia al solito l'angolo $OEQ = \mu$, $EOZ = \phi$, onde $OZQ = \mu - \phi$. Chiamisi λ l'angolo $EOQ = EON$ fatto dall'asse primo con ciascuno asintoto. Sarà $ZOQ = \lambda + \phi$, $ZON = \lambda - \phi$, $ONZ = \mu - \lambda$; finalmente OQZ è il supplemento

ai

ai due retti dei due $OEQ=\mu$, $EOQ=\lambda$ presi insieme, e però ha lo stesso seno circolare, che la somma $\mu+\lambda$. Ciò posto essendo $OZ:ZQ::Sc.\overline{\mu+\lambda}:Sc.\overline{\lambda+\phi}$, e $OZ:ZN::Sc.\overline{\mu-\lambda}:Sc.\overline{\lambda-\phi}$, sarà $ZQ:ZN::\frac{Sc.\overline{\lambda+\phi}}{Sc.\overline{\mu+\lambda}}:\frac{Sc.\overline{\lambda-\phi}}{Sc.\overline{\mu-\lambda}}$; cioè (Lib. I. Cap. X. n.6., e 10.) $ZQ:ZN::$ $\frac{Sc.\lambda.Cc.\phi+Sc.\phi.Cc.\lambda}{Sc.\mu.Cc.\lambda+Sc.\lambda.Cc.\mu}:\frac{Sc.\lambda.Cc.\phi-Sc.\phi.Cc.\lambda}{Sc.\mu.Cc.\lambda-Sc.\lambda.Cc.\mu}$, e dividendo i due numeratori per $Cc.\lambda.Cc.\phi$, e i due denominatori per $Cc.\mu.Cc.\lambda$, $ZQ:ZN::\dfrac{\frac{Sc.\lambda}{Cc.\lambda}+\frac{Sc.\phi}{Cc.\phi}}{\frac{Sc.\mu}{Cc.\mu}+\frac{Sc.\lambda}{Cc.\lambda}}:\dfrac{\frac{Sc.\lambda}{Cc.\lambda}-\frac{Sc.\phi}{Cc.\phi}}{\frac{Sc.\mu}{Cc.\mu}-\frac{Sc.\lambda}{Cc.\lambda}}$, o vogliam dire $ZQ:ZN::$ $\frac{Tc.\lambda+Tc.\phi}{Tc.\mu+Tc.\lambda}:\frac{Tc.\lambda-Tc.\phi}{Tc.\mu-Tc.\lambda}$. Ma si è trovato (n. 7.) $Tc.\phi=\frac{c^2r^2}{b^2.Tc.\mu}$, e (n. 9.) $Tc.\lambda=\frac{cr}{b}$, onde $Tc.\phi=\frac{\overline{Tc.\lambda}^2}{Tc.\mu}$. Dunque $ZQ:ZN::$

$\dfrac{Tc.\lambda+\frac{\overline{Tc.\lambda}^2}{Tc.\mu}}{Tc.\mu+Tc.\lambda}:\dfrac{Tc.\lambda-\frac{\overline{Tc.\lambda}^2}{Tc.\mu}}{Tc.\mu-Tc.\lambda}$, e finalmente $ZQ:$

$ZN :: \frac{Tc.\mu + Tc.\lambda}{Tc.\mu + Tc.\lambda} : \frac{Tc.\mu - Tc.\lambda}{Tc.\mu - Tc.\lambda}$, cioè $ZQ : ZN :: 1 : 1$. Però sarà $ZQ = ZN$; ed essendo già $ZC = ZM$, sarà pure $CQ = MN$. Il che valendo, qualunque sia il diametro OZ, ne segue, che iscritta qualsivoglia retta all' angolo degli asintoti, la quale tagli ancora l' iperbola, i due segmenti di questa retta fatti dalla curva e dall' asintoto, uno da una parte, e l' altro dall' altra, sono sempre fra di loro eguali.

XI. Segue ancora dalle cose dette, che condotta a qualsivoglia punto B dell' iperbola la tangente, che incontri gli asintoti in F, P, resterà la tangente FP divisa per metà nel punto di contatto B. Imperocchè intesa per lo centro O, e per lo punto B una retta BO, la quale sarà un diametro primo (n. 9.), questa dovrà tagliare per metà, come si è dimostrato al numero precedente, tutte le rette iscritte all' angolo degli asintoti parallele alle sue ordinate, e per conseguenza anche la tangente PF, che è pure parallela alle dette ordinate (Cap. I. n. 6.). Essendo pertanto $BP = BF$, se per B si condurrà all' asintoto OP una BS parallela all' altro asintoto OF, sarà ancora $SP = SO$. Donde si cava una maniera spedita di condurre la tangente a qualsivoglia punto B dell' iperbola posta tra i suoi asintoti. Poichè condotta dal dato punto B ad un asintoto OP una BS parallela all' altro asintoto OF, indi presa da S su lo stesso asintoto OP dalla parte opposta all' angolo degli asintoti O una SP eguale alla SO, unito il punto P con il dato B mediante la PB, sarà PB la tangente cercata.

XII. Essendo $OZ : ZQ$, cioè $Sc.\overline{\mu+\lambda} : Sc.\overline{\lambda+\varphi} :: OB : BF$, vale a dire $Sc.\mu.Cc.\lambda + Sc.\lambda.Cc.\mu :$

Se.

$Sc.\lambda.Cc.\phi + Sc.\phi.Cc.\lambda :: OB : BF$, e dividendo per $Cc.\lambda$ i termini della prima proporzione, $Sc.\mu + \frac{Sc.\lambda}{Cc.\lambda}.Cc.\mu : \frac{Sc.\lambda}{Cc.\lambda}.Cc.\phi + Sc.\phi :: OB : BF$, e a causa di $\frac{Sc.\lambda}{Cc.\lambda} = \frac{Tc.\lambda}{r} = \frac{c}{b}$ (n.9.), $b.Sc.\mu + c.Cc.\mu : c.Cc.\phi + b.Sc.\phi :: OB : BF$; ed essendosi trovato (n.7.) $b^2.Sc.\phi.Sc.\mu = c^2 : Cc.\mu.Cc.\phi$, onde $b.Sc.\mu : c.Cc.\mu :: c.Cc.\phi : b.Sc.\phi$, e componendo $b.Sc.\mu + c.Cc.\mu : c.Cc.\phi + b.Sc.\phi :: c.Cc.\mu : b.Sc.\phi$; sarà $c.Cc.\mu : b.Sc.\phi :: OB ; BF$. Ma OB (n. 8.) $= \frac{c^2 r.Cc.\mu}{Sc.\phi.\sqrt{bb.\overline{Sc.\mu}^2 - cc.\overline{Cc.\mu}^2}}$.

Dunque $BF = \frac{b.Sc.\phi.OB}{c.Cc.\mu} = \frac{bcr}{\sqrt{bb.\overline{Sc.\mu}^2 - cc.\overline{Cc.\mu}^2}}$. Ma questo è il valore del semidiametro secondo conjugato del primo OB (n.6.) E' dunque la parte di tangente compresa tra il contatto, e ciascun' asintoto eguale al semidiametro conjugato di quel diametro primo, che ha per vertice il punto di contatto.

XIII. Sia dunque PBF (*Fig.* 7. *T.* 2.) la tangente a qualsivoglia punto B dell' iperbola, che incontri gli asintoti in F, P; e condotto un qualunque diametro OL, che tagli la tangente in T, per B sia parallela alle ordinate di questo diametro la BC, che tagli il diametro in E, la curva in C; gli asintoti in Z, G. Sarà $BE = EC$, e (n. 10.) $BG = CZ$. Così pure tirata per F parallela a GZ la FH, che tagli il diametro OL in V; sarà $FV = VH$; onde essendo $PB : PF :: BG : FH$, e PF doppia di PB, e però anche FH, doppia di BG, sarà HV non solo parallela, ma anche eguale a BG: per lo che condotta BV, sarà BV parallela a GO; e così $GB : BE :: OV : VE$; ma abbiam anche VF, cioè HV, o vogliam dire $GB : BE :: VT : TE$; dunque $OV : VE :: VT : TE$. Pertanto chiamando $OE = x$, $OV = u$, onde $VE = x - u$; sarà $u : x - u :: VT : TE$, e componendo $x : x - u :: VE : TE$, cioè $:: x - u : TE$; e $TE = \frac{\overline{x-u}^2}{x}$, onde $TO = x - (\frac{\overline{x-u}^2}{x} = \frac{2ux - uu}{x}$. Intesa ora nel vertice L del diametro OL la tangente LI, che sarà parallela alle ordinate EC di questo diametro, ed eguale al suo diametro conjugato (n. 12.), si chiami il semidiametro primo $OL = b$, il secondo $LI = c$, l' ordinata $EC = EB = y$. Sarà (n. 1.) $yy = \frac{cc}{bb} . \overline{xx - bb}$; cioè $y = \frac{c}{b} \sqrt{xx - bb}$; e perchè $OL : LI :: OV : VF$, si avrà $VF = VH = BG = \frac{cu}{b}$. Ma $GB : BE :: OV : VE$; dunque $\frac{cu}{b} : \frac{c}{b} \sqrt{xx - bb} :: u : x - u$, onde $x - u = \sqrt{xx - bb}$, e quadrando $xx - 2ux + uu = xx - bb$, cioè $2ux - uu = bb$. Ma si è trovata $TO = \frac{2ux - uu}{x}$. Dunque anche $TO = \frac{bb}{x} = \frac{\overline{OL}^2}{OE}$, cioè

OE

$OE : OL :: OL : OT$, che è la stessa proprietà, che al n. 8. del capo precedente si dimostrò competere anche alla tangente dell' ellisse.

XIV. Preso ora nell' iperbola qualsivoglia punto B, tirisi a uno degli asintoti OZ la BS parallela all' altro asintoto OG, e chiamisi $OS = a$, $SB = b$. Condotta per B una retta qualunque, che tagli l' iperbola in qualsivoglia altro punto C, e incontri gli asintoti in G, Z, per C tirisi parallela a BS, e per conseguenza all' asintoto OG, la CR. Facciasi $OR = x$, $RC = y$. Essendo $BG = CZ$ (n. 10.), sarà anche $OS = RZ = a$ e quindi ancora $ZS = OR = x$. Ma $ZR : RC :: ZS : SB$, cioè $a : y :: x : b$; dunque $xy = ab$, equazione all' iperbola, semplicissima, e che niente meno esprime la natura della curva di quel che la esprima l' equazione trovata al n. 1. Sarà pertanto $y = \frac{ab}{x}$, dove apparisce, che al crescer dell' ascissa $x = OR$ cala l' ordinata $y = RC$, tal che fatta x infinita, diventa y infinitamente piccola, o nulla; il che appunto ne mostra, che la curva s' accosta sempre più all' asintoto senza però mai raggiungerlo. Posta $x = o$, diventa y infinita, cioè diventa l' altro asintoto OG. Presa x negativa l' equazione è $y = \frac{ab}{-x}$, cioè si fa negativa anche la y, ma la forma dell' equazione resta la stessissima. Ciò mostra, che prendendo le ascisse x nell' asintoto OZ prolungato oltre l' angolo O verso r, l' ordinata rc corrispondente a qualsivoglia ascissa Or cade rispetto all' asintoto stesso OZ dalla parte opposta a quella, da cui cadevan le ordinate RC corrispondenti alle ascisse positive OR; che per conseguenza dentro l' angolo opposto per vertice al

GOZ

GOZ havvi un altra curva eguale alla *BLC*, simile, e similmente posta, che è appunto l' iperbola opposta alla *BLC*. L' equazione $xy = ab$, in cui le ascisse x sono prese dall' angolo degli asintoti su l' uno di questi, e le ordinate y sono parallele all'altro, dicesi equazione agli asintoti, ed il piano costante ab, a cui è eguale il rettangolo di qualunque ascissa nella sua ordinata, chiamasi *potenza dell' iperbola*.

XV. E' questo il luogo di considerare il caso ommesso al n. 4. del Cap. I., quello cioè, in cui all' equazione generale del secondo grado manca il termine yy. Allora l' equazione è $\begin{matrix} lxy + mx^2 + q = 0, \\ +ny + px \end{matrix}$ la quale fingiamo, che rappresenti la curva *DEC* (*Fig*.8. *T*. 2.), qualunque ella siasi. Corrispondendo in quest' equazione a qualsivoglia ascissa x un solo valore dell' ordinata y, è chiaro, chè qualunque sia l' ascissa $AC = x$, l' ordinata $BC = y$, che le corrisponde, prolungata anche infinitamente, non incontra la curva in altro punto fuorchè in C. Pongasi $\frac{mn}{l^2} - \frac{p}{l} - \frac{mx}{l} - y = u$, onde $y = \frac{mn}{l^2} - \frac{p}{l} - \frac{mx}{l} - u$; con che altro non si fa, che trasportare la linea, a cui terminano le ordinate della curva, da AB in FH. Imperocchè condotta per A parallela a BC la $AF = \frac{mn}{l^2} - \frac{p}{l}$, e tirata per F parallela ad AB la FG, che incontri BC prodotta in G; indi presa sopra FG una qualunque FI, e fatta IK parallela a BC tal che sia $FI : IK :: l : m$, e condotta FK, che taglierà BC in H; essendo $FI : IK :: FG : GH$, cioè $l :$

m::

$m :: x : GH$, si avrà $GH = \frac{mx}{l}$; e però fatta $HC = u$, sarà appunto $y = BG - GH - HC = \frac{mn}{l^2} - \frac{p}{l} - \frac{mx}{l} - u$, e sarà u la nuova ordinata. Fatta la sostituzione del valore di y nell' equazione, risulta $\begin{array}{l} -lxu \\ -nu \end{array} + \frac{mn^2}{l^2} - \frac{np}{l} + q = 0$, dove le due indeterminate u, x non sono veramente coordinate, non terminando le $HC = u$ nella linea AB, in cui sono prese le ascisse x. Dunque chiamando $FH = t$, ed espressa per $1 : k$ la ragione di FI ad FK, cioè di FG ad FH, o di x a t, la qual ragione è data per la costruzione, pongasi in luogo di x nell' equazione trovata il suo valore $\frac{t}{k}$, e avrassi $\begin{array}{l} -\frac{ltu}{k} \\ -nu \end{array} + \frac{mn^2}{l^2} - \frac{np}{l} + q = 0$, ovvero moltiplicando per $-\frac{k}{l}$ tutti i termini, $\begin{array}{l} tu \\ +\frac{knu}{l} \end{array} - \frac{kmn^2}{l^3} + \frac{knp}{l^3} - \frac{kp}{l^2} = 0$, la qual nuova equazione esprime la relazione tra le due ordinate $FH = t$, $HC = u$. Anzi per maggior semplicità può porsi $t + \frac{kn}{l} = z$, il che altro non importa, che il passaggio del principio delle ascisse dal punto F in un altro L della medesima linea FH, facendo $FL = \frac{kn}{l}$; e avrassi $zu = \frac{kmn^2}{l^3} - \frac{knp}{l^2} + \frac{kq}{l}$, cioè il rettangolo delle due

coor-

coordinate $z = LH$, $u = HC$ eguale a una costante quantità, che è la proprietà dell' iperbola, prese le ascisse z dal centro sopra un asintoto, e le ordinate u parallele all' altro asintoto. Dunque la curva DEC, a cui appartiene l' equazione generale del secondo grado, quando le manca il quadrato yy è l' iperbola riferita agli asintoti, e la linea LH trovata con la costruzione precedente è uno degli asintoti, L è il centro, o il punto, in cui è costituito l' angolo degli asintoti stessi, l' altro asintoto LQ è parallelo alle ordinate $BC = y$.

XVI. Dalle cose dette in questi tre capi apparisce, che l' equazione indeterminata del secondo grado non può appartener mai ad altre curve, fuorchè alla parabola, all' ellisse, che comprende anche il circolo, e all' iperbola, che sono quelle curve, che vengono comunemente abbracciate sotto il nome di sezioni conichè. Sono dunque queste le curve tutte del secondo grado, delle quali abbiam bastantemente esposte fin' ora le primarie proprietà.

CAPO IV.

Descrizione delle Linee del grado secondo.

I. Gli Antichi per descrivere le linee del secondo grado, si servirono della Interſecazione di un piano con un cilindro, o di un piano con un cono. Della prima trattò il Filosofo Sereno; della seconda, benchè avanti Appollonio Pergeo fosse stato parlato; questi però la ridusse a tale, che sembra unicamente da lui doversi riconoscere ciò, che più d' interessante sapiamo delle coniche sezioni. Per brevità discorrereremo sol di queste, comecchè più celebri.

II. Se da un punto *B* (*Fig.9.* 10.*T.*2.) posto fuori del piano di un circolo *A C* si tiri una indefinita *A B*, che passi per la periferìa del circolo in *A*, e posto immobile il punto *B*, si faccia girare questa retta intorno alla periferìa del circolo *A C*, il solido compreso dal circolo *A C*, e dalla superficie generata dalla linea *A B*, dicesi *cono*, e la superficie generata dicesi *superficie conica*; il punto *B* dicesi *vertice*, il circolo *A C* dicesi *base*, la retta che congiunge il vertice *B* con il centro della base dicesi *asse*, e la retta tirata dal vertice normale al piano della base dicesi *altezza*, la quale se sia ancor asse, il cono dicesi *retto*, se non, dicesi *scaleno* o *obliquo*.

III. Non mi diffonderò nel dimostrare, che, se il cono sarà segato da un piano *A B C*, che passi per lo vertice *B*, le comuni sezioni *B A*, *B C* del piano e della superficie conica sieno linee rette; e che la linea *D N F* segnata nella superficie conica da un piano secante parallelo alla base sia un circolo; queste sono verità chiare per se stesse. Sia ora segato il cono *A B C* da un piano qualunque *M N m n*, il quale non passi per lo vertice *B*, ne sia parallelo alla base; si conduca nella base un diametro *A C*, che sia perpendicolare alla comune sezione del piano secante, e della base, e per *A C* si tiri un piano *A B C m r*, che passi per lo vertice *B*, ed *M m* sia la comun sezione di questo piano coll' altro, che non passa per lo vertice; dai punti *M*, *m* si tirino *M R*, *m r* parallele ad *A C*, e preso un qualunque punto *N* nella linea *M N* segnata dal piano secante nella superficie conica, si faccia passare per questo punto un piano *D N F* parallelo alla base, la linea *D N F* sarà un circolo, al diametro di cui *D F* sarà perpendicolare *N X* comune se-

sezione del piano MN con il circolo DNF. Ciò posto si chiami $Mm = a$, $MX = x$, $XN = y$, $MR = b$, $mr = c$, avremo $a^2 : bc$ in ragion composta di $a : b$, e di $a : c$, cioè in ragion composta di $a \pm x : XF$ e della $x : DX$ per la similitudine dei triangoli mMR, mXF, ed mMr, DMX; dunque sarà $a^2 : bc :: ax \pm x^2 : XF \cdot DX$; ($a + x$ serve per la prima figura, in cui il piano secante taglia il cono Bmr, che si genera di là dal punto B, ed $a - x$ serve per la seconda figura, in cui il piano secante taglia il solo cono ABC). Ma è $XF \cdot DX = \overline{XN}^2 = y^2$ per la natura del circolo; dunque sarà $a^2 : bc :: ax \pm x^2 : y^2$, e $\frac{bc}{a^2} \cdot \overline{ax \pm x^2} = y^2$: quando vi è il segno più l' equazione è all' iperbola riferita ai diametri, quando vi è il segno meno, l' equazione è all' elisse; i diametri conjugati di queste linee sono a, e $\sqrt{bc}$: in amendue il principio dell' ascisse è nel vertice dell' asse. Le quali cose facilmente si deducono dai capi precedenti. Adunque quando il piano sega tutti e due i coni, si genera l' Iperbola, se un solo, si genera l' Elisse.

IV. Quando Mm taglia i lati BC, BA dalla medesima parte del vertice B, se l' angolo MmR fosse uguale all' angolo BMR, o sia MDF, la quale sezione dicesi *suecontraria*, sarebbe $rm : MR :: mB : BR :: \overline{MB}^2 : \overline{BR}^2 :: \overline{mM}^2 : \overline{MR}^2$ a motivo dei triangoli simili mMB, MBR; dunque in tal caso sarà $rm \cdot RM = \overline{Mm}^2$, ovvero $cb = a^2$, e però l' equazione $\frac{cb}{a^2} \cdot \overline{ax - x^2} = y^2$ si trasformerà in $ax - x^2 = y^2$, al circolo del diametro a qualor l' angolo MXN sia retto.

V.

V. Se il punto m si allontanasse all' infinito, allora $M m$ verrebbe parallela a $B m$, anzi queste due rette si eguaglierebbono, ed il rettangolo $m X$ in $X M$ diverrebbe uguale al rettangolo $m M$ in $M X$, cioè sarebbe $a x \pm x^2 = a x$; dunque l'equazione $\frac{b c}{a^2} . \overline{a x \pm x^2} = y^2$ si tramuterebbe in $\frac{b c}{a} . x = y^2$; equazione alla parabola riferita al diametro, il cui parametro è $\frac{b c}{a} = M R . \frac{m r}{m M}$; $m r$ ed $M m$ sono due rette infinite, le quali si toglieranno dall' espressione del parametro, se si noti che in questo caso sarà $m M : m r :: B m : m r :: B R : R M$; dunque il parametro della parabola delineata sarà $\frac{\overline{M R}^2}{B R}$. Dunque per mezzo delle sezioni di un piano e di un cono si possono ottenere tutte le linee di secondo grado, le quali per tal motivo si denominano *sezioni coniche*.

VI. Quantunque per mezzo delle coniche sezioni si possano ottenere tutte le linee del secondo grado; ciò non ostante i moderni Geometri hanno avvisato di descriverle, colla traccia di un punto, che fan muovere successivamente con alcune condizioni: noi quì sceglieremo ciocchè più si confà alla pratica. La retta $D B$ (*Fig.* 11. *T.* 2.) rappresenti una riga immobile, sopra cui si ponga un' altra $C E$, così che questa non possa muoversi, che perpendicolarmente alla $D B$; inoltre sia alla $D B$ perpendicolare una retta qualunque $F R$, in cui preso un qualunque punto F, si fermi in questo una estremità del filo $F M C$, il quale sia lungo quanto si pone CE; l' altra sua estremità si fissi in C nella riga CE; questa si faccia passare per il punto F, ed il filo fermato in F ed in C si stenda per quanto si può sopra la riga CE, eseguita tale preparazione si faccia movere la riga CE, la quale sia accompagnata continuamente dal filo FM pèr mezzo dello stile M; dico che la linea AM descritta dal punto M sarà una parabola, la quale avrà il vertice in A, che divide FR egualmente. Dal punto M in FR si cali la perpendicolare MP, la quale si ponga $= y$, la retta AP si chiami $= x$, $AF = AR = b$, dunque $FP = x - b$, ed $RP = x + b$. Essendo $FMC = CE$, levata la comune CM, sarà $FM = ME = PR$; onde sarà $\overline{PR}^2 = \overline{FM}^2 = \overline{x-b}^2 + y^2$; ma è ancora $\overline{PR}^2 = b^2 + 2bx + x^2$; dunque avremo $xx - 2bx + bb + yy = bb + 2bx + xx$ o sia $yy = 4bx$ equazione alla parabola riferita all' asse, il cui vertice è il punto A medio della linea FR, ed il parametro è $4b$. Per descrivere adunque con questo metodo la parabola del detto parametro $= 4b$, non si dee far altro, che prendere $FR = 2b$, e nel rimanente operare come sopra.

VII. Il punto F, dove si è fissato il filo, chiamasi *fuoco*, o *umbilico* della parabola, e la retta DB sovra cui cammina perpendicolarmente CE chiamasi *direttrice*. Sarà dunque proprietà della parabola, che la distanza FM del fuoco da un punto di curva sia uguale alla distanza ME di questo punto di curva dalla direttrice.

VIII. Si fermino sopra di un piano l' estremità F, f (*Fig.* 12. *T.* 2.) di un filo talmente però che la distanza Ff sia minore della lunghezza del filo, e si faccia scorrere uno stile per tutta la lunghezza di lui,

a con-a condizione, che lo stile tenga sempre teso il filo; dico che la linea AMa descritta dal punto M, sarà una Elisse. Da un punto M qualunque della linea AMa si cali in Aa la normale MP, e alla medesima Aa divisa egualmente in C sia normale BCb; si ponga $CA = a$, $BC = b$, $CF = c$, $CP = x$, $PM = y$, sarà $PF = c - x$, $Pf = c + x$, e posta la differenza di MF, $Mf = 2z$, sarà $MF = a - z$, ed $fM = a + z$. Per i triangoli rettangoli MPF, MfP, sarà $\overline{MP}^2 + \overline{PF}^2 = \overline{MF}^2$, ed $\overline{MP}^2 + \overline{fP}^2 = \overline{Mf}^2$; cioè $y^2 + c^2 - 2cx + x^2 = a^2 - 2az + z^2$; ed $y^2 + c^2 + 2cx + x^2 = a^2 + 2az + z^2$; e sottraendo la prima equazione dalla seconda sarà $4cx = 4az$, cioè $z = \frac{cx}{a}$, il qual valore sostituito nella prima equazione, darà $y^2 + c^2 + x^2 = a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2}$, e $\frac{a^2 - c^2}{a^2} . x^2 = a^2 - c^2 - y^2$, o sia $\frac{c^2 - a^2}{a^2} . x^2 + a^2 - c^2 = y^2$, e posto $a^2 - c^2 = bb$ sarà $\frac{bb}{aa} . \overline{aa - xx} = yy$, equazione all' elisse riferita all' asse maggiore col principio dell' ascisse nel centro e cogli assi conjugati $2a$ maggiore, $2b$ minore. Quindi se si voglia la descrizione dell' elisse, che abbia dati gli assi conjugati, si dee prendere la distanza dei punti F, f uguale alla radice della differenza dei quadrati degli assi conjugati, e la lunghezza del filo uguale all' asse maggiore, ed operare come sopra. I punti F, f si dicono *fuochi*, o *umbilici* dell' elisse.

IX. Se si faranno $CR = cr = \frac{a^2}{c}$, e per R, ed r si condurranno RS, rs parallele a CB, le rette RS, si chiamano *direttrici* dell' elisse, la proprietà di cui è, che preso un qualunque punto M nella curva, se si tirerà MS parallela a CR, ed MF, che congiunge il punto M con il fuoco F più vicino alla direttrice SR, sarà l' intercetta MS fra il punto M e la direttrice prossima al fuoco F alla MF in ragion costante di $a : c$. Imperciocchè essendo $CR = \frac{a^2}{c}$ sarà $PR = MS = \frac{a^2 - xc}{c}$. Ma è $MF = \frac{a^2 - cx}{a}$, come facilmente dal calcolo si può dedurre; dunque sarà $MS : MF :: \frac{a^2 - cx}{c} : \frac{a^2 - cx}{a} :: a : c$. Se sarà $\frac{a^2}{c}$ infinita, sarà $c = 0$, onde l' elisse passa in un circolo, quando le direttrici sono infinitamente distanti. Se sarà $\frac{a^2}{c} = a$, sarà ancora $c = a$, ed in questo caso l' elisse passerà nella retta Aa normale alle direttrici.

X. Sopra un piano si fissi l' estremità di una riga fM (Fig. 13. T. 2.) talmente, che possa concepire intorno al punto f un moto circolare, ed in un altro punto F del medesimo piano si fissi l' estremità di un filo, il quale sia minore della riga fX per una lunghezza minore di Ff, l' altra estremità del filo si leghi all' estremità X della riga: compiuta tale preparazione, se con uno stile M si terrà teso il filo lungo la riga fX, mentre questa si ruota; dico che la linea descritta dal punto M, sarà un' iperbola. Dal punto M si cali in Ff la normale MP, e la distanza Ff si divida egualmente in C; da una parte e dall' altra di questo punto si prendano AC, aC uguali alla metà della differenza del filo, e della riga. Si ponga $Aa = 2a$, $Ff = 2c$, $CP = x$, $PM = y$, sarà $PF = x - c$, e $Pf = x + c$

la

la somma di FM, Mf sia $= 2z$, sarà $MF = z - a$, ed $Mf = z + a$. Per i triangoli FMP, fMP rettangoli sarà $\overline{MP}^2 + \overline{PF}^2 = \overline{MF}^2$, ed $\overline{MP}^2 + \overline{Pf}^2 = \overline{Mf}^2$, cioè $y^2 + c^2 - 2cx + x^2 = a^2 - 2az + z^2$ ed $y^2 + c^2 + 2cx + x^2 = a^2 + 2az + z^2$, e sottratta la prima equazione dalla seconda, sarà $4cx = 4az$, e $z = \frac{cx}{a}$, e sostituito il valore di z nella prima equazione, sarà $y^2 + c^2 + x^2 = a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2}$, o sia $\frac{c^2 - a^2}{a^2}$, $x^2 + a^2 - c^2 = y^2$, e fatto $c^2 - a^2 = bb$, sarà $\frac{bb}{aa}$. $\overline{x^2 - a^2} = y^2$ equazione all' iperbola riferita all' asse Aa primario, col principio dell' ascisse nel centro C, e cogli assi conjugati $2a$, $2b$. Quindi se si volesse la descrizione di una iperbola, che abbia dati gli assi conjugati, si prenda la distanza dei due punti F, f uguale alla radice della somma dei quadrati degli assi conjugati, e la differenza del filo e della riga uguale all' asse primario, e si operi come sopra. I punti F, f si chiamano *fuochi*, o *umbilici* dell' iperbola.

XI. Se si farà $CR = cr = \frac{a^2}{c}$, e per R, r si tireranno due rette RS, rs parallele a PM; queste si dicono le *direttrici* dell' iperbola, la cui proprietà è, che se da un punto M della curva si tirerà due rette una ~~MF~~ ad un fuoco F, l' altra MS parallela a PR, sarà l' intercetta fra il punto M e la direttrice RS alla intercetta fra il punto M ed il fuoco prossimo in F in ragion costante di $a : c$. Imperocchè sarà $MS = \frac{cx - a^2}{c}$, ed $MF = \frac{cx - a^2}{a}$, come facilmente si

può

può vedere dal calcolo; onde sarà $MS : MF :: \frac{cx - a^2}{c} : \frac{cx - a^2}{a} :: a : c$. Quando $CR = o$ sarà $\frac{a^2}{c} = o$, ovvero $a = o$; in tal caso le direttrici e l' iperbola si confondono con una indefinita tirata dal centro C normale a Ff. Se poi vi fosse $CR = a$, sarebbe $\frac{a^2}{c} = a$, e $b = \sqrt{c^2 - a^2} = o$, onde l' iperbole in tal caso si confonderebbero colla linea Aa infinita.

XII. A queste descrizioni coi fili, perchè soggetti a distrazione, i Geometri amano di preferire quelle con sole verghe rigide. Per l' iperbola non ne so alcuna, che sia semplice; fra le molti poi per l' elissi scelgo la seguente. Si faccia movere fra le rette ACa, BCb (*Fig.* 14. *T.* 2.) poste ad angolo retto la retta STM, talmente che i punti T, S sieno sempre nelle CA, Cb qualunque punto M di questa descriverà un' elisse. Si meni MP parallela a CB, e sia $SM = a$, $TM = b$, $CP = x$, $PM = y$. Abbiamo $a : x :: b : PT = \frac{bx}{a}$; dunque sarà $b^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2} + yy$, o sia $yy = \frac{bb}{a^2} \cdot \overline{a^2 - x^2}$. Equazione all' elisse, gli assi di cui sono $2a$, $2b$; onde sarà facile con questo metodo, dati gli assi, descrivere l' elisse.

XIII. Per delineare la Parabola darò l' idea del seguente istrumento. Si adatti la retta CD (*Fig.* 15. *T.* 2.) perpendicolare ad una data AB, così che possa muoversi parallela a se stessa. La retta poi MN sia parallela alla data AB. Nel dato punto A sia la norma KAL, che possa liberamante intorno esso girare. Ora si regoli il moto della norma in maniera che il con-

cor-

corso delle linee AL, CD sempre sia nella linea MN; dico, che il concorso delle linee AK, CD descriverà la parabola AFI, la tangente di cui in A sarà AB. Imperciocchè per l'angolo retto FAH sarà $GH : AG :: AG : GF$. Dunque $GH \cdot GF = \overline{AG}^2$. Si chiami la costante $GH = a$, $AG = x$, $GF = y$, avremo $ay = x^2$, equazione della parabola del parametro $= a$ le ascisse di cui sono nella tangente.

CAPO V.

De' Luoghi geometrici del secondo grado.

I. Luogo geometrico d'una equazione a due variabili è quella linea, fra le coordinate di cui vi è la relazione espressa da quest' equazione. Già abbiamo dimostrato nel Capitolo precedente, che le sezioni coniche comprendono tutte l'equazioni del secondo grado. Nel presente diamo le regole sicure per determinare la linea corrispondente alla tale equazione, e per assegnarne le coordinate. Omesso il metodo del Cregio, ornato dal Marchese dell' Hopital, e dell' Hermanno perfezionato dal Conte Vicenzo Riccati scegliamo quel del Wit, conecchè di più facile esecuzione.

II. Per chiarezza distinguiamo l'equazioni indeterminate del secondo grado in due classi. La prima contiene quelle, che anno o uno, ovvero i due quadrati delle variabili, senza il rettangolo loro; e se anno questo sono prive affatto dei quadrati. La seconda racchiude quelle che anno e il rettangolo, e i quadrati. Rifacciamci dalla prima classe, e gli esempii sieno in luogo della Teoria astratta.

Esempio I.

III. Sia $ax + ab = yy$, e sia dato l' angolo, che fra loro deono fare le coordinate. Poichè $ax + ab$ è $a \times \overline{x+b}$, si faccia $x + b = z$, dunque sostituendo sarà $az = yy$ Parabola Apolloniana. Alla indefinita AB come diametro, [F.16.T.3.] col parametro $= a$ si descriva la parabola apolloniana CAC, le di cui coordinate AB, BC comprendano il dato angolo, indi sia $AD = b$; presa una qualunqne $AB = z$, sarà $BC = y$, ma perchè abbiamo, per la sostituzione, $x = z - b$, sarà DB la x. L' origine adunque delle ascisse x sarà il punto D, prese verso M le positive, verso A le negative, e le corrispondenti ordinate positive, e negative saranno le y. Se l' equazione proposta fosse stata $ax - ab = yy$, si sarebbe fatta la sostituzione $x - b = z$, e però $x = z + b$. In questo caso presa nel diametro prodotto $AE = b$, e fatto il rimanente come sopra, il punto E sarebbe l' origine delle x. Se l' equazione fosse $ax \pm bb = yy$ non avrebbe maggior difficoltà, perchè così si dispone a, $(x \pm \frac{bb}{a})$ $= yy$, e poi fatta $x \pm \frac{bb}{a} = z$, si opera come sopra. Il che basterà avere una volta avvisato.

Esempio II.

IV. L' equazione da costruirsi sia $xy + ax = aa$ $- ay$; si metta $y + a = z$, sarà $y = z - a$, si faccia sparire dall' equazione la y, acciocchè sia $zx = 2aa$ $- az$, ovvero $zx + az = 2aa$; si metta ora $x + a$ $= p$, si avrà $pz = 2aa$, equazione dell' iperbola tra

gli

gli asintoti. Le rette MM, NN (*Fig.* 17. *T.* 3.) formino l'angolo delle coordinate, che si suppone dato, si tagli $CA = a$, $AB = 2a$, e tra gli asintoti MM, NN si descriva l'iperbola, che passi per lo punto B, saran le $CF = p$, le $FG = z$; ma è $x = p - a$; dunque $AF = x$, dunque il principio dell' ascisse sarà in A. Essendo inoltre $y = z - a$, si divida AB egualmente in D, e per D conducasi DH parallela a CA saranno le $GH = z - a = y$; Ma è $DH = AF$, saranno dunque le DH, ed HG le coordinate x, y: La costruzione ci insegna essere $y = a$, se $x = o$; se x è positiva minore di a, l' ordinate sono positive; se la x è $= a$, è $y = o$; se $x > a$, l' ordinate sono negative; e alla x infinita conviene l' y negativa $= a$; se le x sono negative minori dell' a l' ordinate sono positive; alla x negativa $= a$ conviene l' ordinata infinita; alle x negative maggiori della a convengono le ordinate negative. Se l' equazione fosse $xy + ax = -aa + ay$ le sostituzioni $y + a = z$, $x - a = p$ darebbero l' iperbola $pz = -2aa$. Laonde posta $CA = a$ si dee prendere $AB = 2a$ negativa, e le coordinate sarebbero DH, HL.

Esempio III.

V. Sia $xx + 2bx = yy - ay$. Aggiunto il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine, cioè bb, sarà $xx + 2bx + bb = yy - ay + bb$, e fatta $x + b = z$, avrassi $zz = yy - ay + bb$, cioè $zz - bb = yy - ay$, ed aggiunto il quadrato della metà di a, sarà $zz - bb + \frac{aa}{4} = yy - ay + \frac{aa}{4}$; posta dunque $y - \frac{a}{2} = p$, sarà $zz - bb + \frac{aa}{4} = pp$, e supposto bb maggiore di $\frac{aa}{4}$, facendo $bb - \frac{aa}{4} = mm$, sarà $zz = mm + pp$ iperbola equilatera con i semidiametri $= m$, prendendo le ascisse dal centro. Nella indefinita BD (Fig. 18. T. 3.) si prenda $BG = 2m = 2\sqrt{bb - \frac{aa}{4}}$, e divisa egualmente in A, col centro A, col semidiametro trasverso $= AG$, eguale al conjugato, e con le coordinate nel dato angolo si descrivano le due opposte iperbole equilatere; presa una qualunque ascissa AD positiva, e negativa $= z$, le corrispondenti ordinate DH saranno le p positive, e negative; e perchè per la sostituzione si ha $x = z - b$, presa $AE = b$, sarà $ED = x$, ma essendo per l' altra sostituzione $y = p + \frac{a}{2}$, dal punto E condotta $EO = \frac{a}{2}$ parallela all' ordinata, che terminerà alla curva nel punto O, e per lo punto O la indefinita KK parallela al diametro BG, sarà $KH = p + \frac{1}{2}a = y$. Sarà adunque il punto O l' origine delle x sulla retta KK, alle quali prese positive corrispondono due ordinate y, una positiva, e l' altra negativa; e prese negative, ma non maggiori di EG, corrisponderanno due ordinate positive; prese negative e maggiori di EG, ma minori di EB, le ordinate y saranno immaginarie, e prese negative maggiori di EB, minori di EI, fatta $BI = GE$, saranno due ordinate positive, e finalmente un' ordinata positiva, e negativa l' altra quan-

quando l' ascisse negative sieno maggiori di EI.

VI. Il metodo del Vit riesce assai intrigato nel costruire l' equazioni della seconda classe, come si può vedere negli Autori, che lo seguono; perciò glie ne sostituiamo un altro. Si ordini primamente l' equazione per modo, che da una parte vi sia il termine yy positivo e libero d' ogni coefficiente insieme col termine della y, e dall' altra parte si collochino gli altri termini. Appresso aggiungendo il quadrato della metà del coefficiente di y da una parte, e dall' altra, si compisca il quadrato, alla cui radice posta eguale una nuova indeterminata, che chiamo, $= z$, e fatta la sostituzione si presenterà una equazione colle due indeterminate z, x. Se ricercherò la curva delle indeterminate x, z e poscia farò passaggio a ritrovare l' y, sarà impossibile, che si trovi la y terminare alla linea delle ascisse x. Come si esca da simile imbarazzo verremo instruiti dall' esempio, che segue.

Esempio IV.

VII. Sia l' equazione $yy - 2ay + 2xy = aa + 4ax - xx$ la quale è disposta a dovere. Aggiungo $aa - 2ax + xx$ (*Fig. 19. T. 3.*) quadrato della metà del coefficiente di y, ed ho $\overline{y - a + x}^2 = 2aa + 2ax$. Pongo $y - a + x = z$, e sarà $zz = 2aa + 2ax$. Introducendo l' indeterminata m, da determinarsi, senza turbare l' egualità, così dispongo l' equazione $zz = 2aa + \frac{2a}{m} mx = \frac{2a}{m} . \overline{ma + mx}$, la quale è alla parabola il cui parametro $= \frac{2a}{m}$. Col parametro

$AB = \frac{2a}{m}$ descrivasi la parabola AI, saranno le $AF = ma + mx$; e $FI = z$. Dunque tagliata $AC = ma$, sarà $CF = mx$: si produca BA in D, finchè $AD = a$, e si meni al diametro la parallela DG, fino a cui s' intendano le FI prodotte. Sia inoltre CE parallela a DA sarà $EG = mx$, $IG = z + a$, da cui per avere le y convien detrarre la x. S' intenda condotta EH, in modo che le troncate $GH = x$, sarà $HI = z + a - x = y$. Dunque affinchè le y termìnino alle x conviene, che $EH = x$. Pertanto fa d'uopo determinare il valore della m, acciocchè essendo $GH = x$, sia pure $EH = x$, dato essendo l' angolo EHG delle coordinate. Si faccia il triangolo RST, di cui l' angolo S sia eguale al dato, e sia $RS = ST$, che porrò $= a$, chiamerò $RT = e$; sarà dunque $a : e :: x : mx :: 1 : m$; dunque $m = \frac{e}{a}$: dunque il parametro $AB = \frac{2a}{m} = \frac{2aa}{e}$, $AC = ma = e$. Poichè l' angolo $EGH = T$, l' angolo BAF dee essere il complemento a due retti dell' angolo T. Adunque col diametro AF, e col parametro $AB = \frac{2aa}{e}$ fatto l' angolo BAF eguale al complemento dell' angolo T, descrivasi la parabola, si faccia $DA = a$, e si meni DG parallela al diametro in cui si tagli $DE = e$. Finalmente si meni EH, che faccia con EG l' angolo $= T$ saranno le $EH = x$, $HI = y$.

Corol. Se l' angolo delle coordinate x, y debba essere retto si ritroverà $m = \sqrt{2}$.

Esempio V.

VIII. Sia proposta l' equazione $yy - 3xy + ay = \frac{3ax}{2} - 2xx$, la quale è già preparata. Aggiungo il quadrato di $+\frac{3x}{2} - \frac{a}{2}$, ed avrò $\overline{y - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}a}^{\,2}$
$= \frac{9xx}{4} + \frac{3ax}{2} + \frac{aa}{4}$, e ponendo $y - \frac{3x}{2} + \frac{a}{2} = z$
$- 2xx + \frac{3ax}{2}$
ed espurgata l' equazione, ritroverò $zz = \frac{xx}{4} + \frac{aa}{4}$, ovvero $4zz = xx + aa$, la quale è all' iperbola. Ma se vorrò costruirla colle coordinate y, x, le y non termineranno alla linea delle x. Prendendo pertanto m come indeterminata da determinarsi in progresso costruirò il luogo delle coordinate mx, z. Però moltiplicando per m^2 ricaverò l'analogia $m^2x^2 + m^2a^2 : z^2 :: m^2a^2 : \frac{a^2}{4}$. Col semidiametro secondo $CA = ma$, e col primo (*Fig.* 20. *T.* 3.) $CB = \frac{a}{2}$ descrivo l' iperbola BI, saranno $CF = mx$, $FI = z$; ma $y = z - \frac{a}{2} + \frac{3}{2}x$. Meno adunque BK parallela a CA, sarà $BK = mx$, $IK = z - \frac{a}{2}$, a cui per avere le y conviene aggiungere $\frac{3}{2}x$; intendo pertanto menata la BH in modo che le $KH = \frac{3}{2}x$, e sarà $HI = y$. Per fare che la $BH = x$, costruisco coll' angolo S, che è l' angolo

lo delle coordinate, un triangolo per modo che $RS = a$, $ST = \frac{3a}{2}$, cioè sieno come $2:3$, e chiamo $RT = e$; dunque $a : e :: 1 : m = \frac{e}{a}$. Onde col semidiametro $CA = e$, $CB = \frac{a}{2}$, e coll'angolo $C = T$ descrivo l'iperbola, e meno la tangente BK parallela a CA. Finalmente meno BH, che faccia l'angolo $HBK = R$, sarà $BH = x$, $HI = y$.

Corol. Se l'angolo S fosse retto sarebbe $ee = aa + \frac{9aa}{4} = \frac{13aa}{4}$: dunque $e = \frac{a\sqrt{13}}{2}$, e per conseguenza $m = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Esempio VI.

IX. Non altro rimane se non da mostrare il metodo in quelle equazioni, che prive sono del quadrato yy, le quali si ridurranno all'iperbola tra gli asintoti. Sia proposta l'equazione in modo, che il termine xy altro coefficiente non abbia, che l'unità $xy - \frac{1}{2}xx = ax - ay + aa$. Pongo $y - \frac{1}{2}x = z$ e però $y = z + \frac{1}{2}x$, $xz = ax - az + aa$, ovvero $xz = \frac{ax}{2} + aa - az$. Pongo $z - \frac{a}{2} = u$, e trovo $ux =$

aa

$aa - au - \frac{aa}{2}$, dunque $ux + au = \frac{aa}{2}$. Se volessi la presente equazione costruire colle ascisse $= x$, non otterrei le coordinate collocate a dovere. Però la costruirò colle ascisse $= mx$, e così disporrò l' equazione $u . \overline{mx + ma} = \frac{m . a^2}{2}$. Faccio $mx + ma = t$, ed ho $ut = \frac{maa}{2}$, che è all' iperbola tra gli asintoti. Prese CF, CM (*Fig.21.T.3.*) per asintoti, si tagli $CA = ma$, $AB = \frac{a}{2}$; e si descriva l' iperbola, che passi per lo punto B. Saranno le $CF = t$; $FI = u$: ma $mx = t - ma$: dunque AF saranno le mx; inoltre è $z = u + \frac{a^2}{2}$: dunque presa $AD = AB$, condotta la parallela DE, e prodotta come conviene, saranno $DG = mx$, $GI = z$; ma $z + \frac{x}{2} = y$, dunque conducendo la DH in modo, che sia $GH = \frac{x}{2}$, sarà $HI = y$. A far che sieno le $DH = x$ conviene determinare m. Poichè $DH : HG$ dee essere come $2 : 1$ fo un triangolo RST coll' angolo S delle coordinate, fo $RS = a$, $ST = \frac{1}{2} a$, e chiamo $RT = e$; sarà $m = \frac{e}{a}$: dunque $CA = ED = e$, è l' angolo $MCA = T$, e $GDH = R$; negli asintoti, che facciano l' angolo T, presa $CA = e$, $AB = \frac{a}{2}$ e descritta l' iperbola, si tagli $CE = \frac{1}{2} a$, e conducasi ED parallela a CA, e prodotta BA in D si conduca DH, che faccia con DG l'angolo R saranno $DH = x$, $HI = y$. La DH passerà pel centro C.

CAPO VI.

Si sciolgono alcuni Problemi indeterminati di secondo grado.

I. DOpo che si è insegnato a costruire tutte le equazioni indeterminate di secondo grado colla descrizione delle sezioni coniche, egli è necessario recarne ad esempio la soluzione di qualche problema indeterminato di secondo grado.

II. Problema primo. Un circolo, il cui centro è C (*Fig.* 22. *T.* 3.) abbia per tangente la retta AQ, colla quale s' incontri la secante CQ; si vuole che la retta QM perpendicolare alla tangente sia eguale all' intercetta RQ, ciò supposto si cerca il luogo geometrico di tutti i punti M, che si determinano colla detta condizione. Dal punto M si cali la perpendicolare MP alla linea CA prodotta. Pongasi $MP = AQ = y$, $AP = QM = QR = x$, $CA = a$. Per la proprietà del circolo sarà $2a + x : y :: y : x$; dunque $2ax + xx = yy$, che è l' equazione dell' iperbola equilatera il cui asse sia $= 2a$, e le ascisse abbiano l' origine nel vertice. Ora fatto centro in C, essendo il vertice in A si descriva un' iperbola equilatera i cui assi sieno eguali al diametro $A2A$ del circolo; questo sarà il luogo geometrico che si cerca.

III. Si divida ora il circolo dai due diametri $A2A$, $B2B$ ad angoli retti. Se il punto R sia collocato nel primo quadrante AB, ponendosi $QM = QR$ si genera ra il ramo dell' iperbola AM. Se è posto nel secondo quadrante $B2A$, come per esempio $2R$, allora $C2R$ taglia la stessa tangente in $2Q$, e $2R2Q$ si dee considerare come negativa, perchè nel punto B la intercetta tra il cerchio e la tangente diventa infinita; onde sotto il punto B, questa intercetta dee voltarsi in negativa. E perciò dovendo $2Q2M$ essere collocata nella parte opposta a QM, ne nasce il ramo dell' iperbola $2A2M$. Se $3R$ è nel terzo quadrante $2A2B$, la tangente vien tagliata un altra volta in Q, ma $3RQ$ si vuole prendere negativa, e ad essa si dee fare eguale $Q3M$, onde ne risulti il ramo $2A3M$. Finalmente essendo $4R$ nell' ultimo quadrante si produrrà il ramo $A4M$. Per lo punto $2A$ si tiri la tangente $S2S$; la stessa iperbola sarebbe nata, se all' intercette $S3R$ si fossero fatte uguali $S2M$. La dimostrazione n' è facile. Poichè per costruzione $2R2Q = 2Q2M$; ma ponendo eguali gli archi $A4R$, $2A3R$ è $2R2Q = SR$: dunque $2Q2M = SR$, dunque sottratte le due eguali $2QS$, $R3R$ che sono eguali al diametro del circolo, resterà $S2M = S3R$.

IV. Problema secondo. Dentro il dato angolo ABC (*Fig.* 23. *T.* 3.) essendo dato il punto E trovare la curva MF, cosicchè tirata per E qualsivoglia linea $AMEC$, sia sempre $AM = CE$. Dai punti E, M si tirino le linee ED, MS parallele al lato CB. Pongasi $BS = x$, $SM = y$, $ED = a$, $BD = b$. Dovendo essere per la condizion del Problema $AM = EC$, sarà $AS = BD = b$, dunque $AD = BS = x$; Ma $AS : SM :: AD : DE$, o sia $b : y :: x : a$; dunque $ab = xy$, la qual equazione esprime l' iperbola fra gli asintoti BA, BC. Fra questi dunque descritta l' iperbola, che passi per lo punto E, questa sarà la curva bramata. La medesima proprietà si trova nell' iperbo-

H opposta. Imperciocchè tirata la linea $E\,2\,C\,2\,A$, la qual tagli l' opposta iperbola nel punto $2\,M$, sarà sempre $E\,2\,C = 2\,A\,2\,M$.

