



## Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

## Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

- + *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.
- + *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.
- + *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.
- + *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertarti di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

## Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da <http://books.google.com>



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### **Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

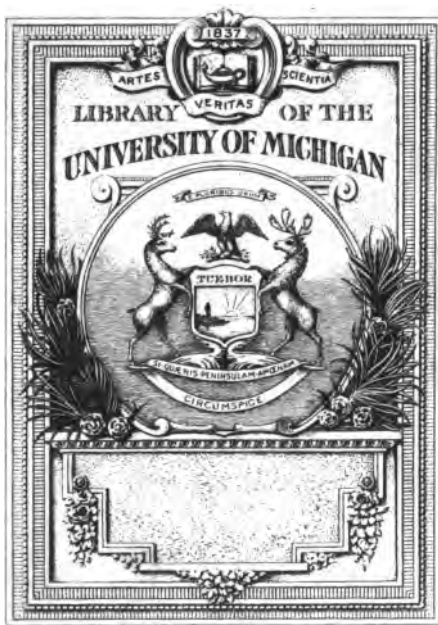
We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### **About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

2258



QA  
35  
.MSB  
I5



# LEZIONI ELEMENTARI

DI CALCOLO DIFFERENZIALE  
ED INTEGRALE

DEL SIG. A. B. <sup>Joseph François</sup> MARIE

TRADOTTE ED ILLUSTRATE

DAI PP. STAN. CANOVAI E GAET. DEL-RICCO

Pubb. PP. di Fisica-Matematica in Firenze,

*ed in questa edizione accresciute oltre il doppio  
colle Lezioni sul Calcolo Infinitesimale, e sua  
applicazione alla Fisica*

DEL

P. DON GREGORIO FONTANA

Pubb. Prof. di Analisi Sublime nella R. I.  
Università di Pavia .

PAVIA MDCCXCIII.

---

DALLE STAMPE DI BALDASSARE COMINO

*Con Approvazione .*



## AVVISO DELL' EDITORE

**L**e preziose Lezioni di Calcolo Infinitesimale del Sig. Ab. Marie sono state dai Traduttori Fiorentini migliorate ed accresciute, e queste a norma della terza più copiosa edizione di Firenze si pubblicano ora per la prima volta in Pavia.

Valendosi di esse nella sua Scuola il Professore di questa Università, egli ha stimato opportuno, per risparmiare a' suoi Scolari il tempo e l'incomodo del trascrivere, di unire alle medesime parecchi Articoli delle Lezioni proprie relative alla Sublime Analisi, ed alla sua applicazione alla Fisica, colle quali viene ad accrescersi più del doppio il contenuto dell'edizione Fiorentina.

9-30-27 N. 5. S.





Lib. Com  
magliana  
2-24-28  
16615.

# INDICE

## DELLE MATERIE

### FONDAMENTI DEI DUE CALCOLI

### DIFFERENZIALE ED INTEGRALE

<b>C</b> alcolo delle Differenze Finite.	pag. 1
Prime regole de' due Calcoli.	3
Applicazione del Calcolo Differenziale alla teoria delle Curve.	22
Delle Evolute.	28
Dei Massimi e Minimi, e dei punti di flesso contrario, e di regresso.	34
Dei retti i cui termini si riducono a zero.	40
Altre applicazioni del calcolo differenziale.	45

### REGOLE DEL CALCOLO INTEGRALE

Metodo per ridurre l'integrazione delle differenziali binomie a quella di altre differenziali conosciute.	53
Dell'integrazione dei retti differenziali razionali.	58

<i>Metodi d' integrare per serie .</i>	67
<i>Dell' integrazione delle differenziali Logaritmiche ed Es- ponenziali .</i>	72
<i>Dell' integrazione delle differenziali nelle funzioni cir- colari .</i>	77
<i>Dell' integrazione delle differenziali a più variabili .</i>	83
<i>Applicazione del Calcolo Integrale alla quadratura delle Curve .</i>	91
<i>Applicazione alla Rettificazione delle Curve .</i>	97
<i>Applicazione alla misura della solidità .</i>	101
<i>Applicazione alla quadratura delle superficie de' solidi di rivoluzione .</i>	103
<i>Del Metodo Inverso delle Tangenti, e dell' integrazione delle equazioni differenziali .</i>	105
<i>Problemi sul Metodo Inverso delle tangenti .</i>	121
<i>Problemi da sciogliersi per esercizio .</i>	126
<i>Dell' integrazione delle equazioni a differenze finite .</i>	130
<i>Dell' integrazione dell' equazioni a differenze parziali .</i>	142
<i>Del Calcolo delle Variazioni .</i>	157