V. Problema terzo. Dentro l' angolo ABC (*Fig.* 24. *T.* 3.) dato il punto E trovare la curva MF, cosicchè tirata la linea $AMEC$ sia sempre $AM : CE$ in una data ragione di $m : n$. Si faccia la stessa costruzione, che sopra si è fatta, e si ritengano le stesse denominazioni. Essendo $EC : MA :: BD : AS$, sarà $n : m :: BD = b : AS = \frac{mb}{n}$; dunque $BA = \frac{mb}{n} + x$, e $AD = \frac{m-n}{n} . b + x$. Ora $AD : DE :: AS : SM$, o sia in termini analitici $\overline{\frac{m-n}{n} . b + x} : a :: \frac{mb}{n} : y$. Dunque $y . \overline{\frac{m-n}{n}\, b + x} = \frac{mab}{n}$, che è l' iperbola, di cui si fa così la costruzione. Prendasi DH, che sia a DB, come $m : n$, e per lo punto H si tiri HK parallela BC, quindi fra gli asintoti HA, HK descrivasi l' iperbola, che passi per lo dato punto E, in cui tirata qualsivoglia linea $AMEC$ è sempre $AM : EC :: m : n$. Ciò facilmente si dimostra per la proprietà del Problema antecedente. Imperciocchè prodotta la retta AC che tagli l' asintoto in K, per il problema di sopra sarà $AM = EK$; ma $EK : EC :: HD : BD :: m : n$ dunque $AM : EC :: m : n$; tutto ciò si applica anche all' iperbola opposta.

VI. Problema quarto. Dato l' angolo FBG, ed il punto A (*Fig.* 25. *T.* 4.) e tirate infinite AF, ritrovare una curva, la cui corda AH sia eguale all' intercetta GF. Dal punto A si tiri la linea AD paral-

lela

ela al lato BF, che s' incontri in D col lato BG. Dai punti H si tirino le linee HE parallele ad AD Pongasi $BE = x$, $HE = y$, $BD = a$, $AD = b$; essendo $AH = GF$ per la condizion del problema, sarà ancora $DE = BG$, dunque $DG = BE = x$, e $GE = 2x - a$, ma $DG : DA :: GE : EH$, o sia in termini analitici $x : b :: 2x - a : y$, dunque $xy = 2bx - ab$, o sia $ab = x . \overline{2b - y}$, la qual equazione ci da un' iperbola fra gli asintoti, e si costruisce così. Si allunghi la linea DA verso I finchè sia $AI = AD$, per lo punto I si tiri la linea IK parallela DB che tagli FB in K. Fra gli asintoti KB, KI descrivasi un' Iperbola, che passi per lo punto A, questa sarà la curva bramata. La linea AB toccherà l' iperbola nel punto H, perchè la linea $BK = DI$ è doppia di AI. Se la linea HF tagli il ramo AH l' intercetta GF sarà contenuta dall' angolo FBG: se tagli il ramo AL l' intercetta sarà posta nell' angolo al vertice KBD, se la retta si tiri all' iperbola opposta, l' intercetta sarà negli angoli adiacenti KBd, FBd.

VII. Problema quinto. Poste le condizioni dell' antecedente problema trovare la curva AH (*Fig.* 26. *T.* 4.) in cui la corda AH all' intercetta GF sia nella ragione data di $m : n$. Conservate tutte le denominazioni di sopra è chiaro che sarà $DE = a - x$; Ma $AH : GF$, o sia $DE = a - x : GB :: m : n$, dunque

$GB = \frac{n . \overline{a - x}}{m}$; dunque $GE = \frac{m + n}{m} . x - \frac{na}{m}$, e

$GD = \frac{m - n}{m} a + \frac{nx}{m}$. Ora $GD : GE :: DA : HE$,

dunque $\frac{m - n}{m} . a + \frac{nx}{m} : \frac{m + n}{m} . x - \frac{na}{m} :: b : y$, o sia

$m - n$

dunque $y - \frac{a}{2} = p$, sarà $zz - bb + \frac{aa}{4} = pp$, e supposto bb maggiore di $\frac{aa}{4}$, facendo $bb - \frac{aa}{4} = mm$, sarà $zz = mm + pp$ iperbola equilatera con i semidiametri $= m$, prendendo le ascisse dal centro: Nella indefinita BD (Fig. 18. T. 3.) si prenda $BG = 2m = 2\sqrt{bb - \frac{aa}{4}}$, e divisa egualmente in A, col centro A, col semidiametro trasverso $= AG$, eguale al conjugato, e con le coordinate nel dato angolo si descrivano le due opposte iperbole equilatere; presa una qualunque ascissa AD positiva, e negativa $= z$, le corrispondenti ordinate DH saranno le p positive, e negative; e perchè per la sostituzione si ha $x = z - b$, presa $AE = b$, sarà $ED = x$, ma essendo per l' altra sostituzione $y = p + \frac{a}{2}$, dal punto E condotta $EO = \frac{a}{2}$ parallela all' ordinata y, che terminerà alla curva nel punto O, e per lo punto O la indefinita KK parallela al diametro BG, sarà $KH = p + \frac{1}{2}a = y$. Sarà adunque il punto O l' origine delle x sulla retta KK, alle quali prese positive corrispondono due ordinate y, una positiva, e l' altra negativa; e prese negative, ma non maggiori di EG, corrisponderanno due ordinate positive; prese negative e maggiori di EG, ma minori di EB, le ordinate y saranno immaginarie, e prese negative maggiori di EB, minori di EI, fatta $BI = GE$, saranno due ordinate positive, e finalmente un' ordinata positiva, e negativa l' altra

quan-

quando l' ascisse negative sieno maggiori di EI.

VI. Il metodo del Vit riesce assai intrigato nel costruire l' equazioni della seconda classe, come si può vedere negli Autori, che lo seguono; perciò glie ne sostituiamo un altro. Si ordini primamente l' equazione per modo, che da una parte vi sia il termine yy positivo e libero d' ogni coefficiente insieme col termine della y, e dall' altra parte si collochino gli altri termini. Appresso aggiungendo il quadrato della metà del coefficiente di y da una parte, e dall' altra, si compisca il quadrato, alla cui radice posta eguale una nuova indeterminata, che chiamo $= z$, e fatta la sostituzione si presenterà una equazione colle due indeterminate z, x. Se ricercherò la curva delle indeterminate x, z e poscia farò passaggio a ritrovare l' y, sarà impossibile, che si trovi la y terminare alla linea delle ascisse x. Come si esca da simile imbarazzo verremo instruiti dall' esempio, che segue.

Esempio IV.

VII. Sia l' equazione $yy - 2ay + 2xy = aa + 4ax - xx$ la quale è disposta a dovere. Aggiungo $aa - 2ax + xx$ (*Fig.* 19. *T.* 3.) quadrato della metà del coefficiente di y, ed ho $\overline{y - a + x}^2 = 2aa + 2ax$. Pongo $y - a + x = z$, e sarà $zz = 2aa + 2ax$. Introducendo l' indeterminata m, da determinarsi, senza turbare l' egualità, così dispongo l' equazione $zz = 2aa + \frac{2a}{m} mx = \frac{2a}{m} . \overline{ma + mx}$, la quale è alla parabola il cui parametro $= \frac{2a}{m}$. Col parametro

$\frac{x - \sqrt{bb-yy}}{2} : y$; e duplicando gli antecedenti $2a : b :: x - \sqrt{bb-yy} : y$; si ha pertanto l' equazione $2ay = bx - b\sqrt{bb-yy}$, o sia $b\sqrt{bb-yy} = bx - 2ay$, ed elevando al quadrato $b^4 - b^2y^2 = b^2x^2 - 4abxy + 4a^2y^2$.

X. In questa equazione considero x, come ordinata, ed y come ascissa, che così più facilmente si ottiene la costruzione. Divido per b^2, onde sia $bb - yy = x^2 - \frac{4a}{b}xy + \frac{4a^2}{bb}y^2$. Pongo $x - \frac{2a}{b}y = u$, e si ha $bb - yy = uu$, che è l' equazione all' elisse. Seguendo il mio metodo così dispongo la formola $m^2b^2 - m^2y^2 : uu :: m^2b^2 : b^2$. Per tanto posti i diametri $CE = mb$, $CH = b$ (l' angolo dei diametri, ed il coefficiente m resterà determinato nel progresso), intendasi descritta l' elisse EH, sarà $CG = my$, $GD = u$. Tirisi la linea CIF, talmente, che sia $CI = y$, $IG = \frac{2a}{b}y$; Dunque $ID = u + \frac{2a}{b}y = x$. Poichè l' angolo I dee essere retto sarà $m^2 = 1 + \frac{4a^2}{b^2} = \frac{b^2 + 4a^2}{b^2}$, ed $m = \frac{\sqrt{4a^2 + b^2}}{b}$; Ma $CE = mb$; Dunque $CE = \sqrt{4a^2 + b^2}$. Ora $CE : CF :: m : 1$, dunque $CF = b$; parimenti dovendo essere $CF : FE :: b : 2a$; sarà $FE = 2a$. Pertanto stendansi i lati dell' angolo CAB in CK, onde sia $CK = 2a$, la retta BD passerà in $KE = b$, si congiunga CE che sarà $= \sqrt{4aa + bb}$, si tagli $CH = b$: Coi diametri CE, CH descrivasi un' elisse questa sarà la curva segnata dal punto D.

XI.

XI. La costruzione a cui son pervenuto m' insegna fare questa analisi. Tagliata la linea $CK = 2a$, alzando la perpendicolare $KE = b$, e congiungendo i due punti C, E colla linea CE, la quale si ponga $= c$, si tiri la linea DO parallela a CE, e CO pongasi $= x$, $OD = y$. Ciò supposto sarà $c : 2a :: y : OM = \frac{2ay}{c}$, e $CM = x + \frac{2ay}{c}$. Parimente $c : b :: y : DM = \frac{by}{c}$; dunque $BM = \sqrt{bb - \frac{bbyy}{cc}} = \frac{b}{c} \cdot \sqrt{cc - yy}$ e $CB = x + \frac{2ay}{c} - \frac{b}{c}\sqrt{cc - yy}$. Perlochè si avrà l' analogia $a : b :: \frac{x}{2} + \frac{ay}{c} - \frac{b}{2c}\sqrt{cc - yy} : \frac{by}{c}$, onde l' equazione $ay = \frac{cx}{2} + ay - \frac{b}{2}\sqrt{cc - yy}$, o sia $b\sqrt{cc - yy} = cx$, o sia $b^2c^2 - b^2y^2 = c^2x^2$; finalmente $bb - xx : yy :: bb : cc$, che è l' equazione all' elisse, che à i semidiametri $CH = b$, $CE = c$.

CAPO VII.

Trasformazione delle Equazioni del terzo, e quarto grado.

I. IN grazia della costruzione dell' equazioni del terzo, e quarto grado, esponiamo quì alcune cose intorno alla trasformazione di esse. Trasformiamo in primo luogo un' Equazione, quando la mutiamo in un' altra, le cui radici sieno maggiori o minori delle radici della proposta d' una quantità data, il che così ottiensi. Sia da trasformarsi l' Equazione $x^3 + c x^2 - b^2 x - b^2 c = o$ in un' altra le cui radici eccedano le radici della proposta d' una quantità $= a$. Si faccia $x = y - a$, e si sostituisca nell' equazione data questo valore della x, avremo

$$\begin{array}{rlllll} x^3 = & y^3 & - 3ay^2 & + 3a^2 y & - a^3 \\ cx^2 = & & cy^2 & - 2cay & + ca^2 \\ - b^2 x = & & & - bby & + bba \\ - b^2 c = & & & & - b^2 c. \end{array}$$

E perciò l' Equazione data sarà mutata nella seguente

$$\begin{array}{llll} y^3 & - 3a.y^2 & + 3a^2.y & - a^3 \quad = o \\ & + c & - 2ca & + ca^2 \\ & & - bbc & + bba \\ & & & - bbc \end{array}$$

Le radici dell' Equazione proposta sono b, $-b$, $-c$, quelle della trasformata sono $b + a$, $-b + a$, $-c + a$. Se le radici della trasformata dovessero essere superate dalle radici della trasformanda d' una quantità $= a$ allora bisognerebbe porre $x = y + a$, e fare le solite sostituzioni.

II. Serve specialmente questa trasformazione a fare sparire il secondo termine dell' Equazione. Abbiasi l' Equazione $x^3 + a x^2 + a b x + a b c = o$ da trasformarsi in un' altra priva di secondo termine. Si ponga $x = y + m$, m è una quantità da determinarsi, fatte le sostituzioni avrassi

$$\left.\begin{array}{l} x^3 \\ + ax^2 \\ + abx \\ + abc \end{array}\right\} = \begin{array}{lllll} y^3 & + 3my^2 & + 3m^2 y & + m^3 \\ & + ay^2 & + 2may & + m^2 a \\ & & + aby & + mab \\ & & & + abc \end{array} = o$$

Acciocchè non siavi il secondo termine nella trasformata, conviene che sia $3m + a = o$, cioè $m = -\frac{a}{3}$

dun-

dunque m è la terza parte del coefficiente, che è nel secondo termine della trasformanda, col segno contrario, ed in realtà posta $x = y - \frac{a}{3}$ si troverà

$$\left.\begin{aligned} & y^3 - \frac{a^2y}{3} + \frac{2a^3}{27} \\ & + aby - \frac{a^2b}{3} \\ & \qquad + abc \end{aligned}\right\} = o$$

in cui non havvi il secondo termine.

III. Chi volesse togliere dall' equazione il terzo termine, gli sarebbe necessario, che ponesse $3m^2 + 2ma + ab = o$, e che risolvesse questa equazione di secondo grado, per determinare la m; essendo in questo caso doppio il valore della m, in due maniere si potrà fare sparire il terzo termine. Se mai i valori della m sieno immaginarii, si potrà senza dubbio giungnere ad una equazione senza terzo termine, ma si introdurranno in essa quantità immaginarie. Se vogliasi annullare l' ultimo termine; per determinare la m si presenta da risolversi l' equazione del terzo grado $m^3 + am^2 + abm + abc$; e perciò non si potrà determinare il valore della m se non si sappia risolvere l' equazione proposta.

IV. Quello che si è detto dell' equazioni del terzo grado si applica facilmente a quelle del quarto. Sia pertanto l' equazione $x^4 + ax^3 + abx^2 + abcx + abcd = o$. Per trasformar questa pongasi $x = y + m$ acciocchè fatte le sostituzioni abbiasi

$$\begin{array}{l} x^4 \\ + ax^3 \\ + abx^2 \\ + abcx \\ + abcd \end{array} = \begin{array}{l} y^4 + 4my^3 + 6m^2y^2 + 4m^3y + m^4 \\ \quad + ay^3 + 3amy^2 + 3am^2y + am^3 \\ \qquad + aby^2 + 2abmy + abm^2 \\ \qquad\quad + abcy + abcm \\ \qquad\qquad + abcd \end{array} = o$$

 Per

Per fare ſparire il ſecondo termine ſi faccia $4m+a=o$, onde ſia $m=-\frac{a}{4}$, cioè uguale al coefficiente del ſecondo termine diviſo per 4 col ſegno mutato. Si toglierà il terzo termine col porre $bm^2+3am+ab=o$ dalla riſoluzione della quale naſcono due valori della m; ſe queſti riuſciranno immaginarii il terzo termine ſparirà, ma l' equazione ſi riempirà di quantità immaginarie. Si annullerà il quarto termine riſolvendo l' equazione $4m^3+3am^2+2abm+abc=o$, la quale avendo almeno una radice reale come nel Cap. 10. vedremo, ſi potrà ſenza timore d' introdurre nell' equazione quantità immaginarie ottenere l' intento. Non ſi può levare dall' equazione l' ultimo termine ſenza ſaper riſolvere la ſteſſa equazione propoſta come ocularmente ſi vede.

V. Si trasforma in ſecondo luogo l' equazione propoſta in altra le cui radici ſieno alle radici della prima in ragion data. Ciò ſi ottiene facendo $x=\frac{my}{n}$. Ecco l' eſempio: ſia da trasformarſi l' equazione $x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4=o$; in vece della x ſcrivaſi $\frac{my}{n}$, e ſi avrà $\frac{m^4y^4}{n^4}-\frac{m^3ay^3}{n^3}+\frac{m^2a^2y^2}{n^2}-\frac{ma^3y}{n}+a^4=o$, e moltiplicando per $\frac{n^4}{m^4}$ ſi avrà $y^4-\frac{nay^3}{m}+\frac{n^2a^2y^2}{m^2}-\frac{n^3a^3y}{m^3}+\frac{n^4a^4}{m^4}=o$.

VI. Ci ſerviamo ſpeſſo dell' anzidetta trasformazione ad eſpellere le quantità fratte dall' equazione. Ciò queſto eſempio dichiari. Abbiaſi l' equazione $x^3+\frac{a^2}{b}.x^2+a^2x-a^3=o$, che ſi voglia cangiare in al-

altra ſenza frazione: fingaſi $x = \frac{y}{n}$; ſoſtituendo e riducendo al ſolito, naſcerà $y^3 + \frac{n a^2 y^2}{b} + n^2 a^2 y - n^3 a^3 = 0$, la quale, ſe ſia $n = b$, è libera da frazione; adunque col porre $x = \frac{y}{b}$ ſi ottiene l' intento.

VII. Alle volte traſformaſi un' equazione in altra le cui radici ſieno alle radici di quella in ragione reciproca, il che ſi eſeguiſce ponendo $x = \frac{1}{y}$: con queſta ſoſtituzione l' equazione $x^4 - 7x^2 + 3x - 10 = 0$ ſi cangia in $y^4 - \frac{3}{10} y^3 + \frac{7y^2}{10} - \frac{1}{10} = 0$, che à la ricercata condizione, cioè $y : 1 :: 1 : x$. Se ſi foſſe fatto $x = \frac{10}{y}$ l' equazione traſformata ſarebbe libera da frazione. Non coſta molta pena il comprendere, che in queſta traſformazione il primo termine della traſformanda paſſi ad eſſere l' ultimo della traſformata, e che il ſecondo paſſi nel penultimo, e così di mano in mano; e perciò ſe la prima manchi del ſecondo termine, del penultimo ſia priva la ſeconda; ſe quella del terzo, queſta dell' antipenultimo e così ſucceſſivamente.

CA-

CAPO VIII.

Costruzione delle Equazioni del terzo e quarto grado colla intersecazione delle sezioni coniche.

I. Sia l' equazione del terzo grado $x^3 + abx - af^2 = 0$, in cui a e b possono prendersi positiva e negativamente. Si finga $xx = ay$, e fatta la sostituzione nell' equazione proposta, sarà $yx + bx - ff = 0$; i valori della x in queste due ultime equazioni sono determinati, comecchè fingonsi uguali a quelli dell' equazione proposta, che sono determinati, benchè ignoti, e perciò i valori della y pure lo saranno. Sono poi questi uguali, essendo l' istesso y in amendue, siccome è la stessa x. Ciò non ostante per servirsi dell' intersecazione delle curve, la x e l' y si fingono variabili, per lo chè queste due ultime equazioni esprimono due sezioni coniche, la prima una parabola, la seconda un' iperbola tra gli asintoti.

II. Premesse tali cognizioni si discorra in questa maniera. Egli è certo, che fra le infinite ascisse della parabola vi sieno ancora i valori della nostra x, e che lo stesso avvenga nell' iperbola; è certo eziandio, che a questi valori corrispondano in amendue le curve l' y, o sia le ordinate uguali. Adunque se le linee in cui si prendono le x in amendue le curve si facciano combaciare in maniera, che il principio della x sia comune, e le x, ed y positive cadano dalla stessa parte, ancora le y uguali combacieranno perfettamente; onde le curve dove sono i valori determinati dell' x, e l' ordinate y uguali avranno punti comuni, o d' intersecazione, o di contatto. Adunque a rovescio se si avranno punti di intersecazione, o di contatto, questi apparterranno alle x che si cercano. Una tal maniera di determinare i valori della x, si addimanda *costruzione delle equa-*

quazioni colla intersecazione delle curve.

III. Se ne veda subito l' esempio nella costruzione della proposta equazione colla parabola, ed iperbola sopraccennata; prese le x in AP (*Fig.* 30. *T.* 4.) ed il principio loro in A, si delinei col parametro $=a$, e coll' angolo delle coordinate ad arbitrio, che per eleganza supponiamo retto, la parabola MAm, che sia toccata in A da AP; saranno AP le x, MP l' y dell' equazione $ay=xx$. Similmente fra gli asintoti IQ, FS, (*Fig.* 31. *T.* 4.) che contengano l' angolo ICS uguale all' angolo APM si descriva l' iperbola, le cui coordinate NQ, CQ contengano il quadrato ff. Si tagli $CQ=x$, sarà $QN=y+b$; finalmente secata $CD=b$, per D si conduca DE parallela all' asintoto CQ, saranno DE, EN le x, ed y dell' equazione $yx+bx=ff$.

IV. Acciocchè sieno congiunti a dovere questi due luoghi, le linee DE, AP, (*Fig.* 30. 31. 32. *T.* 4.) ed i punti D, A debbono combaciare, il che ricade allo stesso, se presa $DC=b$ nel diametro della parabola prodotto, si conduca per lo punto C la CQ parallela alla tangente, e fra gli asintoti IQ, FS si descriva l' iperbola come sopra; ciò fatto i punti d' intersecazione daranno le x ed y comuni ad amendue le curve; adunque se il punto di sezione è la N, NE sarà l' y, e DE la x, cioè la radice della proposta equazione del terzo grado.

V. Se a, e b sono positive la descrizione delle curve è appunto quella della fig. 32, da cui apparisce in un sol punto N segarsi le curve, e perciò una sola, e positiva essere la radice dell' equazione; lo stesso accade se sia $b=o$; ma se b fosse negativa, si dee prendere la CD dalla parte opposta come nella fig. 33 nel qual caso s' avrebbe sempre il punto di sezione N,

ma

ma oltre questo altri si potrebbero avere dalle sezioni dell' altro ramo dell' iperbola colla parabola; per determinare il quando, fa d'uopo determinare il caso del contatto, medio frà la sezione, e non sezione. *Dico* perciò toccarsi la parabola, e l' iperbola se sia il parametro della parabola $a = \frac{27f^4}{4b^3}$. Si divida $CD = b$ in R così che DR sia la terza parte, e si meni l' ordinata nR alla parabola, che sarà $= \sqrt{\frac{27f^4}{4b^3} \cdot \frac{b}{3}} = \frac{f^2}{CR}$, mà $\frac{f^2}{CR}$ è l' ordinata dell' iperbola (§. 3.) dunque nR è l' ordinata d' amendue le curve, ed il punto n comune; che sia poi il contatto eccolo. Da questo tirisi nu, che tocchi la parabola, sarà $Du = DR$ per la proprietà di questa curva (Cap. 1. l. 2.), dunque $Ru = RC$; mà questa è proprietà della retta, che tocca l' iperbola in n (Cap. 3. l. 2]; dunque tocca nu l' una e l' altra curva, il che non avviene, se non si tocchino le curve in n. Dunque se b sia negativa, ed $a = \frac{27f^4}{4b^3}$, l' equazione $x^3 + abx - af^2 = o$, oltre la radice positiva DE, ne avrà altre due negative ed uguali corrispondenti al contatto n, il quale punto equivale a due di sezione infinitamente vicini. Se sia $a > \frac{27f^4}{4b^3}$, la parabola, oltre il punto N, segherà il ramo superiore dell' iperbola in due punti, che daranno due radici negative disuguali; Se sia $a < \frac{27f^4}{4b^3}$, N sarà l' unico punto di sezione; onde l' equazione avrà una sola radice positiva.

VI.

VI. Se sia a negativa, allora deesi descrivere la parabola dalla parte opposta cioè verso F, perchè il parametro è negativo; onde posta b negativa, o uguale a zero, uno sarà il punto di sezione, che darà una radice negativa; se poi b è positiva, si determinerà come sopra quando sia uno, e quando tre i punti di sezione. Dal che ricavasi, prima che l'equazione di terzo grado abbia sempre almeno una radice reale; secondo che delle reali o n' abbia una, ovvero tre.

VII. Passo a costruire l'equazioni del quarto grado. Sia $x^4 + fg x^2 + f^2 b x - f^3 c = 0$, in cui le quantità f, g, b, c possono essere positive, e negative, anzi f quantità arbitraria; a questa forma tutte l' equazioni del quarto grado possono ridursi senza alterazione sustanziale (Cap. 7.). Si faccia $xx = fy$, onde $x^4 = f^2 y^2$, e sostituendo nascerà $y^2 + \frac{g}{f} x^2 + b x - fc = 0$, da cui sottratta $x^2 - fy = 0$ moltiplicata per m, e posta $\frac{g}{f} = n$ s' otterrà $y^2 \begin{smallmatrix} + n \\ - m \end{smallmatrix} x^2 + b x + m f y - fc = 0$ in cui vi sono due quantità arbitrarie m, n, questa però dipende dalla arbitraria f. Secondo adunque il valore che si assegnerà a queste arbitrarie, nasceranno differenti luoghi del secondo grado, due de' quali ad arbitrio scelti, e come deesi congiunti ne daranno le radici della equazion proposta.

VIII. A maggior chiarezza l' ultima equazione dispongasi così $yy + mfy + \frac{m^2 f^2}{4} = \overline{m - n} . x^2 - b x + fc + \frac{m^2 f^2}{4}$, e posta $y + \frac{mf}{2} = z$, sarà $z^2 = \overline{m - n} . x^2$

$- bx + fc + \frac{m^2 f^2}{4}$. Se sia $m - n = o$, facilmente si vede appartenere l' equazione alla parabola. Negli altri casi mettasi $m - n = \pm r$ per avere

$\left(zz - fc - \frac{m^2 f^2}{4}\right) : \pm r = xx - \frac{bx}{\pm r}$, e posto $x - \frac{b}{\pm 2r} = u$, e $- fc - \frac{f^2 m^2}{4} \pm \frac{b^2}{4r} = \pm a^2$, s' otterrà $\frac{z^2 \pm a^2}{\pm r} = u^2$. La combinazione dei segni dà quattro diverse equazioni $\frac{z^2 + a^2}{r} = u^2$, $\frac{z^2 - a^2}{r} = u^2$, $\frac{z^2 - a^2}{-r} = u^2$, $\frac{z^2 + a^2}{-r} = u^2$; la prima è all' iperbola colle u nel primo diametro, la seconda è alla stessa colle u nel secondo, la terza è all' elisse, la quarta all' elisse, mà immaginaria, e perciò inutile. In tutte il quadrato del diametro dell' u stà al quadrato del diametro, a cui sono parallele le z come $1 : r$; se sia $r = 1$ l' iperbola è equilatera, e l' elisse passa in circolo, purchè sia retto l' angolo delle coordinate. Raccogliamo adunque che l' equazione è all' iperbola, se $r = m - n$ sia positiva, ossia $n - m$ negativa; all' elisse se $m - n$ negativa, ossia $n - m$ positiva; alla parabola se zero, come appunto s' è veduto nel Cap. 1. L. 2.

IX. S' abbia ora in animo di costruire la proposta equazione $x^4 + fgx^2 + f^2 bx - f^3 c = o$ colla parabola, e col cerchio. Mettiamoci avanti gli occhi l' equazione generale indeterminata in cui si contengono tutte le sezioni coniche $y^2 \begin{matrix} + n \\ - m \end{matrix} x^2 + bx + mfy - fc = o$.

Ac-

Acciocchè nasca la parabola convien supporre $m = n = \frac{g}{f}$, la cui equazione sarà $y^2 + bx + gy - fc = o$. Acciocchè nasca il circolo convien che sia $m = n - 1 = \frac{g}{f} - 1$, la cui equazione è $y^2 + x^2 + bx + gy - fy - fc = o$.

X. L' equazione alla parabola così si disponga, $y^2 + gy + \frac{gg}{4} = -bx + fc + \frac{gg}{4}$, e posto $y + \frac{g}{2} = z$, ed $fc + \frac{gg}{4} = bd$, nasce $zz = bd - bx = bu$, fatta $d - x = u$. Vertice A (F. 34. T. 4.) asse AD, parametro b descrivasi la parabola AM, sarà $AP = u$, $PM = z$; si tagli $AD = d$, sarà $DP = d - u = x$; dal punto D alla DA sia normale $DB = \frac{g}{2}$, e per B si conduca l' indefinità BR parallela alla DA, sarà $RM = z - \frac{g}{2} = y$. Adunque BR, RM sono le coordinate x, y della nostra equazione, ed il punto B è il principio delle ascisse. L' equazione al cerchio così disposta $yy + \overline{g-f}.y + \frac{\overline{g-f}^2}{4} + xx + bx + \frac{bb}{4} = \frac{\overline{g-f}^2}{4} + \frac{bb}{4} + fc$, e fatto $y + \frac{g-f}{2} = z$, $x + \frac{b}{2} = u$ nasce $zz + uu = \frac{\overline{g-f}^2}{4} + \frac{bb}{4} + fc$. Adunque (F. 35. T. 4

centro C raggio $CA=(\frac{\overline{g-f}^{2}}{4}+\frac{bb}{4}+fc)^{\frac{1}{2}}$ si descriva il circolo ANB, in cui sarà $CQ=u$, $QN=z$, si seghi $CH=\frac{b}{2}$, sarà $HQ=u-\frac{b}{2}=x$; al raggio CA sia normale $HK=\frac{g-f}{2}$, e parallela KL, sarà $LN=z+\frac{f-g}{2}=y$: dunque KL, LN sono x, y della nostra equazione, col principio dell' ascisse in K. Per evitare il raggio immaginario bisogna prendere l' arbitraria f cosicchè la quantità sotto il segno sia positiva. Collocato il punto K in B, e la KL sopra BR, queste due curve saranno ottimamente congiunte; adunque dalle sezioni loro condotte le ordinate MQ, (F.36. T. 4.) si determinano altrettante ascisse, che sono le radici della proposta equazione del quarto grado. Per picciola riflessione che si faccia, ci accorgeremo, che il cerchio o sega la parabola in quattro punti, o in due, o in nessuno; dunque le radici reali nel caso o sono quattro, o due, o nessune, (Il contatto vale per due).

XI. Se si voglia costruire l' equazione del quarto grado con due ellissi, nell' equazione indeterminata $yy+nx^2+bx+mfy-fc=0$, fatta $n=4-m$, o sia $f=\frac{1}{4}g$, si ponga prima $m=1$, acciocchè risulti l' equazione $yy+3xx+bx+fy-fc=0$, dipoi $m=2$, acciocchè risulti l' altra $yy+2xx+bx+2fy-fc=0$, amendue, come è chiaro, all' ellisse §. 8. Se si vogliano due iperbole, fatta $n=1$, ossia $f=g$, prima sia $m=2$, onde s' abbia $yy-xx+bx+2fy-fc=0$, dipoi sia $m=3$, onde s' abbia $yy-2xx+bx$

$+bx+3fy-fc=0$, equazioni a due iperbole §.8. Abbiamo supposto per eleganza l' equazioni del terzo, e quarto grado senza secondo termine, il che si può sempre ottenere salva l' universalità, siccome nel capo precedente s' è veduto; ancor per altro tal termine esistesse, il presente metodo non ci abbandona; come ciascun da per se stesso può farne la prova.

CAPO IX.

Alcune avvertenze per la costruzione dell' Equazioni colla intersecazione delle Curve.

I. Il Signor Rol à promosso con gran ingegno alcune difficoltà contro l' intersecazione delle curve, per cui egli crede incerto il metodo del costruire con questa l' equazioni determinate. Per comprendere ciò sia l' equazione determinata $xx-x.\overline{a+b}+ab$, la quale come è chiaro à le due radici reali $x=a$, $x=b$. Si faccia $xx=aa-yy$ equazione al circolo del raggio a, e sostituendo questo valore di xx nell' equazione, sarà $aa-yy-x.\overline{a+b}+ab=0$, ovvero $\overline{a+b}.\overline{a-x}=yy$ equazione alla parabola del parametro $a+b$. Con questa, e col circolo del raggio $=a$ si costruisca la proposta equazione nella seguente maniera. Col raggio $AC=a$ si delinei il circolo DAD (Fig. 37. T. 5.) e col parametro $a+b$, al vertice A, ed asse AC si delinei la parabola DAD; Il metodo di costruire l' equazioni con l' intersecazione delle curve esige, che tante sieno l' intersecazioni di queste due curve, quante sono le radici reali della equazione proposta, cioè due. Dove tratteremo dei

Circoli osculatori delle curve dimostreremo, che se il raggio CA sia uguale alla metà del parametro, cioè se sia $a = \frac{a+b}{2}$, o che è lo stesso $a = b$, la parabola DAD sarà combaciata dal circolo DAD nel vertice A senza essere in alcuno altro punto segata, la quale dottrina quì supposta per certa, come in realtà lo è, ci scopre che se sarà $a > b$, il circolo del raggio a essendo maggiore dell' osculatore segherà la parabola in due punti D, D, i quali determineranno la $CE = b$, l' altra radice $a = CA$ viene determinata dal punto del contatto A. Quì avvertasi che il punto del contatto equivale a due punti di sezione, e che perciò quattro sono i punti di sezione nel caso presente; il che indica, che CA, e CE, si deono prendere due volte; e che la costruzione serve all' equazione di quarto grado $(xx - x . \overline{a+b} + ab)^2$, che à due radici uguali a due altre, le quali sono eziandio le radici della proposta equazione; se poi sarà $a < b$ il circolo del raggio a, essendo minore dell' osculatore, non segherà la parabola, onde questa caderà tutta fuori del circolo, eccettuatone il punto A, il quale determina CA uguale alla radice a; la radice b dunque non viene determinata; e perciò le intersecazioni delle curve non danno alle volte tutte le radici reali delle equazioni.

II. La difficoltà cresce se si introduca un circolo il raggio di cui sia minore ancora di a, come sarebbe $xx = \frac{aa}{4} - yy$, imperciocchè fatta la sostituzione nella equazione proposta, nasce la parabola dello stesso parametro $\overline{a+b} . \left(\frac{aa + 4ab}{4a + 4b} - x\right) = yy$. Volendo do fare la costruzione, dall' asse della parabola FBF si tagli $CB = \frac{aa + 4ab}{4a + 4b}$, e col raggio $CA = \frac{a}{2}$ si descriva il circolo DAD (Fig. 38. T. 5.). Essendo CB minore di $\frac{a+b}{2}$, il circolo descritto col raggio CB sarà minore dell' osculatore, e perciò non segherà la parabola, tanto meno dunque la parabola sarà tagliata dal circolo del raggio CA nella supposizione che sia $CB > CA$, cioè $b > \frac{a}{2}$; adunque chi si affidasse a questa costruzione conchiuderebbe falsamente, che la proposta equazione non abbia radici reali.

III. Essendo il metodo della intersecazione cotanto famoso nell'Algebra per la sua universalità ed utilità grande ci dispiaceva di doverlo abbandonare come incerto e paralogistico, onde ci siamo ingegnati di scoprire la maniera di adoperarlo con sicurezza, il che finalmente abbiamo ottenuto mettendo in opera alcune avvertenze. Egli è così indubitata, che se due curve riferite alla stessa linea delle ascisse, e che queste incomincino per amendue dallo stesso punto, abbiano le ordinate, che corrispondano alla stessa ascissa uguali e reali, è cosa indubitata dico che le Curve si intersechino dove le ordinate sono uguali e reali. Adunque quando saremo sicuri di queste due condizioni, cioè dell' uguaglianza e realtà delle ordinate corrispondenti alla stessa ascissa saremo altresì certi che le intersecazioni delle curve daranno le radici reali delle equazioni. Saremo poi dubbiosi, se le ordinate uguali possano essere immaginarie. Esaminiamo ora se nella costruzione dei luoghi di primo grado vi abbia alcun periricolo. Sieno questi $Ax+By+C=o$, $ax+bx+c=o$, quì si osservi, che dato qualunque valore reale all' x, l' y in amendue le equazioni dee essere reale; dunque è impossibile, che a una x reale corrispondano ordinate uguali, immaginarie, e perciò se vi sono ordinate uguali deono queste essere reali, e si dee avere la intersecazione: dunque il metodo è sicuro. Si debbano costruire due luoghi uno di primo, e l' altro di secondo grado cioè I $Q+Ay=o$, II $p+qy+ay^2=o$. Q, q sieno date per costanti, e per la x a dimensione lineare, p può contenere ancora la seconda dimensione di x. Nella prima equazione posto qualunque valore della x reale l' y sarà sempre reale: Dunque non può accadere congiungendo questi due luoghi, che ad una x reale corrispondano due ordinate uguali ed immaginarie, e perciò se avremo l' uguaglianza delle ordinate, avremo ancora la realtà ed in conseguenza l' intersecazione. Questi due luoghi adunque si ponno costruire senza timore di errare.

IV. Lo stesso però non possiamo asserire dei due luoghi $P+ay^2=o$, $p+ay^2=o$, in cui P, p possono contenere la x a prima, e seconda dimensione, perchè può in amendue avvenire, che posta la x reale gl' y sieno immaginarii; dovendosi estrarre la radice quadrata per determinare il valore dell' y; onde è possibile il caso in cui alla stessa x reale corrispondano due ordinate immaginarie. Adunque la congiunzione di questi due luoghi è soggetta a paralogismo.

V. Sieno due luoghi I $P+Qy+Ay^2=o$, II $p+qy+ay^2=o$, dalla prima moltiplicata per a tolgo la seconda moltiplicata per A, ed ottengo III $\overline{aP-Ap+aQ-Aq}.y=o$. Fingiamo ora, che posto lo stesso valore della x reale nelle due prime equazioni; si ottengano due y uguali ed immaginarie, ne verrebbe

dà

dà ciò, che ancora nella terza l' y sarebbe immaginaria; il che è impossibile, perchè si trova $y = \frac{Ap - aP}{aQ - Aq}$, che è quantità reale. Possiamo per tanto adoperare francamente questi due luoghi, che non vi sarà timore alcuno di non ottenere colla intersecazione loro le radici reali, qualora vi sieno nell' equazione, che si costruisce.

VI. Acciocchè per altro quest' ultima conseguenza sia legittima, bisogna che la terza equazione non sia divisibile per un fattore R, che contenga la x; imperciocchè la nostra equazione allora prenderebbe la forma seguente $RM + RNy = o$, supposto il quoto $\frac{aP - Ap}{R} = M$, ed $\frac{Aq - aQ}{R} = N$, il che, come è chiaro, non inferisce necessariamente che sia $y = -\frac{M}{N}$, potendosi verificare la predetta equazione dall' essere sol tanto $R = o$; senza che si verifichi $y = -\frac{M}{N}$.

VII. Dalle cose fin quì dette apparisce, che si possono usare con tutta sicurezza due luoghi di secondo grado per la costruzione delle equazioni determinate di terzo, e quarto, quando saranno tali, che colla somma, e sottrazione delle equazioni loro, o in altra maniera si possa ottenere una terza equazione dalle due prime dipendente, in cui l' y sia a lineare dimenzione, ne siavi alcun fattore, che contenga la x; le quali avvertenze si sono da noi avute nel capitolo precedente, come se ne potrà render certo, chi ne voglia fare l' esperimento. Questi principii somministrano ancora i lumi opportuni per regolarci quando coſtruiremo l' equazioni determinate ſuperiori al quarto grado, con linee ſuperiori alle ſezioni Coniche.

CAPO X.

Della Riſoluzione analitica dell' Equazioni del terzo, e quarto grado.

I. Oltre il metodo di coſtruire l' equazioni determinate di terzo grado colle ſezioni coniche, introdotto da Renato Sluſio Canonico di Leide, e promoſſo da Renato Carteſio, havvi un altro che inſegna riſolvere tali equazioni analiticamente, cioè ritrovare il valore dell' x dato per ſole quantità cognite. Il Carteſio attribuiſce ciò al Cardano; ma queſti lo attribuiſce a Scipion Ferreo Bologneſe. Ne' problemi aritmetici mai non potendo far uſo del primo metodo conviene ſempre ricorrere al ſecondo.

II. Biſogna in primo luogo notare, che alle volte l' equazioni del terzo grado, non ſono in realtà tali, eſſendo abbaſſabili, e riducibili a gradi inferiori con certi metodi, i quali quì da noi ſi tralaſciano, riſerbandoci di parlarne nella terza parte di queſto tomo, dove tratteremo delle equazioni di ogni grado: di queſte quì non diſcorriamo è ſupponiamo l' equazioni del terzo grado in niuna maniera abbaſſarſi a gradi inferiori. Convien riflettere ancora a ciò che abbiamo indicato, dove ſi è parlato della riſoluzione delle equazioni di ſecondo grado, cioè che quantità reali poſſono naſcere da' prodotti di quantità immaginarie, e per conſeguenza che fattori di quantità reali alle volte ſono immaginarii. Tali ſono appunto due delle radici terze dell' unità. Per dimoſtrar ciò ſia $x^3 - 1 = 0$; una radice di queſta equazione ſarà 1, perchè poſto 1 in vece di x l' equazione diventa zero; ed in in fatti dividendo l' equazione $x^3 - 1 = 0$, per $x - 1 = 0$ ne risulta $x^2 + x + 1 = 0$, dunque uno dei divisori semplici di questa equazione sarà $x - 1 = 0$, e perciò una radice sarà l' unità: per trovare l' altre radici, si dee risolvere l' equazione di secondo grado $x^2 + x + 1 = 0$; che ci dà $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, ed $x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ ambe immaginarie; dunque le radici cubiche dell' unità sono 1, $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, una reale, e due immaginarie. Le radici quarte dell' unità ancora due sono reali, e due immaginarie, perchè l' equazione $x^4 - 1 = 0$ è divisibile per $x - 1 = 0$, ed $x + 1 = 0$, riducendosi con tali divisioni ad $x^2 + 1 = 0$, da cui si ricavano le altre due radici $x = + \sqrt{-1}$, ed $x = - \sqrt{-1}$; sicchè le quattro radici quadrato quadrate dell' unità sono $+1$, -1, $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$, due reali, e due immaginarie. Ciò premesso sia l' equazione del terzo grado I. $x^3 - 3ax - b = 0$, in cui a, e b possono essere positive e negative, ed ancor zero. A questa forma si possono ridurre tutte le equazioni del terzo grado, togliendole il secondo termine, se l' abbiano, col metodo insegnato nel Cap. 7. §. 2. e liberando il termine della massima potestà dell' incognita dal coefficiente se siavi. Fingo la $x = m + n$, quantità che determino nella seguente maniera. S' alzi al cubo $x = m + n$ e sarà $x^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 = m^3 + 3mn \cdot \overline{n + m} + n^3$; in vece di $m + n$ sostituita la x, e trasportati tutti i termini da una parte, sarà II. $x^3 - 3mnx - m^3 - n^3 = 0$, la quale è divisibile per $x - m - n = 0$; dunque $x = m + n$ è una delle sue radici. Si paragoni ora ciascun termine della equazione proposta colla seconda, e si troverà $mn=a$, $m^3+n^3=b$, dunque $m^3+\frac{a^3}{m^3}=b$, e $m^6-bm^3=-a^3$, e finalmente $m=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}}$; nella stessa guisa si trova $n=\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}}$.

Nei valori di m, ed n si prendono i radicali secondi col segno contrario, perchè altrimenti tali valori riuscirebbero uguali, quindi sarebbe $mn=m^2=a$, ed $m^3+n^3=2m^3=b$ da cui ricavasi $m^6=a^3$, $m^6=\frac{bb}{4}$, e perciò $a^3=\frac{bb}{4}$, onde il metodo presente non sarebbe applicabile, che alle sole equazioni del terzo grado in cui si verifica tal condizione: questo inconveniente si scansa operando come si è fatto.

III. Ciascuna radice terza à tre valori; per esprimerli, altro non si dee fare se non se moltiplicare il valore ritrovato per le tre radici terze dell' unità, cioè 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; avremo adunque

Valori dell' m

$$\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}}\ .\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}}\ .\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

Va-

Valori dell' n

$$\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

IV. Nove sono le combinazioni possibili di questi valori; per riggettare le sei inutili, si deono scegliere le tre, in cui i valori di m, ed n moltiplicati insieme danno $+a$: con questo criterio determineremo le tre seguenti radici dell' equazion proposta

$$x=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}}+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}}$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$
$$+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$
$$+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

V. Affinchè si intenda ciò chiaramente si dee avvertire, che le nove radici, che risultano dalle nove combinazioni dei valori di m ed n, appartengono ad un' equazione di nono grado, la quale essendo risolubibile in tre di quelle del terzo, fra le quali havvi la nostra, si fà che tre delle predette nove combinazioni servano per le radici della nostra. Delle nove combinazioni si sono scelte le tre, in cui moltiplicando il valore di m per il valore di n si ottiene il prodotto $= a$, perchè nell' equazione $x^3 - 3ax - b = 0$ il termine $-3ax$ corrisponde al termine $-3mnx$ della formola generale; e perciò mn dee corrispondere ad a.

VI. Altra osservazione interessante dee farsi intorno ai tre valori ritrovati della x; cioè che questi tre valori sono tutti reali, quando sia $a^3 = \frac{bb}{4}$, ovvero $a^3 > \frac{bb}{4}$, cioè quando i valori m, n sono immaginarii: e che i due secondi sono immaginarj, quando sia $a^3 > \frac{bb}{4}$, cioè quando i valori m, n sono reali, il che a prima vista sembra un paradosso. Varie dimostrazioni di ciò hanno date gli Analisti, noi ci conteteremo della seguente. Si ponga la quantità $\frac{b}{2} = p$, e $\frac{bb}{4} - a^3 = q$. Sarà $m = \sqrt[3]{p + \sqrt{q}}$ buttata in serie $= p^{\frac{1}{3}} + \sqrt{q} - q + q\sqrt{q} - q^2$ &c., ed $n = \sqrt[3]{p - \sqrt{q}} = p^{\frac{1}{3}} - \sqrt{q} - q\ \sqrt{q} - q^2$ &c. ciò si ricava da quello, che abbiamo insegnato nel lib. I. cap. 3. §. 33.; lascio i divisori dei termini della serie, perchè essendo gli stessi nei termini omologi di ambe le serie non turbano la dimostrazione; sommati i valori di m, ed n buttati in serie si avrà per la somma $2p^{\frac{1}{3}} - 2q - 2q^2$ &c., e-

li-

lidendosi i termini $+\sqrt{q}-\sqrt{q}$, $+q\sqrt{q}-q\sqrt{q}$; onde il primo valore di $x=m+n$, o la quantità q sia positiva, o negativa sarà sempre reale. Il secondo valore di x è $=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.m\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.n$.

Moltiplicate ambe le serie per $-\frac{1}{2}$, e sommate, i soliti termini in cui sono le quantità radicali si elideranno; moltiplicata poi la prima serie $=m$ per $+\frac{\sqrt{-3}}{2}$, e la seconda $=n$ per $\frac{-\sqrt{-3}}{2}$; i termini in cui non si ritrova la quantità radicale $\sqrt{q}$ si elideranno, e rimarranno quelli in cui essa si ritrova, i quali saranno immaginarii se $\sqrt{q}$ sia quantità reale; saranno poi reali, se $\sqrt{q}$ sia quantità immaginaria, perchè moltiplicando $\sqrt{-3}$ per $\sqrt{-q}$ ne risulta $-\sqrt{3q}$ quantità reale, siccome abbiamo insegnato nel Lib. 1. Cap. 3. §. 23. dunque il secondo valore di $x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.m\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.n$ sarà immaginario, quando $\sqrt{q}$ sia quantità reale, e sarà reale, quando $\sqrt{q}$ sia quantità immaginaria; lo stesso metodo si tenga per lo terzo valore della $x=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.m\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.n$. Gli Algebristi mai non avendo saputo liberare le radici dell' equazioni del terzo grado dall' immaginarii hanno à ciò dato il nome di *Caso irreducibile*.

VII.

VII. Risolute l' equazioni del terzo grado ci abbiamo aperta la strada per la risoluzione di quelle del quarto, la quale Lodovico Ferrari similmente Bolognese fu il primo a conoscere. Assumo la formola generale mancante del secondo termine, a cui tutte ridur si possono, cioè $x^4 + a b x^2 + a^2 c x + a^3 d = o$; le specie b, c, d possono essere e positive, e negative, ed anche $= o$; la a, che supplisce l' omogeneità de' termini vuol sempre come positiva riguardarsi. Dispongo la formola nella seguente guisa $x^4 + a . \overline{b+m} .$

$$x^2 + \frac{a^2 \, \overline{b+m}^2}{4} = a m x^2 - a^2 c x - a^3 d + \frac{a^2 . \overline{b+m}^2}{4}$$

$$= a m . x^2 + \frac{a c}{m} x - \frac{a^2 d}{m} + \frac{a . \overline{b+m}^2}{4 m}.$$ La prima parte dell' equazione è un quadrato perfetto di cui si può estrarre la radice. Affinchè nella seconda parte la quantità, che la $a m$ moltiplica, sia un quadrato, fà d' uopo, che il quadrato di $\frac{a c}{2 m}$ eguagli l' ultimo termine. Determiniamo il valore di m per modo, che tal condizione si verifichi. Pertanto dovrà essere $\frac{a^2 c^2}{4 m^2} = - \frac{a^2 d}{m} + \frac{a . \overline{b+m}^2}{4 m}$, e moltiplicando per $4 m$, e dividendo per a, $\frac{a c^2}{m} = - 4 a d + \overline{b+m}^2$, ovvero

$$m^3 + 2 b m^2 + \begin{matrix} b b m \\ - 4 a d m \end{matrix} - a c^2 = o,$$ che è una equazione del terzo grado, che ha per lo meno una radice reale. Supponendo determinato il valore della m, s' es-

trag-

traggono le radici nell'equazione del quarto grado già preparata. $x^2 + \frac{a.\overline{b+m}}{2} = \pm \sqrt{am}.\,x + \frac{ac}{2m}$: dunque

$$x^2 \mp x\sqrt{am} \mp \frac{ac\sqrt{a}}{2\sqrt{m}} + \frac{a.\overline{b+m}}{2} = 0.$$

La qual formola involvente l' ambiguità de' segni abbraccia i due trinomj del secondo grado, ne' quali la proposta del quarto risolvesi.