# E L E M E N T I

## DEL CALCOLO

### DIFFERENZIALE ED INTEGRALE.

*Fondamenti di questi due Calcoli.*

1. **L**e quantità si dividono in *costanti* ed in *variabili*: le costanti che sogliono indicarsi con le prime lettere  $a, b, c$  ec. non crescono nè scemano; le variabili che si esprimono con l'ultime lettere  $x, y, z$  ec. crescono o scemano continuamente. Così il diametro del circolo è una quantità costante, mentre le sue ascisse e le sue ordinate son quantità variabili. La porzione finita di cui una variabile  $x$  o  $y$  cresce o scema, si chiama *differenza finita* e si scrive  $\delta x$  (*differenza di  $x$* ) o  $\delta y$  (*differenza di  $y$* ); cosicchè  $x \pm \delta x$  è la variabile accresciuta o diminuita della sua differenza; e  $\delta$  è il segno con cui si indica il cangiamento finito di essa, il quale avrà  $+$  se ella cresce, e  $-$  se scema; onde  $\delta(x+y)$  non significa quì moltiplicazione, ma la differenza  $\delta x + \delta y$  del binomio  $x+y$ .

Generalmente  $\delta[\varphi(x)], \delta[f(x, y)]$  ec. significano la differenza d'una funzione  $\varphi$  di  $x$  o di una funzione  $f$  di  $x, y$  ec.: ove per *funzione* si intende quì una quantità composta di  $x$  e di costanti o di  $x, y$  e di costanti, ma tanto generale che rappresenta tutte le infinite quantità particolari che posson formarsi con  $x$  o con  $x, y$  e con delle costanti.

A

FIG. 2

1. 2. Sia la curva  $CMG$  con le coordinate  $ABe$   $BC$ ,  $AD$  e  $DE$ ,  $AF$  ed  $FG$  ec.; se  $AB = x$  e  $BC = y$ , sarà  $AD = AB + BD = x + \delta x = x'$ ,  $DE = DA + aE = y + \delta y = y'$ ,  $AF = AD + DF = x' + \delta x' = x''$ ,  $FG = Fb + bG = y' + \delta y' = y''$  ec.; dunque  $x' - x = \delta x$ ,  $x'' - x' = \delta x'$ ,  $\delta x' - \delta x = \delta(x' - x) = \delta(\delta x) = \delta^2 x$ ; del pari  $y' - y = \delta y$ ,  $y'' - y' = \delta y'$ ,  $\delta y' - \delta y = \delta^2 y$ . Ora le quantità  $\delta^2 x$ ,  $\delta^2 y$  ec. diconsi *differenze seconde*, e  $\delta^3 x$ ,  $\delta^3 y$  sarebbero le *terze* ec.; ove si osservi che  $\delta^2 x$  è molto diverso da  $\delta x^2$ , perchè  $\delta^2 x$  è la differenza seconda di  $x$ , mentre  $\delta x^2$  è il quadrato della prima  $\delta x$ . Ordinariamente l'una delle due differenze prime  $\delta x$ ,  $\delta y$  si riguarda come *costante*, supponendo per esempio  $BD = \delta x = DF = FI$  ec.