VIII. Questo metodo mi mette innanzi una facile, ed elegante maniera di dimostrare, ch' ogni formola del quarto grado è risolubile in due trinomj reali, comunque le sue quattro radici fossero immaginarie. A questo fine io rifletto, che se la quantità m è positiva, amendue i trinomj trovati sono reali; ma se m fosse negativa, essi involvono le quantità immaginarie. I valori di m, che si ricavano dalla risoluzione d' una equazione cubica sono tre; ad avere i due trinomj reali basta, ch' uno di questi tre valori sia reale, e positivo. Io dico, che lo sarà necessariamente; per provarlo ritorniamo all' equazione di terzo grado, da cui dipende il valore di m. Questa equazione ordinata, e posti tutti i termini da una parte, ha l' ultimo termine sempre affetto del segno $-$, perchè a supponesi positiva, e cc è positiva quatunque c fosse negativa: ma tutte l' equazioni cubiche, in cui l' ultimo termine sia negativo, hanno una radice reale positiva: dunque una almeno delle radici della nostra equazione è positiva, e però avremo in ogni caso un valore di m positivo. Che poi un' equazione cubica in cui sia l' ultimo termine negativo abbia una radice rea-

reale positiva facilmente si comprenderà, se prese tre radici negative da queste si formi una equazione di terzo grado; perchè in questa l' ultimo termine verrà necessariamente positivo.

IX. In un caso solo sembra, che la formola de' nostri trinomj venga a mancare, cioè quando $m = 0$, che accade, quando $c = 0$; in tale caso nell' ultimo termine vien a risultare la frazione $\frac{0}{0}$, di cui non sappiamo il valore. Ma in questo caso la formola si risolve col metodo delle quadratiche. Tuttavolta anche il presente metodo usato con artificio è utile, potendosi determinare il valore della frazione $\frac{c}{\sqrt{m}}$, il quale è finito. Si ripigli la formola del terzo grado $m^3 + 2bm^2 + \genfrac{}{}{0pt}{}{bbm}{-4adm} - ac^2 = 0$. Egli è manifesto, che essendo $m = 0$, i due primi termini rispetto al terzo sono nulli: dunque resterà $\overline{bb - 4ad}\,.\,m = ac^2$: dunque $\frac{\sqrt{bb-4ad}}{\sqrt{a}} = \frac{c}{\sqrt{m}}$, il qual valore posto nella formola darà $x^2 \pm \frac{a\sqrt{bb-4ad}}{2} + \frac{ab}{2} = 0$. Gli altri due valori di m, in supposizione di $c = 0$ s' ottengono dalla risoluzione della formola $mm + 2bm + bb - 4ad = 0$, e sono $m = -b + \sqrt{4ad}$, $m = -b - \sqrt{4ad}$, i quali posti ne trinomj danno le due coppie $x^2 \mp x\sqrt{-ab + a\sqrt{4ad} + a\sqrt{ad}}$, $xx \mp x\sqrt{-ab - a\sqrt{4ad} - a\sqrt{ad}}$. Se

d è

d è negativa, ovvero essendo positiva se è $< \frac{bb}{4a}$, i binomj $x^2 \pm a(bb-4ad)^{\frac{1}{2}} : 2 + ab : 2$ sono reali; se poi sia $d > bb : 4a$, allora sono reali i trinomi della prima coppia; dunque una equazione del quarto grado è sempre divisibile in due del secondo reali.

X. Poichè s' è dimostrato, che tutte le formole del quarto grado risolvere si possono in due trinomj reali del secondo grado, egli è evidente, che tutte le radici immaginarie del quarto grado si possono esprimere per l' immaginarie del secondo. Imperocchè le radici immaginarie del quarto grado si facciano $= x$; ed eguagliate queste semplici eqnazioni al zero, e moltiplicate insieme risulterà una formola del quarto grado, senza radicali, che si può risolvere in due trinomj reali, i quali risoluti daranno le radici di questa forma $p + q\sqrt{-1}$ essendo p, q due quantità reali.

XI. Do compimento a questo Capitolo col indicare qualche metodo per estrarre le radici quadrate, e cube dalle quantità irrazionali, che potrà servire di lume ancora per le radici superiori. Debbasi estrarre dal binomio $3+\sqrt{8}$ la radice quadrata. Fingasi questa $= x + y$ e figurisi y essere un radicale; dunque dovrà essere $x^2+2xy+y^2 = 3+\sqrt{8}$; pongasi $x^2+y^2 = 3$, $2xy = \sqrt{8}$, sarà $x^4+2x^2y^2+y^4=9$, e $4x^2y^2 = 8$, e sottratta questa equazione dall' antecedente avremo $x^4-2x^2y^2+y^4=1$, ed estraendo la radice quadrata sarà $-x^2+y^2=1$, ed $y^2=x^2+1$, ma è $x^2+y^2=3$, cioè $y^2=3-x^2$; dunque $x^2+1=3-x^2$, cioè $x=1$, ed $y^2=x^2+1=2$, ed $y=\sqrt{2}$; Dunque la radice quadrata di $3+\sqrt{8}$ è $1+\sqrt{2}$.

XII. Si debba estrarre la radice cuba da $20 +$

 $\sqrt{392}$

$\sqrt{392}$; sia questa $= x + y$, ed y figurisi un radicale, sarà $x^3 + 3x^2y + 3y^2x + y^3 = 20 + \sqrt{392}$; pongasi $x^3 + 3xy^2 = 20$, $y^3 + 3yx^2 = \sqrt{392}$, elevando a quadrato $x^6 + 6x^4y^2 + 9x^2y^4 = 400$, $y^6 + 6y^4x^2 + 9y^2x^4 = 392$, e sottratta questa dall' antecedente sarà $x^6 - 3y^2x^4 + 3x^2y^4 - y^6 = 8$, ed estratta la radice cubica sarà $x^2 - y^2 = 2$, ed $x^2 - 2 = y^2$; ma abbiamo $x^3 + 3xy^2 = 20$, dunque sarà $x^3 + 3x^3 - 6x = 20$, cioè $x^3 - \frac{3x}{2} = 5$, se questa equazione del terzo grado à radici razionali, troveremo la x quantità razionale, tale nel caso presente è il 2; dunque sarà $x = 2$, ed $x^2 = 4$, che sostituito nell' equazione $x^2 - 2 = y^2$, sarà $y^2 = 2$, ed $y = \sqrt{2}$. Pertanto sarà $2 + \sqrt{2} = 20 + \sqrt{392}$, come in realtà fatto lo sperimento ritrovasi. Nel terzo libro Capo 4. insegneremo la maniera di scoprire i fattori razionali di qualunque equazione.

XIII. Altro metodo per ottenere lo stesso fine è il seguente. Sia da estrarsi la radice seconda dal radicale $3 + \sqrt{8}$; si faccia $x = \sqrt{3 + \sqrt{8}}$, e si prendano tutti i valori di x, e comecchè ogni radicale quadratico à due valori positivo uno, negativo l' altro; quindi tutti i valori di x saranno questi: cioè $x = \sqrt{3 + \sqrt{8}}$, $x = \sqrt{3 - \sqrt{8}}$, $x = -\sqrt{3 - \sqrt{8}}$, $x = -\sqrt{3 + \sqrt{8}}$ si eguaglino queste equazioni al zero, e si moltiplichino insieme, e nascerà l' equazione $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$; Si risolva questa in due fattori reali di secondo grado; il che si può ottenere così: sia un fattore reale di secondo grado $x^2 + mx + n$, e si divida per questo l' equa-

equazione x^4 &c. avremo per quoto $x^2 - mx - 6 - n + m^2$, e per residuo, $6mx + 2nmx - m^3x + 6n + n^2 - nm^2 + 1$. Se questo residuo fosse zero, allora l' equazione del quarto sarebbe stata divisa in due fattori reali di secondo grado; per fare adunque che questo residuo sia zero si ponga $6mx + 2nmx - m^3x = 0$, e $6n + n^2 - nm^2 + 1 = 0$; avremo dalla prima di queste equazioni $6 + 2n - m^2 = 0$, e $6 + 2n = m^2$; e sostituito il valore di m^2 nella seconda, sarà $6n + n^2 - 6n - 2n^2 + 1 = 0$, cioè $n^2 = 1$, ed $n = 1$, e perciò $m^2 = 6 + 2n = 8$, onde $m = \sqrt{8}$. Adunque i due fattori di secondo grado $x^2 + mx + n$, $x^2 - mx - 6n + m^2$, si cangiano in $x^2 + x\sqrt{8} + 1$, $x^2 - x\sqrt{8} + 1$ nei quali è divisibile perfettamente l' equazione di quarto grado; si risolvano questi fattori onde sia $x = -\sqrt{2} \pm 1$, ed $x = \sqrt{2} \pm 1$, ed avremo i valori di x in radicali semplici soltanto, quando i proposti erano radicali di radicali.

XIV. Sia da estrarsi la radice cubica dal radicale $20 + \sqrt{392}$. Si faccia $x = \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}}$; si prendano tutti i valori di questo radicale che sono sei, perchè tre ne à il radicale cubico, a ciascuno dei quali appartengono due valori del radicale quadratico; onde in tutto sono sei; si eguaglino questi valori al zero, indi si faccia il loro prodotto, ed avremo $x^6 - 40x^3 + 8 = 0$: uno dei fattori reali di secondo grado di questa equazione è $x^2 - 4x + 2$, il quale risoluto da $x = 2 \pm \sqrt{2}$ come sopra num. 12.

CAPO XI.

Le formole che sono state ritrovate nella risoluzione dell' Equazioni del terzo grado si costruiscono coi seni e cosseni circolari ed iperbolici.

I. Siccome il Signor Eulero introdusse nell' Algebra i Seni, e Cosseni circolari, così il Conte Vicenzo Riccati introdusse gl' Iperbolici. Ecco in questo Capo un saggio dell' uso loro. Sia C (*Fig.* 39. *T.* 5.) il centro dell' Iperbola equilatera $AEFN$, CA sia il semiasse, CQ uno degli asintoti, che faccia con CA un angolo semiretto. Dal vertice A si cali la perpendicolare AK sopra l' asintoto, e dopo CK, e qualunque CG si formi una serie di rette CK, CG, CH, CP &c. che sieno in proporzione geometrica continua, e che chiameremo secondo l' uso comune, *numeri*: Dai punti G, H, P si alzino all' asintoto le normali GE, HF, PN; è proprietà dell' iperbola, da dimostrarsi a suo luogo, che gli spazi $AKEG$, $EGFH$, $FHNP$ &c. sieno uguali, e perciò gli spazj $AKEG$, $AKFH$, $AKNP$ &c. sono in continua proporzione aritmetica; e chiamato $AKEG = \mu$, alla retta CK primo termine della serie geometrica corrisponde lo spazio $= o$, al secondo CG corrisponde lo spazio μ, al terzo CH lo spazio 2μ, al quarto CP lo spazio $3u$ &c., ed universalmente al termine m corrisponde lo spazio $m-1 . \mu$. Se trà CK, CG si trovi una media proporzionale lo spazio μ si dividerà in due parti uguali per la stessa proprietà da dimostrarsi; se due medie, si dividerà in tre parti uguali; se tre, in quattro; e generalmente se il numero delle proporzionali continue tra CK, CG sarà m, il numemero delle parti uguali in cui si dividerà μ sarà $m+1$; dunque a rovescio per dividere lo spazio μ. in parti uguali del numero m, conviene ritrovare fra CK, CG il numero $m-1$ di medie proporzionali, il che universalmente parlando quantunque non si possa fare geometricamente, con varii strumenti meccanici per altro si ottiene. Questi spazii, che sono in serie aritmetica in riguardo alle rette della serie geometrica che dicemmo *numeri*, si chiamano *logaritmi*. Corrispondendo a quattro termini della serie geometrica, che sieno in proporzionalità, quattro nella serie aritmetica, che pure sono in proporzionalità, come è chiaro dalla natura delle due serie, ne viene che la somma di due logaritmi sia uguale al logaritmo della quarta proporzionale dopo CK, ed i numeri de' due logaritmi dati: così essendo $CK : CG :: CH : CP$ geometricamente, sarà ancora $o : AKEG :: AKFH : AKNP$ aritmeticamente: adunque sarà ancora $AKNP = AKEG + AKFH$.

II. Il semiasse CA si chiama *seno tutto*, e si denomina r, la normale EB si chiama seno retto del logaritmo μ, la CB cosseno dello stesso, e si esprimono così $Sb\mu$, $Cb\mu$, il cosseno del logaritmo zero è $=r$, ed il seno è zero. Il seno EB si prolunghi fino in I ed in S, e dal punto S si cali la normale SR all' asintoto, sarà $BI = BC$, $BE = SB = BV$ per gli angoli semiretti; dunque $CV = EI$, da cui si deduce $CR = GE$, e perciò CG, CK, CR in proporzione continua, essendo CG, CK, GE in continua proporzione per la natura dell' Iperbola; dunque alla CR, numero minore di CK e terza proporzionale dopo CG, CK corrisponde il logaritmo $AKRS$ negativo $= -\mu$, essendo lo spazio $SRAK = AKEG$ per la già nominata proprietà della Iperbola. Il cosseno di cui

$-b$ è $CB = Cb\mu$, ed il seno è $SB = -Sb\mu$; adunque sarà $Sb-\mu = -Sb\mu$, e $Cb-\mu = Cb\mu$.

III. Si chiami il logaritmo $AKFH = \pi$, e sia $CD = Cb\pi$, $FD = Sb\pi$; sia inoltre il logaritmo $AKPN = \mu + \pi$; $CM = Cb\overline{\mu+\pi}$, $MN = Sb\overline{\mu+\pi}$; e prolungate DF, MN in L, Q è facile vedere, che EI, FL, NQ sono le differenze dei seni, e cosseni rispettivi; sarà dunque $EI = Cb\mu - Sb\mu$, $FL = Cb\pi - Sb\pi$, $NQ = Cb\,\overline{\mu+\pi} - Sb\,\overline{\mu+\pi}$. Inoltre $CK = \frac{r}{\sqrt{2}}$, $GI = \frac{Cb\mu - Sb\mu}{\sqrt{2}}$, $HL = \frac{Cb\pi - Sb\pi}{\sqrt{2}}$, $PQ = \frac{Cb\overline{\mu+\pi} - Sb\overline{\mu+\pi}}{\sqrt{2}}$; e finalmente $CI = Cb\mu\sqrt{2}$, $CL = \sqrt{2}.Cb\pi$, $CQ = \sqrt{2}.Cb\overline{\mu+\pi}$; dunque $CG = \sqrt{2}.Cb\mu - \frac{Cb\mu - Sb\pi}{\sqrt{2}} = \frac{Cb\mu + Sb\mu}{\sqrt{2}}$; similmente si trova $CH = \frac{Cb\pi + Sb\pi}{\sqrt{2}}$, $CP = \frac{Cb\overline{\mu+\pi} + Sb\overline{\mu+\pi}}{\sqrt{2}}$.

Dovendo adunque essere $CK : CG :: CH : CP$ (num. I.) fatta la sostituzione delle espressioni analitiche, e passando all' equazione si trova subito il primo Teorema $Cb\overline{\mu+\pi} + Sb\overline{\mu+\pi} = (\overline{Cb\mu + Sb\mu}\,.\,\overline{Cb\pi + Sb\pi}) : r$.

IV. Essendo per la natura dell' Iperbola $\overline{Cb}^2 - \overline{Sb}^2 = rr$, sarà $Cb + Sb = \frac{rr}{Cb-Sb}$; e sostituito $\frac{rr}{Cb-Sb}$ in vece di $Cb+Sb$ nel primo Teorema, nacerà il secondo $Cb.\,\overline{\mu+\pi} - Sb.\,\overline{\mu+\pi} =$ $(\overline{Cb.\mu - Sb.\mu}\,.\,\overline{Cb.\pi - Sb.\pi}) : r$; Se il logaritmo π si fosse preso negativo valerebbero le stesse espressioni, col divario soltanto del segno nel $Sb\pi$.

V. Vagliano ancora per i seni, e cosseni circolari i due seguenti Teoremi analogi a già ritrovati, come ciascuno potrà chiarirsi col fare attualmente le moltiplicazioni indicate confrontando poi i prodotti colle formule del $Cc.\overline{\mu+\pi}$, e $Sc.\overline{\mu+\pi}$ ritrovate nel Capo 10. del libro primo; Ecco i Teoremi

$$Cc.\,\overline{\mu+\pi} + \sqrt{-1}\,.\,Sc.\,\overline{\mu+\pi} =$$
$$(\overline{Cc.\mu + \sqrt{-1}.\,Sc.\mu}\,.\,\overline{Cc.\pi + \sqrt{-1}\,Sc.\pi}) : r$$
$$Cc.\,\overline{\mu+\pi} - \sqrt{-1}\,.\,Sc.\,\overline{\mu+\pi} =$$
$$(\overline{Cc.\mu - \sqrt{-1}\,.\,Sc.\mu}\,.\,\overline{Cc.\pi - \sqrt{-1}\,.\,Sc.\pi}) : r.$$

Se si tratti dell' arco $\mu - \pi$, si dee soltanto mutare il segno al $Sc.\pi$.

VI. Supponiamo ora il logaritmo, o l' arco μ uguale a π nasceranno queste quattro formule

1. $Cb.2\mu + Sb.2\mu = (Cb.\mu + Sb.\mu)^2 : r$

2. $Cb.2\mu - Sb.2\mu = (Cb.\mu - Sb.\mu)^2 : r$

3. $Cc.2\mu + \sqrt{-1}\,.\,Sc.2\mu = (Cc.\mu + \sqrt{-1}\,.\,Sc.\mu)^2 : r$

4. $Cc.2\mu - \sqrt{-1}\,.\,Sc.2\mu = (Cc.\mu - \sqrt{-1}\,.\,Sc.\mu)^2 : r$

e sommate, e sottratte le prime due; indi divise per 2 è

$$Cb.2\mu = ((Cb.\mu + Sb.\mu)^2 + (Cb.\mu - Sb.\mu)^2) : 2r$$
$$Sb.2\mu = ((Cb.\mu + Sb.\mu)^2 - (Cb.\mu - Sb.\mu)^2) : 2r$$

Formole analoghe si trovano nella stessa maniera per il seno e cosseno dell' arco doppio.

VII. Se prima di fare la somma, e la sottrazione delle predette formule si estrarrà la radice seconda, e dopo la somma e la sottrazione si faccia la divisione per 2, e la moltiplicazione per $r^{\frac{1}{2}}$, sarà

$Cb.\mu =$

$$((Cb.2\mu + Sb.2\mu)^{\frac{1}{2}} + (Cb:2\mu - Sb.2\mu)^{\frac{1}{2}}.:2r^{-\frac{1}{2}};$$

$Sb.\mu =$

$$((Cb.2\mu + Sb.2\mu)^{\frac{1}{2}} - (Cb.2\mu - Sb.2\mu)^{\frac{1}{2}}):2r^{-\frac{1}{2}}.$$

Collo stesso metodo si ritrovano i seni, e i cosseni della metà degli archi, che hanno espressioni analoghe a queste.

VIII. Due logaritmi μ, π si considerino come un logaritmo solo, a cui si debba aggiungere il logaritmo ϕ, si avrà per il primo Teorema

$$Cb.\overline{\mu + \pi + \phi} + Sb.\overline{\mu + \pi + \phi} =$$

$$((Cb.\overline{\mu+\pi} + Sb.\overline{\mu+\pi}).(Cb.\phi + Sb.\phi)):r,$$

e sostituite per $Cb.\overline{\mu+\pi} + Sb.\overline{\mu+\pi}$ il suo valore §. 3.; sarà $Cb.\overline{\mu + \pi + \phi} + Sb.\overline{\mu + \pi + \phi} =$

$$(\overline{Cb.\mu + Sb.\mu}.\overline{Cb.\pi + Sb.\pi}.\overline{Cb.\phi + Sb.\phi}):rr,$$

e posti i tre logaritmi uguali; sarà

$$Cb.3\mu + Sb.3\mu = \frac{\overline{Cb.\mu + Sb.\mu}^{3}}{rr};$$ nella stessa guisa si ritrova $Cb.3\mu - Sb.3\mu = \frac{\overline{Cb.\mu - Sb.\mu}^{3}}{rr}$;

fatta la somma, e la sottrazione di queste due formule le, e dividendo per 2, sarà finalmente

$$Cb.3\mu = (\overline{Cb.\mu + Sb.\mu}^{3} + \overline{Cb.\mu - Sb.\mu}^{3}) : 2rr$$

$$Sb.3\mu = (\overline{Cb.\mu + Sb.\mu}^{3} - \overline{Cb.\mu - Sb.\mu}^{3}) : 2rr$$

Formole analoghe si ritrovano collo stesso metodo per l' arco triplo.

IX. Se prima di fare la somma, e la sottrazione delle predette formule si estragga la radice terza, e dopo la somma e la sottrazione si faccia la divisione per 2 e la moltiplicazione per $r^{\frac{1}{3}}$; sarà per il logaritmo suttriplo

$$Cb.\mu = (\overline{Cb.3\mu + Sb.3\mu}^{\frac{1}{3}} + \overline{Cb.3\mu - Sb.3\mu}^{\frac{1}{3}}) : 2r^{-\frac{1}{3}}$$

$$Sb.\mu = (\overline{Cb.3\mu + Sb.3\mu}^{\frac{1}{3}} - (\overline{Cb.3\mu - Sb.3\mu}^{\frac{1}{3}}) : 2r^{-\frac{1}{3}}$$

Formole analoghe si trovano collo stesso metodo per l' arco suttriplo.

X. La maniera, con cui abbiamo fin quì operato, ci insegna per induzione, che vagliono sempre le seguenti equazioni

$$Cb.n\mu = (\overline{Cb.\mu + Sb.\mu}^{n} + \overline{Cb.\mu - Sb.\mu}^{n}) : 2r^{n-1}$$

$$Sb.n\mu = (\overline{Cb.\mu + Sb.\mu}^{n} - (\overline{Cb.\mu - Sb.\mu}^{n}) : 2r^{n-1}$$

$$Cc.n\mu = (\overline{Cc.\mu + \sqrt{-1}\,Sc.\mu}^{n} + \overline{Cc.\mu - \sqrt{-1}\,Sc.\mu}^{n}) : 2r^{n-1}$$

$$Sc.n\mu = (\overline{Cc.\mu + \sqrt{-1}\,Sc.\mu}^{n} - (\overline{Cc.\mu - \sqrt{-1}\,Sc.\mu}^{n}) : 2r^{n-1}$$

posto n numero intiero, o fratto il numeratore di cui sia l' unità; Adunque queste formule saranno atte a ritrovare un logaritmo, o un arco multiplo, o summultiplo di un altro. Le predette equazioni hanno ancora luogo quando n sia un fratto qualunque, anzi quando sia un numero irrazionale, come dimostriamo nelle nostre Instituzioni. Onde possono esse servire a moltitiplicare, e dividere il logaritmo, e l' arco in qualunque ragione. La brevità di questo Compendio non ci permette di fermarci più a lungo sù di ciò.

XI. Passiamo ora alla costruzione delle radici del terzo grado espresse con le formule cardaniche, facendo uso dei Seni, e cosseni iperbolici, e circolari. Queste radici, siccome si rileva dal Capo precedente anno la forma che segue

$$x = \overline{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}^{\frac{1}{3}} + \overline{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}^{\frac{1}{3}},$$

la quale equazione per conservare l' eleganza nella costruzione suppongo divisa per 2. Quattro ipotesi quì si deono fare, cioè o a e b si suppongono amendue positive, o amendue negative, o a positiva, e b negativa, o finalmente b positiva, e a negativa. Noi ci contenteremo di fare la costruzione nella prima ipotesi, potendosi da ciò facilmente dedurre la costruzione dell' altre. Due casi si danno in questa ipotesi o è $\frac{bb}{4} > a^3$, e allora la formula cardanica non contiene immaginario alcuno, ovvero è $\frac{bb}{4} < a^3$, e allora, la formula contiene il radicale quadratico immaginario. Nel primo caso si paragoni la formola cardanica colla formula del cosseno del logaritmo suttriplo

$$Ch\,\frac{\mu}{3} = \left(\overline{Ch\mu + Sh\mu}^{\frac{1}{3}} + \overline{Ch\mu - Sh\mu}^{\frac{1}{3}}\right) : 2r^{-\frac{2}{3}}$$

num. 9, frà le quali havvi una strettissima analogia, ed il confronto si faccia nella seguente maniera, fingendo $\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3} = \frac{Ch\mu + Sh\mu}{r^2}$, e

b

$\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3} = \frac{Cb\mu - Sb\mu}{r^{-2}}$; ſommando, e ſottraendo queſte equazioni naſcerà $\frac{b}{2} = \frac{Cb\mu}{r^{-2}}$, e $\sqrt{\frac{bb}{4} - a^3} = \frac{Sb\mu}{r^{-2}}$; dunque $\frac{\overline{Cb\mu}^2 - \overline{Sb\mu}^2}{r^{-4}} = \frac{bb}{4} - \frac{bb}{4} + a^3 = a^3$; ma è per la natura dell' iperbola $\overline{Cb\mu}^2 - \overline{Sb\mu}^2 = r^2$; dunque $r^6 = a^3$, ed $r = a^{\frac{1}{2}}$. Per tanto $\frac{x}{2}$ ſarà $Cb\frac{\mu}{3}$, chiamato μ quel logaritmo, il coſſeno di cui ſia $\frac{b}{2a}$, ed il ſeno tutto $a^{\frac{1}{2}}$. Da ciò ricavaſi la ſeguente coſtruzione. Deſcritta l' iperbola equilatera il cui (*Fig.39. T.5.*) ſemiaſſe AC ſia $a^{\frac{1}{2}}$, ſi tagli $CM = \frac{b}{2a}$, e ſi alzi il ſeno MN, dai punti A, N ſi calino ſull' aſintoto le normali AK, NP, ſi divida in tre parti uguali il logaritmo $AKPN$, trovando (num. 1.) frà CK, CP due medie proporzionali, la più picciola delle quali ſia CG, a cui corriſponde il logaritmo $AHEG$ terza parte di $AKPN$; da G ſi conduca GE perpendicolare all' aſintoto, da E ſi cali il ſeno EB, che determinerà il coſſeno CB, a cui ſarà uguale $\frac{x}{2}$. Se nel fare il confronto nelle altre ipoteſi ſi urtaſſe nel ſeno tutto immaginario, ſi abbandoni la formula del ſeno, e ſi prenda quella del Coſſeno.

XII.

XII. Nel caso poi in cui sia $\frac{bb}{4} > a^3$, ed in conseguenza $\sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}$ immaginaria si paragoni la formula cardanica divisa per 2 coll' espressione del Cosseno circolare dell' arco suttriplo

$$Cc\frac{\mu}{3} = (\overline{Cc\mu + \sqrt{-1}.Sc\mu}^{\frac{1}{3}} + \overline{Cc\mu - \sqrt{-1}.Sc\mu}^{\frac{1}{3}}) : 2r^{-\frac{2}{3}}$$

fingendo

$$\frac{b}{2} + \sqrt{-1}.\sqrt{a^3 - \frac{bb}{4}} = \frac{Cc\mu + \sqrt{-1}.Sc\mu}{r^{-2}},$$

e

$$\frac{b}{2} - \sqrt{-1}.\sqrt{a^3 - \frac{bb}{4}} = \frac{Cc\mu - \sqrt{-1}.Sc\mu}{r^{-2}},$$

da ciò si troverà $\frac{b}{2} = \frac{Cc\mu}{r^{-2}}$, e $\sqrt{a^3 - \frac{bb}{4}} = \frac{Sc.\mu}{r^{-2}}$, cioè

$a^3 - \frac{\overline{Cc\mu}^2}{r^{-4}} = \frac{\overline{Sc\mu}^2}{r^{-4}}$, ed essendo $\overline{Cc\mu}^2 + \overline{Sc\mu}^2 = r^2$,

sarà $a^3 = r^6$, ed $r = a^{\frac{1}{2}}$, $Cc\mu = \frac{b}{2a}$. Dunque sarà $\frac{x}{2} = Cc.\frac{\mu}{3}$, purchè si prenda per seno tutto $a^{\frac{1}{2}}$, e $\frac{b}{2a}$ per $Cc\mu$. Ciò somministra una facile costruzione della formula Cardanica (*Fig.* 40. *T.* 5.) col raggio $a^{\frac{1}{2}}$ si descriva il circolo *AN*, si prenda $CM = \frac{b}{2a}$, sarà

AN

AN l' arco μ, questo si divida in tre parti uguali la prima delle quali sia $AE = \frac{\mu}{3}$, si cali il seno EB, CB cosseno sarà $\frac{x}{2}$.

XIII. Il Cosseno CM non solamente appartiene all' arco AN, ma ancora alla periferia più l' arco AN, e posto $AN2E$ terza parte di questa somma, e calato il seno $2E2B$, sarà $C2B$ pure uguale ad $\frac{x}{2}$; similmente il cosseno CM appartiene a due periferie più l' arco AN, e posto $AN3E$ terza parte di questa somma si troverà $C3B$ uguale similmente ad $\frac{x}{2}$; la terza parte di tre periferie più AN torna nel punto E, di quattro nel punto $2E$, di cinque nel punto $3E$, e così in giro fino all' infinito; dunque tre cosseni soltanto si possono determinare uguali ad $\frac{x}{2}$. Queste cose verranno più chiaramente spiegate nel capo, che segue.

CAPO XII.

Si risolvono alcuni Problemi, che superano il secondo grado.

I. Problema primo. Fra due date a, b trovare due medie proporzionali. La prima di queste sia x, sarà la seconda $\frac{xx}{a}$, e comecchè $a : x :: \frac{xx}{a} : b$ s'avrà l'equazione $x^3 = a^2 b$. Per scioglierla in due indeterminanate del secondo grado si ponga $xx=ay$, ne verrà ancora $xy=ab$, la prima alla parabola, la seconda all' iperbola, che così costruisco. AC, AQ (*Fig.* 41. *T.* 5.) si seghino ad angolo retto, sia $AC=a$, e con questo parametro all' asse AQ si delinei la Parabola ATM. Sia inoltre $AB=b$, e chiuso il parallelogrammo $ACDB$ frà gli asintoti AQ, AC si descriva l' Iperbola MD, che passi per lo punto D: queste due Curve si segano soltanto in M, da cui si conducano MP, MQ normali ad AC, AB, la retta $AP=MQ$ sarà la x prima delle medie proporzionali, ed $AQ=MP$ darà la seconda $=\frac{x^2}{a}$.

II. Se si voglia costruire l' equazione con due parabole si moltiplichi essa per x acciocchè sia $x^4=a^2bx$, e fatta $xx=ay$, ne verrà $yy=bx$. Descritta come sopra la parabola ATM, si descriva l' altra ASM col parametro $AB=b$ all' asse AP. La sezione M delle due parabole darà AP prima, ed AQ seconda delle medie proporzionali frà AC, AB. Per giugnere alle tre equazioni indeterminate, di cui abbiamo fatto uso, non v' era bisogno dell' equazione determinata $x^3=a^2b$, perchè chiamate le medie proporzionali x, y abbiamo $a:x::x:y::y:b$; dunque $ay=xx$, $bx=yy$, $ab=xy$.

III. Se piaccia introdurre il circolo, si congiungano le due equazioni alla parabola in questa forma $yy-ay+xx-bx=0$, per cui si ottiene

$\overline{y-\frac{a}{2}}^2+\overline{x-\frac{b}{2}}^2=\frac{aa+bb}{4}$, equazione al cerchio, che così costruisco. $CD=\frac{b}{2}$, $DE=\frac{a}{2}$ formi mino un angolo retto in D, [F.42.T.5.] si congiunga CE con cui si descriva il circolo EAB; si conduca EP parallela al diametro AB saranno le $PE = x$, $PM = y$, descritta adunque vertice E, e parametro b, all' EP la parabola; la sezione di questa e del cerchio darà PE prima, MP seconda delle medie proporzionali tra a, e b. Segandosi le curve in un sol punto, unica sarà la soluzione reale del problema.

IV. Problema secondo. Dividere un arco in tre parti uguali. Sia l' arco dato $MPQN$ diviso in tre parti uguali nei punti P, Q [*Fig.* 43: T. 5.] in guisa che le corde MP, PQ, QN sieno uguali; dai punti P, Q si calino le normali PS, QT nella corda MN. Le rette MN, ST si dividano in due parti uguali dallo stesso punto D. Si chiami $DM = a$, $DS = x$, $SP = y$, sarà $ST = PQ = MP = 2x$; dunque essendo $MP^2 = MS^2 + PS^2$, sarà analiticamente $4x^2 = a^2 - 2ax + xx + yy$, ovvero $xx + \frac{2ax}{3} + \frac{aa}{9} = \frac{4aa}{9} + \frac{yy}{3}$. Si ponga $x + \frac{a}{3} = z$, sicchè sia $zz - \frac{4aa}{9} : yy :: 1 : 3 :: \frac{4aa}{9} : \frac{4aa}{3}$, avremo l' equazione all' Iperbola col semiasse primo $= \frac{2a}{3}$, e secondo $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, che così costruisco: divido MN in tre parti uguali MR, RA, AN. Centro A col primo semiasse $AR = AN = \frac{2a}{3}$, e col secondo $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ descrivo l' Iperbola la di cui sezione col cerchio darà MP terza parte dell' Arco MN; dal punto P tirisi PQ parallela ad MN, ed il punto Q determinerà l' altre due terze parti PQ, QN.

V. L' Iperbola sega il circolo non solamente nel punto P; mà in altri due punti $2P$, $3P$. Vediamo che cosa significano queste due sezioni. Il punto P sega, come si è veduto, l' arco dato MPN in tre parti uguali; il punto $2P$ sega in tre parti eguali l' arco che risulta da tutta la circonferenza più l' arco dato; perchè condotte $M2P$, $2P2Q$ parallela ad MN, e la $2QN$, saranno queste eguagli in vigore della costruzione; dunque gl' archi $MP2P$, $2P3P2Q$, $2QMN$ saranno uguali. Ma la somma loro eguaglia l' intera circonferenza, e l' arco dato; dunque ciascuno sarà la terza parte di questa somma. Similmente il punto $3P$ serve a dividere in tre parti uguali due circonferenze insieme coll' arco dato; imperciocchè le tre corde $M3P$, $3P3Q$, $3QN$, la seconda delle quali è parallela ad MN sono uguali fra loro: adunque gli archi maggiori della semicirconferenza $MN3P$, $3PM3Q$, $3QMN$ saranno eguali; ma questi presi insieme sono due circonferenze più l' arco dato MN; dunque ciascuno sarà la terza parte di questa somma. Per dividere tre circonferenze più l' arco dato serve il punto P, quattro circonferenze più l' arco dato il punto $2P$, cinque più l' arco dato il punto $3P$, e così in giro. Dal che apparisce che la nostra equazione, e costruzione divide in tre parti uguali archi infiniti, cioè tutti quelli, che anno per termini i punti M, N, che sono infiniti; e perciò il problema sarebbe di grado infinito, ovvero *trascendente* ogni grado finito, se i punti P, $2P$, $3P$ &c. non tornassero gli stessi.

VI. Facilmente si comprende, che i punti P, $2P$, $3P$ dividono la periferia in tre parti uguali; perchè chia-

chiamata la circonferenza $= c$, l' arco dato $= a$, è $MP\,2P = \frac{c+a}{3}$; ma è $MP = \frac{a}{3}$; dunque $P\,2\,P = \frac{c}{3}$. Similmènte è $MN\,3\,P = \frac{2c+a}{3}$, ma $M\,2\,P = \frac{c+a}{3}$; dunque $2\,P\,3\,P = \frac{c}{3}$, ed in conseguenza sarà ancora $P\,3\,P = \frac{c}{3}$. Non soggiungiamo cosa alcuna del punto N, dove parimenti si segano il circolo, e l' iperbola; perchè se dal punto M ad N si tiri MN, a cui da N sia parallela NM, e da M tirisi di nuovo MN, avremo tre rette, che combaciano, e perciò uguali, ma inette a dividere l' arco come si desidera.

VII. Problema terzo. Sopra una data AB formare un triangolo isoscele ABC, (Fig. 44. T. 5.) che abbia l' angolo al vertice suttriplo dell' angolo alla base. Si divida l' angolo B in tre parti uguali colle rette BD, BE. Per la similitudine dei triangoli BAE, CAB è $CA : AB :: AB : AE$. Adunque, chiamata $CA = CB = x$, $BA = BE = a$, sarà $x : a :: a : AE = \frac{a^2}{x}$; Dunque $CE = x - \frac{a^2}{x} = \frac{x^2 - a^2}{x}$. Il triangolo DAB è isosele; dunque $DA = AB = a$. Per la similitudine de' triangoli CBE, BDE, è $CE : CB :: BE : DB$, ovvero analiticamente $\frac{x^2 - a^2}{x} : x :: a : DB = \frac{a x^2}{x^2 - a^2}$; ma per il triangolo CDB isoscele $CD = DB = \frac{a x^2}{x^2 - a a}$; dunque essendo DA

$+ DC = AC$, farà $a + \frac{a x^2}{x^2 - a a} = x$, da cui nasce l' equazione del terzo grado $x^3 - 2 a x^2 - a^2 x + a^3 = 0$.

VIII. Una stessa parabola collocata in due maniere costruisce l' equazione; moltiplico questa per x, (Fig. 45. T. 5.) onde sia $x^4 - 2 a x^3 - a^2 x^2 + a^3 x = 0$. Pongo $x^2 - a x = a y$, ed elevando a quadrato $x^4 - 2 a x^3 + a^2 x^2 = a^2 y^2$, e tolto da una parte $2 a^2 x^2$, e dall' altra $2 a^3 y + 2 a^3 x$, nascerà $x^4 - 2 a x^3 - a^2 x^2 = a^2 y^2 - 2 a^3 y - 2 a^3 x$, e fatta la sostituzione nella proposta già moltiplicata per x, e la divisione per $a a$, sarà $y y - 2 a y - a x = 0$. Sia $AB = a$ una linea data divisa in due parti uguali in F, s' alzi la normale $FG = \frac{a}{4}$; col vertice G, e col parametro $= a$ si descriva la parabola, che passerà per i punti A, B, le rette AL, LI saranno le coordinate x, y dell' equazione $x x - a x = a y$. Alla retta AB si inalzi la normale $AH = AB = a$, e la parallela $KH = a$, il punto K cade fuori della descritta parabola; vertice K, asse HK, parametro $= a$ si descriva la stessa parabola, che passerà per lo punto A, e le rette AL, LI saranno le coordinate x, y dell' Equazione $y y - 2 a y - a x = 0$. Abbiamo tre punti di sezione I, $2I$, $3I$, e perciò tre radici AL, $A2L$, $A3L$, la prima positiva maggior d' a, la seconda negativa, e alquanto minor di a, la terza positiva minore di a; tutte per altro sono maggiori di $\frac{a}{2}$. Della sezione nel punto A non parlo perchè dà la radice introdotta $x = 0$.

IX.

IX. Ricerchiamo ora diligentemente a che servano le tre radici reali. Dall' Analisi si sà che la prima maggior di a ci determina il triangolo ABC (*Fig.* 44. *T.* 5.) in cui l' angolo ACB stà all' angolo CAB :: 1 : 3. A scoprire il triangolo determinato dalla radice negativa alquanto minore di a, sia con questa radice costruito il triangolo isoscele ACB (F.46.T.5.), e si tiri BE che incontri AC prodotta in E talmente che sia $BE = AB$, sarà l' angolo $ACB = ABE$; poi si faccia l' angolo $EBD = BCE$ in maniera che la BD incontri la CA prolongata dalla parte di A, sarà $DA = AB$, il che così brevemente dimostro. Essendo i triangoli ABE, ACB simili, sarà $AE = \frac{aa}{x}$ ritenute le denominazioni $AB = a$, $BC = AC = x$; onde sarà $CE = \frac{aa - xx}{x}$, e per la similitudine dei triangoli CEB, DEB sarà $DB = \frac{ax^2}{aa - xx} = a + x$ in virtù dell' equazione, da cui è stata determinata la x; (si noti che in questo caso la x è negativa, e perciò nell' equazione in vece di $a - x$, si dee scrivere $a + x$). Dunque per i triangoli simili BCE, DBE sarà $DE = \frac{aa + ax}{x}$, da cui sottratta $AE = \frac{aa}{x}$, resta $DA = a$, $= AB$; Adunque l' angolo $ADB = DBA$, e perciò l' angolo $CAB = 2D$; inoltre l' angolo D è uguale CBE, e l' angolo CAD uguale all' angolo E; dunque sarà l' angolo $ACB = E + CBE = 3D$; e per conseguenza sarà l' angolo $ACB : CAB :: 3 : 2$. Serve adunque la presente radice a costruire un triangolo isoscele, in cui l' angolo al vertice stà all' ango-

go-

golo alla base come $3:2$: Se si fosse proposto questo problema si sarebbe ottenuta la stessa equazione.

X. Veniamo alla terza radice positiva ma minore di a. Sopra AB (*Fig.* 47. *T.* 5.) formato il triangolo isoscele ACB si conduca $BE = BA$, onde sia il triangolo ABE simile al triangolo ACB, e si tiri BD in maniera che il triangolo EDB sia simile al triangolo BEC; AD dee essere uguale ad AB, il che si dimostra come sopra. Ciò posto l' angolo $ACB = ABE = ABC + CBE = CAB + BDE = 2CAB + ABD = 2CAB + ADB$; dunque sarà l' angolo $CBD = 2CAB$, ed $ADB = ABD = 3CAB$; e per conseguenza $ACB = 5CAB$. Questa radice adunque serve a costruire un triangolo isoscele, in cui l' angolo al vertice sia quintuplo dell' angolo alla base. Ciascuno di questi triangoli serve a dividere la periferia del cerchio in sette parti uguali, come si potrà per picciola riflessione, che facciasi comprendere.

XI. Problema quarto. Data la Parabola ADE, (*Fig.* 48. *T.* 5.) il cui asse sia AG, il parametro sia $AI = a$, e la tangente nel vertice A sia AB, in cui abbiasi il punto B, si dee tirare una linea BDE in maniera, che calate le ordinate DF, EG dai punti di sezione della linea BE colla parabola, sia $FG = a$. Questo Problema quantunque non difficile a sciogliersi, si propone per indicare come ci dobbiamo regolare, quando nel problema si includono linee dipendenti da due punti di sezione; imperciocchè se si prenda per incognita una delle due AF, DF appartenenti al solo punto di sezione D, il problema ascende ad un grado doppio di quello che in realtà sia; per la qual cosa conviene prendere per incognita una quantità, che sia comune ai due punti di sezione D, ed E: tale è, prodotta BDE in H, l' angolo BHA, e le linee da que-

questo dipendenti. La tangente dunque dell' angolo BHA sia l' incognita, che chiamo $=t$, e pongo il seno tutto $=a$, $AB=b$, $AF=x$ e perciò $DF=\sqrt{ax}$.

XII. Abbiamo $t:a::b:AH=\frac{ab}{t}$ dunqne $HF=\frac{ab}{t}+x$; ma $a:t:HF:DF$, cioè $::\frac{ab}{t}+x:\sqrt{ax}$; perciò $ab+tx=a\sqrt{ax}$, e quadrando $a^2b^2+2abtx+t^2x^2=a^3x$, cioè $x^2+\frac{2ab}{t}x-\frac{a^3x}{t^2}=-\frac{a^2b^2}{t^2}$. Per trovare i due valori della x così dispongo la formola $\overline{x+\frac{ab}{t}-\frac{a^3}{2t^2}}^2=\frac{a^2b^2}{t^2}-\frac{a^4b}{t^3}+\frac{a^6}{4t^4}-\frac{a^2b^2}{t^2}=\frac{a^6}{4t^4}-\frac{a^4b}{t^3}$; dunque $x=\frac{a^3}{2t^2}-\frac{ab}{t}\pm\frac{a}{t}\sqrt{\frac{a^4}{4t^2}-\frac{a^2b}{t}}$; i due valori della x danno le due ascisse AF, AG; onde la differenza $\frac{2a}{t}\sqrt{\frac{a^4}{4t^2}-\frac{a^2b}{t}}$ sarà l' intercetta FG, che esser dee $=a$; adunque abbiamo l' Equazione $\frac{2a}{t}\sqrt{\frac{a^4}{4tt}-\frac{a^2b}{t}}=a$, cioè $t^4+4a^2bt-a^4=0$.

XIII. Per costruire questa equazione faccio $tt=ax$ che è la parabola data; se si prendano le x nell' asse, e le di lei ordinate si chiamino t; fatta la sostituzio-

ne

ne nasce $a^2 x^2 + 4 a^2 b t - a^4 = 0$, ovvero $x^2 + 4 b t - a a = 0$ a cui aggiunta la prima equazione si ottiene $x^2 - a x + t t + 4 b t = a a$, ovvero $\overline{x - \frac{a}{2}}^2 + \overline{t + 2 b}^2 = \frac{5 a a}{4} + 4 b b$, che è il circolo del raggio $\sqrt{\frac{5 a a}{4} + 4 b b}$. Si prenda pertanto $A K$ doppia di $A B$, e le si alzi la normale $K L = \frac{a}{2}$, centro L, raggio $\sqrt{\frac{5 a a}{4} + 4 b b}$ si descriva il circolo, che segherà la parabola in M, $2 M$, dai quali punti si calino sopra $A B$ prodotta le normali $M N$, $2 M 2 N$, e si congiungano $N I$, $2 N I$, a cui da B si conducano le parallele $B E$, $B 2 E$, saranno queste le ricercate. Quantunque il Problema sia del quarto grado ammette una semplicissima costruzione col solo cerchio e linee rette, il che con qualche industria sempre si otterrà qualora nel problema suppongasi una sezione conica.

FINE DEL SECONDO LIBRO.

LI-

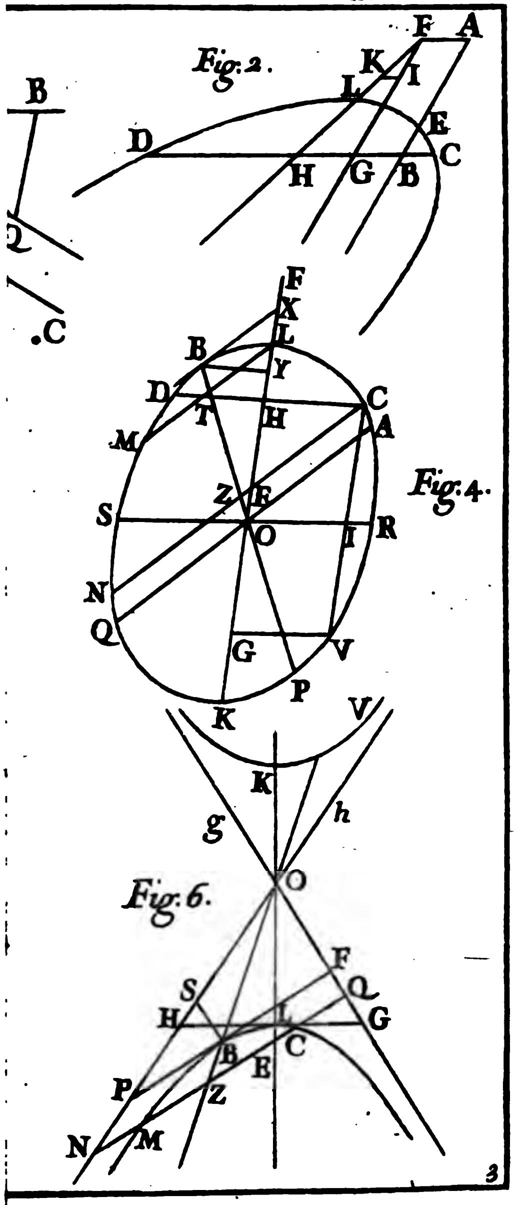
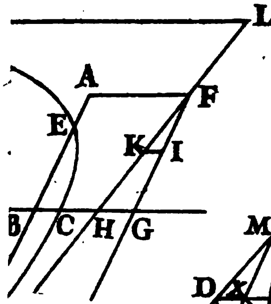


Fig. 2.
F A K I L E D C H G B
B Q C
Fig. 4.
F X L B Y D C T H A M Z E S O I R N Q G V P K
Fig. 6.
V K g h O F S Q H L G B C E P Z N M



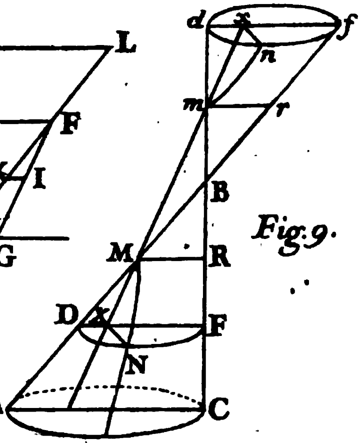
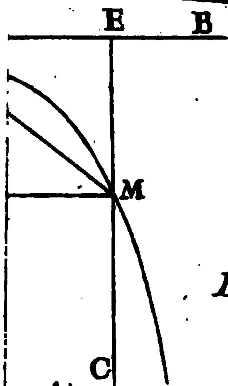


Fig. 9.



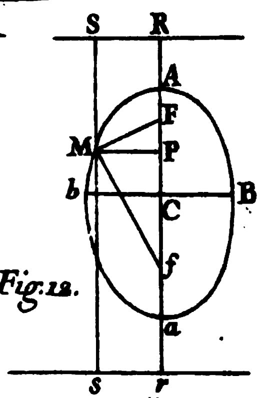
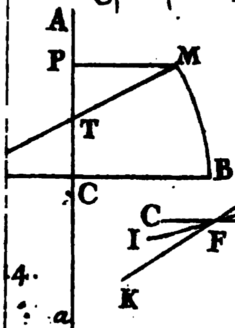


Fig. 12.



4.

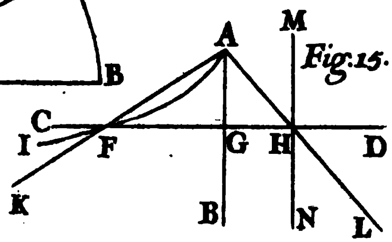


Fig. 15.