3. Dall'equazioni  $y' = y + \delta y$ ,  $y'' = y' + \delta y'$ ,  $y''' = y'' + \delta y''$  ec.,  $\delta y' = \delta y + \delta^2 y$ ,  $\delta y'' = \delta y' + \delta^2 y'$ ,  $\delta^2 y' = \delta^2 y + \delta^3 y$  ec., si ricava facilmente che presa  $\delta x$  costante, all'ascissa  $x' = x + \delta x$  corrisponde l'ordinata  $y' = y + \delta y$ , all'ascissa  $x'' = x + 2\delta x$  corrisponde l'ordinata  $y'' = y + 2\delta y + \delta^2 y$ , all'ascissa  $x''' = x + 3\delta x$  corrisponde l'ordinata  $y''' = y + 3\delta y + 3\delta^2 y + \delta^3 y$  ec.; ove i coefficienti dei termini son quelli delle varie potenze d'un binomio; dunque in generale all'ascissa  $x + n\delta x$  corrisponderà un'ordinata  $Y = y + n\delta y + n \cdot \frac{n-1}{2} \delta^2 y + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \delta^3 y + \text{ec.}$ ; teorema di cui può farsi un buon uso per sommar le serie.

4. Che se sia ora  $IH = y$ ,  $FG = 'y$ ;  $DE = ''y$ ,  $BC = ''''y$  ec. premettendo l'accento per indicare il progresso dell'ordinate all'indietro, avremo  $Hc = \delta'y$ ,  $Gb = \delta''y$ ,  $Ea = \delta'''y$  ec.; onde  $y - \delta'y = 'y$ ,  $'y - \delta''y = ''y$ ,  $''y - \delta'''y = ''''y$  ec., e perciò  $y = \delta'y + 'y = \delta'y + \delta''y + 'y = \delta'y + \delta''y$

+  $\delta''y + \delta'''y$  ec. =  $\delta ( 'y + ''y + ''''y \text{ ec. } )$ , altro teorema importante da cui si ha che un'ordinata  $y$  o in generale una *funzione* qualunque di  $y$  è sempre la differenza della somma dei termini che la precedono. Dunque 1° lo spazio  $Hi$ , l'arco  $Hb$  ec., tutte funzioni di  $y$  come vedremo, son la differenza della somma degli spazj  $GI$ ,  $EF$  ec. o degli archi  $GH$ ,  $EG$  ec., ovvero d'uno spazio qualunque  $CI$  o di un qualunque arco  $CH$  ec.: 2° supposta costante  $\delta y = \delta''y = \delta'''y$  ec. = 1, sarà  $y = \delta ( y - 1 + y - 2 + y - 3 + \text{ec.} )$ .

5. Come il cercar la differenza d'una variabile dicesi *differenziare*, così il risalir dalla differenza alla variabile stessa chiamasi *sommare* o *integrare*; e come la differenza si indica con  $\delta$ , così la somma può indicarsi con  $\sigma$ ; onde  $\sigma \delta x$ ,  $\sigma \delta^2 x$  ec. vuol dir la somma di cui  $\delta x$  o  $\delta^2 x$  son la differenza. Ma qui si rifletta che  $\delta x$  tanto è differenza di  $x$  che di  $x \pm a$ , giacchè  $a$  essendo costante non ha differenza, cioè non cresce nè scema (1): onde poichè le costanti isolate spariscono differenziando, è forza supplirle sommando, e ciò si fa coll'aggiungere alla somma l'indeterminata  $C$  (*costante*) che si determina poi secondo le circostanze: così  $\sigma \delta x = x + C$ ,  $\sigma \delta^2 x = \delta x + C$  ec. Tra poco faremo sentire anche meglio la necessità e l'uso di quest'aggiunta: passiamo al calcolo delle differenze finite.

6. Vogliasi la differenza finita di  $a^2 + bx + cy - fz = u$ ; avremo (1)  $u + \delta u = a^2 + bx \pm b\delta x + cy \pm c\delta y - fz \mp f\delta z = u'$ , onde  $u' - u = \delta u = \pm b\delta x \pm c\delta y \mp f\delta z$ . Dunque all'opposto  $\sigma ( b\delta x + c\delta y - f\delta z ) = bx + cy - fz + C$ .