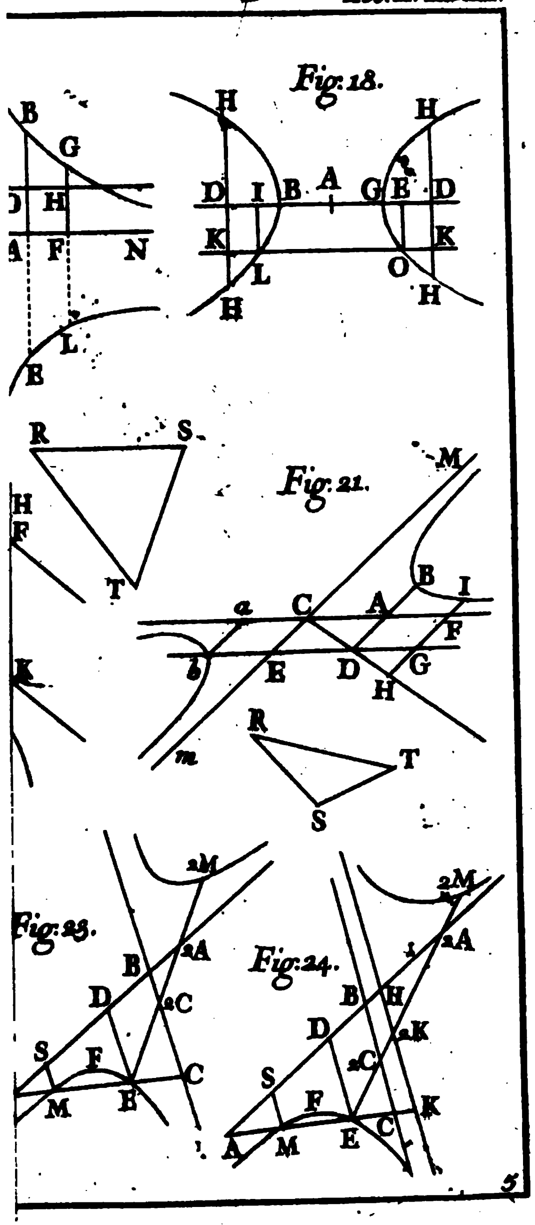


Fig. 18.
Fig. 21.
Fig. 23.
Fig. 24.

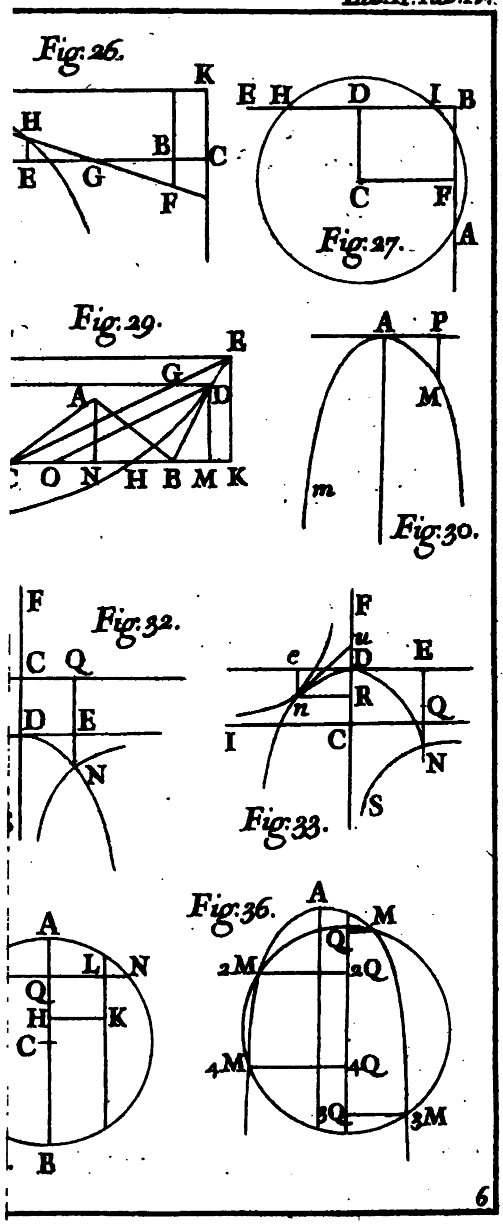


Fig:26.
K
H
B
C
E
G
F
E H D I B
C F
A
Fig:27.
Fig:29.
E
G
A
D
O N H B M K
A P
M
m
Fig:30.
F
Fig:32.
C Q
D E
N
F
u
e
D E
R
n
Q
I C
N
S
Fig:33.
A
L N
Q
H K
C
B
Fig:36.
A
M
Q
2M 2Q
4M 4Q
3Q 3M
6

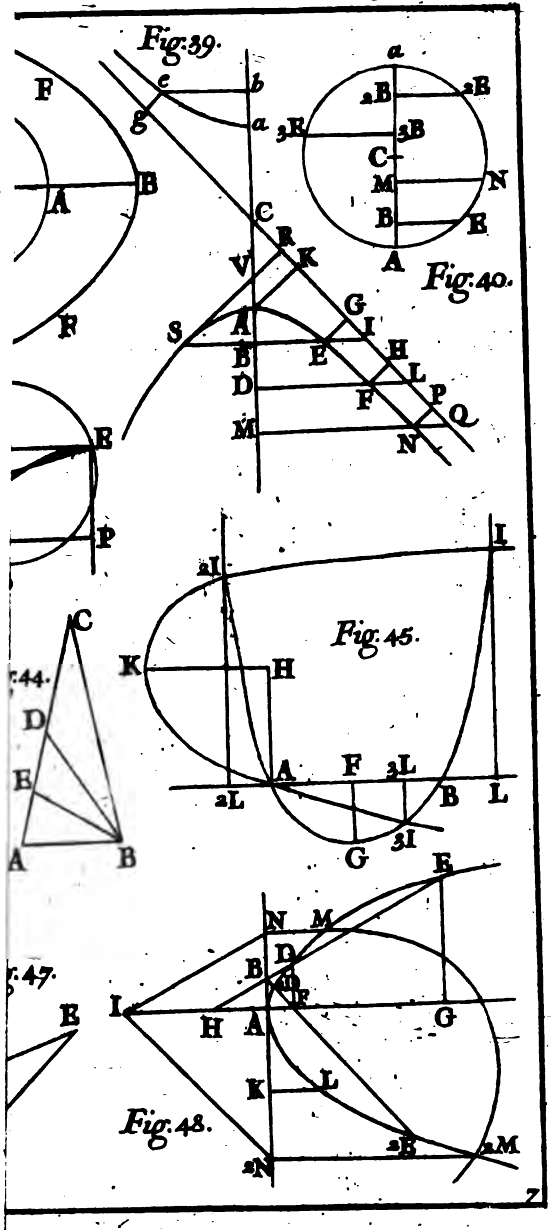


Fig.39.
Fig.40.
Fig.45.
Fig.48.
7

LIBRO TERZO

Delle Equazioni determinate, che il quarto grado, e delle Linee, che il secondo sorpassano.

CAPO PRIMO.

Alcune Proprietà universali delle Equazioni.

I. CHe cosa sia Equazione si è esposto nel Capo 4. del Libro I. dove si è ancor notato ciocchè appartiene alle Equazioni determinate, che non superano il quarto grado; delle quali abbiamo veduto ottenersi compiuta e generale soluzione; ma la cosa và altrimenti delle equazioni di grado superiore al quarto; nella risoluzione di queste manca la desiderata semplicità ed ampiezza, benchè non siasi perdonato a fatica. Nel presente libro esporremo, per quanto la brevità che ci siamo proposti comporta, le cose che stimiamo più necessarie per la migliore istruzione dei Giovani. Incominciamo da alcune proprietà universali delle Equazioni; che servono di fondamento alle Teorie che siamo per dare.

II. Acciocchè si proceda con metodo chiamo radice d' una Equazione quella quantità la quale collocata nell' equazione stessa in vece dell' incognita fa che tutti i suoi termini si distruggano; e per risoluzione dell' Equazione non intendo altro, che ritrovare questa radice: così la quantità a sarà una radice dell' Equazione $\begin{matrix} x^3 + b x^2 + c^2 x - a c^2 = o \\ - a x^2 - a b x \end{matrix}$, perchè messa in vece di x abbiamo $\begin{matrix} a^3 + b a^2 + c^2 a - a c^2 = o, \\ - a^3 - b a^2 \end{matrix}$ cioè $o = o$.

III. Prendiamo ora l' Equazione canonica $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} \ldots + P = o$, φ sia una radice di questa Equazione; onde la quantità $\varphi^m + A \varphi^{m-1} + B \varphi^{m-2} \ldots + P$ distruggendosi tutti i termini sia $= o$. Se divideremo $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} \ldots + P$ per $x - \varphi$, si giungerà ad un residuo mancante della lettera x, che chiamo R, e Q sia il quoto di detta divisione. Comecchè per la natura della divisione il quoziente nel divisore col residuo dee dare il dividendo sarà $(x + \varphi) Q + R = x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} \ldots + P$; ma $x^m + A x^{m-1}$ &c. nella supposizione di $x = \varphi$ diventa zero; dunque ancor diventerà zero $(x - \varphi) Q + R$; cioè $(x - \varphi) Q + R = o$, e perciò $R = o$. Adunque se φ sarà una radice dell' Equazione $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} \ldots + P = o$, $x - \varphi$ dividerà esattamente l' equazione medesima; e però avremo $(x - \varphi)(x^{m-1} + A' x^{m-2} + B' x^{m-3} \ldots + P') = o$; $x^{m-1} + A' x^{m-2}$ &c. è il quoziente, che proviene dalla divisione di $x^m + A x^{m-1} +$ &c. per $x - \varphi$, (avverto che il segno apposto ai coefficienti A', B' &c. altro non fa che distinguergli dai coefficienti A, B, &c. lo che basti una volta avere avvisato); Riflettasi ora che $x^m + A x^{m-1} \ldots + P = o$ diverrebbe zero se l' altro fattore $x^{m-1} + A' x^{m-2}$ &c. fosse zero; sia λ una quantità, la quale posta in vece di x faccia, che tutti i termini del predetto fattore si distruggano, si proverà come sopra, che $x - \lambda$ è un divisore esatto della quantità $x^{m-1} + A' x^{m-2} + B' x^{m-3} \ldots + K'$, e che per conseguenza l' equazion pro-

proposta non è punto diversa da quest' altra $(x-\varphi)$ $(x-\lambda)(x^{m-2}+A''x^{m-3}+B''x^{m-4}\ldots+P'')=0$, ancor quì $x^{m-2}+A''x^{m-3}$ &c. rappresenta il quoziente, che nasce dalla divisione di $x^{m-1}+A'x^{m-2}+B'x^{m-3}$ &c. per $x-\lambda$. Col medesimo raziocinio, si potrà dimostrare, che sarà $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ldots P=(x-\varphi)(x-\lambda)(x-\pi)(x-\mu)$ &c. posto che φ, λ, π, μ &c. sieno i valori di x dell' Equazione $x^m+Ax^{m-1}\ldots+P=0$.

IV. Fino ad ora si è supposto, che siavi sempre una quantità la quale riduca a zero l' espressione $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+$&c., e così pure, le altre $x^{m-1}+A'x^{m-2}+B'x^{m-3}$ &c., $x^{m-2}+A''x^{m-3}+B''x^{m-4}$ &c. da quella dedotte mediante la divisione. Questa supposizione viene giustificata dalle soluzioni delle equazioni date nei libri precedenti, e si potrebbe giustificare ancora con tutta l' universalità mediante una solida dimostrazione se non temessimo che mancasse il tempo ad altre cose, che debbonó dirsi: si avverta soltanto, che non havvi bisogno, che una tale quantità sia reale, potendo essere benissimo del genere delle immaginarie.

V. Dalle cose qui sopra dette ne inferiamo, che qualsivoglia Equazione algebraica può sempre figurarsi come un prodotto di tanti fattori del primo grado, o reali, o immaginarii, quante sono le unità contenute nell' esponente del grado di essa: e siccome ogn' uno di questi fattori posto uguale a zero la fà verificare, così tante saranno le sue radici, quante saranno le unità del sopraddetto esponente; Se nascesse il dubbio che fossero più, potrà dileguarlo la seguente dimostrazione. Supponiamo adunque che $(x-\varphi)$ $(x-\lambda)(x-\pi)$ &c. sia eguale ad $x^r+Ax^{r-1}+Bx^{r-2}\ldots+P=0$, ed il numero dei fattori $x-\varphi$,

$x - \lambda$, &c. sia $= r$. Fingasi ora che K posto in vece di x faccia sparire tutti i termini dell' Equazione; sarà $(K - \varphi)(K - \lambda)(K - \pi)$ &c. $= o$; ma ciò non può succedere se non sia uno di questi fattori eguale a zero; dunque sarà K eguale ad uno dei valori φ, λ, π, μ &c.; dunque è impossibile ritrovare un valore K diverso da φ, λ, π &c. che posto in vece di x faccia verificare l' equazione $(x - \varphi)(x - \lambda)$ &c. $= o$, cioè che faccia verificare l' Equazione $x^r + A x^{r-1} + B x^{r-2} \ldots + P = o$ la quale non differisce, che nella forma dalla precedente. Il problema: date le radici ritrovare l' Equazione a cui appartengono: riceve dalle cose dette una facile soluzione. Le radici date sieno a, b, c, d, e si formino i binomii $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$, $x - e$, e si moltiplichino tutti insieme, e posto il prodotto eguale a zero, si avrà la ricercata Equazione, la quale sarà $x^5 - (a + b + c + d + e)\, x^4 + (ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de)\, x^3 - (abc + abd + abe + acd + ace + bcd + bce + bde + cde + ade)\, x^2 + (abcd + abce + abde + acde + bcde)\, x - abcde = o$.

VI. Il primo termine adunque delle Equazioni non è, che l' incognita elevata alla potestà dell' indice uguale al numero delle radici. Il secondo termine contiene l' incognita inalzata alla potestà prossimamente minore, ed à per coefficiente la somma di tutti i secondi termini dei fattori, ovvero delle radici col segno contrario. Nel terzo termine la potestà della x si diminuisce ancor d' una unità, ed il suo coefficiente è la somma dei prodotti delle radici a due a due. La potestà dell' incognita nel quarto termine si diminuisce gradatamente, ed il coefficiente è la somma dei prodotti delle radici a tre a tre col segno contrario;

e co-e così in seguito fino all' ultimo termine, che è il prodotto di tutte le radici prese col segno contrario. Queste proprietà son feconde e danno gran lume.

VII. Ricaviamo primamente, che se dopo avere ordinata l' Equazione per la x, manca qualche termine, egli sia indicio certissimo, che o la somma delle radici, o degli ambi, o de' terni &c. sia $=o$, cioè se il secondo, la somma delle radici; se il terzo la somma degli ambi &c. Il Cartesio ne deduce ancora, che altrettante sono le radici positive, quante sono le mutazioni dei segni $+$ in $-$, o $-$ in $+$, e altrettante le negative, quante sono le successioni dei segni nei termini contigui: così nell' Equazione $x^2+3x-4=o$, perchè avvi una successione dei segni, ed una mutazione, vi sarà una radice positiva ed una negativa; ed in fatti abbiamo $x=-4$, $x=1$. La regola và benissimo, se tutte le radici sieno reali, ma è fallace, se ve ne sia d' immaginarie, così nell' Equazione $x^2-2x+7=o$ che à radici immaginarie secondo la regola havvi due radici positive; la moltiplico per $x+3$, ed avremo $x^3+x^2+x+21=o$, in cui secondo la regola tutte le radici dovrebbero essere negative. Queste due cose non possono stare insieme.

VIII. Promovendo le considerazioni sopra l' Equazione del §. 5. ne inferiamo una regola per inalzare qualunque binomio $x-a$, alla potestà m. Per tal fine supponiamo, che tutte le radici sieno uguali, per esempio $=a$, onde sieno tutti i fattori $x-a=o$, e il numero loro $=m$; e facile ricavare, che il primo termine, sia x^m; che il secondo sia x^{m-1} moltiplicato per $-ma$, che il terzo sia x^{m-2} moltiplicato per a^2 preso tante volte quanti sono gl' ambi ab, ac, ad &c., cioè tutti gli ambi di m; che il quarto sia x^{m-3} moltiplicato per a^3 preso tante volte quante sono i

ter-

terni abc, &c. cioè tutti i terni di m, e così successivamente.

IX. La questione è dunque ridotta a sapere quanti ambi, terni, quaterni &c. vengono fatti da un numero m di lettere. Imperocchè supponendo che questi numeri sieno trovati, e che si esprimano per A, B, C, D &c. avremo $x^m - m a x^{m-1} + A a^2 x^{m-2} - B a^3 x^{m-3} + C a^4 x^{m-4} - D a^5 x^{m-5} \ldots \pm a^m$; che sarà il valore cercato di $\overline{x-a}^m$. Il segno superiore vale se m sia pari, l'inferiore se dispari.

X. Per trovare primieramente quanti ambi ab, ac, bc un numero m di lettere a, b, c &c. può dare combinandole in tutte le maniere possibili, osserviamo in primo luogo che quando si saranno formati tutti questi ambi, si saranno altresì scritte due volte più lettere che termini; osserviamo in seguito che ciascuna lettera a, b, c &c. dee essere ripetuta il medesimo numero di volte, e che ciascuna essendo moltiplicata con tutte l'altre, non per se stessa, sarà ripetuta $m-1$ di volte; dunque il numero delle lettere da scrivere formando tutti questi prodotti dee essere $m \times \overline{m-1}$, dunque il numero di tutti questi prodotti dee essere $\frac{m \times \overline{m-1}}{2}$, e questo è il valore di A.

XI. Quanto al coefficiente B del quarto termine, osserviamo, che fatti tutti i terni del numero m di lettere, sarà il numero di quelli la terza parte del numero delle lettere, che contengono; e che ciascuna di queste sarà ripetuta lo stesso numero di volte; e che finalmente questo numero è uguale al numero degli ambi dell' altre lettere, perchè a per esempio deesi unire cogli ambi bc, cd, bd, &c. per formare i teri terni; ma gli ambi del numero $m-1$, sono $\frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{2}$ §. 10. dunque $\frac{\overline{m-1}\times\overline{m-2}}{2}$ è il numero delle volte, che ciascheduna delle lettere a, b, c &c. sarà ripetuta in tutti i prodotti di cui si tratta, e comecchè il numero di queste lettere è m, così $\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}}{2}$ sarà per conseguenza il numero di tutte le lettere scritte; dunque il numero cercato de' prodotti a tre lettere abc, abd &c. sarà $\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}}{2\times 3}$, e questo è il valore di B, o del coefficiente del quarto termine.

XII. Il coefficiente C del quinto termine, cioè a dire del numero dei prodotti di quattro lettere, che dee dare il numero m di lettere, si troverà $\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}}{2\times 3\times 4}$, dovendo tal numero essere il quarto di tutte le lettere scritte in questi prodotti, e ciascuna di queste lettere dee essere ripetuta il medesimo numero di volte, cioè con tutti li prodotti di tre lettere, che da il numero delle lettere $m-1$.

XIII. Formando nella stessa maniera tutti gli altri coefficienti l' andamento dei quali è patente, e sostituendo nelle formule in luogo di A, B, C, D, E &c. i valori ritrovati, si avrà in fine $x^m - max^{m-1} +$

$$m\times\frac{\overline{m-1}}{2}a^2x^{m-2} - \frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}}{2\times 3}a^3x^{m-3}$$

$$+\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}}{2\times3\times4}a^4x^{m-4}$$

$$-\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}\times\overline{m-4}}{2\times3\times4\times5}a^5x^{m-5}\ldots\pm a^m$$

per la potestà m di $x-a$. Se il binomio fosse $x+a$, altro non si avrebbe da fare, che mutare i segni a quei termini, in cui a trovasi a potestà dispari.

XIV. Allorchè si vorrà adoperare la formola precedente per alzare un binomio qualunque a una potestà data niente farà più facile. Non si avrà che a sostituire nella formola di $\overline{x-a}^m$ in luogo di x il primo termine del binomio dato, in luogo di $-a$ il secondo, e in luogo di m l' esponente della potestà alla quale si vuol alzare il binomio proposto. Propongasi per esempio di alzare $3ec-2bd$ alla quinta potestà, si farà $3ec=x$, $2bd=a$, $5=m$, e si avrà subito

$$x^m=\overline{3ec}^5=243e^5c^5;$$

$$-max^{m-1}=-5.2db\times\overline{3ec}^4=-810e^4c^4db;$$

$$\frac{m\times\overline{m-1}}{2}, a^2x^{m-2}=10\times4b^2d^2\times\overline{3ec}^3=$$

$$1080e^3c^3b^2d^2;$$

$$-\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}}{2.3}a^3x^{m-3}=10\times-\overline{2db}^3\times\overline{3ec}^2=$$

$$-720e^2c^2b^3d^3;$$

$$\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}}{2.3.4}a^4x^{m-4}=$$

$$5\times\overline{2bd}^4\times3ec=240ecb^4d^4$$

$$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^5 x^{m-5} =$$

$$1 - \overline{2bd}^5 \times \overline{3ec}^0 = -32 b^5 d^5 .$$

Avendo i termini seguenti per fattore $m-5=o$, saranno tutti $=o$; onde raccolti in una somma i precedenti si otterrà la potestà ricercata.

XV. Volendo alzare a una potestà data una quantità composta di più di due termini, potrà farsi facilmente collo stesso metodo. Se si tratta per esempio di un trinomio, nominando x il primo termine del trinomio, e $-a$ la somma dei due altri, la difficoltà della elevazione del trinomio sarà ridotta a quella del binomio, poichè ciascun termine $m x^{m-1} a$, $\frac{m \times \overline{m-1}}{2}$ $x^{m-2} a^2$ &c. non avrà quantità da alzarsi più composte, che quelle dei binomj. E quando si avrà un polinomio più composto ancora, si ridurrà sempre la difficoltà all' alzamento di un polinomio più semplice.

XVI. Comecchè $\sqrt[n]{\overline{x+n}^r} = \overline{x+a}^{\frac{r}{n}}$, ed $\frac{1}{\overline{x+a}^r} = \overline{x+a}^{-r}$ l' induzione ci insegna, che la nostra formola canonica serve ad estrarre le radici, ed a convertire le frazioni in serie: nel primo caso in vece di m si metta $\frac{r}{n}$, e nel secondo $-r$, e si operi come sopra. Oltre l' induzione nelle nostre Instituzioni rechiamo la dimostrazione del dotto Sig. Clerò, che non è componibile colla brevità del presente Compendio. E questa è la famosa formola Neutoniana, con cui facilmente si ottengono le potestà, e si risolvono in serie le radici, e le frazioni.

XVII. Finisco il presente capitolo con esporre una proprietà interessante dei coefficienti d' una Equazione, la quale consiste in questo, che col mezzo dei coefficienti d' una Equazione si può esprimere in termini cogniti la somma di qualunque potestà delle radici, benchè queste sieno incognite. Eccone la pratica: Sia l' Equazione $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + Dx^{m-4} \ldots + P$. Le cui radici sieno $\varphi, \lambda, \pi, \mu$ &c. la somma delle quali facciasi $= M1$, inoltre suppongasi $M2 = \varphi^2 + \lambda^2 + \pi^2 + \mu^2$ &c. cioè eguale alla somma dei quadrati delle radici
$M3 = \varphi^3 + \lambda^3 + \pi^3 + \mu^3$ &c. e generalmente
$Mr = \varphi^r + \lambda^r + \pi^r + \mu^r$ &c. cioè eguale alla somma della potestà r delle radici, io dico che vagliono le seguenti Equazioni

$$M1 = A$$
$$M2 = AM1 - 2B$$
$$M3 = AM2 - BM1 + 3C$$
$$M4 = AM3 - BM2 + CM1 - 4D$$
$$\vdots$$
$$Mr = AM\overline{r-1} - BM\overline{r-2} + CM\overline{r-3} \ldots\ldots \pm rM.$$

Dalle quali, come l' oculare inspezione dimostra si hanno i valori $M1, M2, M3$ &c. dati per i soli coefficienti A, B, C &c. Quando mancano i termini nella proposta Equazione si suppongano i coefficienti eguali a zero. Benchè facile cosa sia comprendere la legge con cui si formano le predette Equazioni, non è per altro egualmente facile giustificarle con dimostraziozione, la quale suol richiedere un calcolo assai prolisso. Nel secondo Tomo di questo Compendio ci studieremo di provarle speditamente col ajuto del calcolo differenziale.

CAPO II.

Trasformazione delle Equazioni.

I. TRasformare una Equazione, siccome abbiamo detto nel Libro 2. Cap. 7. altro non è, che ritrovare una seconda Equazione mediante l' introduzione di una nuova incognita, le cui radici abbiano una certa relazione colle radici della proposta. Quindi si vede, che per eseguire una qualunqne trasformazione basta esprimere con una equazione tra l' incognita della proposta, e quella della trasformata, la relazione, la quale si vuole, che corra fra le radici, di questa, e di quella, ed in appresso eliminare la prima incognita coi metodi dati nel Libro 1. Capo quarto.

II. Principiamo dal trasformare una Equazione in un' altra, in cui sieno negative le radici, che nella proposta sono positive, ed al rovescio. Prendasi l' Equazione generalissima $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + C x^{m-3}$ &c. $= o$ e facciasi $x = -y$, eseguita la sostituzione di questo valor di x nella proposta equazione ci accorgeremo, che i termini in cui sono le potestà pari della x resteranno collo stesso segno, e i termini delle potestà dispari muteranno il segno, dal che si ricava l' operazione brevissima di cambiare da positive in negative, e al rovescio le radici di una equazione col solo cangiare il segno ai termini delle potestà dispari: così se nell' Equazione $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ si cangieranno i segni ai termini delle potestà dispari, onde sia $-x^3 - 2x^2 + 5x + 6$, ossia $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$, avrà questa equazione le radici come si voleva, ed in fatti le radici della proposta sono 3, 1, -2, e le radici della trasformata sono -3, -1, $+2$.

III. Vogliasi in secondo luogo trasformare una data equazione in un'altra, la quale abbia le sue radici maggiori, o minori per una certa quantità delle radici della proposta. Sia x l' incognita dell' equazione proposta, y quella della trasformata, ed n la quantità, della quale si vogliono aumentate o diminuite le radici della prima equazione. Volendosi y maggiore, o minore di x della quantità n, dovrà essere $y = x \pm n$, il segno $+$ serve per l' accrescimento delle radici, ed il segno $-$ per la diminuzione. Essendo $y = x \pm n$, sarà $x = y \mp n$; e sostituito $y - n$ in luogo di x nel caso di accrescere le radici, ed $y + n$ nel caso della loro diminuzione, si otterrà la trasformazione bramata.

IV. Si voglia trasformata l' Equazione $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ in un' altra, le cui radici sieno eccedute dell' unità dalle radici della proposta. Dovrà dunque essere $x = y + 1$, onde avremo

$$
\begin{array}{lcl}
x^4 & = & y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 \\
-5x^2 & = & \qquad\qquad -5y^2 - 10y - 5 \\
4 & = & \qquad\qquad\qquad\qquad + 4
\end{array}
$$

e sommando sarà $y^4 + 4y^3 + y^2 - 6y = 0$. Essendo le radici di questa Equazione 0, 1, -2, -3, e quelle della proposta 1, 2, -1, -2, ognun vede che queste superano quelle per l' unità, come si voleva. Si osservi ciò che accidentalmente è accaduto in questo esem-

esempio, cioè che la trasformata è divisibile per y, e perciò abbassabile ad un grado minore della proposta; dal che si ricava, che questa trasformazione alle volte può servire per deprimere l' Equazioni ad un grado inferiore. Se la trasformata debba avere le radici maggiori per l' unità delle radici dell' equazione in x si ponga $x = y - 1$, e fatte le sostituzioni si troverà $y^4 - 4y^3 + y^2 + 6y = o$, le cui radici -1, o, 2, 3, superano per l' unità le radici dell' Equazione in x, che sono $-2, -1, 1, 2$. Che poi i predetti numeri sieno le radici delle rispettive Equazioni, si può esperimentare col metterli nell' Equazione stessa in luogo dell' incognita, osservando se tutti i termini si elidano.

V. Per ottenere con maggior speditezza le trasformazioni sopraccennate si assuma l' Equazione generale $Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + Dx^{m-4} + \&c. = o$, in cui si debba sostituire $y + n$ ad x; essendo n una quantità negativa, quando si tratta di accrescere le radici, ed una quantità positiva, quando queste si vogliono diminuire. Per la formola Newtoniana esposta nel Capo precedente §. 14. sarà

$$Ax^m = A(y+n)^m = An^m + mAn^{m-1}y + \frac{m[m-1]}{2}An^{m-2}y^2 + m\frac{[m-1][m-2]}{2.3}An^{m-3}y^3 + \frac{m[m-1][m-2][m-3]}{2.3.4}An^{m-4}y^4 \&c.$$

$$Bx^{m-1} = B(y+n)^{m-1} = Bn^{m-1} + [m-1]Bn^{m-2}y + \frac{[m-1][m-2]}{2}Bn^{m-3}y^2 + \frac{[m-1][m-2][m-3]}{2.3.}Bn^{m-4}y^3 +$$

[m—1]

$$\frac{[m-1][m-2][m-3][m-4]}{2\cdot3\cdot4}Bn^{m-5}y^4 \text{ \&c.}$$

$$Cx^{m-2}=C(y+n)^{m-2}=Cn^{m-2}+[m-2]Cn^{m-3}y+$$
$$\frac{[m-2][m-3]}{2}Cn^{m-4}y^2+$$
$$\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{2\cdot3}Cn^{m-5}y^3+$$
$$\frac{(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{2\cdot3\cdot4}Cn^{m-6}y^4+\text{\&c.}$$

$$Dx^{m-3}=D(y+n)^{m-3}=Dn^{m-3}+(m-3)Dn^{m-4}y+$$
$$\frac{(m-3)(m-4)}{2}Dn^{m-5}y^2+$$
$$\frac{(m-3)(m-4)(m-5)}{2\cdot3}Dn^{m-6}y^3+$$
$$\frac{(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}{2\cdot3\cdot4}Dn^{m-7}y^4+\text{\&c.}$$

Dunque cominciando dall' ultimo termine, ed unendo quei che hanno l' y alla stessa potestà, sarà

$$An^m+Bn^{m-1}+Cn^{m-2}+Dn^{m-3}\text{ \&c.}+$$
$$\big(mAn^{m-1}+(m-1)Bn^{m-2}+(m-2)Cn^{m-3}-$$
$$(m-3)Dn^{m-4}+\text{\&c.}\big)y$$
$$+\Big(\frac{m(m-1)}{2}An^{m-2}+\frac{(m-1)(m-2)}{2}Bn^{m-3}+$$
$$\frac{(m-2)(m-3)}{2}Cn^{m-4}+\frac{(m-3)(m-4)}{2}$$
$$Dn^{m-5}+\text{\&c.}\Big)y^2$$

+

$$+\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}An^{m-3}\right.$$
$$+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 3}Bn^{m-4}$$
$$+\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{2\cdot 3}Cn^{m-5}$$
$$\left.+\frac{(m-3)(m-4)(m-5)}{2\cdot 3}Dn^{m-6}\ \&c.\right)y^3$$
$$+\left(\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 3\cdot 4}An^{m-4}\right.$$
$$+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2\cdot 3\cdot 4}Bn^{m-5}$$
$$+\frac{(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{2\cdot 3\cdot 4}Cn^{m-6}$$
$$\left.+\frac{(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}{2\cdot 3\cdot 4}Dn^{m-7}+\&c.\right)y^4+\&c.=0$$

VI. Raccogliamo le proprietà dei coefficienti dell' Equazione in y. In primo luogo si osserva, che l'ultimo termine della Equazione in y, non è altro, che l' Equazione proposta, in cui sia stato sostituito n in vece di x. Secondo, che il coefficiente del penultimo termine dell' Equazione in y si forma dal suo ultimo termine moltiplicando ciascheduno membro di questo pel suo esponente, e dividendolo per n. Terzo, che il coefficiente dell' antipenultimo termine si deduce dal coefficiente del penultimo, moltiplicando ciascun termine di questo coefficiente per la metà del suo esponente, e dividendolo per n. Quarto, che il Coefficiente del termine che precede l' antipenultimo si può

ri-

ricavare dal coefficiente di questo, moltiplicando ciascun de' suoi membri per la terza parte del suo esponente, e dividendolo ancora per n, e così in appresso. Dalle quali proprietà dei coefficienti dell' Equazione in y nasce un metodo generale ed egualmente facile per conseguire le trasformazioni di cui trattasi.

VII. Sia l' equazione $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = o$ da trasformarsi in un' altra, le di cui radici y sieno minori per la quantità n di quelle della proposta. Comincio dal mutare x in n, ed ottengo D'. Moltiplico ciascun termine di D' per il suo esponente, lo divido per n, ed ottengo C'. Moltiplico ciascun termine di C' per la metà del suo esponente, lo divido per n ed ho B'. Moltiplico ciascun termine di B' per il terzo del suo esponente, lo divido per n, e conseguisco A'. Moltiplico finalmente ciascun termine di A' per la quarta parte del suo esponente, lo divido per n, e ne nasce 1

$$\begin{array}{llll}
n^4 + An^3 + Bn^2 + Cn + D & = D' \\
4n^3 + 3An^2 + 2Bn + C & = C' \\
6n^2 + 3An + B & = B' \\
4n + A & = A' \\
1 & = 1
\end{array}$$

Si moltiplichi adesso C' per y, B' per y^2, A' per y^3, 1 per y^4, ed otterremo l' equazione trasformata

$$y^4 + A'y^3 + B'y^2 + C'y + D' = o, \text{ cioè}$$

$$\begin{array}{lllll}
y^4 + & 4n.y^3 + & 6a^2.y^2 + & 4n^3 . y + & n^4 \\
 & + A & + 3An & + 3An^2 & + An^3 = o \\
 & & + B & + 2Bn & + Bn^2 \\
 & & & + C & + Cn \\
 & & & & + D
\end{array}$$

VIII.

VIII. La trasformazione anzidetta è quella stessa, di cui ci siamo serviti nel Capo 7. del Libro 2. per togliere il secondo termine da una qualunque equazione. Potrebbe anche adoperarsi per togliere il terzo termine; ma siccome nel coefficiente del terzo termine della trasformata n ascende a due dimensioni; così per ottenere l' intento sarebbe necessario risolvere un equazione del secondo grado. Similmente per togliere il quarto termine sarebbe, d' uopo risolvere un' equazione del terzo grado; una del quarto per togliere il quinto termine, e così via discorrendo, in maniera che l' eliminazione dell' ultimo termine, non si potrebbe ottenere senza risolvere un' equazione affatto simile alla proposta; tutte le quali cose furono da noi notate nel Capo citato.

IX. Si trasforma in terzo luogo una equazione, quando si cangia in un' altra, le cui radici sieno a quelle della proposta in ragion data. Acciocchè si comprenda questa trasformazione sia l' Equazione generale $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3}$ &c. $= 0$, indi si faccia $x : y :: p : q$, onde sia $x = \frac{py}{q}$, e sostituendo questo valore di x nell' Equazion generale sarà

$$\frac{p^m y^m}{q^m} + \frac{A\overline{py}^{m-1}}{q^{m-1}} + \frac{B\overline{py}^{m-2}}{q^{m-2}} \text{ \&c.} = 0,$$ e moltiplicando l' Equazione per $\frac{q^m}{p^m}$ avremo

$$y^m + \frac{Aqy^{m-1}}{p} + \frac{Bq^2y^{m-2}}{p^2} + \frac{Cq^3y^{m-3}}{p^3} \text{ \&c.} = 0;$$

il che si sarebbe ottenuto immediatamente, se si fosse cangiata nell' Equazion proposta la x in y, e se si fosse in seguito moltiplicato ciascun termine di detta equazione per il termine corrispondente della progressione geometrica $1, \frac{q}{p}, \frac{q^2}{p^2}, \frac{q^3}{p^3}$ &c. cioè il primo di quella pel primo di questa, il secondo pel secondo &c. Egli è facile a comprendersi che le radici dell' equazione in y, saranno a quelle dell' Equazion in x nella data ragione di $q:p$.

X. La proposta Equazione sia $x^3+4x^2+x-6=o$, che à per radici $x=1$, $x=-2$, $x=-3$, e si voglia trasformare in un'altra, che abbia le radici doppie delle anzidette radici. Avremo la ragione di $q:p$ eguale alla ragione di $2:1$; quindi sarà $\frac{q}{p}=\frac{2}{1}$, e perciò operando come si è indicato nel numero precedente, si otterrà l' Equazione trasformata $y^3+8y^2+4y-48=o$, le cui radici 2, -4, -6 sono doppie, come ciascun vede, delle radici x. Se l' Equazione in x fosse priva di qualche termine, si rimpiazzi col zero.

XI. La sopraccennata trasformazione ci apre la strada di liberare l' Equazioni dai coefficienti fratti, senza che il primo termine venga a moltiplicarsi per alcuna quantità, che non sia l' unità, imperciocchè mettendosi sotto l' occhio l' Equazione generalissima trasformata come nel num. 9. si osserverà, che il coefficiente del secondo termine è $\frac{Aq}{p}$, quello del terzo è $\frac{Bq^2}{p^2}$ &c. se dunque sia $A=\frac{r}{s}$, $B=\frac{n}{t}$ &c. dovranno tali coefficienti essere $\frac{rq}{sp}$, $\frac{nq^2}{tp^2}$ &c. Per tanto se

fa-

faremo $p = 1$, $q = st$ &c. cioè eguale al predotto di tutti i denominatori dei coefficienti, sarà $\frac{Aq}{p} = rt$, $\frac{Bq^2}{p^2} = nts^2$ &c. cioè, saranno tutti i coefficienti della trasformata liberi da frazione.

XII. Sia per esempio l' Equazione $x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{7}x + \frac{1}{6} = 0$. Il prodotto dei denominatori $= q$ sarà $3 . 7 . 6$, e perciò sostituendo nell' Equazione in y in vece di q questo valore, ed in vece di p l' unità, otterremo $y^4 + 2 . 7 . 6\, y^3 + 3^3 . 7^2 . 6^3\, y + 3^4 . 7^4 . 6^3 = 0$, la quale è senza coefficienti fratti. Essendo il denominatore 6 divisibile per 3, e 2 essendo il quoto; in cambio di fare $q = 3 . 7 . 6$ si può fare $q = 3 . 7 . 2$, che pure l' Equazione in y verrebbe senza fratti: cioè sarebbe

$$y^4 + 2 . 7 . 2\, y^3 + 3^3 . 7^2 . 2^3 . + 3^3 . 7^4 . 2^3 = 0$$

cioè $y^4 + 28\, y^3 + 10584\, y + 518616 = 0$

XIII. Se si abbia in animo di trasformare un' equazione in un' altra, le cui radici sieno reciproche di quelle della proposta, non si avrà che a porre $x = \frac{1}{y}$, e sostituire $\frac{1}{y}$ in vece di x: così sostituito $\frac{1}{y}$ in vece di x nell' Equazione $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$, otteremo $\frac{1}{y^3} - \frac{2}{y^2} - \frac{5}{y} + 6 = 0$, cioè

$y^3 - \frac{5}{6}y^2 - \frac{y}{3} + \frac{1}{6} = 0$, le cui radici $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ sono reciproche delle radici della proposta che, sono $1, -2, 3$.

XIV. Con questa trasformazione le radici massime di un' equazione si cambiano in minime, e al rovescio, di modo che se supporremo, che le radici dell' Equazione in x disposte secondo l' ordine della loro grandezza sieno φ, π, λ, μ, quelle dell' Equazione in y disposte pure secondo l' ordine della loro grandezza saranno $\frac{1}{\mu}$, $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\pi}$, $\frac{1}{\varphi}$; è egli ancora evidente, che colla medesima trasformazione i primi termini della Equazione in x divengono ultimi della trasformata, e per lo contrario gli ultimi, primi; onde se avremo un' equazione, la quale sia mancante del penultimo termine, potremo facilmente conseguire un' altra, la quale manchi del secondo col solo sostituire $\frac{1}{y}$ in vece di x.

XV. Non posso astenermi dall' esporre un' altra maniera utilissima di trasformare le Equazioni; benchè mi convenga tralasciarne la dimostrazione, la quale non è adattata alla brevità di questi Elementi; può per altro vedersi appresso il Signor Della Grange nelle Memorie dell' Accademia di Berlino all' Anno 1767. Sia adunque l' Equazione generalissima $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} \ldots = 0$; $M1$, $M2$, $M3$ &c. fino ad $M\,m.\overline{m-1}$ disegnino la somma delle potestà delle radici di detta equazione fino alla potestà $m.\overline{m-1}$. quali somme sieno espresse per i coefficienti $-A$, B, $-C$ &c. siccome insegnammo n. 17. del Capo precedente. Indi colla seguente formola generale

$$\lambda n = nM2n - 2nM1 . M\overline{2n-1} + \frac{2n . \overline{2n-1}}{2} M2 . M\overline{2n-2} - \frac{2n . \overline{2n-1} . \overline{2n-2}}{2 . 3} M3 .$$

$M2n$

$M\overline{2n-3}$ &c. (in cui m è l' esponente dell' Equazion proposta, n può essere qualunque numero intiero positivo) si trovino i valori $K1$, $K2$, $K3$ &c. sostituendo successivamente in luogo di n i numeri intieri 1, 2, 3 &c. fino al numero $\frac{m.\overline{m-1}}{2}$ inclusivamente; si avverta di terminare la serie per ciascun valore di K, quando si giunga al termine, in cui qualche valore di M ascende alla seconda potestà, il quale inoltre si dee dividere per 2; così per il valore $K2$ si troverà

$$K2 = mM4 - 4M1M3 + \frac{4.3}{2}\frac{(M2)^2}{2};$$ per $K3$ sarà

$$K3 = mM6 - 6M1M5 + \frac{6.5}{2}M2M4 - \frac{6.5.4}{2.3}\frac{(M3)^2}{2}$$

i quali valori di K essendo dati per $M1$, $M2$. &c. saranno dati ancora per i coefficienti A, B, C &c. si faccia inoltre

$$a = K1$$

$$b = \frac{aK1 - K2}{2}$$

$$c = \frac{bK1 - aK2 + K3}{3}$$

$$d = \frac{cK1 - bK2 + aK3 - K4}{4}$$

&c. &c. &c.

fin-

finchè sieno esauriti i valori di K, onde a, b, c, d &c. saranno in numero $\frac{m . \overline{m-1}}{2}$, e saranno dati per A, B, C &c. Finalmente posta $r = \frac{m . \overline{m-1}}{2}$ si formi l'Equazione $z^r - a z^{r-1} + b z^{r-2} - c z^{r-3} + d z^{r-4}$ &c. $= 0$. Questa equazione è tale, che qualunque valore di z eguaglia il quadrato di una delle differenze fra due radici dell' Equazion proposta; così se due radici dell' Equazione in x sieno φ, π, sarà un valore di z che chiamo $z^1 = \overline{\varphi - \pi}^2$, e perciò $\sqrt{z^1} = \varphi - \pi$.

CAPO III.

Esponesi un metodo di stabilire il vero grado dell' Equazion determinata, che nasce da un numero di Equazioni indeterminate eguale al numero delle incognite, che esse contengono; e si applica lo stesso metodo per l' espulsione dei radicali dall' Equazioni.

I. Non ci tratterremo a riferire tutte le varie maniere, le quali si sogliono mettere in opera per tale oggetto, e saremo contenti di dar sol tanto in succinto il metodo assai semplice del Signor De Besout esposto nelle Memorie dell' Accademia delle Scienze per l' anno 1764. E comecchè questo metodo generale per l' equazioni di qualunque grado, si riduce finalmente ad eliminare l' incognite dalle Equazioni del primo grado, perciò bisogna richiamare alla memoria quanto sù di ciò si è detto nel Capo 4. del Libro 1.

Ai

Ai metodi ivi esposti piace quì aggiungere un altro, in cui si fà uso dei coefficienti indeterminati. Sieno primieramente le due Equazioni $ax+by=c$, $a'x+b'y=c'$; si moltiplichi la prima equazione per n, la quale così moltiplicata si aggiunga alla seconda, avremo $(na+a')x+(nb+b')y=nc+c'$; e posto uguale a zero il coefficiente d' una di queste due incognite, si determinerà la n; per mezzo di cui si farà sparire dall' Eqnàzione una incognita: facciasi per esempio $nb+b'=o$, sarà $n=\frac{-b'}{b}$, il qual valore sostituito nell' Equazion precedente, nascerà l' Equazione $\left(\frac{-b'}{b}a+a'\right)x=\frac{-b'}{b}c+c'$, in cui vi è una sola incognita; Se si fosse voluto eliminare piuttosto la x, conveniva porre $na+a'=o$, da cui si cava $n=-\frac{a'}{a}$, e $(b'-\frac{a'}{a}b)y=c'-\frac{a'c}{a}$. Sieno tre equazioni, e tre incognite $ax+by+cz=d$, $a'x+b'y+c'z=d'$, $a''x+b''y+c''z=d''$; moltiplicata la prima per n, e la seconda per n', e sommate tutte tre insieme, si avrà $(an+a'n'+a'')x+(bn+b'n'+b'')y+(cn+c'n'+c'')z=dn+d'n'+d''$; e fatta $an+a'n'+a''=o$, $bn+b'n'+b''=o$, si determinerà con queste due equazioni i valori di n, n', e sostituiti nell' Equazione qui sopra, svaniranno i termini in cui vi è la x e la y, e rimarrà il termine in cui esiste la z. Fatto poi $an+a'n'+a''=o$, $cn+c'n'+c''=o$, si avrà un' equazione colla sola incognita y; siccome fatto $bn+b'n'+b''=o$, $cn+c'n'+c''=o$, si avrà un' equazione colla sola incognita x. Se quattro fossero l' equazioni, e quattro le incognite si moltiplicheranno tre equazioni per tre coef-

fieiennell' altra ſia $n-u$, tali ſono

$$Ay^{n}+By^{n-1}+Cy^{n-2}+Dy^{n-3} \text{ \&c.} = 0$$
$$A'y^{n-u}+B'y^{n-u-1}+C'y^{n-u-2}+D'y^{n-u-3} \text{ \&c.} = 0$$

in cui A, B, C &c., A', B', C', &c. contengono l' altra incognita x, e quantità note. Si moltiplichi la prima equazione per A', e la ſeconda per Ay^{u}, onde derivi una terza equazione, in cui la maſſima poteſtà di y ſia $n-1$, fatta cioè al ſolito la ſottrazione della ſeconda dalla prima. Si moltiplichi in ſeguito la prima equazione per $A'y+B'$, e la ſeconda per $Ay^{u+1}+By^{u}$ e ſottraendo queſto ſecondo prodotto dal primo, avremo una quarta equazione pure riſpetto ad y del grado $n-1$; In ſeguito ſi ſoſtituiſca il valore di y^{n-u}, che ſi ricaverà dalla ſeconda delle Equazioni date, ſi ſoſtituiſca dico nelle poteſtà di y maggiori di y^{n-u-1} eſiſtenti nelle equazioni terza e quarta; le quali dopo tal ſoſtituzione ſaranno tutte in riguardo al y del grado $n-u-1$; onde con queſte due Equazioni per le coſe dette nel numero precedente ſi potrà fare ſparire l' y.

V. Se abbiaſi più di due equazioni, ed altrettante incognite; ſi faccia prima con due equazioni ſparire un' incognita; e con due altre ſparire facciaſi la ſeconda, e così di mano in mano facendo ſparire l' altre, ſi giungerà ad una equazione di una ſola incognita. L' Autore di queſto metodo dimoſtra nel luogo citato, che l' Equazione finale non contiene la x a grado maggiore elevata di quello, che convenga; il che non ſempre ſi ottiene colli altri metodi.

VI. Nei caſi particolari ſpeſſo ſuccede di evitare con qualche induſtria i calcoli proliſſi, nei quali per lo più ci inviluppano i metodi generali, che abbiamo, per eliminare l' incognite: ſieno per eſempio tre equazioni $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=b$, $xz=y^2$; faccio il quadrato dell' u-

no;

no, e dell' altro membro della seconda equazione, cioè $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz=b^2$; e ponendo y^2 in vece di xz, che gli è uguale per la terza equazione, sarà $x^2+y^2+z^2+2y.(x+y+z)=b^2$; ma per la prima equazione abbiamo $x^2+y^2+z^2=a^2$, e dalla seconda $x+y+z=b$; dunque sostituendo sarà $a^2+2by=b^2$, da cui deducesi $y=\frac{b^2-a^2}{2b}$, con che è facile poi ritrovare il valore delle altre incognite.

VII. Il metodo di cui abbiamo fin quì parlato è attissimo a liberare l' Equazioni dai radicali. Ciascuno dei radicali contenuti nella data equazione esprimasi per z, y, u &c.; nasceranno tante equazioni quanti radicali, le quali avendo soli due termini, potranno sempre rendersi razionali elevandole a quella potestà, che conviene. Inoltre sostituendo nella proposta equazione, in luogo dei radicali, le incognite corrispondenti z, y, u &c. si otterrà un' altra equazione anch' essa razionale: adunque se il numero dei radicali sia r, si avrà un numero $r+1$ di Equazioni razionali ed un numero r di incognite z, y, u &c. le quali eliminate col metodo di questo capo, si giungerà ad una equazione senza l' incognite z, y, u &c. e perciò senza radicali. Prendiamo ad esempio l' equazione $a=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$; pongasi $\sqrt[3]{x}=u$, $\sqrt[3]{y}=z$, ed alzando al cubo sarà $x=u^3$, $y=z^3$, e collocato nell' Equazion proposta u, e z in vece dei loro uguali, sarà $a=u+z$; abbiamo adunque tre equazioni razionali, cioè $x=u^3$, $y=z^3$, $a=u+z$, e due incognite z ed u da eliminarsi; ciò eseguito si otterrà una equazion razionale colle sole incognite x, y,

VIII. I radicali si possono eliminare dall' Equazione ancora nella maniera che sono per esporre in un esempio facile, ma che per altro è atto a far comprendere l' universalità del metodo. Si voglia liberare dai radicali l' Equazione $x+\sqrt{a}+\sqrt{b}=0$. Si finga un' equazione coi coefficienti indeterminati del grado, che risulta dalla moltiplicazione degl' indici dei radicali, la quale nel presente caso sarà di quarto grado, perchè gli indici dei radicali sono 2, e 2, che moltiplicati insieme danno 4; onde l' Equazione sia

$x^4+\varphi x^3+\pi x^2+\mu x+\lambda=0$: si faccia per brevità $p=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, e si divida per $x+p$ l' equazione finta $x^4+\varphi x^3$ &c. avremo per residuo $p^4-\varphi p^3+\pi p^2-\mu p+\lambda$: si sostituisca in vece di p il suo valore, e sarà

$$\begin{aligned}
p^4 &= a^2+b^2+6ab+4.\overline{a+b}.\sqrt{ab}\\
-\varphi p^3 &= -\varphi a\sqrt{a}-\varphi b\sqrt{b}-3\varphi a\sqrt{b}-3\varphi b\sqrt{a}\\
+\pi p^2 &= \pi a+\pi b+2\pi\sqrt{ab}\\
-\mu p &= -\mu\sqrt{a}-\mu\sqrt{b}\\
+\lambda &= +\lambda
\end{aligned}$$

Se questo residuo fosse zero, sarebbe $x+p$ un divisore perfetto della equazione $x^4+\varphi x^3$ &c.; inoltre se φ, π, μ, λ non contenessero radicali, l' equazione $x^4+\varphi x^3$ &c. sarebbe libera dai radicali; e perciò sarebbe l' equazione desiderata. Si finga adunque questo residuo uguale a zero, in maniera però che sieno zero tutti i termini senza i radicali; e tutti i termini, che contengono lo stesso radicale; avremo per tanto le equazioni che seguono $a^2+b^2+6ab+\pi a+\pi b+\lambda=0$, $-\varphi a-\mu-3\varphi b=0$, $-\varphi b-\mu-3\varphi a=0$;

$4 . \overline{a+b} + 2\pi = o$: e perciò farà $\pi = - 2 . \overline{a+b}$, $\lambda = - a^2 - 6ab - b^2 + 2 . \overline{a+b}^2 = \overline{a-b}^2$; ϕ, e μ si ritrovano uguali a zero, per ciò l' Equazione finta di quarto grado si convertirà nella seguente $x^4 - 2 . \overline{a+b} . x^2 + \overline{a-b}^2 = o$, la quale come si vede è libera dai radicali; ed à per fattore $x + \sqrt{a} + \sqrt{b} = o$; l'altro fattore, che è di terzo grado rispettivamente alla x, pure conterrà dei radicali; e si suole chiamare *reciproco* in riguardo al primo; la prerogativa di questi fattori è che moltiplicati insieme diano un prodotto razionale.

IX. Il Signor Varing Matematico Inglese espelle i radicali dall' equazione in questo modo. Si voglia esente dai radicali l' Equazione $x + \sqrt{a} + \sqrt{b} = o$, si trovino tutti i valori di questa espressione, i quali sono quattro, perchè ciascun radicale di secondo grado à due valori; i valori adunque sono i seguenti $x + \sqrt{a} + \sqrt{b}, x + \sqrt{a} - \sqrt{b}, x - \sqrt{a} + \sqrt{b}, x - \sqrt{a} - \sqrt{b}$; si faccia il prodotto di tutti questi fattori, il quale darà una equazione priva di radicali; ed in fatti moltiplicando i due primi frà loro farà il prodotto $x^2 + 2x\sqrt{a} + a - b$, e gli altri due daranno per prodotto $x^2 - 2x\sqrt{a} + a - b$; e di nuovo fatta la moltiplicazione di questi due prodotti avremo l' equazione di quarto grado $x^4 - 2 . \overline{a+b} . x^2 + \overline{a-b}^2 = o$, che è senza radicali.

X. Alle volte nei casi particolari si espellono i radicali con maggior facilità, di quello, che permette l' esposto metodo. Sia l' Equazione $\sqrt{x^3} + a\sqrt{x} =$

$\frac{c^2}{\sqrt{x}}$, si moltiplichi l' Equazione per $\sqrt{x}$, e sarà libera dai radicali. Alle volte si ottiene l' intento lasciando da una parte del segno di eguaglianza un radicale, ed elevando l' Equazione alla potenza indicata dall' indice del radicale stesso: sia $a = \sqrt[3]{bx^2} + c$: si faccia $a - c = \sqrt[3]{bx^2}$, ed elevando a terza potenza si otterrà l' equazione $\overline{a-c}^3 = bx^2$ libera dai radicali. Questo metodo, quando i radicali sieno più di uno spesso riesce inutile. Coll' opportuna sostituzione si liberano speditamente l' equazioni dai radicali. Sia $a = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$, elevando a cubo sarà $a^3 = x + y + 3\sqrt[3]{x^2y} + 3\sqrt[3]{y^2x} = x + y + 3\sqrt[3]{xy}\ (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})$; ma abbiamo $a = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$; dunque sostituendo sarà $a^3 = x + y + 3a\sqrt[3]{xy}$, ed $(a^3 - x - y)^3 = 27a^3xy$ equazione razionale.

XI. Sia l' Equazione $x - \sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b} = 0$, che si voglia scevra di radicali, sarà $x = \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$, ed $x^2 - 2\sqrt[4]{ab} = \sqrt[4]{a^2} + \sqrt[4]{b^2}$, ed $x^4 - 4x^2\sqrt[4]{ab} + 4\sqrt[4]{a^2b^2} = a + b + 2\sqrt[4]{a^2b^2}$; $x^4 - a - b + 2\sqrt[4]{a^2b^2} = 4x^2\sqrt[4]{ab}$, ed $\overline{x^4 - a - b}^2 + 4ab = 16x^4\sqrt[4]{a^2b^2} - 4\cdot\sqrt[4]{a^2b^2} \times \overline{x^4 - a - b} = 4\sqrt[4]{a^2b^2}\cdot(3x^4 + a + b)$; onde sarà $[x^8 - 2x^4\cdot\overline{a+b} + a^2 - 6ab + b^2]^2 = 16ab\,[3x^4 + a + b]^2$; Equazione libera dai radicali.

CAPO IV.

Risoluzione delle Equazioni, che hanno fattori razionali di qualunque grado.

I. FAttore razionale di una equazione è quello, che non contiene quantità alcuna radicale: tal è $x + \pi$ relativamente all' equazione $x^2 \begin{matrix}+\varphi\\+\pi\end{matrix} x + \varphi\pi = 0$.

I fattori razionali si dicono di quel grado, a cui in essi ascende l' incognita; così $x + \pi$ si dirà fattore razionale di primo grado della predetta equazione; ed $x^2 + \pi x + \varphi^2$ si dice fattore razionale del secondo grado dell' equazione $x^3 \begin{matrix}+\pi\\+\lambda\end{matrix} x^2 \begin{matrix}+\pi\lambda\\+\varphi^2\end{matrix} x + \lambda\varphi = 0$, perchè la x nel primo fattore è alla prima dimensione, e nell' altro ascende alla seconda. Quando le equazioni dotate sieno di fattori razionali di qualunque grado, sarà sempre in nostro potere il ritrovarli col metodo, che or ora esporremo, dopo d' aver dimostrato, che l' equazione $x^p + A x^{p-1} + B x^{p-2} + C x^{p-3} + D x^{p-4}$ &c. $= 0$, posti A, B, C, D &c. numeri intieri, non possa avere alcun valore della x eguale ad una frazione razionale. La dimostrazione di questa verità è semplicissima. Sia dunque, se è possibile $x = \frac{m}{n}$, e sieno m, ed n numeri tra loro primi, cioè che non abbiano per comun divisore se non se l' unità. Eseguita la sostituzione del valore di x, otterremo $\frac{m^p}{n^p} + \frac{A m^{p-1}}{n^{p-1}} + \frac{B m^{p-2}}{n^{p-2}}$ &c. $= 0$, e moltiplicando per n^{p-1}, sarà $\frac{m^p}{n} + A m^{p-1} + B m^{p-2} n$ &c. $= 0$,

ed

ed $\frac{m^p}{n} = -A m^{p-1} - B m^{p-2} n$ &c.; ma il secondo membro di questa equazione è intiero; dunque lo sarà eziandio $\frac{m^p}{n}$, il che è impossibile; imperocchè essendo $\frac{m}{n}$ una frazione in numeri primi, $\frac{m^p}{n}$ non può essere intiero, se n non sia l' unità: poichè essendo $\frac{m}{n}$ frazione in numeri primi, ed $\frac{m^p}{n} = \frac{m}{n} . m^{p-1}$ intiero, dovrà essere m^{p-1} multiplo di n, ovvero lo stesso n; dunque $\frac{m^{p-1}}{n}$ sarà intiero. Per la stessa ragione sarà intiero $\frac{m^{p-2}}{n}$, $\frac{m^{p-3}}{n}$, $\frac{m^{p-4}}{n}$ &c. fino ad $\frac{m}{n}$; il che, essendo m, n numeri primi, non può accadere, se non nell' ipotesi di $n = 1$, ed in conseguenza di $x = m$. Resti dunque stabilito, che qualsivoglia equazione, il cui termine della massima potestà dell' incognita non abbia coefficiente diverso dall' unità, nè gli altri termini sieno intrigati da frazioni, resti, dico, stabilito, che tale equazione non può avere valori della x razionali fratti.

II. Veniamo ora al metodo di rintracciare i divisori razionali delle equazioni, il quale da noi a cagion di brevità sarà applicato solamente alle equazioni numeriche, tanto più che seguendo le stesse traccie non è difficile farne uso nelle equazioni litterali. Sia pertanto l' equazione generalissima

$x^r + A x^{r-1} + B x^{r-2} + C x^{r-3} \dots\dots + P = 0$, e si voglia in primo luogo esaminare se essa contenga fattori razionali di primo grado. Io qui suppongo, che la proposta equazione sia libera da frazioni, potendosi ciò si ciò sempre conseguire coi metodi indicati al Capo 2. di questo libro. Da questa supposizione immediatamente ne deduco, che se la proposta equazione è dotata di fattori razionali, non saranno essi in alcuna maniera intrigati da frazioni; altrimenti qualche valore della x sarebbe una frazione, contro ciò, che si è dimostrato al numero precedente. Fingasi $x-\pi=0$ essere un fattore di quelli, che cerchiamo, cioè razionale, e per questo si divida la proposta equazione x^r+Ax^{r-1} &c.....$+P=0$. Eseguita la divisione si troverà $\pi^r+A\pi^{r-1}+B\pi^{r-2}+C\pi^{r-3}....+P$ essere il residuo, il quale converrà, che sia eguale a zero, perchè supponesi $x-\pi$ essere un fattore dell'equazione. Dunque avremo $\pi^r+A\pi^{r-1}+B\pi^{r-2}...P=0$, e $P=-\pi^r-A\pi^{r-1}-B\pi^{r-2}$ &c.; e chiamati M, N, Q, R, T &c. i coefficienti dei termini dell'equazione $\pi^r+A\pi^{r-2}+B\pi^{r-2}+C\pi^{r-3}$ &c. incominciando dal termine, in cui π è alla semplice dimensione; sarà $P=-M\pi-N\pi^2-Q\pi^3-R\pi^4-T\pi^5...-\pi^r$; dal che si viene in cognizione, che sia P divisibile per π, e che perciò il valore razionale della x sia un divisore intiero dell'ultimo termine dell'equazione proposta. Dividasi l'ultima equazione per π, e pongasi $\frac{P}{\pi}=P'$, sarà $P'+M=-N\pi-Q\pi^2-R\pi^3-T\pi^4...-\pi^{r-1}$; onde rilevasi, che $P'+M$ è divisibile per π. Chiamato $\frac{P'+M}{\pi}=M'$ con lo stesso raziocinio si dimostrerà $M'+N$ divisibile per π; ed essendo il quoto N' si troverà similmente $N'+Q$ divisibile per π, come ancora si troverà per π divisibile $Q'+R$, ed $R'+T$, chiamato $(N'+Q):\pi=Q'$, e $(Q'+R):\pi=R'$; dunque P, $P'+M$, $M'+N$, $N'+Q$, $Q'+R$, $R'+T$

&c. (fino a che sieno esauriti tutti i coefficienti dei termini dell' equazione proposta) devono essere per π divisibili, posto che π sia un valore razionale della x. Se fra questi coefficienti si annoveri ancora l' unità coefficiente della massima potestà dell' incognita, ognun vede, che compita tutta l' operazione sarà il risultato eguale a zero.

III. Dall' esposta teoria si ricava una maniera assai spedita di scoprire i fattori razionali semplici di qualunque equazione, che suppongo libera da frazioni, e paragonata al zero. Si ritrovino tutti i divisori intieri razionali del termine ultimo dell' equazione; ed eseguite le divisioni di esso termine con ciascun divisore, ai quoti si aggiunga il coefficiente del penultimo termine: le somme, che risultano, si dividano per i predetti rispettivi divisori; e se le divisioni succedono esatte, ai quoti aggiungasi il coefficiente dell' antipenultimo termine, e si seguitino a dividere le somme risultanti sempre per i predetti rispettivi divisori; e proseguendo tale operazione fin che sieno esauriti tutti i coefficienti dei termini della proposta equazione, se gli ultimi risultati saranno zero, si conchiuderà, che i divisori intieri razionali dell' ultimo termine dell' equazione sono i valori della x, e che perciò sottratti dalla x tali valori, cioè uno per volta, si avranno altrettanti fattori razionali semplici della data equazione. Se poi nel fare tale operazione s' incontri qualche somma non divisibile pel suo divisore rispettivo, di questo divisore non si terrà alcun conto: e se tutti i divisori incontreranno simile difficoltà, sarà ciò indizio certo, che l' equazione non ha fattore alcuno semplice razionale. Avvertasi per altro di operare nella maniera indicata non solo coi divisori dell' ultimo termine presi positivamente, ma ancor con li stessi presi

nega-

negativamente, acciocchè la prova riesca eseguita sopra tutti i divisori razionali intieri dell' ultimo termine dell' equazione senza lasciarne fuori alcuno.

IV. Si dilucidi colli esempi l' esposta dottrina

A	1,	2,	4,	5,	10,	20
B	— 20,	— 10,	— 5,	— 4,	— 2,	— 1
C	— 16,	— 6,	— 1,	0,	2,	3
D	— 16,	— 3,		0		
E	9,	22,		25		
F	9,	11,		5		
G	4,	6,		0		
H	4,	3,		0		
I	— 1,	— 2,		— 5		
K	— 1,	— 1,		— 1		
L	0,	0,		0.		

Abbiasi da esaminare se sianvi fattori razionali di primo grado nell' Equazione $x^5 - 5x^4 - 5x^3 + 25x^2 + 4x - 20 = 0$. In linea orizzontale *A* scrivo ordinatamente tutti i divisori intieri razionali di 20, incominciando da 1, e nella linea orizzontale *B* scrivo i quoti, che nascono dal dividere l'ultimo termine dell' Equazione — 20 per ciascun divisore separatamente; ed avverto di scrivere i quoti sotto i rispettivi divisori in linea verticale: così sotto il divisore 5, che esiste nella linea *A*, vi è il quoto — 4 nella linea *B*, il quale nasce dividendo — 20 per 5. Ai quoti *B* aggiungo il 4, coefficiente del penultimo termine dell' Equazione, e noto le somme nella linea orizzontale C, ciascuna sotto il quoto da cui è nata col aggiunzione del 4, e perciò ciascuna somma verrà ad essere in linea verticale con un divisore della linea *A*: così il zero sarà la somma della linea *C* corrispondente in linea verticale al divisor 5 della linea *A*; ed eseguita la divisione di ciascuna somma pel rispettivo divisore, segno i quoti, che ritrovo numeri intieri nella linea *D*, ciascun in linea verticale col divisore suo, e non curo i quoti fratti, i quali mi indicano, che i loro divisori non fanno al caso. Si noti, che nella linea orizzontale *D* sotto il divisore 5 si dee scriver zero, perchè $\frac{0}{5}$ è eguale a zero, il qual quoto deesi considerare come intiero, e non come fratto, avendo il zero qualunque numero per divisore. Aggiungo ora ai quoti della linea *D* il 25, coefficiente dell' antipenultimo termine dell' Equazione, e coll' ordine solito colloco le somme nella linea *E*, le quali divise per i rispettivi divisori danno i quoti, che sono nella linea *F*; a questi aggiunto -5 coefficiente del terzo termine dell' equazione risultano le somme, che sono nella linea *G*, e fatte le solite divisioni, abbiamo i quoti disposti a dovere nella linea *H*. Nella linea *I* vi sono questi quoti aggiuntovi -5, coefficiente del secondo termine dell' Equazione; in *K* vi sono queste somme divise pel divisore rispettivo; e finalmente in *L* vi sono i quoti della linea *K* accresciuti dell' unità coefficiente del primo termine dell' Equazione. E comecchè questi risultati sono zero, conchiudo che i rispettivi divisori 1, 2, 5 sono altrettanti valori della x, e che per ciò $x-1$, $x-2$, $x-5$ sono tre divisori semplici razionali dell' Equazione proposta.

A

A	—1,	—2,	—4,	—5,	—10,	—20
B	20,	10,	5,	4,	2,	1
C	24,	14,	9,	8,	6,	5
D	—24,	—7				
E	1,	18				
F	—1,	—9				
G	—6,	—14				
H	6,	7				
I	1,	2				
K	—1,	—1				
L	0,	0				

Dispongo inoltre nella linea orizzontale *A* i divisori intieri razionali del 20 presi negativamente, e sotto questi nella linea *B* colloco al solito i quoti nati dalla divisione dell' ultimo termine —20 dell' Equazione, ciascun sotto il suo divisore; a questi quoti aggiungo il 4, coefficiente del penultimo termine dell' Equazione; e dispongo le somme col noto ordine nella linea *C*, le quali divise per i divisori sovrapposti ottengo sol tanto due quoti intieri —24, —7, corrispondenti ai divisori —1, —2; i quoti —24, —7 collocati nella linea *D* si accrescano del 25, coefficiente dell' antipenultimo termine, e le somme 1, 18 sieno nella linea *E*, e fatta di queste somme la consueta divisione, avremo i quoti in *F*, e continuando l' operazione, che stimo superfluo tenervi dietro più minutamente, si arriverà agli ultimi risultati in *L* sottoposti ai divisori —1, —2, i quali risultati sono zero; dunque —1, —2 sono valori negativi della x, e perciò $x+1$, $x+2$ sono fattori semplici razionali dell' Equazione data. Questa Equazione per tanto è cin-

cinque fattori semplici razionali, cioè tre positivi 1, 2, 5, e due negativi —1, —2.

V. L' Equazione $x^4 - x^3 - 9x^2 - 3x - 36 = 0$ si debba sottoporre all' esame per indagare i fattori semplici razionali

A	1,	2,	3,	4,	6,	9,	12,	18,	36
B	—36,	—18,	—12,	—9,	—6,	—4,	—3,	—2,	—1
C	—39,	—21,	—15,	—12,	—9,	—7,	—6,	—5,	—4
D	—39,		—5,	—3					
E	—48,		—14,	—12					
F	—48			—3					
G	—49			—4					
H	—49			—1					
I	—48			0					

In *A* si ritrovano i divisori dell' ultimo termine —36 ed in *B* i rispettivi quoti, i quali accresciuti del —3, sono in C; In *D* abbiamo i quoti intieri delle predette somme divise per i divisori sovrapposti, i quali quoti sono —39, —5, —3, che si ritrovano in linea verticale coi suoi divisori 1, 3, 4 esistenti nella linea orizzontale *A*; in E vi sono i quoti predetti accresciuti del —9; in *F* i soliti quoti intieri; in *G* questi quoti accresciuti del —1, coefficiente del secondo termine dell' Equazione; in *H* i quoti &c. ed in *I* gl' ultimi risultati —48, 0, e comecchè il zero è sottoposto al divisore 4, esistente nella linea *A*, si inferisca, che $x - 4$ è uno dei divisori ricercati. Se si farà lo stesso esame coi divisori del 36 presi negativamente, troveremo un altro divisore semplice razionale, cioè $x + 3$. Ed in fatti la divisione della proposta Equazione per questi fattori riesce esatta, anzi se si di-

vi-

viderà l' Equazione per x^2-x-12 prodotto dei predetti divisori, nasce per quoto $x^2+3=0$, da cui si ricavano le altre due radici $x=+\sqrt{-3}$, $x=-\sqrt{-3}$, ambe immaginarie.

VI. Vengono ora in considerazione i fattori razionali di secondo grado, i quali, significando m, ed n quantità razionali, deono avere la forma che segue x^2+mx+n. Per rintracciare se una data Equazione abbia fattori di questa specie, si faccia attualmente la divisione della data Equazione pel fattore x^2+mx+n, in cui per ora m, ed n sono indeterminate, con che si giungerà ad un residuo, i di cui termini in parte conterranno la x a prima dimensione, ed in parte saranno privi affatto della x, cioè il residuo avrà questa forma $Mx+N$; e comecchè questo residuo dee essere zero, se x^2+mx+n abbia da essere divisore dell' Equazione; dunque per far ciò verificare fingasi $Mx=0$, ed $N=0$, e coll' ajuto di queste due equazioni si giunga ad una Equazione determinata, nella quale siavi la sola m, o la sola n, come si stimerà più opportuno, e si esamini se questa equazione abbia valori semplici razionali; nella supposizione, che se ne trovi alcuno, avremo un valore razionale della m, o della n; con cui si passi a determinare il valore dell' altra indeterminata, il quale trovato razionale, e fatta la sostituzione di amendue i valori cioè di m ed n nel trinomio x^2+mx+n, conseguiremo un fattore razionale di secondo grado della nostra Equazione. Se più saranno i valori razionali di m, ed n, e più fattori di tal natura otterremo.

VII. Dividasi l' Equazione $x^4-x^3-9x^2+3x-36=0$ per x^2+mx+n; avremo il residuo $(2mn+n-3+9m-m^2-m^3)x+n^2+9n-m^2n$

$m^2n - mn - 36$, il quale residuo posto eguale a zero, in maniera però che la somma dei termini, che moltiplicano la x, e la somma di quelli, che non la moltiplicano sia zero, nasceranno le due seguenti Equazioni $2mn + n - 3 + 9m - m^2 - m^3 = 0$, ed $n^2 + 9n - m^2n - mn - 36 = 0$; dalla combinazione di queste due equazioni in varie maniere, specialmente seguendo il metodo, che si è insegnato nel Capo precedente, si può giungere ad una Equazione data soltanto per m, o per n; per altro si richiede qualche industria per schivare il calcolo alquanto prolisso, e nojoso. Ecco la strada che io scelgo; dalla prima delle due Equazioni predette ricavo immediatamente $n = (m^3 + m^2 - 9m + 3) : (2m + 1)$, e dalla seconda $n^2 - n.(m^2 + m - 9) - 36 = 0$, pongo $m^2 + m - 9 = r$, e sostituendo ho $n = (rm + 3) : (2m + 1)$, ed $n^2 - rn = 36$; da quest' ultima equazione ricavo $n = \frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} + 36}$, e paragonati i due valori di n sarà

$$(rm + 3) : (2m + 1) = \frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} + 36}, \text{ cioè}$$

$$rm + 3 - mr - \frac{r}{2} = \overline{2m+1} \times \sqrt{\frac{r^2}{4} + 36} \text{ ossia}$$

$$6 - r = \overline{4m+2} \,.\, \sqrt{\frac{r^2}{4} + 36}, \text{ e quadrando}$$

$36 - 12r + r^2 = 4r^2m^2 + 4mr^2 + r^2 + 36.16m^2 + 36.16m + 144$, ovvero $(r^2 + 144).(m^2 + m) + 3r + 27 = 0$, e ponendo in vece di r il suo valore dato per m, si avrà l' Equazione di sesto grado

m^6

$m^6 + 3m^5 - 15m^4 - 35m^3 + 210m^2 + 228m = 0$; da cui subito ricavo $m = 0$, il qual valore collocato nell' Equazione $n = \frac{rm + 3}{2m + 1}$, ottengo $n = 3$; onde il divisore $x^2 + mx + n$ fatte le sostituzioni dei valori di m, ed n, cioè 0, 3, diverrà $x^2 + 3$, il quale sarà un divisore razionale di secondo grado dell' Equazione proposta. L' Equazione determinata di sesto grado, in cui m è l' incognita, à il fattore semplice razionale $m + 1 = 0$, il che si scopre col metodo del numero terzo, e perciò $m = -1$; questo valore di m si sostituisca nell' Equazione $n = \frac{rm + 3}{2m + 1}$, sarà $n = r - 3 = m^2 + m - 9 - 3 = -12$, sostituendo sempre -1 in vece di m: la proposta Equazione pertanto avrà un altro fattore razionale di secondo grado, cioè $x^2 - x - 12 = 0$, ed in realtà per i divisori quì assegnati è essa esattamente divisibile, anzi uno è il quoziente della divisione eseguita coll' altro.

VIII. Se dividasi un' Equazione per un fattore del terzo grado indeterminato, cioè $x^3 + mx^2 + nx + r = 0$, si verrà ad un residuo, che avrà questa forma $Mx^2 + Nx + R = 0$; si faccia verificare questa Equazione col porre $M = 0$, $N = 0$, $R = 0$, e così si otterranno tante Equazioni, quante sono le indeterminate m, n, r; onde si potrà sempre giungere ad una Equazione d' una sola indeterminata per esempio m; si esamini se questa abbia valori razionali, e se fatte le sostituzioni per fissare l' altre indeterminate col valore razionale di essa, pur si ottengano valori razionali per ciascuna indeterminata; e se ciò avvenga, mettansi i loro valori nel quadrinomio $x^3 + mx^2 + nx + r$, con che conseguiremo i divisori razionali del terzo grado delle equazioni, ogniqualvolta tali divisori sieno possibili. Non mi dilungo in discorrere dei divisori razionali del quarto, quinto &c. grado, perchè si vede subito, che il metodo è generale, e che tutta la difficoltà consiste in saper maneggiare con destrezza il calcolo, acciocchè non stanchi la pazienza dell' Analista.

CAPO V.

Varii casi, in cui l' Equazioni si riducono a grado inferiore.

I. DAremo principio dall' Equazioni, in cui sonovi radici uguali. Sia l' Equazion generalissima $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + C x^{m-3}$ &c. $= 0$, pongasi $y = x - \varphi$, o sia $x = y + \varphi$, e sostituendo in vece di x questo valore nella proposta, si avrà come si è dimostrato nel Capo secondo

$$\varphi^m + A\varphi^{m-1} + B\varphi^{m-2} + C\varphi^{m-3} \text{ \&c.} +$$

$$(m\varphi^{m-1} + (m-1)A\varphi^{m-2} + (m-2)B\varphi^{m-3} \text{ \&c.})\,y +$$

$$\left(\frac{m.(m-1)}{2}\varphi^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}A\varphi^{m-3} + \frac{(m-2)(m-3)}{2}B\varphi^{m-4} \text{ \&c.}\right)y^2 +$$

$$\left(\frac{m.(m-1)(m-2)}{2.3}\varphi^{m-3} + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3}A\varphi^{m-4} + \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3}B\varphi^{m-5} \text{ \&c.}\right)y^3 \text{ \&c.} \ldots + y^m = 0.$$

La

La proposta equazione abbia due radici uguali, una delle quali sia φ; ciascun vede, che nell' Equazione trasformata $y = x - \varphi$ dovrà necessariamente avere due valori uguali al zero; per verificarsi ciò, si esige, che svaniscano i due ultimi termini dell' Equazione in y, dovendo essa esser divisibile per y^2; dunque sarà $\varphi^m + A\varphi^{m-1} + B\varphi^{m-2} + C\varphi^{m-3}$ &c. $= 0$, ed ancor $m\varphi^{m-1} + (m-1)A\varphi^{m-2} + (m-2)B\varphi^{m-3}$ &c. $= 0$; e perciò φ dee far verificare la proposta equazione $x^m + Ax^{m-1}$ &c. $= 0$, siccome ancor l' altra $mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2}$ &c. $= 0$, la quale si ottiene moltiplicando ciascun termine della proposta nel suo esponente, indi dividendolo per x: è facile a vedersi, che questa seconda Equazione abbia per valore della x la φ una volta meno di quello, che l' abbia l' Equazione proposta; perchè essa è il coefficiente del secondo termine dell' Equazione in y, che chiamo N, principiando a contare dall' ultimo, e l' Equazione proposta è appunto l' ultimo termine, il quale chiamo M; onde nella supposizione di $y = 0$ sarà $M = Ny$, e perciò se M à due volte per divisore y, N l' avrà una volta sola.

II. Collo stesso metodo si dimostra, che se la proposta equazione $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2}$ &c. $= 0$ avrà un numero n di radici $= \varphi$, l' altra Equazione $mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2}$ &c. avrà radici $= \varphi$ di numero $n-1$; onde $\overline{x - \varphi}^{\,n-1}$ sarà un divisore comune delle due equazioni. Ciocche s' è detto di più radici eguali a φ, vale per più radici eguali a π, λ &c.; se adunque si troverà il massimo comune divisore delle due Equazioni M, N, questo conterrà le radici eguali dell' Equazion proposta, ma inalzate ad una potestà minore di una unità. Sia P il predetto massimo comun divisore, e si divida M per P, ed il quoto ſi faccia $= M'$, conterrà M' le radici dell' Equazion propoſta, le quali però ſaranno tutte a ſemplice poteſtà. Troviſi ora tra M' e P il maſſimo comun diviſore, che chiamo P', conterrà P' tutte le radici eguali, ma a ſemplice poteſtà; ſe per P' dividaſi M', onde il quoziente ſia M'', conterrà M'' le radici diſeguali dell' Equazion propoſta; le quali coſe ſono faciliſſime a comprenderſi ſenza ulteriore ſpiegazione.

III. Sia ora un' Equazione, la quale contenga radici eguali nella quantità, ma una ſia poſitiva e l' altra negativa come ſarebbe $x = a$, $x = -a$. Oſſervo in primo luogo, che in queſte Equazioni la x non potrà ritrovarſi a ſole poteſtà diſpari; imperciocchè poſto che tale equazione ſia $x^t + A x^{t-2} + B x^{t-4} \ldots + K = o$ in cui t è numero diſpari, e meſſa in primo luogo a in vece di x, ſarà $a^t + A a^{t-2} + B a^{t-4} \ldots + K = o$, ſoſtituita in ſeguito $-a$ per x, ſarà $-a^t - A a^{t-2} - B a^{t-4} \ldots + K = o$, e ſommate queſte due Equazioni, ſarebbe $2 K = o$, il che è un aſſordo. Se poi l' Equazione abbia le ſole poteſtà pari, allora è ſegno che tutte le ſue radici ſono tali, che una ne eguaglia un' altra preſa col ſegno contrario; e l' Equazioni di ſimil ſpecie ſempre ſi abbaſſano per lo meno ad un grado minore per la metà del grado loro, ponendo $x^2 = y$, e ſoſtituendo; onde ſe l' equazione in x non ſupera il grado ottavo, quella in y non ſupererà il qnarto, e perciò i valori della x ſi potranno ſempre in tal ſuppoſizione determinare. Finalmente l' Equazione contenga poteſtà pari, e diſpari della x; dividaſi detta Equazione in due parti una delle quali, che chiamo M, ſia la ſomma dei termini, in cui x è a poteſtà pari, più il termine noto; e l' altra, che chiamo $N x$, ſia la ſomma dei termini, in cui x è a poteſtà diſpari; io

dico

dico che tanto M, quanto N andranno eguali al zero, se in vece di x ponganſi le radici, che ſi eguagliano in grandezza, ma hanno ſegno contrario; imperciocchè M è inalterabile comunque in vece di x vi ſi ponga la radice, cioè col ſegno $+$, o col ſegno $-$; in Nx poi tutti i termini quantunque ſieno inalterabili nella quantità, paſſano però dal poſitivo al negativo o al roveſcio col ſoſtituire in vece di x la ſteſſa radice preſa prima col ſegno $+$, indi col ſegno $-$; Ciò poſto ſia $M + Nx = 0$ ponendo in vece di x, $+a$; e ſia ſimilmente $M - Nx = 0$ ſoſtituendo $-a$ alla x; ſommando, e ſottraendo queſte due Equazioni ſi troverà $N = 0$, $M = 0$; come ſopra aſſerimmo. Da ciò ne ſegue che il maſſimo comun diviſore di M, e di N, che chiamo R, dovrà contenere le radici, che ſi eguagliano preſe col ſegno contrario; non potrà, per quello, che ſi è detto, contenere la x a ſole poteſtà diſpari, anzi dovrà contenerla a ſole poteſtà pari, perchè in M, ed in N non ſonovi, che poteſtà pari di x. Se adunque R non ſupera l' ottavo grado ſi potranno ſempre determinare i valori della x, che appartengono alla Equazion propoſta. Vogliaſi per cagion d' eſempio eſaminare ſe l' Equazione ſeguente $x^6 + x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4 = 0$ abbia radici, delle quali una ne eguagli un' altra preſa col ſegno contrario. Ecco la pratica faciliſſima. Divido $x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 4$, per $x^4 + 4x^2 + 4$, cioè M per N, e non curato il quoto ottengo per reſiduo $x^2 + 2$, divido ora N cioè $x^4 + 4x^2 + 4$ per $x^2 + 2$, ed ottengo per reſiduo zero; dunque $x^2 + 2$ è il maſſimo comun diviſore di M ed N, il quale dee contenere le radici ricercate, che ſono appunto $x = \sqrt{-2}$, $x = -\sqrt{-2}$ immaginarie.

IV. E generalmente φ e λ sieno due radici dell' Equazione $x^m + A x^{m-1} \ldots + K = 0$, e sia λ data per φ e quantità note; Facciasi X funzione di x, come λ è di φ, e pongasi $X = y$, dalla quale equazione si determini x per y, e quantità note; e poi sostituiscasi nell' Equazion proposta in vece di x il suo valore, onde abbiasi l' Equazion in y, cioè $y^n + A' y^{n-1} + B' y^{n-2} \ldots + K' = 0$. Egli è certo che passa fra φ ed una radice dell' Equazione in y quella stessa relazione, che passa fra x ed X, cioè fra φ e λ; dunque una radice dell' Equazione in y sarà eguale a λ, e per ciò se nell' Equazione in y si cangi y in x; le due Equazioni $x^m + A x^{m-1}$ &c., $x^n + A' x^{n-1}$ &c. avranno un comun divisore; si ritrovi il massimo comun divisore di queste due Equazioni, da cui si ricaverà il valore di λ, indi il valore di φ. Avvertasi che questo metodo esige che l' Equazione $X = y$ sia risolubile, acciocchè si possa determinare il valore di x per y.

Sappiasi per cagion di esempio, che due radici dell' Equazione $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$, moltiplicate insieme eguagliano 6. Sarà adunque $\varphi\lambda = 6$, e $\lambda = \frac{6}{\varphi}$, e perciò $\frac{6}{x} = X = y$; dunque $x = \frac{6}{y}$, e sostituendo nell' Equazione proposta $\frac{6}{y}$ in vece di x, sarà $2y^3 - 7y^2 - 3y + 18 = 0$, e cangiando y in x, otterremo $2x^3 - 7x^2 - 3x + 18 = 0$. Il massimo comun divisore di questa e della proposta è $x^2 - 5x + 6$; da cui si ricava $x = 2$, $x = 3$, che saranno φ, e λ dell' Equazione data.

V. Passiamo ora alle Equazioni, che chiamansi convertibili, altre delle quali sono di grado dispari, altre di grado pari, quelle di grado dispari sono comprese

in

in una delle seguenti due formole, in cui i coefficienti, e la quantità a può essere positiva, e negativa

I $x^{2m+1} + A a x^{2m} + B a^2 x^{2m-1} + C a^3 x^{2m-2} \dots\dots$
$+ P a^m x^{m+1} + P a^{m+1} x^m \dots\dots + C a^{2m-2} x^3$
$+ B a^{2m-1} x^2 + A a^{2m} x + a^{2m+1} = 0.$

II $x^{2m+1} + A a x^{2m} + B a^2 x^{2m-1} + C a^3 x^{2m-2} \dots\dots$
$+ P a^m x^{m+1} - P a^{m+1} x^m \dots\dots - C a^{2m-2} x^3$
$- B a^{2m-1} x^2 - A a^{2m} x - a^{2m+1} = 0.$

Quelle poi di grado pari; sono contenute in una del tre seguenti in cui similmente a, A, B &c. possono essere comunque positive, e negative

I $x^{2m} + A a x^{2m-1} + B a^2 x^{2m-2} + C a^3 x^{2m-3} \dots\dots$
$+ P a^m x^m \dots + C a^{2m-3} x^3 + B a^{2m-2} x^2 + A a^{2m-1} x$
$+ a^{2m} = 0.$

II $x^{4m} + A a x^{4m-1} + B a^2 x^{4m-2} + C a^3 x^{4m-3} \dots\dots$
$+ P a^{2m} x^{2m} \dots - C a^{4m-3} x^3 + B a^{4m-2} x^2 - A a^{4m-1} x$
$+ a^{4m} = 0.$

III $x^{4m+2} + A a x^{4m+1} + B a^2 x^{4m} + C a^3 x^{4m-1} \dots\dots$
$+ P a^{2m+1} x^{2m+1} \dots\dots + C a^{4m-1} x^3 - B a^{4m} x^2$
$+ A a^{4m+1} x - a^{4m+2} = 0.$

VI. Egli è evidente che sieno queste formole generali per tal modo costituite, che mettendo nelle tre prime $\dfrac{a^2}{x}$ in luogo di x, e nelle due ultime $-\dfrac{a^2}{x}$ in luogo della stessa x, l' equazione non soffra cangiamento, ma rimanga quale era prima; la qual cosa indica, che le radici delle Equazioni convertibili sono reciproche le une alle altre; il che si può confermare con questo discorso: le radici della proposta deono

essere

essere reciproche a quelle della trasformata pel §. 13 del Capo 2. di questo libro; ma nel caso presente la trasformata è la stessa della proposta; adunque la proposta avrà le sue radici reciproche, e perciò chiamando φ una qualunque delle dette radici vi dovrà essere fra le altre $\frac{a^2}{\varphi}$. Da ciò ne segue, che dovendo essere dispari nell' Equazioni di grado dispari, il numero delle radici, ne segue dico, che tra esse ve ne sia una reciproca di se stessa; onde converrà, che sia $\varphi = \frac{a^2}{\varphi}$, o sia $\varphi^2 = a^2$; il che fà vedere, che tutte le equazioni convertibili avranno una radice uguale ad a, o $-a$, che però saranno esattamente divisibili per $x - a$, o per $x + a$. Pertanto se prenderemo la prima delle nostre formole generali di grado dispari, e se uniremo insieme i termini ugualmente lontani dal mezzo, cioè il primo coll' ultimo, il secondo col penultimo, e così discorrendo, onde sia

$$(x^{2m+1} + a^{2m+1}) + A x a (x^{2m-1} + a^{2m-1})$$
$$+ B a^2 x^2 (x^{2m-3} + a^{2m-3}) \ldots P a^m x^m (x + a) = 0:$$

e collocata $-a$ nelle quantità chiuse tra parentesi in vece di x, l' equazione si ridurrà a zero. Lo stesso ancora succede se si operi nella medesima maniera intorno la seconda formola generale delle Equazioni convertibili di grado dispari, ponendo per altro $+a$ in vece di x. Per la qual cosa l' Equazioni convertibili di grado dispari della prima formola saranno divisibi per $x + a$, e quelle della seconda per $x - a$.

VII. Si eseguiscano attualmente le divisioni, ed otterremo il quoziente della prima formola divisa per $x + a$, che avrà la forma seguente

x^{2m+1}

$$\frac{x^{2m+1}+a^{2m+1}}{x+a}=x^{2m}-ax^{2m-1}+a^2x^{2m-2}\ldots\ldots$$

$$+a^{2m-2}x^2-a^{2m-1}x+a^{2m}$$

$$Aax\left(\frac{x^{2m-1}+a^{2m-1}}{x+a}\right)=Aax^{2m-1}-Aa^2x^{2m-2}\ldots$$

$$-Aa^{2m-2}x^2+Aa^{2m-1}x$$

$$Ba^2x^2\left(\frac{x^{2m-3}+a^{2m-3}}{x+a}\right)=Ba^2x^{2m-2}\ldots Ba^{2m-2}x^2$$

&c. &c.

E raccogliendo insieme tutti questi quozienti parziali ed ordinando la somma per x, e ponendola $=o$, avremo l' Equazione di grado pari $x^{2m}+(A-1)ax^{2m-1}+(B-A+1)a^2x^{2m-2}\ldots+(B-A+1)a^{2m-2}x^2+(A-1)a^{2m-1}x+a^{2m}=o$, che è una equazion convertibile. Dalla seconda formola generale divisa per $x-a$ nasce un' altra formola convertibile di grado pari, cioè $x^{2m}+(A+1)ax^{2m-1}+(B+A+1)a^2x^{2m-2}$ &c. $=o$.

VIII. Resta ora da vedere come l' Equazioni convertibili di grado pari possono abbassarsi. Si prenda la prima delle tre formole generali dell' equazioni convertibili di grado pari, la quale divisa per x^m darà

$$\left(x^m+\frac{a^{2m}}{x^m}\right)+Aa\left(x^{m-1}+\frac{a^{2m-2}}{x^{m-1}}\right)\ldots+Pa^m=o;$$

facciasi $x+\frac{a^2}{x}=y$, ed elevandolo al quadrato, al cubo &c. si otterrà $x^2+2a^2+\frac{a^4}{x^2}=y^2$, $x^3+\frac{a^6}{x^3}+3a^2\left(x+\frac{a^2}{x}\right)=y^3$, &c. e perciò abbiamo $x^2+\frac{a^4}{x^2}=$

 y^2-

$y^2 - 2a^2$, $x^3 + \frac{a^6}{x^3} = y^3 - 3a^2y$, sostituendo y in vece di $x + \frac{a^2}{x}$: così ancora $\left(x + \frac{a^2}{x}\right)^4 = x^4 + 4a^2x^2 + 6a^4 + 4\frac{a^6}{x^2} + \frac{a^8}{x^4} = x^4 + \frac{a^8}{x^4} + 4a^2\left(x^2 + \frac{a^4}{x^2}\right) + 6a^4 = y^4$; si sostituisca in vece di $x^2 + \frac{a^4}{x^2}$ il suo eguale $y^2 - 2a^2$, ed avremo $x^4 + \frac{a^8}{x^4} = y^4 - 4a^2y^2 + 2a^4$, e generalmente $x^r + \frac{a^{2r}}{x^r} = y^r - ra^2y^{r-2} + \frac{r.(r-3)}{2}a^4y^{r-4} - \frac{r.(r-4)(r-5)}{2.3}a^6y^{r-6} + \frac{r.(r-5)(r-6)(r-7)}{2.3.4}a^8y^{r-8}$ &c. la qual serie deesi rompere subito che si giunge ad una potenza negativa di y. Si possono ancora ritrovare i valori di $x^r + \frac{a^{2r}}{x^r}$ dati per y ed a adoperando la formola, con cui ritrovansi le somme delle potestà delle radici da noi esposta al num. 17. del Capo I. di questo libro, facendo far figura di due radici ad x, ed $\frac{a^2}{x}$, e ponendo $y = x + \frac{a^2}{x}$ in luogo della loro somma $M1$, ed $x^2 + \frac{a^4}{x^2}$ in luogo di $M2$ &c. ed a^2 in luogo di B somma degli ambi, e zero in luogo di C, D, &c. somma dei terni, quaterni &c.; onde sarà

$M1 = y$
$M2 = yM1 - 2a^2 \qquad = y^2 - 2a^2$
$M3 = yM2 - \quad a^2M1 = y^3 - 3a^2y$
$M4 = yM3 - \quad a^2M2 = y^4 - 4a^2y^2 + 2a^4$
$M5 = yM4 - \quad a^2M3 = y^5 - 5a^2y^3 + 5a^4y$
&c. &c. &c.

dal quale andamento non è difficile ritrovare la formola generale per $x^r + \frac{a^{2r}}{x^r}$. Si sostituiscano questi valori di $x + \frac{a^2}{x}$, $x^2 + \frac{a^4}{x^2}$ &c. nell' Equazione di sopra trovata $\left(x^m + \frac{a^{2m}}{x^m}\right) + Aa\left(x^{m-1} + \frac{a^{2m-2}}{x^{m-1}}\right)$&c.$=0$ e si avrà una nuova equazione colla incognita y, che sarà del grado m, cioè di un grado minor per la metà del grado che à la proposta. Se questa equazione in y sarà risolubile, sostituendo le sue radici nella supposta equazione $x + \frac{a^2}{x} = y$, ovvero $x^2 - yx + a^2 = 0$ si avranno colla risoluzione di questa tutte le radici della proposta. Nella stessa numero maniera si opera per abbassare l' Equazioni convertibili di grado pari contenute nell' altre due formole, col solo divario, che in vece di $x + \frac{a^2}{x} = y$, si dee fare $x - \frac{a^2}{x} = y$. Ognuno può di ciò facilmente convincersi da se medesimo unendo insieme i termini equidistanti delle dette formole, e dividendo la prima per x^{2m}, e la seconda per x^{2m+1}. Sia l' equazione convertibile $x^4 + 3ax^3 + 2a^2x^2 + 3a^3x + a^4 = 0$. Si divida questa equazione per x^2; onde fia $x^2 + \frac{a^4}{x^2} + 3a.\left(x - \frac{a^2}{x}\right) + 2a^2$:

e ponendo $x + \frac{a^2}{x} = y$, e fostituendo farà $y^2 - 2a^2 + 3ay + 2a^2$; cioè $y^2 + 3ay = 0$; da cui ricavo $y = 0$, $y = -3a$, e per ciò avremo $x + \frac{a^2}{x} = 0$; $x + \frac{a^2}{x} = -3a$; dalla prima di queste equazioni ricavo $x = \pm\sqrt{-aa}$ immaginaria, e dalla feconda ottengo $x^2 + 3ax = -a^2$, cioè $x = -\frac{3a}{2} \pm \sqrt{\frac{5a^2}{4}}$.

IX. Vengono prefentemente in confiderazione i binomj $x^m \pm a^m = 0$, i quali rifoluti danno $x = \sqrt[m]{\mp a^m}$, o fia $x = a\sqrt[m]{\mp 1}$; onde fe troveremo tutte le radici *mefime* dell' unità tanto pofitiva, quanto negativa, potremo affegnare eziandio tutte le radici di qualfivoglia equazione, che non contenga più di due termini; e per cio la foluzion completa di quefte equazioni dipende dalla foluzione delle due $x^m + 1 = 0$, $x^m - 1 = 0$, fia m un numero compofto uguale a pq, farà $x^{pq} + 1 = 0$, $x^{pq} - 1 = 0$, e fi fupponga $x = y^q$, farà, fatta la foftituzione, $y^p \pm 1 = 0$; fuppeniamo ora che fieno noti i valori di y, cioè tutti i valori *pefimi* dell' unità, uno de' quali fia φ, farà $x^q = \varphi$, e perciò $x = \sqrt[q]{\varphi}$; ora fe fi moltiplichi $\sqrt[q]{\varphi}$ per tutti i valori *quefimi* dell' unità, uno dei quali fia π, farà $x = \pi\sqrt[q]{\varphi}$; i valori *quefimi* dell' unità dipendono dalla foluzione dell' Equazione $z^q - 1 = 0$, chi troverà adunque le radici di $y^p \pm 1 = 0$, $z^q - 1 = 0$, avrà trovato ancora le radici di $x^{pq} \pm 1 = 0$. E di

quì

quì si conosce, che per avere la soluzione dell' Equazione $x^m \pm 1 = o$, basta trovare questa soluzione nel caso, che m sia un numero primo. Tutti i numeri primi sono dispari eccettuatone il 2, in questo secondo caso sarà l' equazione $x^2 - 1 = o$, ed $x = 1$, $x = -1$, così avremo ancora $x^2 + 1 = o$, ed $x = \sqrt{-1}$, $x = -\sqrt{-1}$; e nel primo caso se l' equazione sia $x^m + 1 = o$, posto $-x$ in luogo di x l' equazione si cangia in $x^m - 1 = o$; resta pertanto che vediamo come si possono ritrovare tutte le radici dell' equazione $x^m - 1 = o$ nella supposizione, che m sia un numero primo dispari.

X. Il binomio $x^m - 1 = o$ è una equazion convertibile, in cui i coefficienti A, B &c. sono zero; una delle sue radici è $x = 1$; dunque sarà divisibile per $x - 1 = o$, ed eseguita la divisione si avrà un' altra equazion convertibile $x^{m-1} + x^{m-2}$ &c. $+ x^2 + x + 1 = o$ per lo §. 5. Se ora faremo $x + \frac{1}{x} = y$, e mediante questa equazione se elimineremo la x, avremo, come si è fatto vedere §. 8. una nuova equazione coll' incognita y del grado $\frac{m-1}{2}$, la quale sarà risolubile, purchè il grado $\frac{m-1}{2}$ sia minore del quinto grado, ossia $m < 11$. Donde segue che coll' esposto metodo possiamo dare la soluzione completa delle equazioni $x^3 - 1 = o$, $x^5 - 1 = o$, $x^7 - 1 = o$, e quindi ancora di tutte le altre della forma $x^m \pm 1 = o$, purchè sia $m = 3^\varphi \times 5^\pi \times 7^\mu$; e perchè sappiamo ancora risolvere l' Equazione $x^2 \pm 1 = o$, potremo eziandio risolvere tutte quelle della medesima forma, purchè l'

espo-

esponente sia un numero composto della seguente maniera, cioè $m = 2^{\lambda} \times 3^{\varphi} \times 5^{\pi} \times 7^{\mu}$, le lettere greche esprimono numeri intieri e positivi, e possono denotare ancora il zero. Si vogliano per esempio le cinque radici dell' Equazione $x^5 - 1 = 0$, una di queste è l' unità, divisa poi l' equazione per $x - 1$ nascerà $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$, pongo $y = x + \frac{1}{x}$, avremo $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$; ora dividendo la predetta nuova equazione per x^2, avremo $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0$; dunque $y^2 + y - 1 = 0$; donde si trae $y = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$; ma è $y = x + \frac{1}{x}$, e però $x^2 - xy + 1 = 0$; dunque $x = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} - 1}$, e collocando successivamente in vece di y i suoi valori dianzi trovati, sarà

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \pm \sqrt{\frac{-10-2\sqrt{5}}{16}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \pm \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}} \,.\, \sqrt{-1},$$

ed

$$x = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \pm \sqrt{\frac{-10+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \pm \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}} \,.\, \sqrt{-1}.$$

Ecco dunque determinate le cinqne radici quinte dell' unità. Le radici seste, e settime dell' unità dipendono dalla risoluziozione dell' equazione del terzo grado: le ottave, none, e decime, non conducono ad equazioni più alte del quarto grado; le undecime poi richiedono la risoluzione dell' Equazioni del quinto grado, che non si sà fin ora, generalmente parlando, eseguire. Quantunque non si abbia una generale risoluzione analitica del binomio $x^m + a^m = o$, sappiamo però esprimere tutte le sue radici mediante la divisione della periferia del Circolo in parti uguali, come faremo vedere nel. Capo 10.