7. Sia da differenziarsi  $x^n = u$ ; avremo  $u + \delta u = (x \pm \delta x)^n = u'$ , ed  $u' - u = \delta u = \pm n x^{n-1} \delta x \pm n \cdot \frac{n-1}{2} x^{n-2} \delta x^2 \pm n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} x^{n-3} \delta x^3 \pm$

ec. Dunque  $\sigma(\pm nx^{n-1} \delta x + n \cdot \frac{n-1}{2} x^{n-2} \delta x^2 \pm \text{ec.}) = x^n + C$ . Sia  $\delta x$  costante e 1°  $n=1$ ; dunque  $\sigma \delta x = \delta x \sigma 1 = x$ , e  $\sigma 1 = \frac{x}{\delta x}$ ; 2°  $n=2$ ; dunque  $\sigma(2x \delta x + \delta x^2) = 2 \delta x \sigma x + \delta x^2 \sigma 1 = x^2$ , e  $\sigma x = \frac{x^2}{2 \delta x} - \frac{x}{2}$ ; 3°  $n=3$ ; dunque  $\sigma(3x^2 \delta x + 3x \delta x^2 + \delta x^3) = 3 \delta x \sigma x^2 + 3 \delta x^2 \sigma x + \delta x^3 \sigma 1 = x^3$ , e  $\sigma x^2 = \frac{x^3}{3 \delta x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x \delta x}{6}$  ec. ec.: onde se  $\delta x = 1$ , verrà  $\sigma 1 = x$ ,  $\sigma x = \frac{x^2 - x}{2}$ ,  $\sigma x^2 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$ , ec. ec. E nel modo stesso dalle seguenti differenze dei rotti, dei radicali, delle funzioni circolari ec. si otterranno le rispettive somme che lasceremo ormai di notare, bastandoci di avvertire in generale che per aver le somme bisogna rifletter molto sulle differenze.

8. Si voglia la differenza di  $\frac{x^2}{a+x} = u$ ; avremo  $u + \delta u = \frac{(x \pm \delta x)^2}{a+x \pm \delta x} = u'$ , onde  $u' - u = \delta u = \frac{\pm(2ax+x^2)\delta x + (a+x)\delta x^2}{(a+x)^2 \pm (a+x)\delta x} = \frac{\pm(2ax+x^2)\delta x}{(a+x)^2 \pm (a+x)\delta x} + \frac{(a+x)\delta x^2}{(a+x)^2 \pm (a+x)\delta x}$ , cioè riducendo in serie questi rotti e sommando le serie,  $\delta u = \frac{\pm(2ax+x^2)\delta x}{(a+x)^2} + \frac{a^2 \delta x^2}{(a+x)^3} + \frac{a^2 \delta x^3}{(a+x)^4}$  ec.

9. Sia da differenziarsi  $\sqrt{a+x} = u$ ; avremo  $u + \delta u = \sqrt{a+x \pm \delta x} = u'$ , onde  $u' - u = \delta u = \sqrt{a+x \pm \delta x} - \sqrt{a+x}$ : ma  $\sqrt{a+x \pm \delta x} = (a+x)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{\delta x}{2(a+x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\delta x^2}{8(a+x)^{\frac{3}{2}}}$  ec.;

dunque  $\delta u = -(a+x)^{\frac{1}{2}} + (a+x)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{\delta x}{2(a+x)^{\frac{3}{2}}}$

— ec. =  $\pm \frac{\delta x}{2(a+x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\delta x^2}{8(a+x)^{\frac{5}{2}}}$  ec. Del pari

volendo la differenza di  $\sqrt{\frac{a+x}{x}} = u$ , si troverebbe  $\delta u = \dots$

$\frac{\sqrt{(ax+x^2 \pm x\delta x)} - \sqrt{(ax+x^2 \pm a\delta x \pm x\delta x)}}{\sqrt{(x^2 \mp x\delta x)}}$  cioè

riducendo in serie i tre radicali e trattando al solito il rotto che ne risulta,  $\delta u = \dots$

$\frac{\mp a\delta x}{2x(ax+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(3a^2+4ax)\delta x^2}{8x(ax+x^2)^{\frac{5}{2}}} \mp \dots$   
 $\frac{(5a^3+12a^2x+8ax^2)\delta x^3}{16x(ax+x^2)^{\frac{7}{2}}}$  ec.

10. Sia da differenziarsi *sen x* e *cos x*. Supposto  $x + \delta x = z$ ,  $\text{sen } x + \delta(\text{sen } x) = \text{sen } z$  e  $\text{cos } x + \delta(\text{cos } x) = \text{cos } z$ , si avrà  $\delta(\text{sen } x) = \text{sen } z - \text{sen } x =$

$2 \text{sen } \frac{\delta x}{2} \text{cos } (x + \frac{\delta x}{2})$  e  $\delta(\text{cos } x) = \text{cos } z - \text{cos } x =$   
 $= -2 \text{sen } \frac{\delta x}{2} \text{sen } (x + \frac{\delta x}{2})$ . Si troverà nel modo

stesso  $\delta(\text{tang } x) = \frac{\text{sen } \delta x}{\text{cos } x \text{cos } (x + \delta x)}$  e

$\delta(\text{cot } x) = -\frac{\text{sen } \delta x}{\text{sen } x \text{sen } (x + \delta x)}$ .

Anche in altro modo posson differenziarsi *sen x* e *cos x*. Poichè fatto  $\text{sen } x = u$ , avremo  $u + \delta u = \text{sen } (x \pm \delta x) = u'$ , onde  $u' - u = \delta u = \text{sen } (x \pm \delta x) - \text{sen } x$ : ma  $\text{sen } (x \pm \delta x) = \text{sen } x$ ,

$\text{cos } \delta x \pm \text{sen } \delta x \text{cos } x$ , e  $\text{sen } \delta x = \delta x - \frac{\delta x^3}{2 \cdot 3} +$

$\frac{\delta x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$  ec.,  $\text{cos } \delta x = 1 - \frac{\delta x^2}{2} + \frac{\delta x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}$  ec.; dun-



que  $\delta u = -\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \left( 1 - \frac{\delta x^2}{2} + \text{cc.} \right) \pm$   
 $\cos x \left( \delta x - \frac{\delta x^2}{2 \cdot 3} + \text{cc.} \right) = \pm \delta x \cos x - \dots$   
 $\frac{\delta x^2 \operatorname{sen} x}{2} \mp \frac{\delta x^3 \cos x}{2 \cdot 3} + \frac{\delta x^4 \operatorname{sen} x}{2 \cdot 3 \cdot 4} \pm \text{cc.}$  Del pari vo-  
 lendo la differenza di  $\cos x = u$ , verrebbe  $\delta u =$   
 $\cos (x \pm \delta x) - \cos x = -\cos x \pm \cos x \cdot$   
 $\left( 1 - \frac{\delta x^2}{2} \text{cc.} \right) \pm \operatorname{sen} x \left( \delta x - \frac{\delta x^2}{2 \cdot 3} \text{cc.} \right) =$   
 $\pm \delta x \operatorname{sen} x - \frac{\delta x^2 \cos x}{2} \pm \frac{\delta x^3 \operatorname{sen} x}{2 \cdot 3} \text{cc.}$

11. Sia da differenziarsi  $\ln x = u$ , intendendo per  $l$  il logaritmo naturale di  $x$ ; avremo  $u + \delta u =$   
 $\ln (x \pm \delta x) = u'$ , onde  $u' - u = \delta u = \ln (x \pm \delta x)$   
 $- \ln x = \ln \left( 1 \pm \frac{\delta x}{x} \right) = \pm \frac{\delta x}{x} - \frac{\delta x^2}{2x^2} \pm \frac{\delta x^3}{3x^3} - \text{cc.}$

12. Vogliasi differenziare una quantità con espo-  
 nente variabile o l'esponenziale  $a^x = u$ ; avremo  
 $u + \delta u = a^{x \pm \delta x} = u'$ , onde  $u' - u = \delta u = a^{x \pm \delta x}$   
 $- a^x$ : ma  $a^{x \pm \delta x} = a^x \cdot a^{\pm \delta x}$  ed  $a^{\pm \delta x} =$   
 $\pm \delta x \ln a + \frac{\delta x^2 \ln^2 a}{2} \pm \text{cc.}$ ; dunque  $\delta u = -a^x +$   
 $a^x \left( 1 \pm \delta x \ln a + \frac{\delta x^2 \ln^2 a}{2} \pm \text{cc.} \right) = \pm a^x \delta x \ln a$   
 $+ \frac{a^x \delta x^2 \ln^2 a}{2} \pm \text{cc.}$