XI. Dalla soluzione completa delle Equazioni di due soli termini, ossia de' binomii, dipende la soluzione completa di moltissime altre equazioni; le quali ne contengono un maggior numero, tali sono le seguenti

$$x^{2m} + A x^m + B = o$$
$$x^{3m} + A x^{2m} + B x^m + C = o$$
$$x^{4m} + A x^{3m} + B x^{2m} + C x^m + D = o.$$

Imperocchè posta $x^m = y$, e sostituendo sarà

$$y^2 + A y + C = o$$
$$y^3 + A y^2 + B y + C = o$$
$$y^4 + A y^3 + B y^2 + C y + D = o.$$

Le quali si sanno risolvere, e perciò si sanno determinare i valori di y; si chiami qualunque di essi $= \phi$, avremo $y = \phi = x^m$, che è una equazione a due termini, da cui ricavasi $x + \pi \sqrt[m]{\phi}$; chiamo π una qualunque delle radici *mesime* dell' unità; dunque si sanno trovare tutti i valori di x delle equazioni sopra esposte.

XII. Dalla compiuta risoluzione dei binomii dipende ancora la soluzione compiuta delle equazioni, che an-

no

no la seguente forma $y^m - m a^2 y^{m-2} + \frac{m.[m-3]}{2} a^4 y^{m-4} - \frac{m.[m-4].[m-5]}{2.3} a^6 y^{m-6} + \frac{m.[m-5][m-6][m-7]}{2.3.4} a^8 y^{m-8} \&c. \ldots + b^m = 0$ in cui a^2, e b^m possono essere quantità positive, e negative come si vuole; si faccia $x + \frac{a^2}{x} = y$, e con questa equazione eliminata la y dalla proposta, ed introdotta la x, si avrà (§. 8.) $x^m + \frac{a^{2m}}{x^m} + b^m = 0$ cioè $x^{2m} + a^{2m} + b^m x^m = 0$, ed

$$x = \pi \times \overline{-\frac{b^m}{2} + \sqrt{\frac{b^{2m}}{4} - a^{2m}}}^{\frac{1}{m}}$$

; π è una qualunque delle radici $m$esime dell' unità; ma si è supposto $y = x + \frac{a^2}{x}$; dunque $y =$

$$\pi \times \overline{-\frac{b^m}{2} + \sqrt{\frac{b^{2m}}{4} - a^{2m}}}^{\frac{1}{m}} + \frac{a^2}{\pi \times \overline{-\frac{b^m}{2} + \sqrt{\frac{b^{2m}}{4} - a^{2m}}}^{\frac{1}{m}}}$$

, e moltiplicando il numeratore, e denominatore della frazione per

$$\overline{-\frac{b^m}{2} - \sqrt{\frac{b^{2m}}{4} - a^{2m}}}^{\frac{1}{m}}$$

, ed inoltre il numeratore

per

per π^m, il che si può fare salva l' uguaglianza per essere $\pi^m = 1$, avremo finalmente

$$y = \pi \times \overline{-\frac{b^m}{2} + \sqrt{\frac{b^{2m}}{4} - a^{2m}}}^{\frac{1}{m}} \pm$$

$$\pi^{m-1} \times \overline{-\frac{b^m}{2} - \sqrt{\frac{b^{2m}}{4} - a^{2m}}}^{\frac{1}{m}}$$. Una parte del valore di y si moltiplica per π e l' altra per π^{m-1}, perchè queste due porzioni moltiplicate insieme deono dare a^2, corrispondendo una ad x, e l' altra ad $\frac{a^2}{x}$, che moltiplicate insieme danno a^2. Per la stessa ragione il segno $+$ valerà quando a^2 è positiva, ed il segno $-$ quando a^2 sia negativa ed m numero pari; imperciocchè in questo secondo caso, per essere $y = x - \frac{a^2}{x}$, il prodotto di queste due parti sarà $-a^2$, a cui dee essere uguale il prodotto delle due porzioni della radice y; e comecchè ciò non si può ottenere se non prendasi il segno negativo, dunque è chiara la ragione di quanto asserimmo. Questi valori della y quantunque non si possano tutti esprimere algebraicamente, si possono ciò non ostante rappresentare tutti mediante i Seni, e Cosseni circolari, ed iperbolici, come vedremo nel Capo 9. di questo libro.

XIII. Il Signor Bezout in una Memoria inserita negli Atti dell' Accademia di Parigi per l' Anno 1761 dà un' idea di un metodo generale per tentare la risoluzione dell' Equazioni d' ogni grado, che pongo sotto l' occhio nel seguente esempio. Vogliansi investigare le radici dell' Equazione del terzo grado $x^3 + px + q = 0$; a questo fine si formino l' Equazioni $y^3 = 1$, $x = ay + by^2$, mediante queste due Equazioni si elimini la y, il che si potrà ottenere, se non altro, coi metodi del Capo terzo di questo libro. Si moltiplichi pertanto la seconda per y, indi per y^2, e si ponga in vece di y^3 il suo valore $= 1$ dedotto dalla prima, avremo queste altre due Equazioni $xy = ay^2 + b$, $xy^2 = a + by$; se ora colle due equazioni $x = ay + by^2$, $xy = ay^2 + b$ si trovino i valori di y e di y^2, e questi si sostituiscano nell' altra $xy^2 = a + by$, si avrà $x^3 - 3abx - a^3 - b^3 = 0$, equazione la quale paragonata ci somministra $3ab = -p$, $a^3 + b^3 = -q$, da cui eliminando b nasce $a^6 + qa^3 - \frac{p^3}{27} = 0$, dalla quale Equazione del sesto grado, chè facilmente si riduce al secondo, si potranno ricavare i valori di a. Chiamisi ϕ uno dei valori di a dedotto dalla predetta equazione, e u il valore corrispondente di b dedotto dall' Equazione $3ab = -p$; si avrà $x = \phi y + uy^2$, nel quale valore di x sostituendo successivamente i tre valori dell' unità ricavati dall' Equazione $y^3 - 1 = 0$, si conseguiranno le tre cercate radici dell' Equazion proposta. Da quest' esempio si può abbastanza comprendere, come tal metodo si debba applicare all' Equazioni dei gradi superiori. Avvertasi per altro, che l' Equazioni, le quali servono a definire le indeterminate a, b, c &c. ascendono generalmente ad un grado maggiore della proposta, e sebbene credano alcuni, che la loro soluzione non racchiuda, se non se la difficoltà dei gradi inferiori a quello della proposta medesima; pure ciò non è stato per anco dimostrato con tutto il rigore, ne si è fatta co-

no-

nofcere la maniera di confeguire il lor abbaffamento; oltredichè i calcoli riefcono fommamente lunghi e complicati da fcoraggire qualunque paziente Analifta. Si potranno per altro con quefto metodo rifolvere le equazioni fuperiori al quarto grado, fe non generalmente, almeno in moltiffimi cafi particolari di qualche eftenfione, come fi raccoglie dalla citata memoria del Signor Bezout.

XIV. Havvi ancora un altro metodo per tentare la foluzione dell' Equazioni di qualunque grado, mediante alcune Equazioni, che fi chiamano *Suffidiarie*; fi vede l' andamento di quefto metodo nell' efempio, che fegue. Sia propofta l' Equazione del quarto grado $\begin{array}{l} x^4 + a x^3 + a a x x - a^2 b x - a^3 b = o \\ - a b x x \end{array}$. Si prendano due Equazioni fuffidiarie del fecondo grado $x x + y x + u = o$, $x x + s x + z = o$ nelle quali le quantità y, u, s, z fono quantità indeterminate, da determinarfi nel progreffo di quefto calcolo; fi moltiplichino l' Equazioni fuffidiarie, onde fia

$$\begin{array}{l} x^4 + y x^3 + u x^2 + u s x + z u = o, \\ + s x^3 + s y x^2 + z y x \\ + z x^2 \end{array}$$

Ciafcun dei termini di queft' Equazione fi confronti col fuo corrifpondente dell' Equazion propofta; dal paragone dei fecondi termini nafce $s = a - y$; dal paragone degli ultimi abbiamo $z = -\frac{a^3 b}{u}$, dei quarti $y z + s u = - a^2 b$; fi foftituifcano in quefta i valori s, z, acciocchè fi abbia l' Equazione tra y, ed u, cioè $y = \frac{a u^2 + a^2 b u}{u u + a^3 b}$. Dovendo effere $z u = - a^3 b$

converrà che z, ed u sieno due divisori di $-a^3b$, e di più deono essere di secondo grado, perchè l' Equazioni sussidiarie sono di secondo grado. Tutti i divisori di secondo grado dell' ultimo termine sono $\pm ab$, $\pm aa$, $\pm a\sqrt{ab}$. Fingiamo $u=ab$, sarà $y=\frac{2ab}{a+b}$; adunque una delle Equazioni sussidiarie sarà $xx+\frac{2abx}{a+b}+a^2b=0$. Ma comecchè tentata la divisione dell' Equazion proposta per questa sussidiaria non riesce; perciò questa equazione sussidiaria è inutile. Si prenda l' altro divisore $-ab$, a cui fatta eguale la u, si troverà $y=0$, e l' Equazione sussidiaria sarà $xx-ab=0$; con questa divisa l' equazione proposta, abbiamo per quoto $xx+ax+aa=0$; dunque l' Equazion data si risolve nelle due $xx-ab=0$, $xx+ax+aa=0$. Se avessimo preso $u=aa$, si sarebbe trovato $y=a$, e la formola sussidiaria sarebbe $xx+ax+aa=0$, per cui divisa la proposta Equazione nascerebbe il quoto $xx-ab=0$. Se poi tentati tutti i divisori la divisione non riesca, l' Equazione almeno con questo metodo non sarà risolubile. Se si voglia schivare la divisione, si determinino i valori di y, s, z col mezzo di u, e si collochino nelle equazioni sussidiarie, se queste moltiplicate insieme daranno l' Equazion proposta, avremo ottenuto l' intento; altrimenti si dovranno tentare altri divisori. Ma con maggior facilità si potrà fare quest'esame coll' ajuto dell' Equazione $u+sy+z=aa-ab$, di cui non si è fatto uso alcuno, e che nasce dal paragone del terzo termine dell' equazion proposta col terzo dell' Equazione nata dalle sussidiarie fra loro moltiplicate; se i valori adunque di u, y, s, z messi nella predetta equazione, la renderanno identica, serviranno

essi

essi alla desiderata risoluzione, al contrario, saranno inutili. La risoluzione dell' Equazioni del quinto grado si può tentare con due sussidiarie, una del secondo, e l' altra del terzo; quella del sesto grado si può tentare con due del terzo, o con una del secondo, e l' altra del quarto; ma nei gradi superiori il calcolo riesce intrigatissimo, e spesso conviene risolvere delle equazioni di alto grado; e perciò l' utilità di questo metodo è dentro certi limiti ristretta.

XV. I' Signor Dottore Malfatti Professore di Matematica nell' Università di Ferrara in una dotta Dissertazione, che si contiene nel tomo quarto degli Atti dell' Accademia di Siena, finge queste formole $x+m\sqrt{f}=0$, $x+m\sqrt[3]{f^2}+n\sqrt[3]{f}=0$, $x+m\sqrt[4]{f^3}+n\sqrt[4]{f^2}+p\sqrt[4]{f}=0$, e col metodo dei reciproci manfrediani libera queste formole dai radicali, il che si potrebbe ottenere ancora coi metodi insegnati nel capo terzo, donde nasce $x^2-m^2f=0$, $x^3-3mnfx+m^3f^2+n^3f=0$ &c. le specie m, n, p, f in queste formole canoniche sono quantità indeterminate, che si determinano in progresso. Prende in seguito l' equazioni generali di secondo, terzo, e quarto grado, e le confronta colle canoniche corrispondenti, uguagliando termine a termine, e viene con ciò a determinare le specie m, n, p, rimanendo sempre arbitraria la f, che la suppone per maggior comodo eguale all' unità; e comecchè per determinare le sopradette specie gli occorre sciogliere equazioni inferiori alle proposte, quindi felicemente ci dà la risoluzione generale delle equazioni fino al quarto grado. Applicando poi questo metodo ai gradi superiori, si incontrano per determinare le specie m, n, p &c. equazioni superiori alla proposta, e spesso indeprimibili; ciò non ostante te quando queste equazioni sono reducibili a gradi inferiori, somministrano la risoluzione delle Equazioni proposte: con questo metodo il lodato Signor Dottore perviene alla risoluzione delle equazioni del quinto grado in casi di molta estensione. Il metodo da noi esposto nel Capo 4. di questo libro per tentare la risoluzione dell' equazioni in fattori razionali di qualunque grado, può servire come ciascuno facilmente comprenderà, a tentare la risoluzione in fattori ancora irrazionali. Il Signor Waring Matematico Inglese nelle sue Miscellanee Analitiche credeva d' avere generalmente risolute l' equazioni di quinto, e sesto grado, ma quest' Uomo benchè grande fu deluso da un sottilissimo paralogismo: in una Copia del suo libro, che mandò in dono alla nostra Accademia di Bologna, si trova di sua mano corretto questo errore.

CAPO VI.

Delle Somme, e dei Termini generali delle Serie.

I. La serie altro non è, che una congerie di numeri, o di quantità, che si succedono con qualche legge: tale è 1, 2, 3, 4, 5 &c. ovvero 1, 2, 4, 8 &c. nella prima delle quali i numeri si succedono con proporzione aritmetica, e nella seconda con proporzione geometrica.

II. La lettera n in appresso disegna il numero dei termini della serie. *Il termine generale* d' una serie è una funzione di n, in cui posti successivamente i numeri naturali 1, 2, 3, 4 &c. nascono i termini della serie: per questa ragione $6n - 5$ è il termine genenerale della serie 1, 7, 13, 19 &c. *Somma generale* d' una serie è una funzione di n, in cui, posto in vece di n un numero intero, si ottiene la somma di tanti termini, quante unità sono in questo: per tale ragione $3n^2 - 2n$ è la somma generale della predetta serie.

III. Sia S la somma dei termini n, e la somma dei termini $n - 1$ sia s, sarà $S - s = t$, chiamato t il termine generale.

IV. Lo scopo principale, che quì ci prefiggiamo è di trovare la somma generale di una serie, dato il suo termine generale. Disperando di sciogliere questo problema direttamente, ed universalmente ci proponiamo l' inverso incomparabilmente più facile a risolversi: cioè trovare il termine generale di una serie, data la somma generale; con questo metodo determiniamo la relazione che passa tra il termine, e la somma generale di più serie.

V. Dò principio dalla serie, la somma generale di cui à questa semplicissima forma, cioè An. Essendo $S = An$, in vece di n scritto $n - 1$, sarà $s = An - A$; ed $S - s = t = A$; dunque il termine generale della nostra serie è A, e perciò la serie sarà A, A, A, A &c.; dunque a rovescio, la serie, che à per termine generale la costante A, avrà per somma generale An.

VI. Sia la serie della somma generale $S = An + Bn^2$, in vece di n vi si collochi $n - 1$, sarà $s = An - A + Bn^2 - 2Bn + B$, ed $S - s = 2Bn + A - B = t$. Da questo termine generale si forma la seguente serie divisa in due

$$A, \; A, \; A, \; A, \; A, \; A \text{ \&c.}$$
$$B, 3B, 5B, 7B, 9B, 11B \text{ \&c.}$$

La superiore contiene termini uguali, l' inferiore è una

una ſerie di termini, che creſcono ſecondo la progreſſione dei numeri diſpari; tutta è una progreſſione aritmetica, colla differenza dei termini $= 2B$; a rovescio adunque una ſerie, che à per termine generale $A - B + 2.nB$, avrà per ſomma generale $An + Bn^2$.

VII. La ſomma generale del primo termine dee eſſere uguale al termine ſteſſo; adunque poſta l' unità nella ſomma, e nel termine generale in vece di n ſi otterrà due quantità uguali; onde ſarà in queſto caſo, $A - B + 2nB = An + Bn^2$, come in realtà lo è. Alle volte ciò non ſuccede, e allora è ſegno, che alla ſomma generale ſi dee aggiungere o togliere una quantità coſtante, che verrà determinata dalla differenza delle due predette formule poſtavi in vece di n l' unità.

VIII. Si abbia ora una ſerie le differenze di cui ſieno coſtanti, per eſempio 3, 7, 11, 15, 19 &c. che à la differenza 4: per ritrovare il termine generale ſi operi così: ſi prenda il termine generale $A - B + 2Bn$, in cui poſto 1 in vece di n, ſarà $A - B + 2B = A + B$, queſto ſi ponga uguale a 3 primo termine della ſerie data, onde ſia $A + B = 3$; di poi ſi ponga 2 in vece di n, e ciò che riſulta ſi ponga uguale a 7; onde ſia $A + 3B = 7$; da queſte due equazioni ſi determina ſubito, $A = 1$, $B = 2$; quindi il termine generale $A - B + 2Bn$ per la noſtra ſerie diventa $4n - 1$, e la ſomma generale $n + 2n^2$.

IX. Collo ſteſſo metodo il termine generale, della ſerie, la cui ſomma generale ſia $An + Bn^2 + Cn^3$, ſi ritrova $A - B + 2Bn + C - 3Cn + 3Cn^2$, dal qual termine generale naſce la ſeguente ſerie, che divido in tre

A,

$A, \quad A, \quad A, \quad A, \quad A$ &c.

$B, 3B, \quad 5B, \quad 7B, \quad 9B$ &c.

$C, 7C, 19C, 37C, 61C$ &c.

La prima à i termini uguali, la seconda à i termini in progressione aritmetica, la terza è tale, che prese le differenze dei termini prossimi, e poi presa la differenza delle differenze si trova questa costante uguale a $6C$; la quale proprietà per necessità converrà ancora a tutta la seria risultante dalle tre.

X. Sia ora la serie 9, 13, 21, 33, 49 &c. colle differenze seconde costanti $= 4$. Si uguaglino i tre primi termini di questa, col termine generale $A - B + 2Bn + C - 3Cn + 3Cn^2$ postovi in vece di n successivamente 1, 2, 3, nasceranno tre equazioni, con cui si determinerà $A = 8 + \frac{1}{3}$, $B = o$, $C = \frac{2}{3}$; onde nel caso il termine generale sarà $9 - 2n + 2n^2$, e la somma $= \left(8 + \frac{1}{3}\right) n + \frac{2}{3} n^3$.

XI. Per la serie della somma generale $An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4$ si trova il termine generale $A - B + 2Bn + C - 3Cn + 3Cn^2 - D + 4Dn - 6Dn^2 + 4Dn^3$. Questa serie à le differenze terze costanti.

XII. Da questo andamento si inferisce la soluzione dei due seguenti problemi: 1. Sia una serie le cui differenze m sieno costanti per esempio le terze, ritrovare il termine generale. Si prenda la formula $A + Bn + Cn^2 + Dn^3$ &c. nel caso si tronca dove n è alzata à terza potestà, perchè si tratta delle differenze terze; dovendosi il troncamento fare dove l' esponente di n è uguale ad m: poi si scriva successivamente 1, 2, 3, 4 in vece di n, onde si abbiano i quattro primi termini della formula canonica, i quali si uguaglino ai quattro primi termini della serie data; nasceranno da ciò quattro equazioni, per cui si determineranno le quattro indeterminate A, B, C, D, il valore di cui sostituito nella formula, si otterrà il termine generale della proposta serie. 2. Dato un termine generale d' una serie colle differenze n costanti ritrovare la somma. Si assuma la solita formula $An + Bn^2 + Cn^3$ &c. che si tronchi dove l' esponente massimo di n supera dell' unità l' esponente massimo di n nel termine generale dato; poi nella formula in vece di n, si scriva $n - 1$, e la formula che nasce si sottragga dalla prima. Si uguagli poi ciascun termine della formula residua, con ciascun termine del dato termine generale, nasceranno tante equazioni quante indeterminate, A, B, C &c. queste verranno per quelle determinate, e sostituiti i valori loro nella prima formula $An + Bn^2 + Cn^3$ &c. si otterrà la somma che si voleva.

XIII. Vengo presentemente a discorrere di quelle serie, che anno la somma generale espressa per una frazione il numeratore, e denominatore di cui sieno due funzioni razionali di n, e specialmente di quelle serie, in cui la massima potestà di n sia la stessa tanto nel numeratore, quanto nel denominatore, le quali prodotte all' infinito hanno la somma uguale ad una quantità finita. Comincio dalla serie che à per somma generale $\frac{Ln}{A+Bn}$; in questa in vece di n scrivo $n - 1$, acciocchè si abbia il termine generale

$$\frac{Ln}{A+Bn} - \frac{L \cdot \overline{n-1}}{A+B \cdot \overline{n-1}} = \frac{AL}{(A+B \cdot \overline{n-1}) \cdot (A+Bn)}.$$

Se dunque con questo termine generale si formi una serie

serie sarà la somma generale di questa $\frac{Ln}{A+Bn}$, la quale posta n infinita sarà $\frac{Ln}{Bn}=\frac{L}{B}$ quantità finita.

XIV. Sia la somma generale d' una serie

$$\frac{Ln+Mn^2}{(A+B.\overline{n-1}).(A+Bn)}$$

, si scriva al solito $n-1$ in vece di n nascerà una nuova formola, la quale sottratta dalla prima ci dà il termine generale

$$\frac{AL-AM-BLn-BMn+2AMn}{(A+B.\overline{n-2}).(A+B.\overline{n-1}).(A+Bn)}.$$

Una serie adunque che avrà questo termine generale, avrà ancora la somma generale proposta.

XV. La somma generale di una serie sia

$$\frac{Ln+Mn^2+Nn^3}{(A+B.\overline{n-2}).(A+B\overline{n-1}).(A+Bn)}$$

, si scoprirà col metodo solito il suo termine generale

$$\frac{\begin{array}{l} AL-2BLn+3ANn^2 \\ -AM+2AMn-3BNn^2 \\ +AN-\ \ BMn-\ \ BMn^2 \\ \qquad\ \ -3ANn \\ \qquad\ \ +\ \ BNn \end{array}}{(A+B.\overline{n-3}).(A+B.\overline{n-2}).(A+B\overline{n-1})(A+Bn)}$$

La serie adunque che à questo termine generale avrà quella somma.

XVI. Da questo andamento si raccoglie chiaramente, quali sieno le condizioni delle nostre serie, acciocchè ricevano la somma generale, la quale sia finita, benchè la serie sia infinita: dee in primo luogo il termine generale avere per denominatore un prodotto di fattori, ciascun dei quali esprima una serie aritmetica, cosicchè la penultima cominci dal secondo termine dell' ultima, l' antipenultima dal secondo termine della penultima, e così in seguito; in secondo luogo la massima potestà di n nel numeratore non dee superare il numero dei fattori diminuito del due; quando sieno nel termine generale tali condizioni, ecco la pratica per ritrovare la somma generale. Si finga una formula, il numeratore di cui sia $Ln + Mn^2 + Nn^3$ &c. ed in cui l' esponente massimo di n sia uguale al numero dei fattori del termine generale meno l' unità; il denominatore poi di questa formula, sia lo stesso, che il denominatore del termine generale, toltovi il primo fattore; Questa formula sarà la somma generale. Per determinare poi L, M, N &c. in questa somma generale in vece di n si scriva $n - 1$, e questa nuova formula si sottragga dalla prima, avremo il termine generale canonico, il quale uguagliato, cioè termine per termine, al dato termine generale, nasceranno tante equazioni, quante indeterminate sono, per cui queste verranno determinate, e sostituito il loro valore nella formula della somma, si otterrà la somma ricercata.

XVII. Le serie che abbiamo fino adesso considerate non hanno la n in alcuno esponente ne della somma, ne del termine generale, le quali si chiamano *algebraiche* a distinzione di quelle, in cui la n ottiene il luogo di esponente, che si chiamano *esponenziali*, o *geometriche*: di queste brevemente dò l' idea.

XVIII. Sia AK^n somma generale di una serie esponenziale, cerco il termine generale. Si ponga al solito $n - 1$ in vece di n: e sottratta la nuova formola dalla prima, si otterrà per termine generale

AK^n

$A\,K^n - A\,K^{n-1} = \frac{A.\,\overline{K-1}}{K}.\,K^n$. Fatta $n = 1$ tanto nella ſomma, quanto nel termine generale, trovo la ſomma $= A\,K$, ed il termine primo $= A\,K - A$ diſuguali, quando dovrebbero eſſere uguali; il che indica la vera ſomma della ſerie, che à per termine generale il già ritrovato, non eſſere $A\,K^n$, ma eſſere $A\,K^n - A$. Ciaſcun vede, che il termine generale ritrovato ſomminiſtra qualunque ſerie geometrica, cioè che à i termini in progreſſione geometrica qualunque; e perciò qualunque ſerie geometrica riceverà ſomma generale. Se $K = 1$, tutti i termini della ſerie, e la loro ſomma è uguale a zero. Se $K > 1$, la ſerie ed i termini ſempre creſcono, talmente che fatta n infinita K^n diventa infinita. Se $K < 1$, la ſomma ſempre decreſce, talmente che fatta n infinita K^n diviene infinitamente piccola, e perciò eſſa ſomma ſarà uguale a $-A$, queſta viene negativa, perchè in queſto caſo il termine generale è pure negativo; onde ſe queſto ſi prenderà poſitivo la ſomma ſarà $= A$. Sia ora il termine generale d' una ſerie geometrica $\frac{1}{3}.\,2^n$, fatto il confronto col termine generale canonico, ſarà $2^n = K^n$ e $2 = K$; dunque $\frac{A.\,\overline{K-1}}{K} = \frac{A}{2}$, il quale per il confronto dee eſſere $= \frac{1}{3}$; dunque $A = \frac{2}{3}$; onde la ſomma generale ſarà $\frac{2}{3}.\,2^n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.\,\overline{2^n - 1}$.

XIX. Collo ſteſſo metodo ſi ritrova, che la ſerie della ſomma generale $\overline{A + b\,n}.\,K^n - A$ à per termine converrà che z, ed u sieno due divisori di $-a^3 b$, e di più deono essere di secondo grado, perchè l' Equazioni sussidiarie sono di secondo grado. Tutti i divisori di secondo grado dell' ultimo termine sono $\pm ab$, $\pm aa$, $\pm a\sqrt{ab}$. Fingiamo $u = ab$, sarà $y = \frac{2ab}{a+b}$; adunque una delle Equazioni sussidiarie sarà $xx + \frac{2abx}{a+b} + ab = 0$. Ma comecchè tentata la divisione dell' Equazion proposta per questa sussidiaria non riesce; perciò questa equazione sussidiaria è inutile. Si prenda l' altro divisore $-ab$, a cui fatta eguale la u, si troverà $y = 0$, e l' Equazione sussidiaria sarà $xx - ab = 0$; con questa divisa l' equazione proposta, abbiamo per quoto $xx + ax + aa = 0$; dunque l' Equazion data si risolve nelle due $xx - ab = 0$, $xx + ax + aa = 0$. Se avessimo preso $u = aa$, si sarebbe trovato $y = a$, e la formola sussidiaria sarebbe $xx + ax + aa = 0$, per cui divisa la proposta Equazione nascerebbe il quoto $xx - ab = 0$. Se poi tentati tutti i divisori la divisione non riesca, l' Equazione almeno con questo metodo non sarà risolubile. Se si voglia schivare la divisione, si determinino i valori di y, s, z col mezzo di u, e si collochino nelle equazioni sussidiarie, se queste moltiplicate insieme daranno l' Equazion proposta, avremo ottenuto l' intento; altrimenti si dovranno tentare altri divisori. Ma con maggior facilità si potrà fare quest'esame coll' ajuto dell' Equazione $u + sy + z = aa - ab$, di cui non si è fatto uso alcuno, e che nasce dal paragone del terzo termine dell' equazion proposta col terzo dell' Equazione nata dalle sussidiarie fra loro moltiplicate; se i valori adunque di u, y, s, z messi nella predetta equazione, la renderanno identica, serviranno

essi

essi alla desiderata risoluzione, al contrario, saranno inutili. La risoluzione dell' Equazioni del quinto grado si può tentare con due sussidiarie, una del secondo, e l' altra del terzo; quella del sesto grado si può tentare con due del terzo, o con una del secondo, e l' altra del quarto; ma nei gradi superiori il calcolo riesce intrigatissimo, e spesso conviene risolvere delle equazioni di alto grado; e perciò l' utilità di questo metodo è dentro certi limiti ristretta.

XV. I' Signor Dottore Malfatti Professore di Matematica nell' Università di Ferrara in una dotta Dissertazione, che si contiene nel tomo quarto degli Atti dell' Accademia di Siena, finge queste formole $x+m\sqrt{f}=o$, $x+m\sqrt[3]{f^2}+n\sqrt[3]{f}=o$, $x+m\sqrt[4]{f^3}+n\sqrt[4]{f^2}+p\sqrt[4]{f}=o$, e col metodo dei reciproci manfrediani libera queste formole dai radicali, il che si potrebbe ottenere ancora coi metodi insegnati nel capo terzo, donde nasce $x^2-m^2f=o$, $x^3-3mnfx+m^3f^2+n^3f=o$ &c. le specie m, n, p, f in queste formole canoniche sono quantità indeterminate, che si determinano in progresso. Prende in seguito l' equazioni generali di secondo, terzo, e quarto grado, e le confronta colle canoniche corrispondenti, uguagliando termine a termine, e viene con ciò a determinare le specie m, n, p, rimanendo sempre arbitraria la f, che la suppone per maggior comodo eguale all' unità; e comecchè per determinare le sopradette specie gli occorre sciogliere equazioni inferiori alle proposte, quindi felicemente ci dà la risoluzione generale delle equazioni fino al quarto grado. Applicando poi questo metodo ai gradi superiori, si incontrano per determinare le specie m, n, p &c. equazioni superiori alla proposta, e spesso indeprimibili; ciò non ostan-

te

Ora si vede, che questa altro non è, che l' operazione, che si suol fare per trovare il massimo comun divisore dei due numeri b, c; la qual operazione, quando b, c sieno numeri razionali, come qui si suppone, si sa, che sempre conduce ad un residuo $=o$. Dunque si arriverà finalmente ad un residuo $K^{p+1}=o$, oltre il quale l' operazione non può continuarsi. Si vede ancora, che μ altro non è che l' intiero più grande contenuto in $\frac{b}{c}$, cioè in a, e $\frac{K}{c}$ l' avanzo $a-\mu$, onde $\frac{c}{K}=\frac{1}{a-\mu}$ è quello, che al n. 1. fu chiamato a'; e similmente si vede, che μ' è l' intiero più grande contenuto in $\frac{c}{K}$, cioè a', e $\frac{K'}{K}$ l' avanzo $a'-\mu'$, onde $\frac{K}{K'}=\frac{1}{a'-\mu'}$; e così di mano in mano. Se dunque deesi arrivar finalmente ad un avanzo $K^{p+1}=o$, si avrà $\frac{K^{p+1}}{K^p}=a^{p+1}-\mu^{p+1}=o$, cioè $a^{p+1}=\mu^{p+1}$. Ma μ^{p+1} è numero intiero; dunque anche la quantità $\frac{1}{a^p-\mu^p}=a^{p+1}$ sarà un numero intiero, il quale sarà certamente razionale, supponendosi razionale la quantità stessa a.

IV. Ripigliando ora le formole del n. 1. abbiamo $\frac{1}{a-\mu}=a'$, onde $a=\mu+\frac{1}{a'}$; ma abbiamo $\frac{1}{a'-\mu'}=a''$,

onde

onde $a' = \mu' + \frac{1}{a''}$; dunque $a = \mu + \frac{1}{\mu' + \frac{1}{a''}}$. Così

proseguendo a sostituire in luogo delle quantità a^p i loro valori cavati dalla formola $\frac{1}{a^p - \mu^p} = a^{p+1}$, si troverà

$$a = \mu + \cfrac{1}{\mu' + \cfrac{1}{\mu'' + \cfrac{1}{\mu''' + \cfrac{1}{\mu^{\text{iv}} + \cfrac{1}{\mu^{\text{v}} + \cfrac{1}{\mu^{\text{vi}} + \&c.}}}}}}$$

Così la quantità a sarà risoluta in una frazion continua, la qual frazione continua andrà in infinito, ogni qual volta la quantità a sia irrazionale (n. 2.); sarà poi terminata, quando a sia quantità razionale [n. 3.]

V. Dalle formole del n. 1. abbiamo $a = \mu + \frac{1}{a'}$, $a' = \mu' + \frac{1}{a''}$, $a'' = \mu'' + \frac{1}{a'''}$, e generalmente $a^p = \mu^p + \frac{1}{a^{p+1}}$. Dunque il valor prossimo di a è μ, il valor prossimo di a' è μ', quello di a'' è μ'', e in generale quello di a^p è μ^p. Per tanto il primo valor prossimo della quantità proposta a sarà μ: che se prendendo il valor esatto di a, cioè $\mu + \frac{1}{a'}$, in luogo di a' si sostituirà il suo valor prossimo μ', si avrà un valor prossimo, cioè $\mu+\frac{1}{\mu'}=\frac{\mu\mu'+1}{\mu'}$: similmente se ponendo il per a' il suo valor esatto $\mu'+\frac{1}{a''}$ in luogo di a'' si adoprerà suo valor prossimo μ'', si avrà un terzo valor anche più prossimo di a, cioè $\mu+\cfrac{1}{\mu'+\cfrac{1}{\mu''}}=\frac{\mu''(\mu\mu'+1)+\mu}{\mu'\mu''+1}$; e procedendo avanti con lo stesso ordine, si avrà la seguente serie di valori di a sempre più prossimi, cioè

μ, o sia $\frac{\mu}{1}$.

$$\frac{\mu'\mu+1}{\mu'}$$

$$\frac{\mu''[\mu'\mu+1]+\mu}{\mu''\mu'+1}$$

$$\frac{\mu'''[\mu''[\mu'\mu+1]+\mu]+\mu'\mu+1}{\mu'''[\mu''\mu'+1]+\mu'}$$

$$\frac{\mu^{\text{iv}}[\mu'''[\mu''[\mu'\mu+1]+\mu]+\mu'\mu+1]+\mu''[\mu'\mu+1]+\mu}{\mu^{\text{iv}}[\mu'''[\mu''\mu'+1]+\mu']+\mu''\mu'+1}$$

&c.

VI. Avvertasi in primo luogo che il denominatore μ' della seconda frazione, o sia del secondo valor prossimo, è più piccolo di quello che dovrebbe essere; dunque questo secondo valore è più grande di a; il denominatore del terzo valore è più grande del dovere; dunque questo valore è più piccolo di a; similmente il quarto valore si ritroverà maggiore di a, il quin-

quinto minore, e generalmente i valori in ſede diſpari ſono minori, e quelli in ſede pari ſono maggiori di a. In ſecondo luogo ſi oſſervi l'ordine, con cui queſti valori camminano dopo i due primi, e ſi vedrà, che generalmente il valore *pesimo* conſiſte in una frazione, di cui il numeratore ſi forma moltiplicando il numero μ^{p-1} per il numerator del valore precedente, cioè $\overline{p-1}$ *esimo*, e aggiungendo al prodotto il numeratore del valore antiprecedente, cioè $\overline{p-2}$ *esimo*; il denominatore poi ſi forma nella ſteſſa maniera, cioè moltiplicando lo ſteſſo numero μ^{p-2} per il denominatore del valor precedente, e aggiungendo al prodotto il denominatore del valor antiprecedente.. Per la qual coſa fatte le ſeguenti denominazioni

$$
\begin{array}{ll}
p = \mu & q = 1 \\
p' = \mu' p + 1 & q' = \mu' \\
p'' = \mu'' p' + p & q'' = \mu'' q' + q \\
p''' = \mu''' p'' + p' & q''' = \mu''' q'' + q' \\
p^{\text{iv}} = \mu^{\text{iv}} p''' + p'' & q^{\text{iv}} = \mu^{\text{iv}} q''' + q'' \\
p^{\text{v}} = \mu^{\text{v}} p^{\text{iv}} + p''' & q^{\text{v}} = \mu^{\text{v}} q^{\text{iv}} + q''' \\
\&c. & \&c.
\end{array}
$$

i valori proſſimi di a trovati al numero precedente, verranno eſpreſſi per le frazioni della ſeguente ſerie

$$\frac{p}{q},\ \frac{p'}{q'},\ \frac{p''}{q''},\ \frac{p'''}{q'''},\ \frac{p^{\text{iv}}}{q^{\text{iv}}},\ \frac{p^{\text{v}}}{q^{\text{v}}},\ \frac{p^{\text{vi}}}{q^{\text{vi}}},\ \frac{p^{\text{vii}}}{q^{\text{vii}}},\ \frac{p^{\text{viii}}}{q^{\text{viii}}},\ \frac{p^{\text{ix}}}{q^{\text{ix}}}\ \&c.$$

VII. Quando a ſia quantità razionale, ſiccome la frazione continua, in cui ſi riſolve, è terminata [n.4.], così ſi arriverà finalmente ad una frazione $\frac{p^{P}}{q^{P}}$ nella ritrovata ſerie, che ſarà l'ultima, e preciſamente eguale alla propoſta quantità a: ma quando ſia a quantità

tità irrazionale, la frazione ultima $\frac{p^{\rho}}{q^{\rho}}$ perfettamente eguale alla medesima quantità proposta a non s'incontrerà mai in quella serie, e sarà la serie stessa infinita, essendo infinita la frazion continua, in cui la proposta quantità a si risolve [n. 4.].

VIII. Essendo intieri tutti i numeri μ, μ', μ'', μ''' &c., e positivi, è chiaro dall' inspezione sola dei valori di p, p', p'', p''' &c., e di q, q', q'', q''' &c. [n. 6.], che tanto i numeratori, quanto i denominatori delle frazioni ritrovate sono intieri, e vanno sempre più crescendo.

IX. Sottraggasi ora ciascuna frazione dalla sua seguente, sarà

$$\frac{p'}{q'}-\frac{p}{q}=\frac{p'q-pq'}{qq'}$$

$$\frac{p''}{q''}-\frac{p'}{q'}=\frac{p''q'-p'q''}{q'q''}$$

. . . .

$$\frac{p^{\rho}}{q^{\rho}}-\frac{p^{\rho-1}}{q^{\rho-1}}=\frac{p^{\rho}q^{\rho-1}-p^{\rho-1}q^{\rho}}{q^{\rho-1}q^{\rho}}$$

$$\frac{p^{\rho+1}}{q^{\rho+1}}-\frac{p^{\rho}}{q^{\rho}}=\frac{p^{\rho+1}q^{\rho}-p^{\rho}q^{\rho+1}}{q^{\rho}q^{\rho+1}}$$

Ma (n. 6.) $p^{\rho+1}=\mu^{\rho+1}p^{\rho}+p^{\rho-1}$, e $q^{\rho+1}=\mu^{\rho+1}q^{\rho}+q^{\rho-1}$. Dunque sostituiti questi valori nel numeratore dell' ultima differenza si avrà $\frac{p^{\rho+1}}{q^{\rho+1}}-\frac{p^{\rho}}{q^{\rho}}=\frac{p^{\rho-1}q^{\rho}-p^{\rho}q^{\rho-1}}{q^{\rho}q^{\rho+1}}$, dove il numeratore è quello stesso della differenza precedente con i soli segni mutati. Dunque ogni differenza ha lo stesso numeratore col solo divario del se-

ſegno, che procede alternativamente. Ma il numerator della prima differenza, ponendo in luogo di p, q, p', q' i loro valori (n. 6.) è $\mu' p + 1 - \mu' \mu$, e ponendo di nuovo in luogo di p il ſuo valore μ, è $\mu' \mu + 1 - \mu' \mu$: dunque i numeratori delle differenze ſuddette ſono alternativamente 1, -1. Saranno pertanto eſſe differenze

$$\frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{1}{q q'}$$

$$\frac{p''}{q''} - \frac{p'}{q'} = \frac{-1}{q' q''}$$

$$\frac{p'''}{q'''} - \frac{p''}{q''} = \frac{1}{q'' q'''}$$

$$\frac{p^{\text{iv}}}{q^{\text{iv}}} - \frac{p'''}{q'''} = \frac{-1}{q''' q^{\text{iv}}}$$

. . . .

$\frac{p^{p}}{q^{p}} - \frac{p^{p-1}}{q^{p-1}} = \frac{\pm 1}{q^{p-1} q^{p}}$, dove $+$ ha luogo, quando p appartiene ad una frazione, che nella ſerie del n. 6. ſia in ordine pari; ha poi luogo $-$, quando p appartiene ad una frazione poſta nella detta ſerie in ordine diſpari.

X. Di quì molte conſeguenze ſi deducono, che pongono ſempre più in chiaro la natura delle frazioni $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$ &c.. E primieramente appariſce, che generalmente $p^{p+1} q^{p} - p^{p} q^{p+1} = \pm 1$, ſervendo il ſegno $+$, o il ſegno $-$ ſecondo che p appartiene ad una frazione poſta nella ſerie in ordine pari, o diſpari; che è lo ſteſſo che dire, ſecondo che p rappreſenta

un

un numero dispari, o un numero pari.

XI. Similmente si deduce, che la prima frazione è minore della seconda, ma la seconda maggiore della terza; e generalmente ogni frazione posta nelle serie in ordine dispari è minore della sua seguente, poichè sottratta dalla sua seguente lascia una differenza positiva (n. 10.); e ogni frazione posta in ordine pari è della sua seguente maggiore, poichè sottratta dalla sua seguente lascia una differenza negativa.

XII. Si deduce ancora, che ciascuna delle frazioni $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$ &c. è espressa in termini minimi: perchè se alcuna di loro, come $\frac{p^p}{q^p}$, avesse un comun divisore dei suoi termini p^p, q^p, talche fosse $\frac{p^p}{q^p}=\frac{bm}{bn}$, si avrebbe il binomio $p^{p+1}q^p - p^p q^{p+1} = p^{p+1}bn - bmq^{p+1}$, il quale sarebbe divisibile per il fattore intiero b, e però non sarebbe più eguale all' unità, contro quello che si è dimostrato al numero precedente.

XIII. Inoltre essendo i numeri q, q', q'', q''' &c., come si è notato al n. 8., tutti intieri, e crescenti; è manifesto che la serie delle differenze $\frac{1}{qq'}$, $\frac{1}{q'q''}$, $\frac{1}{q''q'''}$ &c. (n. 9.) è decrescente. Ritrovandosi adunque per ciò che si è notato al n. 6. il vero valore di a fra due frazioni contigue, ne verrà per legittima conseguenza che la differenza del vero valore di una qualunque frazione, per esempio $\frac{p''}{q''}$ sia minore di

1

$\frac{1}{q''q'''}$; onde le frazioni della serie $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$, $\frac{p'''}{q'''}$ sono convergenti verso il vero valore dell' ultima, cioè verso a, a cui quelle frazioni di mano in mano si accostano.

XIV. Prese due frazioni contigue, per esempio $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, e trovata la loro differenza $\frac{1}{qq'}$, dovendo essere l' errore della frazione $\frac{p}{q}$ dal vero valore minore di $\frac{1}{qq'}$, ed essendo q' maggiore di q (n. 8.°), sarà l' anzidetta differenza a più forte ragione minore di $\frac{1}{qq}$.

XV. Esposte già le principali cose intorno la natura delle frazioni continue, resta che ne vediamo l' uso applicato ad un esempio. Sia proposta la frazione $\frac{1200}{737}$, che non si può esattamente esprimere in termini minori, e si cerchino le frazioni in termini minori, che s' accostano il più che sia possibile al valor della proposta. Facciasi l' operazione, che si suol fare per trovare il comun divisore dei due termini della frazione. Sarà dunque

1200	1	737
463	1	274
189	1	85
19	1	9
1	2	
	4	
	2	
	9	

dove i quozienti notati 1, 1, 1, 1, 2, 4, 2, 9 sono (n. 3.) i termini μ, μ', μ'', μ''' &c. della frazion continua

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{9}}}}}}}$$

in cui si rifolve la frazion propofta. Ma venendo alla formazione delle frazioni, che si cercano, fcrivo i numeri ritrovati

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 9 \\ \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{2} & \frac{5}{3} & \frac{13}{8} & \frac{57}{35} & \frac{127}{78} & \frac{1200}{737} \end{array}$$

e fecondo il metodo del n. *6.*, noto fotto il primo una frazione, che abbia per numeratore effo numero, e per denominatore l' unità; fotto il fecondo noto una frazione, che abbia per numeratore il prodotto di

effo

esso secondo numero per il numeratore della prima frazione, aggiunta a questo prodotto l' unità, e per denominatore lo stesso secondo numero; sotto poi gli altri noto altrettante frazioni, delle quali formo il numeratore moltiplicando il numero scritto di sopra per il numeratore della frazion precedente, e aggiungendo al prodotto il numeratore dell' antiprecedente; e ne formo il denominatore moltiplicando parimente il numero scritto di sopra per il denominatore della frazion precedente, e aggiungendo al prodotto il denominatore dell' antiprecedente. Così restano formate le frazioni $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$, $\frac{p'''}{q'''}$ &c., delle quali l' ultima è la proposta stessa; ciascuna poi delle altre s' accosta al valore della proposta più di qualunque altra frazione, che abbia il denominatore minore del denominatore della sua seguente; e la differenza del valore di ciascuna frazione dal valor della proposta è minore del valore di una frazione, che abbia per numeratore l' unità, e per denominatore il prodotto del denominatore di quella frazione nel denominatore della frazione seguente: così $\frac{13}{8}$ differisce dal valore della proposta per una quantità minore di $\frac{1}{280}$. Le quali cose tutte sono abbastanza chiare per la teoria esposta.

CAPO VIII.

Si ritrovano i valori proſſimi delle radici irrazionali di qualunque Equazione.

I. DAl Capo ſeſto di queſto terzo libro appariſce, che qualſivoglia equazion determinata, in cui m ſia l' eſponente della maſſima poteſtà della incognita x, può riguardarſi come il termine generale di una ſerie le cui differenze m ſieno coſtanti, ſuppoſto che x indichi il numero del termine della ſerie.

II. Data dunque un' Equazione del grado m facilmente ſi potrà trovare la ſerie, di cui eſſa ſi può riguardare come termine generale ſenza aver biſogno di ſoſtituire in luogo di x tutti i termini della ſerie naturale 1, 2, 3, 4 &c. baſtando a queſto effetto ſoſtituirne ſolamente $m+1$ preſi uno appreſſo l' altro, anche negativi ſe ſi vuole; imperciocchè con queſto ſolo numero di ſoſtituzioni, ſi poſſono trovare nella ſerie sì delle prime, come delle ſeconde, terze, ed ulteriori differenze tanti termini, quanti baſtano a continuar ciaſcuna di queſte ſerie all' infinito da una parte, e dall' altra, e quindi ſi potrà continuare anche la ſerie ſteſſa, che naſce immediatamente dall' Equazione riguardata come il ſuo termine generale.

$$x^3+6x^2+9x+1=0$$

-1	0	1	2.
6.			
12	18		
4	16	34	
-3	1	17	51

Sia

Sia a cagion d' esempio l' Equazione del terzo grado $x^3+6x^2+9x+1=0$. La serie di cui essa si può riguardare come termine generale; avrà le terze differenze costanti, sostituiscansi dunque in luogo di x successivamente quattro numeri presi uno appresso l' altro nella serie dei numeri naturali, come $-1, 0, 1, 2$. I risultati delle quattro sostituzioni sono i numeri $-3, 1, 17, 51$. Per continuar questa serie sottraggasi ciascun dei quattro termini ritrovati dal suo seguente, e si avranno tre termini della serie delle prime differenze, cioè, 4, 16, 34. Si sottragga parimenti ciascun di questi tre termini dal suo seguente, e così si avranno due termini della serie delle seconde differenze, cioè, 12, 18. Sottraggasi finalmente il primo di questi due termini dal secondo, e resterà un termine della serie delle terze differenze, cioè 6. Dovendo adunque nel caso nostro le differenze terze esser costanti, e trovandosi queste espresse pel numero 6 è manifesto, che la serie delle seconde differenze, della qual serie abbiamo già due termini 12, 18 continuata da una parte e dall' altra sarà $-30, -24, -18, -12, -6, 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36$, &c. Nota poi questa serie potrà subito continuarsi la serie delle prime differenze, giacchè di essa abbiamo tre termini 4, 16, 34, tra i due primi de' quali è differenza il termine 12 della serie delle seconde differenze, sarà pertanto la serie delle prime differenze 88, 58, 34, 16, 4, $-2, -2$, 4, 16, 34, 58, 88, 124 &c. Ora sapendosi che la serie cercata à i termini $-3, 1, 17, 51$, e sapendosi inoltre che i termini 4, 16, 34 della serie delle prime differenze sono le differenze di questi quattro termini; cogli altri termini della serie delle prime differenze si caveranno gli altri termini della serie cercata.

ta tanto da una parte, quanto dall' altra, e così la ſerie cercata ſarà $-199-111$, -53, -19, -3, 1, -1, -3, 1, 17, 51, 109, 197, 321 &c., nella quale ſapendoſi, che i termini -3, 1, 17, 51, corriſpondono ai ſuppoſti $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=2$, ſarà facile il vedere qualſivoglia altro termine a qual ſuppoſto corriſponda.

III. Mediante queſte ſerie i valori reali dell' incognita di una equazione, che non contenga niſſun fratto, ſi ritrovano quando ſono razionali, e quando ſono irrazionali ſi ſcoprono i limiti, fra i quali ſono compreſi; imperciocchè i valori razionali dell' incognita di un' Equazione, che non contenga niſſun fratto, devono eſſere intieri (Cap. 4. n. 1. l. 3.), e di più poſti nell' equazione in luogo di x devono dar zero (Cap. 1. n. 2. l. 3.); ma la ſerie 1, 2, 3, 4 &c. prodotta indefinitamente da una parte, e dall' altra contiene tutti gli intieri poſſibili, e però ancor quelli, che poſſono eſſere valori d' un' equazion propoſta; e la ſerie di cui l' Equazione è termine generale contiene tutti i valori dell' Equazione, che provengono dal ſupporre x ſucceſſivamente eguale a tutti i termini di quella ſerie 1, 2, 3, 4 &c. prodotta indefinitamente da una parte, e dall' altra. Dunque conterrà ancora tutti quei zero, che riſultano dal ſupporre x eguale a ciaſcun di quei numeri intieri razionali, che poſſono eſſere valori della x medeſima. Pertanto propoſta un' Equazione, che non abbia fratti, e trovata la ſerie, che à per termine generale l' Equazion medeſima, quanti ſono i termini di queſta ſerie eguali a zero, tanti ſaranno i valori razionali diverſi dell' incognita nell' Equazion propoſta, e queſti non ſaranno altro, che quei ſuppoſti di x, dai quali naſcono quei termini eguali a zero; onde ſe la ſerie non

avrà

avrà nissun termine eguale a zero, sarà segno che la x nell' equazion proposta non ha valore alcuno razionale.

IV. Quanto ai valori reali irrazionali bisogna premettere la seguente avvertenza. Egli è costante, che una quantità non passa dall' essere positiva all' esser negativa, o al contrario senza passar per zero, o pel infinito. Onde se due quantità reali e finite a, b sono tali, che poste successivamente in luogo di x nell' equazione, facciano assumere all' Equazione due valori A, B uno positivo, e l' altro negativo, è chiaro, che se si intenderà fatto il passaggio dalla quantità a alla quantità b ordinatamente per gradi minimi, e si concepiscano sostituite in luogo di x successivamente tutte le quantità intermedie tra a e b, anche il valor dell' Equazione, come quello, che dipende dal valore, che si dà alla x passerà ordinatamente per tutti i gradi intermedii tra A e B, e però passerà ancora per zero, o per l' infinito, giacchè A e B si suppongono uno positivo, e l' altro negativo, dall' uno all' altro dei quali abbiam detto non farsi mai il passaggio senza capitar nel zero, o nell' infinito. Ma supponendosi l' Equazione senza fratti è evidente non poter il suo valore diventare infinito, quando non si supponga infinita la x medesima, e dall' altra parte tutti i valori intermedii tra a e b sono finiti, perchè queste due quantità si suppongono finite, dunque resta che il passaggio da A a B venga fatto pel zero. Dunque si potrà generalmente conchiudere, che quando due quantità reali e finite sono tali, che sostituite successivamente in luogo di x fanno assumere all' equazione due valori uno positivo, e l' altro negativo, vi sarà sicuramente una quantità reale intermedia tra quelle due, che sostituita per x, farà assumere all' E-

qua-

quazione, il valore zero, e così sarà valore dell' incognita medesima x.

V. Ciò premesso resta chiaro, che trovata la serie, di cui l' Equazion proposta è termine generale, ogni passaggio, che in essa si troverà dei termini da positivo a negativo, o da negativo a positivo, sarà un indizio sicuro di qualche valor reale dell' incognita x, non razionale, giacchè i valori razionali, come si è mostrato al n. 3., sono indicati dai termini eguali a zero, ma irrazionale, e intermedio tra quei due supposti di x, dai quali sono provenuti quei due termini della serie, nei quali cade la mutazion del segno. L' Equazione adunque dell' esempio portato sotto il num. 2. avrà tre valori reali irrazionali, giacchè nella serie di quell' Equazione si trova tre volte il passaggio da un segno al suo contrario, cioè uno da -3, a $+1$, l' altro da $+1$ a -1, e il terzo da -3 a $+1$; e corrispondendo i primi termini -3, $+1$ ai supposti di $x=-4$, $x=-3$, e i termini $+1$, -1 ai supposti di $x=-3$, $x=-2$, e gli altri due -3, $+1$ ai supposti di $x=-1$, $x=0$, perciò i tre valori reali irrazionali della x saranno intermedii uno tra -4, e -3, il quale avrà dunque per limiti questi due numeri -4, -3, l' altro tra -3, e -2, che così avrà per limiti -3, -2, e il terzo tra -1 e il zero, che avrà per limiti questi due termini -1, e zero.

VI. Dalla maniera stessa di continuare da una parte e dall' altra la serie, di cui l' Equazione è termine generale apparisce, che nel continuarla da quella parte verso cui i supposti di x, cioè i numeri naturali crescono, quando si arriva ad avere per un medesimo supposto di x il termine corrispondente tanto nella serie stessa dell' equazione, quanto in ciascuna delle le seconde, delle terze &c. differenze fino alla differenza costante affetto costantemente dallo stesso segno $+$ o $-$, non è più sperabile poter da quella parte incontrare nella serie dell' Equazione verun termine eguale a zero, o verun passaggio di termini da $+a-$, o da $-a+$: perchè trovandosi in ciascuna delle dette serie il termine susseguente coll' aggiungere al precedente il termine, che gli corrisponde nella serie delle differenze seguenti, quando tali termini sieno affetti del medesimo segno, è manifesto, che seguiteranno a risultare sempre termini affetti pure dello stesso segno. Per contraria ragione nel continuar la serie dalla parte, verso cui i supposti di x calano, siccome l' operazione si fa a rovescio, cioè sottraendo dal termine precedente a quello che si vuole il termine, che nella serie delle differenze seguenti corrisponde al termine stesso, che si vuole; così sarà tolta la speranza di incontrare nella serie dell' Equazione termini eguali a zero, o passaggi di termini da $+a-$, o da $-a+$ subito che si giunga ad avere per un medesimo supposto di x il termine corrispondente nella serie stessa dell' Equazione, e nella serie delle prime, e in quella delle seconde &c. differenze fino alla differenza costante affetto alternativamente dal segno $+$, e dal segno $-$; incontrando pertanto il primo di questi caratteri, sarà inutile continuare ulteriormente la serie dalla parte verso cui i supposti di x crescono, e incontrando il secondo sarà inutile continuarla dall' altra parte. Per serie dunque dell' Equazione intenderemo d' ora innanzi quella parte di essa, che resta compresa fra detti due limiti: così la serie dell' Equazione x^3+6x^2+9x+1 proposta al numero secondo sarà $-3, 1, -1, -3, 1$, i cui termini corrispondono a questi supposti di x, cioè $-4, -3, -2,$

— 1, *o*; imperocchè a questo ultimo supposto trovasi nella serie dell'Equazione corrispondere il termine positivo 1, nella serie delle prime differenze il termine positivo 16, in quella delle seconde differenze il termine pur positivo 18, e nella serie delle terze ed ultime differenze il termine ancor positivo *6*; onde se si continuasse ulteriormente la serie dell' Equazione da questa parte si troverebbero termini positivi sempre maggiori. Al primo supposto poi di *x*, cioè — 4 nella serie dell' equazione corrisponde il termine negativo — 3, nella serie delle prime differenze il termine positivo 4, in quella delle seconde il negativo — *6* e in quella delle terze ed ultime differenze il termine positivo *6*, e perciò continuando la serie dell' Equazione dalla parte sinistra si troverebbero termini negativi sempre maggiori.

VII. Quando nella serie dell' Equazione i termini eguali a zero, e i passaggi de' termini da + a —, e da — a + non sono insieme tanti quante debbon essere le radici dell' Equazione, cioè quante sono le unità dell' esponente della massima potestà dell' incognita, non deesi subito conchiudere, che le altre radici non indicate dalla serie sieno immaginarie, perchè potrebbe essere, che uno stesso termine eguale a zero indicasse più radici razionali eguali tra di loro, e anche indicasse radici irrazionali comprese tra il supposto del zero, ed i supposti dei termini contigui; siccome uno stesso passaggio da + a —, e da — a + può indicare più radici reali irrazionali o eguali tra di loro, o comprese tra gli stessi due limiti, cioè tra due medesimi numeri della serie naturale dei supposti di *x*.

VIII. Anzi avvertasi, che quando la serie abbia qualche minimo, dopo il quale i termini tornino indiedietro affetti dello stesso segno, potrà accadere, che l' Equazione abbia una o più coppie di radici irrazionali, comprese fra il supposto di x, che dà il minimo, e i supposti contigui. Per intendere la ragion di ciò si consideri che un' Equazione, la quale non avesse, che una sola radice reale, per quello, che è stato detto al n. 4., dovrebbe avere nella sua serie un solo passaggio da + a —, o da — a +, e questo pel zero, supposto che la detta radice reale fosse razionale n. 3; che se si supponessero all' Equazione due sole radici reali, e queste molto diseguali dovrebbero nella serie dell' Equazione aversi due soli passaggi da + a —, e da — a +, e questi pel zero ogni qual volta le due supposte radici fossero razionali; ora due soli passaggi da + a —, e da — a + non possono intendersi senza intendere, che tutti i termini della serie intermedii ai due passaggi sieno affetti dallo stesso segno, e questo diverso dal segno di cui sono affetti tutti gli altri termini della serie medesima. Dunque concependo, che le supposte due radici diseguali dell' Equazione cominciassero ad avvicinarsi l' una all' altra; è chiaro che l' intervallo tra le due mutazioni del segno si andrebbe di mano in mano sminuendo, fin tanto che divenendo le due radici eguali tra di loro, o distanti l' una dall' altra d' una quantità minore dell' unità, il detto intervallo svanirebbe, e resterebbero i termini delle serie affetti tutti dello stesso segno, se non che in luogo dell' intervallo svanito rimarrebbe un termine minimo, se le supposte due radici fossero irrazionali, o un solo zero se fossero razionali.

IX. Quando si resta in dubbio, se un minimo, che s' incontri nella serie dell' equazione, indichi qualche valore reale dell' incognita, o no, come pure quando si resta in dubbio circa il numero dei valori indicati da una stessa mutazione di segno, si sostituisca nell' equazione in luogo dell' incognita x il minore di que' due supposti di x, che sono i limiti tra i quali cade il dubbio, accresciuto d' una frazione, il cui numeratore sia l' unità, il denominatore sia una nuova incognita. Perchè se l' equazione data per la nuova incognita avrà dei valori reali maggiori dell' unità, quanti sono questi valori, tanti saranno i valori della x compresi tra quei due limiti, tra i quali cadeva il dubbio; e se la nuova equazione non avrà alcun valore reale maggiore dell' unità (il che non potrà succedere se non nel caso del minimo) si potrà esser certo, che il minimo, su di cui cadeva il dubbio, non indica valore alcuno reale della x. Imperocchè se tra i due limiti, su dei quali restava il dubbio, sono veramente compresi valori reali della x, devono questi essere maggiori del limite minore, e minori del maggiore; e però devono venir espressi ciascuno dal limite minore accresciuto d' una frazione vera; onde supposto, che questa frazione abbia per numeratore l' unità, dovrà avere per denominatore una quantità maggiore dell' unità. Dunque la nuova incognita, che rappresenta questo denominatore, dee avere tanti valori reali maggiori dell' unità, quanti sono i valori reali della x compresi tra i suddetti limiti.

X. Per riconoscere poi, se l' equazione data per la nuova incognita abbia radici maggiori dell' unità, e quante ne abbia, tengasi il metodo dato di sopra, cercando cioè i limiti dei valori della nuova incognita per cui è data l' equazione. Trovati poi questi limiti, verranno a restringersi i limiti dei valori della x nell' equazione proposta da principio, e così si verranranno ad avere i medesimi valori più prossimi ai veri. Anzi ripigliando la stessa operazione, e ripetendola di mano in mano nelle equazioni, che con questo metodo s' anderanno ritrovando, si potrà giungere per ciascun valore della x ad un' approssimazione tanto grande quanto si possa desiderare.

XI. Eccone l' esempio. Sia l' Equazione $x^4 - 16x^3 + 81x^2 - 150x + 90 = 0$, di cui la serie è $6, 2, 18, 18, -10, -54, -78, -22, 198$, i quali termini corrispondono ai seguenti supposti di x, cioè $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Essendo in questa serie due mutazioni di segno corrispondenti ai supposti $4, 5$, e $8, 9$ saremo sicuri, che fra $4, 5$, e $8, 9$ vi saranno due radici reali irrazionali; quantunque per altro due soli sieno le mutazioni di segno, non devo conchiudere precipitosamente, che le altre due radici della proposta equazione sieno immaginarie; imperciocchè fra i medesimi limiti $4, 5$, e $8, 9$ potrebbero esistere ancora le altre due; anzi osservando che la serie dell' Equazione à un minimo corrispondente al supposto 2, potrà accadere, che fra il $2, 1$, e fra $2, 3$ si ritrovassero le predette radici. Per scoprire se ciò in realtà avvenga tengo il seguente metodo, che applico sol tanto ad indagare se fra l' 1 e 2 vi sia alcuna radice, potendosi da ciò abbastanza comprendere come operare si debba negli altri casi. Pongo x eguale al limite minore più $\frac{1}{y}$, cioè $x = 1 + \frac{1}{y}$, e fatta la sostituzione nella proposta equazione trovo $6y^4 - 32y^3 + 39y^2 - 12y + 1 = 0$, di cui la serie è $2, -27, -26, 65$ corrispondente ai supposti $1, 2, 3, 4$, in cui vi sono due mutazioni di segno corrispondenti ai supposti $1, 2$, e $3, 4$; dunque fra questi limiti vi sono

due

due valori di y, che in conseguenza saranno maggiori dell' unità; dunque conchiudo che fra l' uno, e il due vi sono due valori della x: che se non avessi ritrovato alcun valore della y maggiore dell' unità, avrebbe ciò indicato, che frà 1, e 2 non vi era alcun valore della x; onde bisognerebbe cercarli fra il 2 ed il 3, e se non si trovassero fra questi limiti, converrebbe far l' esperimento fra il 4 e il 5, e l' 8 e il 9. Voglio ora approssimarmi al minore dei due valori della x compresi fra 1, e 2; pongo a quest' effetto $y = 3 + \frac{1}{z}$, e fatta la sostituzione nell' equazione data per y ritrovo $62z^4 - 6z^3 - 75z^2 - 40z - 6 = 0$; da cui ricavo la serie $-65, 558, 4059$ corrispondente ai supposti 1, 2, 3; dunque fra 1 e 2 vi è un valore di z maggior dell' unità, se vogliasi seguitare l' approssimazione si ponga $z = 1 + \frac{1}{u}$, e fatta la sostituzione nell' equazione data per z risulta $65u^4 - 40u^3 - 279u^2 - 279u^3 - 242u - 62 = 0$, la di cui serie corrispondente ai supposti 1, 2, 3 &c. è $-558, -942, 886$, la quale a cagione della mutazione del segno indica, che fra il 2, ed il tre vi sia un valore reale della z; chi desiderasse continuare l' approssimazione dovrebbe porre $z = 2 + \frac{1}{r}$, ed operare come sopra, con che troverebbe

$x =$

$$x = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \&c.}}}}}}}$$

e perciò i valori proſſimi della x ſono

$$\frac{1}{1},\ \frac{4}{3},\ \frac{14}{11},\ \frac{19}{15},\ \frac{52}{41},\ \frac{71}{56},\ \frac{194}{153}\ \&c.$$

Ciaſcun dei quali è in termini minimi, e differiſce dal vero valore per una quantità minore d' una frazione, la quale abbia per numeratore l' unità, e per denominatore il denominatore della ſteſſa frazione moltiplicato pel denominatore della frazione ſeguente num. 13. del Cap. 7. di queſto libro: così $\frac{19}{15}$ differirà dal valore vero di x per una quantità minore di $\frac{1}{615}$. Per facilitare la ſoſtituzione del valor $1 + \frac{1}{y} = x$ nell' Equazion propoſta ſi rifletta, che ſe nell' Equazion generale $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2}$ &c. $+ K = 0$ ſi ponga $p + \frac{1}{y}$ in vece di x, onde ſia $A'y^m + B'y^{m-1} + C'y^{m-2}$ &c. $+ K' = 0$, ſarà $A' = Ap^m + Bp^{m-1} + Cp^{m-2}$ &c.

$B' =$

$B' = mAp^{m-1} + \overline{m-1} \cdot Bp^{m-2} + \overline{m-2}\,Cp^{m-3}$ &c.

$C' = \frac{m \cdot m-1}{2} Ap^{m-2} + \frac{m-1 \cdot m-2}{2} Bp^{m-3}$ &c. come si ricava dal num. 5. del Capo 2. di questo libro; lo stesso vale per le altre sostituzioni.

XII. Altro metodo per lo stesso oggetto del numero precedente è questo: si ponga $x = \frac{y}{10}$, e si faccia la sostituzione nell' Equazione $x^4 - 16x^3 + 81x^2 - 150x + 90 = 0$, onde si ottenga $y^4 - 160y^3 + 8100y^2 - 150000y + 900000 = 0$: e comecchè per le cose dette nel num. precedente il minimo ritrovato nella serie dell' Equazione data per x mi mette in dubbio se fra 1 e 2 vi sieno valori irrazionali della x, perciò ritrovo i termini fra il 10, ed il 20 della serie della Equazione data per y, i quali sono 60000, 31781, 10656, —4059, —13024, —16875, —16224, —11659, —3744, 6981, 20000, in cui essendovi due mutazioni di segno ne inferisco, che all' y competono due valori uno frà il 12, e il 13, e l' altro frà il 18, e il 19; onde all' x converranno due valori fra l' uno, ed il due il più picciolo dei quali sarà frà $\frac{12}{10}$, e $\frac{13}{10}$, ed il più grande frà $\frac{18}{10}$, e $\frac{19}{10}$. Se nell' Equazione data per x si sostituisca $\frac{z}{10}$ in luogo di y, e della nuova Equazione si troverà quella parte di serie, che corrisponde ai suppòsti di z dà 120 fino a 130, come pure quella parte, che

cor-

corrisponde ai supposti di z da 180, fino a 190 si confineranno le radici di cui si parla tra limiti anche più ristretti; e proseguendo collo stesso metodo quest' operazione, per altro assai laboriosa attesi i numeri sempre più alti, che si hanno a maneggiare, ed applicandola a qualsivoglia radice dell' Equazion proposta, si arriverà ad avere ciascuna radice confinata entro i limiti quanto si vuole ristretti, e perciò approssimante al valor giusto quanto più piace.

XIII. Potrebbe accadere un caso, che io per altro reputo rarissimo, cioè che qualche radice dell' Equazione data per x non venga indicata da alcuna mutazione di segno, ne da alcun minimo nella serie dell' Equazione; questo caso può avvenire, quando vi sieno alcune radici dell' Equazione, che differiscano per una picciolissima quantità: allora sarà opportuno ricorrere alla sostituzione $x = \frac{y}{10}$, ovvero $x = \frac{y}{100}$ &c., e trovare la serie dell' Equazione data per y; essendo quasi impossibile, che in tal serie non si scorga qualche segno di tutte le radici, che appartengono all' Equazione per y, da cui sarà facile determinare i valori di x, che nello stesso tempo si ritroveranno assai prossimi ai veri.

XIV. Chi volesse per altro operare con sicurezza dovrebbe formare l' Equazione $v^r + a v^{r-1} + b v^{r-2} + c v^{r-3}$ &c. $= o$, in cui le v esprimessero i quadrati delle differenze, che passano frà le radici della proposta, ossia dell' Equazione in x, come insegnammo num. 15. Capo 2. di questo libro; indi dovrebbe ritrovare il limite più grande positivo dei valori delle radici di questa Equazione col metodo del num. 6. del presente capitolo, il quale limite sia g; essendo adunque g maggiore di qualunque v, farà $\frac{1}{g}$ minore di qualunque v, e perciò $\frac{1}{\sqrt{g}}$ minore di una qualunque differenza delle radici dell' Equazione in x; per tanto se in questa in vece della x, si pongano successivamente i termini della serie aritmetica o, $\frac{1}{\sqrt{g}}$, $\frac{2}{\sqrt{g}}$, $\frac{3}{\sqrt{g}}$ &c. e prolongata da una parte e dall' altra quanto fà bisogno num. 6. tutte le radici reali dell' equazione proposta saranno senza dubbio indicate dalle mutazioni dei segni, che si ritroveranno nella serie dell' Equazione, e i termini della serie predetta corrispondenti ai termini contigui della serie dell' Equazione, nei quali cade la mutazione del segno, saranno i limiti dei valori della x. Se g non fosse un quadrato perfetto, per comodo del calcolo si può prendere in vece di g il quadrato perfetto più prossimo dei maggiori. Se $\frac{1}{\sqrt{g}}$ fosse maggiore dell'unità, allora alla serie o, $\frac{1}{\sqrt{g}}$, $\frac{2}{\sqrt{g}}$ &c. si può sostituire o, 1, 2, 3 &c. perchè in questo caso tutte le differenze delle radici sono maggiori dell' unità, e perciò più radici non possono aver per limiti due termini contigui della predetta serie o, 1, 2, 3 &c.; onde ogni radice reale conviene, che cagioni mutazione di segno nella serie dell' Equazione. Dalle cose dette in questo Capitolo si comprende facilmente essere in nostro potere approssimarsi quanto si vuole ai veri valori delle radici reali di qualsivoglia Equazione. Nel secondo Tomo si vedrà, come possiamo trovare per approssimazione le radici dell' Equazioni litterali coll' ajuto dei logaritmi.

CA-

CAPO IX.

Coi Seni, e Cosseni circolari, ed iperbolici si costruiscono le radici dell' Equazione del §. 12. del Capo quinto.

I. L' Equazione del §. 12. del Capo quinto à questa forma $x^p - p\,a\,x^{p-2} + \frac{p.(p-3)}{2} a^2 x^{p-4} - \frac{p(p-4)(p-5)}{2.3} a^3 x^{p-6}$ &c. ..... $- b = o$ in cui a, e b possono essere positive e negative come si vuole; una delle sue radici ha quest' altra forma

$$x = \left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)^{\frac{1}{p}} \pm \left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

il segno — vale quando sia a negativa, ed il numero p pari. Si pone $-b$ in vece di b^m, ed a in vece di a^2 in grazia di maggior semplicità, il p come ognun vede corrisponde all' m, ed in cambio di π, π^{m-1} si pone l' unità. A costruire queste radici bisogna confrontarle colle espressioni dei seni, e cosseni dei logaritmi, e degli archi sottomoltiplici esposte nel Libro 2. Capo 11. §. 10. E acciocchè si proceda con chiarezza distingueremo quattro ipotesi, nella prima a e b sono positive; nella seconda a è positiva, b negativa; nella terza a negativa, b positiva; nella quarta a e b sono negative. A motivo di eleganza cerco soltanto la metà di x.

II. Nella prima ipotesi, abbiamo $\frac{x}{2} =$

$$\frac{\overline{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}}^{\frac{1}{p}}+\overline{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}}^{\frac{1}{p}}}{2}$$ in cui

si distinguano due casi, o è $\frac{bb}{4} > a^p$, ovvero non è maggiore: nel primo caso, il confronto si dee fare coll' espressione del Cosseno del logaritmo summultiplo, cioè con $Cb\frac{\mu}{p} = \frac{\overline{Cb.\mu+Sb.\mu}^{\frac{1}{p}}+\overline{Cb.\mu-Sb.\mu}^{\frac{1}{p}}}{2.r^{\frac{1}{p}-1}}$; nel secondo caso colla formola del Cosseno dell' arco summultiplo

$$Cc.\frac{\mu}{p}=\frac{\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{\frac{1}{p}}+\overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}\,Sc.\mu}^{\frac{1}{p}}}{2.r^{\frac{1}{p}-1}}$$

111\. Dal primo confronto nasce $\frac{b}{2}+\overline{\frac{bb}{4}-a^p}^{\frac{1}{2}} = \frac{Cb.\mu+Sb.\mu}{r^{1-p}}$; e $\frac{b}{2}-\overline{\frac{bb}{4}-a^p}^{\frac{1}{2}} = \frac{Cb.\mu-Sb.\mu}{r^{1-p}}$; aggiunte queste due equazioni, indi sottratta dalla prima la seconda otterremo $\frac{b}{2}=\frac{Cb.\mu}{r^{1-p}}$, e $\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p} = \frac{Sb.\mu}{r^{1-p}}$: mà $\overline{Cb.\mu}^2-\overline{Sb.\mu}^2=rr$; adunque so-

sti-

stituiti i valori sarà $\frac{bb}{4} - \frac{bb}{4} + a^p = \frac{rr}{r^{2-2p}}$, cioè $a^p = r^{2p}$, ed $a^{\frac{1}{2}} = r$; è chiaro pertanto, che sia $\frac{x}{2} = Cb . \frac{\mu}{p}$, posto che μ sia quel logaritmo, che abbia per cosseno $\frac{b}{2 . a^{\frac{p-1}{2}}}$, e per seno tutto $a^{\frac{1}{2}}$..

IV. Descritta adunque l' Iperbola equilatera col semiasse $AC = a^{\frac{1}{2}}$ [F.1. T.1.] si tagli $CM = \frac{b}{2 . a^{\frac{p-1}{2}}}$, si conduca il seno MN, e dai punti A ed N nell' asintoto si calino le normali AK, NP; fra CK, CP si trovino tante medie proporzionali quante unità sono in $p - 1$, la prima delle quali sia CG; da G si tiri GE perpendicolare all' asintoto, ed il seno EB, il quale determinerà il cosseno $CB = \frac{x}{2}$. Se p sia un numero dispari la prima delle medie proporzionali tra CK, CP avrà un solo valore reale, e perciò una sola sarà la radice reale della nostra equazione.. Se p sarà un numero pari la prima delle medie proporzionali à due valori reali positivo l' uno, negativo l' altro, cioè CG, Cg; dunque ancora $Cb . \frac{\mu}{p}$ avrà due valori eguali, cioè CB, Cb, il primo positivo, il secondo negativo; lo stesso adunque avverrà ad $\frac{x}{2}$.

V.

V. Dal secondo paragone si avrà $\frac{b}{2} + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a^p - \frac{bb}{4}} = \frac{Cc.\mu + \sqrt{-1}.Sc.\mu}{r^{1-p}}$, e $\frac{b}{2} - \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a^p - \frac{bb}{4}} = \frac{Cc.\mu - \sqrt{-1}.Sc.\mu}{r^{1-p}}$; onde si troverà $\frac{b}{2} = \frac{Cc.\mu}{a^{1-p}}$, $\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}} = \frac{Sc.\mu}{a^{1-p}}$; ma $\overline{Cc.\mu}^2 + \overline{Sc.\mu}^2 = rr$; dunque $\frac{bb}{4} + a^p - \frac{bb}{4} = \frac{rr}{r^{2-2p}}$, cioè $a^p = r^{2p}$, ovvero $a^{\frac{1}{2}} = r$. Per tanto sarà $\frac{x}{2} = Cc.\frac{\mu}{p}$, purchè sia il seno tutto uguale $a^{\frac{1}{2}}$, ed il $Cc.\mu = \frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$. Per avere la costruzione si descriva il circolo, il di cui seno tutto, o sia il raggio sia $CA = a^{\frac{1}{2}}$, si prenda $CM = \frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$, e si conduca il seno MN (*Fig.* 2. *T.* 1.) sarà l' arco $AN = \mu$. Si divida questo in tante parti, quante unità sono in p, la prima delle quali sia $AE = \frac{\mu}{p}$; si cali il seno EB, il cosseno CB sarà uguale ad $\frac{x}{2}$. L' arco AN, il di cui

cui coſſeno è CM, non è unico; imperciocchè chiamata la circonferenza del circolo $= c$, e l' arco $AN = \mu$, tutti gli archi μ, $c + \mu$, $2c + \mu$, $3c + \mu$ &c. e ſimilmente gli archi μ, $-c + \mu$, $-2c + \mu$, $-3c + \mu$ &c. i quali ſono infiniti di numero anno per coſſeno MC, queſti ſe ſi dividono in parti numero p ſi troveranno nuovi archi $A2E$, $A3E$ &c. i di cui coſſeni $C2B$, $C3B$ &c. daranno nuovi valori della radice $\frac{x}{2}$. Ne ſi dee per altro credere, che i valori reali di $\frac{x}{2}$ ſieno infiniti, eſſendo tanti ſolamente quante unità ſi trovano nel numero p, imperciocchè diviſo un numero p di archi ſi troveranno ſoltanto punti numero p, ritornando i medeſimi punti per la diviſione degli altri archi, come ſi vidde accadere nel Capo 12. del libro ſecondo per la ſezione dell' arco in tre parti uguali; adunque $\frac{x}{2}$ à tanti valori reali quante unità ſono in p. Nel caſo che foſſe $\frac{bb}{4} = a^p$, ſarebbe il

$$Cc.\mu = \frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}} = a^{\frac{1}{2}},$$

e ſarebbe perciò $\mu = o$, onde gli archi da dividerſi ſarebbero o, $c+o$, $2c+o$, $3c+o$ &c. cioè c, $2c$, $3c$ &c.

VI. Nella ſeconda ipoteſi in cui ſi ſuppone a poſitiva, e b negativa mutato il ſegno alla lettera b la radice riceve la ſeguente forma

x

$$\frac{x}{2} = \left(-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

la quale si dee paragonare col cosseno del logaritmo summultiplo se sia $\frac{bb}{4} > a^p$; col cosseno poi dell' arco summultiplo se $\frac{bb}{4}$ non sia $> a^p$: questi paragoni ci danno i medesimi valori della prima ipotesi con questa diversità sol tanto, che il cosseno μ si dee prendere negativo. Nel caso dunque di $\frac{bb}{4} > a^p$ così si dovrà fare la Costruzione. Descritta l' Iperbola equilatera col seno tutto $CA = a^{\frac{1}{2}}$ si tagli $CM = \frac{b}{2 . a^{\frac{p-1}{2}}}$, la quale essendo negativa si dee prendere dalla parte dei Cosseni negativi, a questa si alzi la normale MN (*Fig.* 3. *T.* 1.) dalla parte dei seni positivi, perchè il seno si è trovato positivo. Da N nell' asintoto CK si cali la normale NP, tra CK, CP si trovino tante medie proporzionali quante unità sono nel numero $p - 1$, la prima delle quali sia CG, GE sia normale all' asintoto, ed EB all' asse; il cosseno CB negativo sara $= \frac{x}{2}$.

VII. Se sia p numero dispari le medie proporzionali tra CK, CP da ritrovarsi saranno di numero pari; ma le medie proporzionali di numero pari fra una quantità positiva, ed un' altra negati-

va

va sono possibili, la prima delle quali è sempre negativa; adunque se sia p numero dispari, CG sarà reale e negativa; dunque ancora $CB = \frac{x}{2}$ sarà reale e negativa. Se poi sia p numero pari le medie proporzionali da ritrovarsi saranno di numero dispari; ma le medie proporzionali di numero dispari fra una quantità positiva, e l' altra negativa, non tutte sono reali, ma la prima, terza, quinta &c. sono immaginarie; dunque CG dovendo essere la prima, sarà immaginaria; e per ciò sarà immaginaria ancora $CB = \frac{x}{2}$. Adunque nel primo caso della seconda ipotesi, se sia p dispari avremo una radice reale negativa; se p sia pari tutte le radici saranno immaginarie.

VIII. Nel secondo caso di questa ipotesi nel quale abbiamo $\frac{bb}{4} < a^p$, ovvero $\frac{bb}{4} = a^p$ la costruzione ci da tutte le radici $\frac{x}{2}$ reali. (Fig. 4. T. I.) Descritto il Circolo col raggio $a^{\frac{1}{2}}$ si tagli il cosseno negativo $CM = \frac{b}{2 . a^{\frac{p-1}{2}}}$ e si alzi il seno positivo MN: chiamato l' arco $AN = \mu$ si prendano gli archi μ, $c+\mu$, $2c+\mu$, $3c+\mu$ &c. tanti di numero quante unità sono in p, e fatta la divisione di questi archi in parti uguali numero p si determinino i punti E, $2E$, $3E$ &c.; mediante questi si determineranno le radici dell' equazione $\frac{x}{2} = CB$, $= C2B$, $= C3B$ &c. E' superfluo prendere archi in maggior numero ritornando i medesimi

simi punti di divisione. Se sia $\frac{bb}{4} = a^p$, sarà $\frac{b}{2 \cdot a^{\frac{p-1}{1}}} = a^{\frac{1}{2}}$, e perciò gli archi da dividersi saranno c, $2c$, $3c$ .... pc.

IX. Le altre due ipotesi in cui a è negativa, e b positiva, ed a negativa, e b ancora, il paragone si dee fare colle formole dei Seni de' logaritmi, quando le radici non contengono quantità immaginarie; con quelle poi dei Seni circolari, se si introducano nelle radici le quantità immaginarie. Lascio all' industria dei Giovani la costruzione di queste radici, la quale non è dissimile dalle costruzioni da noi sopra esposte.

CAPO X.

Si risolvono tutti i Binomii, ed alcuni Trinomii in fattori reali del secondo grado col mezzo dei Cosseni circolari.

I. SE dal trinomio $z^{2p} - bz^p + a^p = o$ si elimini la z, e si introduca la x mediante l'equazione $z + \frac{a}{z} = x$ nascerà l' equazione di questa forma.

$$x^p - pax^{p-2} + \frac{p(p-3)}{2} a^2 x^{p-4}$$

$$- \frac{p(p-4)(p-5)}{2 \cdot 3} a^3 x^{p-6} \ldots\ldots - b = o$$ per lo num. 12. del Capo 5. Se sia dunque φ un valore di x di questa equazione sarà $x - \varphi = o$, e perciò sarà

$z +$

$z + \frac{a}{z} - \varphi = o$, ossia $zz - \varphi z + a = o$, adunque il trinomio proposto sarà divisibile per lo trinomio $zz - \varphi z + a = o$ reale di secondo grado.

II. Ora nel Capo precedente abbiamo veduto, che posta a positiva, e $\frac{bb}{4}$ non maggiore di a^p, e il raggio del circolo $= a^{\frac{1}{2}}$, ed il Cosseno dell'Arco $\mu = \frac{b}{2 . a^{\frac{p-1}{2}}}$ tutte le radici della proposta equazione sono reali uguali $2\,Cc . \frac{\mu}{p}$, $2\,Cc . \frac{c + \mu}{p}$, $2\,Cc . \frac{2\,c + \mu}{p}$ .... $+ 2\,Cc . \frac{(p-1)\,c + \mu}{p}$; le quali chiamate per brevità φ, $2\,\varphi$, $3\,\varphi \ldots p\,\varphi$ sarà il trinomio proposto divisibile ne' fattori reali di secondo grado $zz - \varphi z + a$, $zz - 2\,\varphi z + a \ldots\ zz - p\,\varphi z + a$: si noti che i coefficienti 1, $2 \ldots p$ altro non fanno che distinguere il φ, ed indicare il numero delle radici, ed in conseguenza dei fattori di secondo grado, che tutti saranno in numero p.

III. Fingiamo ora che il cosseno $\frac{b}{2 . a^{\frac{p-1}{2}}}$ sia uguale al seno tutto $a^{\frac{1}{2}}$, e che perciò l'arco μ sia uguale a zero, avremo $\frac{b}{2} = a^{\frac{p}{2}}$, ed il trinomio proposto si cangierà in $z^{2p} - 2\,a^{\frac{p}{2}} z^p + a^p = o$; i trinomii

 poi

poi di secondo grado, in cui questo risolvesi saranno $zz - 2zCc.\frac{o}{p} + a$, $zz - 2zCc.\frac{c}{p} + a$, $zz - 2zCc.\frac{2c}{p} + a \ldots zz - 2zCc.\frac{(p-1)}{p}c + a$. Si descriva il Circolo col raggio $a^{\frac{1}{2}}$, e principiando dal punto 1 (*Fig.* 5. *T.* 1.) si divida tutta la circonferenza in parti $2p$ uguali, verrà la semicirconferenza divisa in parti p; in tutti i punti di divisione si mettano i numeri con ordine, come rappresenta la figura; è chiaro che i cosseni cercati corrispondono ai numeri dispari; imperciocchè l' arco 1 3 è uguale $\frac{c}{p}$, $1\,5 = \frac{2c}{p}$ &c.

IV. Ciascun arco minore della semicirconferenza à un arco corrispondente maggiore della stessa, ai quali è comune lo stesso cosseno, eccetto l' arco zero il cui cosseno è $a^{\frac{1}{2}}$, e quando sia p numero pari si dee eccettuare ancora la semicirconferenza, il cui cosseno è $-a^{\frac{1}{2}}$; dunque ciascun de' fattori reali, in cui si divide il trinomio $z^{2p} - 2a^{\frac{p}{2}}z^{p} + a$ è replicato due volte; fuorchè il trinomio $zz + 2a^{\frac{1}{2}}z + a$, e quando p è pari, si eccettua ancora il trinomio $zz - 2a^{\frac{1}{2}}z + a$, i quali non sono replicati. Avremo adunque questa equazione $z^{2p} - 2a^{\frac{p}{2}}z^{p} + a^{p} = \overline{zz - 2Cc.\frac{c}{p} + ax}^{2}$

+

$+zz-2Cc.\frac{2c}{p}+a$ &c. moltiplicati per $(zz-2a^{\frac{1}{2}}z+a)$ $(zz+2a^{\frac{1}{2}}z+a)$, ed estraendo la radice quadrata sarà $z^p-a^{\frac{p}{2}}=(zz-2Cc.\frac{c}{p}+a)\times$ $(zz-2Cc.\frac{2c}{p}+a)$ &c. in $(z-a^{\frac{1}{2}})(z+a^{\frac{1}{2}})$; questo ultimo fattore semplice si lasci se p sia dispari.

V. Supponiamo adesso il Cosseno $\mu=\frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}=-a^{\frac{1}{2}}$, cioè al seno tutto preso negativamente; il trinomio diverrà $z^{2p}+2a^{\frac{p}{2}}z^p+a^p=0$, e l'arco $\mu=\frac{c}{2}$, ed i trinomii reali di secondo grado saranno $zz-2zCc.\frac{c}{2p}+a$, $zz-2zCc.\frac{3c}{2p}+a$, $zz-2zCc.\frac{5c}{2p}+a$,.... $zz-2zCc.\frac{\overline{2p-1}.c}{2}+a$. Incominciando dal punto 1 si divida l' intera circonferenza (Fig. 6. T 1.) in parti uguali $2p$, e si segnino i punti di divisione coi numeri naturali 1, 2, 3 &c. i cosseni cercati corrispondono agli archi segnati coi numeri 2, 4, 6 &c. Seguendo le stesse traccie dell' ipotesi antecedente si troverà $z^p+a^{\frac{p}{2}}=(zz-2Cc.\frac{c}{2p}+a)$

[zz

$(zz - 2Cc.\frac{3c}{2p} + a)(zz - 2Cc.\frac{5c}{2p} + a)$ &c. ai quali fattori si dee aggiungere $z + a^{\frac{1}{2}}$ se p sia dispari, perchè in questo caso essendo la semicirconferenza divisa in parti numero dispari entrerà essa nella serie degli archi $\frac{c}{2p}, \frac{3c}{2p}, \frac{5c}{2p} \ldots$ &c.

VI. Dai paragrafi 4. e 5. si conosce che il binomio $z^p \pm a^p$ sia sempre divisibile in fattori reali di secondo grado: risoluti poi questi fattori si avranno tutti i valori di z, i quali saranno reali o immaginarii secondo le circostanze; adunque se fingasi $a = 1$, onde il binomio sia $z^p \pm 1 = o$, colla sezione della periferia del cerchio in parti uguali sapremo ritrovare tutti i valori di z, ed in conseguenza dell' unità tanto positiva, quanto negativa.

VII. Gli Analisti credono con qualche fondamento, che qualunque formola razionale si possa risolvere in fattori reali del secondo grado; se ciò è vero tutti gli immaginarii si riducono ad $A + B\sqrt{-1}$, perchè risoluti i predetti fattori non possono dare altri immaginarii, che di questa forma.

CA-

CAPO XI.

Della Descrizione delle Curve, per via di infiniti punti.

I. PArliamo quì brevemente della maniera, con cui data una Equazione di una Curva si procura di ottenerne la descrizione per via di infiniti punti; imperciocchè molte cose, che questa riguardano stimiamo opportuno rimettere al Calcolo differenziale, per mezzo di cui con maggiore speditezza esse si ottengono che con qualunque altro metodo: come sarebbe condurre le tangenti, ritrovare gli asintoti non paralleli alle linee delle coordinate, determinare le massime, e le minime ordinate, i lessi contrarii, i regressi, il genere di Curvatura &c. in che il sopraddetto calcolo mostra la sua eccellenza.

II. Per far vedere adunque come le Curve si descrivano, o per meglio dire si adombrino per via di infiniti punti, si proponga a costruire la Curva dell' Equazione $y = x . \frac{(x + a)(x - b)}{aa}$. Si prenda qualunque retta CB per linea delle ascisse, ed il punto A per principio delle medesime; pongo $x = o$, e trovo $y = o$, adunque conchiudo, che la Curva passa pel punto A; (*Fig.* 7. *T.* 1.) pongo $x = b$, e similmente ritrovo $y = o$, adunque presa $AB = b$ la Curva passerà per B, faccio finalmente $x = -a$, e similmente trovo $y = o$; dunque tagliata $AC = a$ dalle parte delle x negative la Curva passerà per C; supposta x infinita positiva sarà $y = \frac{x^3}{a^2}$, perchè gli altri termini svaniscono rispetti-

va-

vamente a $\frac{x^3}{a^2}$, il quale essendo infinito e positivo sarà y infinita e positiva; se poi prendasi x infinita, e negativa si ritroverà y infinita e negativa; se ad x si dia qualunque valore positivo, o negativo, sarà y sempre reale: adunque la Curva è continua ed infinita da una parte e dall' altra. Dalle quali cose si raccoglie che la Curva avrà ad un dipresso l' andamento, che vedesi espresso nella 7. figura: per aver poi l' andamento preciso conviene dare ad x un numero indefinito di valori per esempio AM, $A2M$ &c. per determinare altrettanti valori di $y = MN$, $2M2N$ &c. le quali rette applicate con l' estremità M, $2M$ &c. ad angolo costante all' estremità delle ascisse, avranno quelle l' altra estremità N, $2N$ nella linea che si vuole descritta.

III. Dalla descrizione di questa Curva si raccolga, che, se y sarà eguale ad una funzione di x razionale, ed intiera, cioè che se la x non sia sotto segni radicali, ne nel denominatore della funzione nel caso che abbia denominatore, la Curva segherà la linea delle ascisse in tanti punti, quanti saranno i fattori semplici reali della funzione sopraddetta; e se la funzione non avesse alcun fattore semplice reale, la Curva mai segherebbe la linea dell' ascisse, il che solo può accadere quando la funzione sia di grado pari, perchè quelle di grado dispari, deono avere almeno un fattore semplice reale, dovendo i fattori semplici immaginarii essere di numero pari, altrimenti la funzione conterrebbe quantità immaginarie; e perciò la Curva in tal caso segherà la linea delle ascisse almeno in un punto.

IV. Se y sia uguale ad una quantità costante, divisa per una funzione razionale ed intiera di x, come

sa-

sarebbe $y = \frac{a^3}{x-a \,.\, x+b}$; mai y può diventare zero, adunque mai la Curva incontrerà la linea delle ascisse. Se sia $x = a$ sarà $y = \frac{a^3}{0}$, cioè y infinita; lo stesso avviene se sia $x = -b$; adunque alle ascisse eguali ad a, e $-b$ corrispondono due y infinite, cioè due asintoti; dal che si vede, che altrettanti sono gli asintoti paralleli alle coordinate, quanti fattori reali semplici sono nella funzione di x.

V. Se y finalmente sia eguale ad una funzione razionale di x, divisa per altra funzione razionale, come sarebbe $y = \frac{x\,.\,(x+a)(x-b)}{(x-a)(x+b)}$, allora i fattori semplici reali del numeratore dinoteranno altrettanti punti nei quali la Curva incontra la linea delle ascisse; i fattori poi semplici reali del denominatore daranno altrettanti asintoti paralleli alle ordinate.

VI. Passiamo ora a supporre $y = \pm\sqrt{P}$, P è una funzione razionale intiera o fratta della x; in questo caso la y avrà sempre due valori uguali uno positivo, e l' altro negativo; adunque la linea delle ascisse sarà un diametro, anzi sarà l' asse, se l' angolo delle coordinate si supponga retto; inoltre la Curva non sarà sempre continua, perchè per qualche tratto della linea delle ascisse possono i valori della ascissa x far essere i corrispondenti valori di P negativi, e però le y immaginarie. Per i punti poi in cui la Curva sega la linea delle ascisse e per gli asintoti paralleli alle ordinate vale la stessa regola di sopra quando P si supponeva libera da radicale. Sia per esempio

$y = \pm \sqrt{\frac{aa.a-x}{x}}$. Sia AB (*Fig.* 8. *T.* I.) la linea delle ascisse ed A il loro principio, e supposto l' angolo delle coordinate retto sarà AB l' asse; posta $x = o$ diventa y infinita; dunque condotta per A la retta KH infinita sarà questa un asintoto della Curva; se poi si prenda $x = a$, y diventa zero; dunque tagliata AB eguale ad a la Curva passerà per B. Se prendasi $x < a$, il valore di y è reale, il quale diminuirà al crescere della x, se sia $x > a$, y sarà immaginaria, siccome lo sarà presa x negativa; adunque la Curva corrisponderà alla sola ascissa AB, ed avrà l' andamento che osservasi nella figura; essendo dotata di un flesso contrario, come si potrà vedere coi metodi, che faremo per dare nel Calcolo differenziale. Che se l' Equazion proposta fosse $y = \pm \sqrt{\frac{aa.(x-a)}{x}}$, segate $AB = AC = AD = a$, [*Fig.* 9. *T.* I.] e condotte per C, e D le indefinite HE, LF, che sieno parallele alla linea dell' ascisse, sarà la Curva da A in B immaginaria; e principiando da B andrà all' infinito per due rami BF, BE eguali e simili, i quali anno per asintoti le rette DF, CE. Dalla parte poi delle x negative la Curva è dotata di due rami HG, LI situati negli angoli HCG, LDI, i lati dei quali sono asintoti dei predetti rami.

VII. Sia ora $y = P \pm \sqrt{Q}$, in cui P e Q sono funzioni razionali della x intiere o fratte. Per descrivere questa Curva si ponga $P = z$, e $\sqrt{Q} = u$, acciocchè sia $y = z \pm u$; indi si descrivano le Curve corrispondenti alle Equazioni $P = z$, $\sqrt{Q} = u$; e que-

ste

ſte Curve ſieno AE, CF, (*Fig.* 10. *T.* 1.) nelle quali ſia $AB = CD = x$, $BE = z$, $DF = DG = u$; a ciaſcuna ordinata BE ſi aggiunga EH, e ſi tolga EK eguali a DF, ſaranno i punti H, e K nella Curva che ſi vuole deſcritta. Prendo per eſempio la coſtruzione d' una Equazione ſempliciſſima $y = \frac{a}{b} x \pm \sqrt{ab - xx}$. Pongo $\frac{ax}{b} = z$ la quale equazione appartiene alla linea retta, che coſtruiſco. (*Fig.* 11. *T.* 2.) Si prenda $AB = b$; $BC = a$, e ſi conduca l' indefinita AC, queſta ſarà la retta. Pongo inoltre $u = \sqrt{ab - xx}$, d' onde naſce $uu = ab - xx$ equazione al circolo ſe l' angolo delle coordinate ſuppongaſi retto; col raggio adunque $FG = \sqrt{ab}$ ſi deſcriva il circolo, ſaranno le $FH = x$, $HI = u = \sqrt{ab - xx}$; per la qual coſa ſegate le $AK = FH$, e condotte le ordinate KL, e preſe LM, LN eguali a HI, i punti M, ed N ſaranno in Curva, la quale è un' Ellisse.

VIII. Se y foſſe eguale a due radicali quadratici di ſecondo grado, come per eſempio $y = \pm \sqrt{2ax - xx} + \sqrt{ax - xx}$; ſi dovrebbe fare $z = \pm \sqrt{2ax - xx}$, ed $u = \sqrt{ax - xx}$, indi deſcrivere queſte due Curve, e col mezzo di eſſe deſcrivere la propoſta, prendendo $y = z + u$; lo ſteſſo vale ſe y ſia eguale a molti radicali quadratici, anzi a molti radicali di qualunque grado, purchè uno non ſia incluſo nell' altro.

IX. Quando poi y ſia eguale a quantità radicali, che contengono ſotto il vincolo radicale altri radicali; la difficoltà della coſtruzione della Curva creſce; ſi potrà però eſeguire col ſupporre molti valori della

 x,

x, per cui determinate molte y si vedrà come la Curva proceda. Eccone un esempio. Sia

$$y = \pm \sqrt{aa + xx \pm \sqrt{a^4 - x^4}}.\ \text{Supposta}$$

$x = 0$ nasce $y = \pm a\sqrt{2}$, ed $y = 0$

$x = \pm a$ $\quad y = \pm a\sqrt{2}$

$x > \pm a$ $\quad y$ immaginaria

$$x = \frac{a}{2} \quad \begin{cases} y = \pm \frac{a}{2}\sqrt{5 + \sqrt{15}}, \\ y = \pm \frac{a}{2}\sqrt{5 - \sqrt{15}} \end{cases}$$

e così in seguito.

X. Se l' Equazione che si vuol costruire fosse tale, che ordinata per y, ovvero per x non si potesse coi metodi noti risolvere, la Curva si potrebbe sempre delineare risolvendone l' Equazione per approssimazione.

CAPO XII.

Risoluzione, e Costruzione delle Equazioni colla intersecazione delle Curve.

I. Il criterio, che si diede al Cap. 9. del Libro 2. per certificarsi d' ottenere colla intersecazione delle sezioni coniche tutte le radici reali d' una Equazione con quelle costruita, si estende alla intersecazione di tutte le Curve. Ogni qualvolta adunque si abbiano due equazioni indeterminate a due variabili x, y per mezzo delle quali si possa ottenere una Equazione, in cui l' y sia a lineare dimenzione sol tanto, to, ed in cui non vi fiero fattori, che contengano la sola x; la costruzione sarà esente dà paralogismo; altrimenti avverrà se una delle due condizioni mancasse: la dimostrazione di ciò essendo in tutto la stessa di quella del capo citato è superfluo che sia ripetuta. Quando per altro siasi certo, che in una Curva, la quale contenga y^2, y^3, y^4 &c. a qualunque valore della x corrispondano tutte le y reali, il che alle volte non è difficile a raccogliersi dall' Equazione stessa della Curva; non occorre ricorrere all' esposto criterio; imperciocchè essendo tutte le ordinate reali è impossibile l' eguaglianza di due ordinate immaginarie.

II. Una equazione determinata di qualunque grado si può in primo luogo costruire nella seguente maniera. Si metta l' ultimo termine dell' equazione $=y$, si avrà il luogo alla linea retta, e fatta la sostituzione nell' Equazione data, si avrà una Equazione indeterminata del grado della proposta. Si costruiscano, e si congiungano come deesi questi due luoghi, si otterranno senza fallo mediante le intersecazioni loro le x, che saranno altrettante radici reali della Equazion proposta.

III. Sia per esempio da costruirsi $x^5 - 2a^2x^3 + a^4x - a^4b = 0$. Pongo $b = y$, e fatta la sostituzione nascerà $y = \frac{x^5}{a^4} - \frac{2x^3}{aa} + x$. Suppongo delineata questa Curva del quinto grado, la quale à l' andamento che vedesi nella figura: la retta CAF (*Fig.* 12. *T.* 2.) sia la linea delle ascisse, A il principio; si ponga $AM = b$ parallela alle ordinate, e per M si tiri MN parallela alle ascisse, che segherà la Curva in tanti punti, quante sono le radici reali della proposta equazione, le quali in conseguenza saranno le x corrispondenti a questi punti.

IV.

IV. Gli Algebristi vorrebbero, che nelle costruzioni si adoperassero le Curve di grado più basso che sia possibile: così l' Equazione del quinto grado proposta al §. 3. benchè si possa costruire con una Curva del quinto, e con una linea retta, amerebbero, che si costruisse con una del secondo, e una del terzo; il che si può ottenere ponendo $x^2 = ay$, e sostituendo nella equazione ay in vece di x^2, onde si abbia $y^2 x - 2ayx + a^2 x - a^2 b = o$ Equazione del terzo. Noi per altro siamo d' opinione, che non debbasi imporre questa legge; e che si lasci all' arbitrio di chi costruisce l' equazioni la scelta dei luoghi, onde si possa regolare dalla maggiore o minore facilità di poterli ottenere, delineare &c. La intersecazione della linea retta colla linea del grado della Equazione da costruirsi è ottima per ricavare tutte le determinazioni delle radici, come vedremo al Cap. 14.

V. Quello che è nostro consiglio spesso diviene necessità, poichè la regola che si suol dare per ottenere i luoghi più semplici spesso non si sà eseguire. La regola è la seguente. Se il grado dell' Equazion da costruirsi è numero quadrato; si deono adoperare due Curve, il grado di cui sia espresso dalla radice di quello. Se il numero non è quadrato, si tolga da questo il quadrato massimo: tre casi si possono dare, o il residuo è uguale alla radice d' esso quadrato, o è minore, o è maggiore: nei due primi casi si scelgano due Curve; il grado d' una sia la radice suddetta, e quello dell' altra la sopravvanzi dell' unità; nell' ultimo si usino due Curve il grado delle quali ecceda la radice per l' unità.

VI. Sia per esempio l' Equazione del sesto grado $x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = o$. (al qual grado riducesi una del quinto moltiplicandola per x).

Que-

Questa, secondo la regola, si dee costruire con una Curva del secondo, ed una del terzo grado; imperciocchè non essendo 6 numero quadrato, sarà 4 il massimo quadrato prossimo numero al 6, la radice di cui è il 2, onde con una Curva del secondo grado, ed una del terzo si dee eseguire la costruzione: a questo fine pongo $x^2 = y$; e sostituendo nascerà l' altra curva del terzo grado $y^3 + a y^2 x + b y^2 + c y x + d y + e x + f = 0$.

VII. Prendo una equazione del nono grado, (a cui si riducono quelle del settimo, ed ottavo moltiplicandole per xx, ed x) $x^9 + a x^8 + b x^7 + c x^6 + d x^5 + e x^4 + f x^3$ &c. Questa, secondo la regola, si dee costruire con due Curve del terzo grado; e ciò si ottiene ponendo $x^3 = y$, e sostituendo; il secondo termine $a x^8$ impedisce che nasca la Curva del terzo grado, onde conviene farlo sparire come abbiamo insegnato Lib. 3. Cap. 2.

VIII. L' Equazioni del decimo, e undecimo grado si riducono al duodecimo moltiplicando per x^2, e per x. Per la regola si deono introdurre alla costruzione di questa una Curva del grado terzo, ed una del quarto. L' Equazione sia $x^{12} + a x^{10} + b x^9$ &c. che prendo senza secondo termine, che impedirebbe l' operazione. Si faccia $x^3 = y$, si sostituisca, e si avrà l' intento.

IX. L' Equazione $x^{16} + a x^{14} + b x^{13} + c x^{12} + d x^{11}$ &c. aderendo alla regola costruir si dee con due Curve del quarto grado. Pongasi $x^4 = y$, fatta la sostituzione si à $y^4 + a y^3 x^2$ &c. Equazione del quinto grado, e non del quarto come si desidera. Quando il grado dell' equazione è maggiore questi ostacoli si moltiplicano, nè havvi un metodo generale da superargli. Adunque conviene tutto rimettere all' esercizio ed all' industria, ne conviene limitare la libertà di chi opera per ottenere le costruzioni delle Equazioni.

CA-

CAPO XIII.

Si risolvono alcuni Problemi indeterminati, che superano il secondo grado.

I. PRoblema primo. Si applichi nel punto A (Fig. 13. T. 2.) della retta AB la squadra NAM, che possa girare liberamente intorno al punto A, alla medesima retta sia perpendicolare la linea MPN, che possa muoversi parallela a se stessa; il punto di concorso delle linee AM, MN descrive la linea LM: si cerca che Curva descriva il punto N, in cui concorrono AN, NM. Chiamisi $AP = x$, $PM = z$, $PN = y$. Essendo l' angolo MAN retto, sarà $z : x :: x : y$; dunque $z = \frac{x^2}{y}$; se in questa equazione sostituiscasi il valore di z dato per x dalla natura della Curva LM, si avrà l' Equazione della Curva cercata.

Sia LM una linea retta, che non passi per lo punto A, la nostra Curva sarà una sezione Conica; anzi se LM sarà parallela ad AB, la Curva generata sarà una parabola. Se LM sia una Curva dell' Equazione $a^{m-n} x^n = z^m$, l' Equazione della Curva generata sarà $a^{m-n} x^n = \frac{x^{2m}}{y^m}$, cioè $y^m = \frac{x^{2m-n}}{a^{m-n}}$. Sia LM la circonferenza di un circolo che abbia il centro C in AB; chiamato il diametro del Circolo $= 2a$, sarà $z = \sqrt{2ax - xx} = \frac{xx}{y}$; dunque $2ay^2 - xy^2 = x^3$. Questa è quella Curva che si chiama *Cissoide di Diocle.*

II.

II. Problema secondo. Alla norma ABE (Fig. 14. T. 2.) si applichi la riga AE mobile intorno al punto A; poi si collochi un' altra riga MX in maniera, che movendosi sia sempre normale alla retta AE; alla norma in A si attacchi l' estremità del filo AXM uguale ad AB; l' altra estremità del filo si leghi al punto M della riga MX. Ciò posto si faccia il moto in modo che il filo passi sempre pel punto del concorso X delle due rette AB, MX, distendendosi lungo le stesse rette AB, MX; si cerca la Curva descritta dal punto M. Essendo il filo $AXM = AB$, tolto di comune AX, sarà $MX = XB$; dunque per gli angoli retti XME, XBE sarà $ME = BE$; alla retta AB si tiri la normale MP, e si chiami $AP = x$, $PM = y$, $AB = a$; sarà $PB = a - x$, ed $AM = \sqrt{xx + yy}$. Ma abbiamo $AP : PM :: AB : BE$, cioè $x : y :: a : BE = \frac{ay}{x} = ME$; e di più $AP : PB :: AM : ME$, cioè $x : a - x :: \sqrt{xx + yy} : \frac{ay}{x}$; adunque $ay = \overline{a - x} \cdot \sqrt{xx + yy}$, da cui ne viene $(a^2 x - 2ax^2 + x^3) : (2a - x) = y^2$ Equazione del terzo grado. L' andamento della Curva si può osservare nella figura; per altro ad avere il ramo $B2M$ conviene tagliare $E2M = ME$; lo stesso si dee fare dall' altra parte della retta AB: se si tagli $BD = BA$, e si conduca DQ normale ad AD, sarà DQ asintoto della Curva; queste verità dall' Equazione della Curva stessa facilmente si comprendono.

III. Problema terzo. Ritrovare l' Equazione della Curva descritta dal punto M posto nella circonferenza del Circolo BM, che si rota sopra un circolo eguale BA ed immobile. Sul principio della rotazione

il punto M, che descrive la curva sia in A, si conduca il raggio CA, e producasi secondo il bisogno; suppongasi poi giunto il circolo rotante nella posizione BM; (*Fig.* 15. *T.* 2.) sarà l'arco $BA = BM$; si congiungano i centri dei cerchi colla CH, che passerà per lo contatto B; si conduca ancora il raggio KM, che prodotto concorra con CA in D. Essendo BA, BM archi uguali di circoli uguali, gli angoli BCA, BKM saranno uguali; adunque il triangolo CDK sarà isoscele, e $CD = DK$, e per ciò $AD = MD$; adunque la linea AM sarà parallela a CK. Inoltre condotta la BD questa dividerà in due parti uguali tutte le parallele alla CK, e per conseguenza ancora AM in E, a cui sarà perpendicolare; conducasi finalmente MN perpendicolare a CD. Chiaminsi i raggi dei circoli $= r$, $CN = x$, $AN = x - r$, $MN = y$, $AM = \sqrt{\overline{x-r}^2 + yy}$, ed $AE = \frac{1}{2}\sqrt{\overline{x-r}^2 + yy}$. Per i triangoli simili sarà $CB : AE :: CD : AD$, e perciò $CB : CB - AE :: CD : CA$, ed in termini analitici $r : r - \frac{1}{2}\sqrt{\overline{x-r}^2 + yy} :: CD : r$; adunque $CD = (rr) : \left(r - \frac{1}{2}\sqrt{\overline{x-r}^2 + yy}\right)$.
Essendo inoltre simili i triangoli AMN, ADE, ovvero CDB, sarà $CD : CB :: AM : AN$ ed in termini analitici $(rr) : \left(r - \frac{1}{2}\sqrt{\overline{x-r}^2 + yy}\right.$ ad $r :: \sqrt{\overline{x-r}^2 + yy}$ ad $x - r$, cioè $r : r -$

$\frac{1}{2}\sqrt{\overline{x-r}^2+yy} :: \sqrt{\overline{x-r}^2+yy} : x-r$. Dunque $rx-rr=r\sqrt{\overline{x-r}^2+yy}+\frac{1}{2}(-xx+2rx-rr-yy)$, cioè $\frac{1}{2}(xx+yy-rr)=r(\overline{x-r}^2+yy)^{\frac{1}{2}}$, ed alzando a quadrato $\frac{1}{4}(xx+yy-rr)^2=rr(x-r)^2+rryy$; la quale ordinata opportunamente si muta nell' Equazione seguente

$$\begin{aligned} y^4+2x^2y^2+{}& x^4 = 0\\ -6r^2y^2-{}&6r^2x^2\\ &+8r^3x\\ &-3r^4 \end{aligned}$$

Questa Curva si chiama *Epicicloide* semplicissima, chiamandosi in genere *Epicicloidi* tutte le curve, che nascono dalla rotazione d' un cerchio sopra l' altro.

IV. Problema quarto. Dato un punto A fuori d' una retta data VT, (*Fig.* 16. *T.* 2.) da cui si tiri AB normale alla data, e si produca in D; si faccia muovere la linea ABD in maniera, che passi sempre per A, rimanendo continuamente il punto B in VT; si cerca la Curva descritta dal punto D. Fingiamo essere giunta la retta AD alla posizione ARN, e sia $RN=BD$; dal punto N, che è in Curva si cali MN normale a BD. Chiamisi $AB=a$, $BD=b=RN$, $AM=x$, $MN=y$, sarà $AN=\sqrt{xx-yy}$, ed $MB=x-a$; ma abbiamo $AN:AM::RN:MB$; dunque $\sqrt{xx+yy}:x::b:x-a$, ed elevando al quadrato $xx+yy:xx::bb:xx-2ax+aa$, e dividendo $yy:xx::bb-xx+2ax-aa:xx-2ax+aa$;

$+aa$; dunque

$$\begin{array}{llll} xxy^2 & + & x^4 & = 0. \\ -2axy^2 & - & 2ax^3 & \\ +aay^2 & + & aax^2 & \\ & - & bbx^2 & \end{array}$$

L' Equazione non solamente comprende la Curva DN descritta dal punto D; ma ancora, tagliata $BE = BD$, la Curva descritta dal punto E. Questa Curva si chiama *Concoide di Nicomede*, che ne fù l' inventore. Il punto A dicesi *polo* della concoide.

V. Problema quinto. La linea LAS perpendicolare alla BC, (*Fig.* 17. *T.* 2.) e mobile sopra questa con moto parallelo, e che passa per A, abbia annesso nell' estremità S il filo SBF eguale alla data BC, il quale ripiegato in B si stenda lungo BC: si faccia muovere in seguito la BC nell' angolo retto GAH in maniera, che i punti B, C sieno costantemente nei lati AG, AH; si cerca la Curva descritta dal punto F. Si conducano da questo punto FN, FM normali ai lati dell' angolo retto. Chiamisi $NA = x$, $FN = y$, $BC = a$. Per l' eguaglianza delle rette SBF, e BC sarà $SB = FC$. Ma $CB : BA :: BA : BS$; dunque $CB : BA :: BA :: FC$. Ma $CB : BA :: FC : FN$; dunque CB, BA, FC, FN sono in continua proporzione; e perciò $CB : FN :: CB^3 : BA^3$; dunque $a : y :: a^3 : BA^3 = a^2 y$; quindi $BA = a^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$. Nella stessa maniera si dimostra $CA = a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}$. Da ciò nasce l' Equazione $a^2 = a^{\frac{4}{3}} y^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}}$, cioè $a^{\frac{2}{3}} = y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$, ed alzando alla terza potestà $a^2 = y^2 + 3 y^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}} \left(y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} \right) + x^2$, e posto $a^{\frac{2}{3}}$ in vece di $y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$, e trasportati i termini sarà $a^2 - x^2 - y^2 = 3\,\overline{axy}^{\frac{2}{3}}$;

que-

questa equazione se si alzi alla terza potestà, e si ordini sarà
$$\begin{array}{l} y^6 + 3x^2y^4 + 3x^4y^2 + x^6 \\ \quad - 3a^2y^4 + 21a^2x^2y^2 - 3a^2x^4 = 0, \\ \qquad + 3a^4y^2 + 3a^4x^2 \\ \qquad\qquad - a^6 \end{array}$$
la qual Curva è di sesto grado. Acciocchè si generi la Curva intiera si dee fare il moto non solo nell' angolo GAH, ma ancora nei tre altri angoli KAH, KAI, IAG.

VI. Problema sesto. La retta LAN, che passa per A, sia costantemente ad angoli retti sopra BC, (*Fig.* 18. *T.* 2.) che si muova nell' angolo retto BAC: si cerca la Curva descritta dal punto N. Si conduca NM normale in AM, e si chiami $AM = x$, $MN = y$, $AN = \sqrt{xx+yy}$, e $BC = 2a$. Per la somiglianza dei triangoli sarà $AM : MN :: AN : NB$, cioè $x : y :: \sqrt{xx+yy} : NB = \frac{y}{x}\sqrt{xx-yy}$, ed $NM : AM :: AN : NC$, cioè $y : x :: \sqrt{xx+yy} : NC = \frac{x}{y}\sqrt{xx+yy}$. Adunque avremo l' Equazion $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \cdot \sqrt{xx+yy} = 2a$, cioè $\overline{yy+xx}^{\frac{3}{2}} = 2axy$, e perciò
$$\begin{array}{l} y^6 + 3x^2y^4 + 3x^4y^2 + x^6 = 0. \\ \qquad - 4a^2x^2y^2 \end{array}$$
Acciocchè si ottenga questa Curva intiera il moto si dee fare nei quattro angoli.

VII. Problema settimo. Tirate infinite corde AF (*Fig.* 19. *T.* 2.) dal punto A posto nella Circonferenza del Circolo, che à per diametro AB si seghino gli archi

archi AF in due parti uguali in D, e dai punti D si calino le DG normali al diametro AB, che seghino la corda in E: si cerca la Curva che passa per tutti i punti E. Condotto il raggio CD, che seghi le corde AF in due parti uguali, e ad angoli retti, si otterrà il triangolo AGE simile al triangolo AHC. Ma questo è simile al triangolo DGC; dunque AGE simile a DGC, e perciò $AG:GE::DG:CG$. Si chiami ora il raggio $CA=a$, $AG=x$, $GE=y$, sarà per la natura del cerchio $DG=\sqrt{2ax-xx}$; CG poi sarà $=a-x$. Abbiamo adunque $x:y::\sqrt{2ax-xx}$ $a-x$, cioè $\sqrt{x}:\sqrt{2a-x}::y:a-x$; adunque $((a-x)\sqrt{x}):(2a-x)^{\frac{1}{2}}=y$, ed $(a^2x-2ax^2+x^3)$ $:[2a-x]=y^2$. Questa Curva è la stessa di quella del num. 2.

VIII. Problema ottavo. Poste le stesse cose del Problema antecedente, dal punto D, (*Fig.* 20. *T.* 2.) che taglia in due parti uguali l'arco, si conduca DE parallela al diametro AB, che seghi la corda in E: si cerca il luogo di tutte le sezioni in E. Congiunta dal centro CD, che divide la corda AF in due parti uguali, e ad angoli retti si conducano EG, DI normali al diametro. Il triangolo AEG è simile al triangolo ACH, e perciò simile a DCI; avremo pertanto $AE:AG::DC:DI$. Onde chiamata $CA=CD=a$, $AG=x$, $EG=DI=y$, sarà $AE=(xx+yy)^{\frac{1}{2}}$, ed $(xx+yy)^{\frac{1}{2}}:x::a:y$. Adunque $a^2x^2=x^2y^2+y^4$, cioè $x^2=\dfrac{y^4}{a^2-yy}$.

IX. Problema nono. Sia AEB (*Fig.* 21. *T.* 3.) un quadrante d'un cerchio, condotto dovunque il

rag-

raggio CE, che determini l' arco BE, il cui seno sia DE, ed il cosseno CD, si tagli l' arco BF che sia a $BE::1:m$, e nel raggio CF si seghi CG, che data sia per CD, o DE: si cerca la Curva, che passa per tutti i punti G. Le GH, FK sieno normali al raggio CB, e chiamisi $CH=x$, $GH=y$, $CG=z=\sqrt{xx+yy}$; inoltre il raggio CB, o il seno tutto sia uguale ad a, l' arco $FB=\mu$, $EB=m\mu$. Dalle formole dei cosseni circolari abbiamo $Ccm\mu=$

$$\frac{(Cc\mu+\sqrt{-1}\,Sc\mu)^m+(Cc\mu-\sqrt{-1}\,Sc\mu)^m}{2a^{m-2}};$$ ma

$z:a::x:Cc\mu=\frac{ax}{z}$, $z:a::y:Sc\mu=\frac{ay}{z}$; dunque $Ccm\mu=\frac{a^m}{z^m}.\frac{(x+y\sqrt{-1})^m+(x-y\sqrt{-1})^m}{2a^{m-1}}$. Chiamato adunque $Cc.m\mu=p$, che è dato per z secondo la supposizione; sarà $\frac{pz^m}{a}=$

$$\frac{(x+y\sqrt{-1})^m+(x-y\sqrt{-1})^m}{2},$$ perciò se suppongasi esser m numero intiero, inalzati i binomii all' intiera potestà m svaniranno gli immaginarii, e sostituito in vece di p il valore di lui dato per z, ed in vece di questa posto $\sqrt{xx+yy}$ si otterrà l' Equazione cercata.

X. Sia $m=2$, sarà $\frac{pz^2}{a}=xx-yy$. Supponiamo inoltre $p=\frac{zz}{a}$, onde $\frac{z^4}{a^2}=xx-yy$, cioè $z^2=a\sqrt{xx-yy}$; ed $xx+yy=a\sqrt{xx-y^2}$ Equazione ne di quarto grado. La Curva che soddisfà a questa Equazione si suol chiamare *Lemniscata*; essa à quattro rami simili, ed eguali, chiusi dentro il circolo del raggio $= a$, e si segano ad angolo semiretto in C.

XI. Fin quì aderendo al Cartesio abbiamo insegnato la maniera di ritrovare le curve supponendo alcune proprietà date fra le coordinate x, ed y e costanti; o proprietà, che a queste si possano ridurre. Ma se le proprietà fossero date per le sole y, ovvero x, che è lo stesso, non si potrebbe coi metodi insegnati ritrovare le curve soddisfacenti a dette proprietà: bisogna dunque rivolgersi al metodo seguente.

XII. Per intendere ciò, che si è esposto, più chiaramente, si supponga la curva CD [*Fig.* 22. *T.* 3.] riferita alla retta AB; le AB sieno le x, e le BM, $B2M$ le y; se in questa curva si avesse la prerogativa, che la somma $BM + B2M$ fosse costante, per esempio $= a$, non saprebbesi col metodo di Cartesio ritrovàr la Curva soddisfacente a detta proprietà.

XIII. Quì però prima d' ogn' altra cosa bisogna avvertire, che la proprietà data per le BM, $B2M$, cioè per l' y appartenenti alla medesima ascissa AB dee esser tale, che sostituita una y per l' altra y, la proprietà non si alteri; come sarebbe appunto nel caso proposto, in cui presa BM per $B2M$; e $B2M$ per BM la proprietà, cioè l' uguaglianza della loro somma ad a, non si altera; si altererebbe poi se la proprietà fosse, che la somma della metà BM con $B2M$ uguagliasse la costante, perchè presa BM per $B2M$ e viceversa, la somma non è la medesima, lo stesso si dica di altre proprietà. Le proprietà dunque delle curve date per le y devono essere della prima sorte, e non della seconda; la ragione è, che qualunque proprietà di una Curva dee essere comune a tutti i punti tà di essa: così nell' equazione $a^2 - x^2 = y^2$ questa proprietà si verifica in riguardo a tutte le x possibili della curva, e a tutte le y, e per conseguenza relativamente a tutti i punti; da quì ne nasce, che qualunque prerogativa discendente da questa equazione sia comune a tutti i punti della curva; dunque ancora la prerogativa data per le y appartenenti ad una ascissa, se è prerogativa propria della Curva discendente dalla sua equazione, sarà comune a tutti i punti. Acciocchè poi questo succeda, si dee poter fare il cangiamento della y senza alterazione della proprietà; altrimenti relativamente ad un punto, per esem. M, nell' ipotesi di $\frac{BM}{2} + B2M = a$ valerebbe una prerogativa, cioè che la metà dell'ordinata BM con $B2M$, appartenente alla medesima ascissa, sia uguale alla costante a; e relativamente all' altro punto $2M$ valerebbe l' altra prerogativa, cioè che la $B2M$ sommata con la metà dell' altra corrispondente ordinata MB sia uguale ad una costante $= a$.

XIV. Si dee notare ancora, che le proprietà delle secanti BM, $B2M$ non solo si possono esprimere per costanti, ma ancora per una variabile, appartenente soltanto alle secanti BM, $B2M$, come sarebbe per l' ascissa AB.

XV. Posto adunque, che le secanti abbiano prerogative colle esposte condizioni, vengo al metodo di determinare le Curve, che farò palese nell' esempio addotto di sopra, cioè, che la somma delle due BM, $B2M$ sia uguale ad a. Comecchè due sono le ordinate della medesima ascissa, si prenda l' equazione del secondo grado $y^2 - 2my + n = o$, m, ed n sono due indeterminate, che in seguito determineremo: risoluta una tale equazione si avrà $y = m + \sqrt{m^2 - n}$, ed $y = m - \sqrt{m^2 - n}$; dunque sarà per la proprietà proposta $m - \sqrt{m^2 - n} + m + \sqrt{m^2 - n} = 2m = a$, ed $m = \frac{a}{2}$; e sostituito il valore di m nell' equazione assunta sarà $y^2 - ay + n = o$, e sostituita per n una qualunque quantità data per costanti e per funzioni di x, tutte le curve, che nasceranno, soddisfaranno al problema.

XVI. Sia $n = ax$, avremo $y^2 - ay + ax = o$, ed $y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - ax$, e fatto $y - \frac{a}{2} = z$, $z^2 = a \times \overline{\frac{a}{4} - x}$ equazione alla parabola, il cui parametro è uguale ad a. Sia dunque $AM2M$ la parabola nostra, e condotta dal vertice A la tangente $AC = \frac{a}{2}$, e per C (*Fig.* 23. *T.* 3.) tirata CB parallela ad AD, e finalmente per lo punto B qualunque tirate le ordinate BM, $B2M$ sarà sempre la loro somma $= a$. Se l' ordinate si tirino dal punto S di intersecazione di CB con la curva, allora una ordinata diventa $= o$, e l' altra $= a$: se il punto B si prenda sopra la sezione, le due ordinate sono positive; se il punto B si prenda sotto la sezione, una ordinata è positiva, e l' altra negativa; onde la somma passa in sottrazione.

XVII. Si faccia ora nell' equazione $y^2 - ay + n = o$, $n = x^2$, sarà $y^2 - ay + x^2 = o$, e $z^2 = \frac{a^2}{4} - x^2$

fatta

fatta $z = y - \frac{a}{2}$, equazione al circolo, il cui raggio è $= \frac{a}{2}$, dunque ancora il circolo il cui raggio è $\frac{a}{2}$ soddisfa al problema. Dalle quali cose apparisce chiaramente, che se in vece di n si ponga altri valori dati per funzioni di x e costanti tutte le curve, che nasceranno, avranno la desiderata proprietà, cioè che la somma delle ordinate corrispondenti alla medesima ascissa sia uguale ad a.

XVIII. Se l' y, ovvero l' ordinate appartenenti alla medesima ascissa fossero tre, e si cercasse la curva, che soddisfacesse ad una proprietà data per queste y, bisognerebbe assumere una equazione di terzo grado per esem. $y^3 - 3my - n = 0$, e trovare le radici di y col metodo cardanico; dopo di ciò per mezzo della proprietà data si trovi il valore di una indeterminata m, o n, e questo sostituito in luogo della indeterminata nell' equazione assunta di terzo grado; e fissata l' altra indeterminata per costanti, e per qualunque funzione di x ad arbitrio; le curve espresse dalle equazioni indi nate scioglieranno il problema. Si cerchi per esem. una curva, che abbia tre ordinate appartenenti ad una ascissa, in cui il prodotto delle tre ordinate sia uguale ad a^3; sarà $n = a^3$; onde l'equazione assunta si convertirà in $y^3 - 3my - a^3 = 0$: fissato dunque il valore di m per costanti, e funzioni di x, si avranno le curve ricercate.

XIX. Avvertasi però, che l' equazione assunta $y^3 - 3my - n = 0$, quantunque dia un numero di curve infinito soddisfacenti alla medesima prerogativa con tutto ciò non le dà tutte, a motivo, che manca il secondo termine, per conseguenza una indeterminata.

Per aver dunque una equazione universale, che abbracci tutte le possibili curve della prerogativa data conviene prendere l' equazione $y^3 + 3Ay^2 + 3By + C = o$, che abbia il secondo termine, e poi seguitare l' operazione come sopra.

XX. Bisogna però notare, che la medesima proprietà si può verificare ancora d' una Curva, che abbia una sola ordinata, essendo l' altre due appartenenti alla medesima ascissa immaginarie; imperocchè quantunque le due radici sieno immaginarie, però combinate insieme possono dare una quantità reale, la quale poi combinata con l' y reale può ottimamente dare la prerogativa ricercata; questa riflessione era superflua, quando le y erano due, perchè in tal caso, o tutti e due i valori di y sono immaginarii, e perciò non vi è curva, oppure tutti e due sono reali; ma quando l' y appartenenti alla medesima ascissa sono più di due, allora bisogna aver l' occhio a quanto si è quì sopra avvertito.

Il fin quì operato per ritrovare le curve soddisfacenti a prerogative reciproche date per due e tre y, ossia ordinate appartenenti alla medesima ascissa, ci insegna chiaramente cosa si debba fare, quando l' ordinate sono quattro, cinque, sei &c.

XXI. Fino adesso abbiamo supposto l' y, ovvero l' ordinate per cui sono date le proprietà delle curve essere fra di loro parallele, il che ci ha data la comodità di considerare le curve alla maniera cartesiana, cioè riferite ad una retta per mezzo delle ascisse x, ed ordinate y; ma alle volte l' ordinate y, per cui si danno le prerogative delle curve, concorrono in un punto, come sarebbero tutte le secanti di un circolo tirate ad esso da qualche punto fisso, se tali secanti si chiamino y; fra queste y dunque concorrenti ti in un punto si dannodelle prerogative comuni a più curve; onde per compimento di questo Capo bisogna assegnare la maniera di determinarle.

XXII. Sia la curva $MBC2M$ (*Fig.* 24. *T.* 3.) ed un punto qualunque A, da cui si tiri una retta ABC fissa di posizione, ed un'altra $AM2M$ secante la curva per esem. in due punti M, $2M$; la proprietà comune a più curve dee esser data per le due AM, $A2M$, ovvero y, appartenenti al medesimo angolo $CA2M$, e per costanti, e se si vuole, per qualunque funzione dell' angolo della tangente, seno, cosseno &c. essa proprietà inoltre dee esser tale, che non si possa alterare se in vece di AM pongasi $A2M$, e a rovescio.

XXIII. Si debba dunque per cagione d' esempio trovare una curva, a cui da un punto qualunque A tirata una secante $AM2M$, che taglia la curva in due punti M, $2M$, sia la somma delle due intercette AM, $A2M = a$.

Essendo due l' y prendo l' Equazione del secondo grado $y^2 - 2my + n = o$, sarà dunque per la proprietà data $2m = a$, ed $m = \frac{a}{2}$, e fatta nell' equazione la sostituzione di $\frac{a}{2}$ in vece di m, sarà $y^2 - ay + n = o$. Se dunque determinerò n per costanti e qualunque funzione dell' angolo MAB, sarà determinata la curva della proposta proprietà, e comecchè i valori di n così determinati possono essere infiniti, quindi infinite saranno le curve soddisfacenti alla prerogativa data. Suppongasi n uguale al seno dell' angolo MAB, che chiamo ϕ, moltiplicato per p, sarà $n = S c \phi . p$, e calata dal punto M in AC, la normale NO, e chia-

chiamata $MO = z$, sarà $r : Sc.\phi :: r : \frac{n}{p} :: y : z$, dunque $n = \frac{prz}{y}$; onde l' Equazione assunta sarà $y^3 - ay^2 + prz = 0$; per passare dalla considerazione di questa curva riferita al punto A, alla considerazione della detta curva secondo il metodo Cartesiano: si chiami $AO = x$, sarà $y = \sqrt{xx + zz}$; onde fatta nell' equazione la sostituzione del valore di y, sarà $\overline{x^2 + z^2}.\sqrt{xx + zz} - a.\overline{xx + zz} + prz = 0$.

XXIV. Si voglia in secondo luogo, che il prodotto delle due ordinate AM, $A2M$ sia uguale ad a^2; sarà $n = a^2$, e l' equazione assunta si convertirà in $y^2 - 2my + a^2 = 0$, la quale esprimerà tutte le curve infinite, che anno una tale prerogativa; la determinazione poi di queste curve dipende dal valore di m, che si deve fissare ad arbitrio per costanti, e funzioni dell' angolo BAM.

Sia m uguale al seno dell' angolo BAM: la normale MO chiamata come sopra z, si troverà come sopra $m = \frac{rz}{y}$; onde fatta nell' equazione assunta la sostituzione, sarà $y^2 - 2rz + a^2 = 0$. Per considerare la curva alla Cartesiana si chiami $AO = x$, sarà $y^2 = xx + zz$, e fatta la sostituzione nell' equazione in vece di y, sarà $xx + zz - 2rz + a^2 = 0$, cioè $zz - 2rz + r^2 = r^2 - a^2 - x^2$, e fatta $z - r = u$, ed $r^2 - a^2 = c^2$, sarà $u^2 = c^2 - x^2$ equazione a qualunque circolo, essendo il valore di r, da cui dipende il valore di c arbitrario, e però fra l' infinite curve della prerogativa proposta vi è ancora il circolo; non è dunque il circolo solo, che abbia tale proprietà, come forze re alcuno crederà, ma sono infinite curve, potendo essere infiniti i valori di m.

XXV. Se l' ordinate appartenenti al medesimo angolo fossero tre, si dovrebbe prendere un' equazione di terzo grado cioè $y^3 + my^2 + ny + p$, ed operare come sopra. Se l' y fossero quattro, cinque, sei &c. convien assumere una equazione di quarto, quinto, sesto grado &c. si avverta però di prenderle complete, vale a dire con tutti i termini per ottenere una formola, che contenga tutte le curve possibili della data prerogativa.

XXVI. Da tutto ciò, che si è detto facilmente ricavasi, che quando l' ordinate o parallele, o concorrenti in un punto sono due, una indeterminata dell' equazione assunta del secondo grado si fissa con la proprietà data; restando l' altra da fissarsi ad arbitrio, e che quando l' ordinate sono tre una indeterminata dell' equazione del terzo grado si fissa con la proprietà data, restando due arbitrarie; e così quando l' ordinate sono quattro, cinque &c. una indeterminata si fissa con la data proprietà; restando tre, e quattro &c. arbitrarie; dunque quando l' ordinate son due, potrò ottimamente supporre le due ordinate dotate di due prerogative, delle quali una non discenda dall' altra, e così fissare una curva soddisfacente a quelle due proprietà. Se l' ordinate sono tre potrò supporre le ordinate dotate di tre prerogative non identiche. Lo stesso discorso si estenda a gradi più alti. Diamone per chiarezza qualche esempio.

Si voglia una curva che abbia due ordinate appartenenti alla medesima ascissa, in cui la somma di quelle sia $\frac{cx}{a}$, il prodotto sia bx. Prendo la solita e-

qua-

quazione del secondo grado $y^2-2my+n=0$, per esser due l' y della stessa ascissa. La prima prerogativa darà $2m=\frac{cx}{a}$, per la seconda sarà $n=bx$, onde sostituendo $y^2-\frac{cxy}{a}+bx=0$, e $z^2=\frac{c^2x^2}{4a^2}-bx$ posta $z=y-\frac{cx}{2a}$, cioè $\frac{4a^2z^2}{c^2}=x^2-\frac{4a^2bx}{c^2}$, e $\frac{4a^2z^2}{c^2}+\frac{4a^4b^2}{c^4}=u^2$, messa $u=x-\frac{2a^2b}{c^2}$, e facendo $\frac{4a^4b^2}{c^4}=f^2$, e $\frac{4a^2}{c^2}=\frac{f^2}{g^2}$, sarà $\frac{f^2z^2}{g^2}=u^2-f^2$. Equazione all' Iperbola riferita al primo diametro, o sia al diametro trasverso.

XXVII. Quando le prerogative, di cui si vogliono dotate le y sono incompatibili; non mancherà di indicarlo qualche patente assurdo, nel fissarsi le indeterminate.

CAPO XIV.

Si risolvono alcuni Problemi determinati di grado superiore al quarto.

I. PRoblema primo. Delle medie proporzionali tra a, e b di numero m trovare quella che si vuole, per esempio quella del numero n. Si chiami la prima delle medie proporzionali $= x$, saranno le continue proporzionali in questa serie a, x, $\frac{xx}{a}$, $\frac{x^3}{a^2}$... $\frac{x^n}{a^{n-1}}$..... $\frac{x^m}{a^{m-1}}$ sarà la penultima; dunque sarà $b = \frac{x^{m+1}}{a^m}$. Quella delle medie proporzionali posta nella sede n, la quale è $\frac{x^n}{a^{n-1}}$ si metta $= z$, onde sia $x^n = a^{n-1} z$; mà abbiamo $x^{m+1} = a^m b$, e perciò $x^n = a^{\frac{mn}{m+1}} b^{\frac{n}{m+1}}$, dunque $z = a^{\frac{m-n+1}{m+1}} \times b^{\frac{n}{m+1}}$, la qual formola dà la ricercata media proporzionale di numero n.

II. Per venire alla costruzione così dispongasi la formola $a^{m-n+1} b^n = z^{m+1}$. Se fosse m numero dispari, ed $m+1$ pari, fatta $zz = ay$ avremo $a^{m-n+1} b^n = a^{\frac{m+1}{2}} y^{\frac{m+1}{2}}$, cioè $a^{\frac{m-2n+1}{2}} b^n = y^{\frac{m+1}{2}}$, da cui ricavata y, si determinerà ancor la z, che è media proporzionale, fra a ed y. Se $\frac{m+1}{2}$ sia pari, collo stesso metodo si riduce la difficoltà a trovare la terza proporzionale dopo a ed y, e così di mano in mano fino a tantochè si venga all' esponente dispari; adunque basta costruire la formula nel caso dell' esponente dispari $m+1$. A questo fine si moltiplichi la formola per z, acciocchè sia $a^{m-n+1} b^n z = z^{m+2}$; l' esponente $m+2$ sarà pari; si faccia $z^2 = ay$, acciocchè si abbia $a^{\frac{m-2n}{2}} b^n z = y^{\frac{m+2}{2}}$, ed $\frac{m+2}{2}$ sarà intiero. Al Asse AD (*Fig.* 25. *T.* 3.) si descriva la parabola ABM dell' Equazione $a^{\frac{m-2n}{2}} b^n z = y^{\frac{m+2}{2}}$, e AD sieno le z; dipoi descrivasi la parabola apolloniana dell' Equazione $z^2 = ay$; queste parabole si segheranno nel punto B, da questo calisi l' ordinata BD, sarà $AD = z$ la media proporzionale cercata; BD poi sarà $= y$ terza proporzionale dopo a, e z.

III. Problema secondo. Dividere un arco di cerchio in parti uguali del dato numero. Se il numero dato non è primo si risolva nei suoi fattori per esempio $m.n$, poi si divida l' arco in parti uguali m, e ciascuna di queste in parti uguali del numero n, e così il problema sarà ridotto a grado inferiore; e perciò supporremo che il numero n delle parti uguali sia primo. Prendo la formola del Cosseno dell' arco multiplo, la quale chiamato il raggio $= r$, e l' arco dato $= \mu$ è la seguente $Cc.\mu =$

$$\frac{\left(Cc.\frac{\mu}{n} + \sqrt{-1}.Sc.\frac{\mu}{n}\right)^n + \left(Cc.\frac{\mu}{n} - \sqrt{-1}Sc.\frac{\mu}{n}\right)^n}{2r^{n-1}}$$

Il Cosseno μ pongasi $= a$, e $Cc\frac{\mu}{n} = x$, $Sc\frac{\mu}{n} = y$

sarà

farà $yy = rr - xx$, ed avremo questa Equazione

$a = \frac{(x + y\sqrt{-1})^n + (x - y\sqrt{-1})^n}{2r^{n-1}}$; alzati i due binomii alla potestà n, svaniranno tutti gli immaginarii, e si troverà y inalzata a potestà pari; imperciocchè, i termini in cui la y si ritrova a potestà dispari, sono col segno contrario, e perciò si distruggono. Sostituito adunque il valore di y^2 ne deriverà un' equazione data per x, che si potrà costruire con una Curva dello stesso grado segata dalla linea retta.

IV. Problema terzo. Sieno due punti B, C (*Fig.* 26. *T.* 3.) in una retta data di posizione, ed un punto A fuori di essa, da questo convien tirare una linea AMN in maniera, che segata MN uguale ad una data, e condotta in CB la normale NS, sia il rettangolo CSB uguale al rettangolo della data in NS. Perchè dee MN uguagliare la data, sarà il punto N nella concoide di Nicomede, che à per polo il punto A, e l' intercetta fra la Curva, e la BC della retta condotta dal polo eguaglia la data. Si descriva adunque la concoide nicomedea EN, il punto N sarà in questa Curva. Per determinare l' altra Curva, che dee segare la concoide, si divida CB in parti uguali in D, a cui sia normale DF, ed a questa sia normale NT. Chiamisi $CD = DB = a$, $MN = b$, $DT = NS = x$, $TN = DS = y$, sarà $CS = a + y$, $BS = a - y$; adunque il rettangolo $CSB = aa - yy = bx$, cioè $b.(\frac{aa}{b} - x) = yy$, che è una parabola apolloniana; per costruir questa si seghi DF terza proporzionale dopo b, a; col vertice F, col parametro $= b$ si descriva la parabola, che passerà per gli punti B, C. Il punto di sezione della parabola colla concoide scioglierà il problema; ed in quanti punti la concoide sarà segata dalla parabola, altrettante saranno le soluzioni del Problema.

X. Ptoblema quarto. Si seghino le rette AC, AD (*Fig.* 27. *T.* 3.) ad angoli retti, si vuole determinare un punto M in una retta PQ data di posizione, in maniera che congiunta la AM, l' intercetta CMD perpendicolare a questa, sia eguale ad una data. Dovendo la CD essere eguale ad una data, e dovendo essere normale alla linea AM, che passa pel punto A, il punto M si ritroverà nella Curva di sesto grado, che è stata da noi delineata nel Capo precedente n. 6. Adunque se descrivasi questa Curva, segherà essa la retta PQ in M, che sarà il punto ricercato, come dalla natura della Curva chiaramente si deduce. La nostra Curva può segare la retta PQ o in sei punti, o in quattro, o in due, o in veruno; adunque il problema avrà alle volte sei soluzioni, alle volte quattro, alle volte due, alle volte non avrà soluzione alcuna. La stessa costruzione avrà luogo ancorchè PQ non sia una retta, ma una Curva qualunque, per cagion di esempio se fosse un circolo descritto col dato centro R, e col dato raggio RM; nel qual caso il problema si può proporre così: segandosi le rette AC, AD ad angoli retti, e dato il punto R, determinare il punto M in maniera, che RM eguagli la data, e l' intercetta CD normale ad AM sia eguale ad un' altra data. Questo Problema può ricevere al più otto soluzioni.

VI. Problema quinto. Nel lato AT (*Fig.* 28. *T.* 3.) dell' angolo retto dato il punto A, e dato dovunque un punto R, conviene condurre AO in maniera, che prolongata in N fino a tanto che sia $ON = OT$, la la RN sia eguale ad una data. Dovendo ON eguagliare TO, il punto N sarà in una Curva, di cui abbiamo parlato nel Capo precedente al num. 2. Adunque descrivasi questa Curva; indi centro R ed intervallo dato si delinei il circolo, che segherà la Curva nel punto N, e congiunta AN questa sarà quella, che soddisfà al problema. Se il Circolo segherà la Curva nel foglio $A2NT$, allora non deesi produrre la linea $A2O$, ma la sua parte $2N2O$ eguaglierà $T2O$. Se il punto N si dovesse ritrovare in qualunque altra linea retta o Curva differente dal Circolo, la comune sezione di quella colla Curva ATN darebbe la soluzione del Problema.

VII. Problema sesto. Date due quantità a, b, si costituisca a come il primo termine di una serie geometrica, l' incognita x sia il secondo, si domanda di determinare la x in maniera, che il termine della serie indicato dal numero n sia eguale a $b-x$. Propongo questo problema per esporre un metodo di costruire con eleganza i problemi, che superano il quarto grado, del qual metodo siamo obbligati al Signor Conte Giacomo Riccati.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
a	x	$\frac{x^2}{a}$						
		y	$\frac{xy}{a}$	$\frac{yy}{a}$				
			$\frac{y^2}{x}$					
			t	$\frac{tx}{a}$	$\frac{ty}{a}$			
				$\frac{ty}{x}$	$\frac{tt}{x}$			
				$\frac{t.t}{y}$				
				z	$\frac{xz}{a}$	$\frac{zy}{a}$	$\frac{zt}{a}$	$\frac{zz}{a}$
					$\frac{zy}{x}$	$\frac{tz}{x}$	$\frac{zz}{x}$	
					$\frac{zt}{y}$	$\frac{zz}{y}$		
					$\frac{zz}{t}$			

Essendo a la prima delle continue proporzionali, x la seconda, sarà $\frac{xx}{a}$ la terza; se si ritenesse nel calcolo questa espressione necessariamente l' espressione della la quarta proporzionale conterrebbe la terza potestà. Per evitar ciò chiamo $\frac{xx}{a}=y$, da cui trovo la quarta proporzionale continua $=\frac{xy}{a}$, ovvero $=\frac{yy}{x}$, indi ritrovo la quinta $=\frac{yy}{a}$, le quali espressioni non superano il secondo grado; ritenute per altro queste espressioni, nel determinare l' altre continue proporzionali si urterebbe nelle terze, quarte &c. potestà; onde faccio la quarta proporzionale $=t$, e determino la quinta, e la sesta, come vien notato nella tavola superiore; se pongasi la quinta $=z$ si determina fino alla nona senza incontrare espressioni, che superino il secondo grado.

VIII. Resta a far vedere come tali espressioni si costruiscano; supponiamo il numero $n=5$, cioè essere la quinta delle continue proporzionali $=b-x$; si prenda la sua espressione semplicissima $=\frac{yy}{a}$, sarà $yy=a.[b-x]$ equazione alla parabola; inoltre la sostituzione ci dà $xx=ay$, la quale equazione è alla stessa parabola. Nasce adunque la costruzione seguente. Si prenda $AB=a$, (*Fig. 29. T. 3.*) e si descriva col parametro a la parabola AD, che sia toccata da AB, indi tagliata $AC=b$ col vertice C, e col asse CA descrivasi la parabola CD dello stesso parametro a, che segherà la prima in D; si ordini DE sarà l' ascissa $AE=x$ la seconda delle cinque continue proporzionali. Si voglia ora la sestà delle continue proporzionali $=b-x$, sarà $\frac{tt}{x}=b-x$, e $tt=bx$

$bx - xx$, la quale equazione è al circolo. Si delinei in primo luogo la parabola AD [*Fig.* 30. *T.* 3.] dell' Equazione $xx = ay$, che dà la sostituzione; nella tangente CB saranno collocate le $AE = x$, normali a queste sieno le ordinate $ED = y$; indi si faccia $AB : AE :: DE : FE$, ovvero in termini analitici $a : x :: y : t$, e per tutti i punti F passi la nuova Curva AF; presa inoltre $AC = b$, sopra il diametro AC si descriva il circolo AFC, che segherà la Curva AF in un punto F, da cui calata FE si determinerà AE, che sarà la seconda proporzionale ricercata.

FINE DEL TERZO LIBRO.

IN-

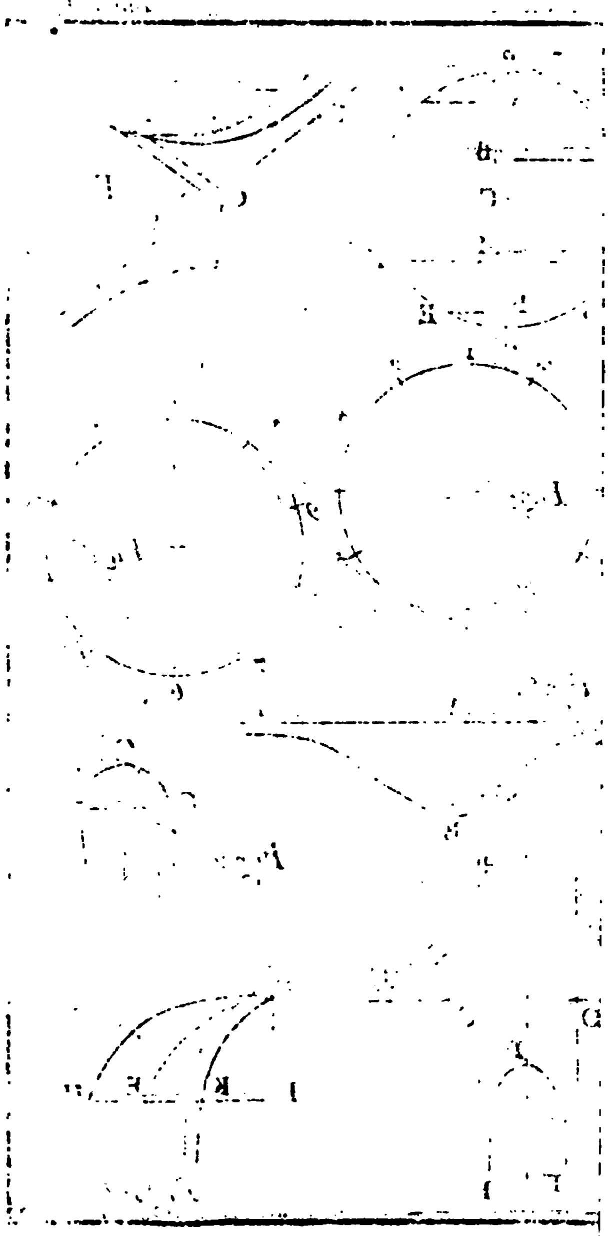
.I.

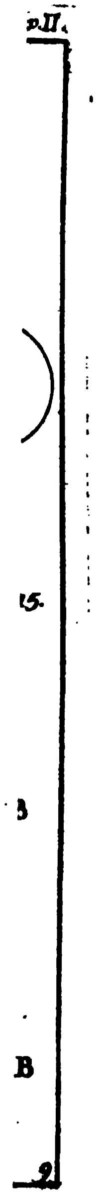
N

3

4

8




15.
B
9

C
B
S

INDICE

DEI CAPI.

LIBRO PRIMO

Dell' Algoritmo, e delle Equazioni di primo, e secondo grado.

LIBRO SECONDO

Delle Linee, ovvero dei Luoghi del primo, e secondo grado; e delle Equazioni determinate del grado terzo, e quarto.

LI-