13. Con egual facilità si differenziano i prodot-  
 ti di più variabili  $x, y$  ec. Ma si osservi che se  
 $x$  cresce mentre  $y$  scema, converrà sostituire all'  
 uno  $x + \delta x$  e all'altro  $y - \delta y$ ; e se scemino am-  
 bedue nel tempo stesso, ad ambedue si sostituirà  
 $x - \delta x, y - \delta y$  (1): noi supporremo per ora  
 che nel tempo stesso crescano ambedue, Voglia  
 differenziarsi  $xy = u$ ; avremo  $u + \delta u = (x + \delta x) \cdot$   
 $(y + \delta y) = xy + x \delta y + y \delta x + \delta x \delta y = u'$ , on-

de  $u' - u = \delta u = x \delta y + y \delta x + \delta x \delta y$ . Così volendo la differenza di  $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + my^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + bx + ny + k = 0$ , si troverà  $(3ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ex + fy + b) \delta x + (3ax + by + e) \delta x^2 + a \delta x^3 + (bx^2 + 2cxy + 3my^2 + fx + 2gy + n) \delta y + (cx + 3my + g) \delta y^2 + m \delta y^3 + (2bx + 2cy + f) \delta x \delta y + b \delta y \delta x^2 + c \delta x \delta y^2 = 0$ . Così anche  $\delta \left( \frac{x}{y} \right) = \frac{x + \delta x}{y + \delta y} - \frac{x}{y} = \frac{y \delta x - x \delta y}{y^2 + y \delta y} = \frac{y \delta x - x \delta y}{y^2} - \frac{(y^2 \delta x \delta y - xy \delta y^2)}{y^4}$  ec.

14. Infine vogliasi la differenza *seconda*, *terza* ec. di  $x^n$  supposta  $\delta x$  costante (2): la prima differenza è  $n x^{n-1} \delta x + n \cdot \frac{n-1}{2} x^{n-2} \delta x^2 + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} x^{n-3} \delta x^3$  ec. (7), e tutto si ridurrà a trovar le differenze di  $x^{n-1}$ ,  $x^{n-2}$ ,  $x^{n-3}$  ec. Ora 1°  $\delta(x^{n-1}) = (n-1)x^{n-2} \delta x + (n-1) \frac{n-2}{2} x^{n-3} \delta x^2 + (n-1) \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-3}{3} x^{n-4} \delta x^3$  ec. che si moltiplicherà per  $n \delta x$ : 2°  $\delta(x^{n-2}) = (n-2)x^{n-3} \delta x + (n-2) \frac{n-3}{2} x^{n-4} \delta x^2$  ec. che si moltiplicherà per  $n \cdot \frac{n-1}{2} \delta x^2$ : 3°  $\delta(x^{n-3}) = (n-3)x^{n-4} \delta x$  ec. che si moltiplicherà per  $n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \delta x^3$  ec. Fatte l'operazioni, la differenza *seconda* sarà  $n(n-1)x^{n-2} \delta x^2 + n(n-1)(n-2)x^{n-3} \delta x^3 + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-3}{3} 7x^{n-4} \delta x^4$

ec., e col metodo stesso si avrà la terza, la quarta ec. Nella medesima ipotesi di  $\delta x$  costante, si troverà che la differenza seconda di  $xy$  (ricordandosi che  $\delta y$  diviene  $\delta y + \delta^2 y$ ) è  $2 \delta x \delta y + x \delta^2 y + 2 \delta x \delta^2 y$ .

15. Riguardo alle differenziali delle funzioni  $\varphi(x)$ ,  $f(x, y)$  ec. (1), esse manifestamente si avranno se le differenze di  $x$ , di  $x, y$  ec. si moltiplichino per una nuova funzione  $\varphi'$  di  $x$ ,  $f'$  di  $x, y$  ec. Così  $\delta[\varphi(x)] = \delta x \varphi'(x)$ ,  $\delta[f(x, y)] = \delta(x, y) f'(x, y)$  ec.; del pari  $\delta^2[\varphi(x)] = \delta x^2 \varphi''(x)$  presa  $\delta x$  costante ec.

### *Prime Regole de' due Calcoli.*

16. Una grandezza variabile  $G$  ha per *limite* un'altra grandezza  $L$  quando  $G$  o sempre crescendo o sempre scemando può accostarsi al valor di  $L$  indefinitamente o ad arbitrio, senza poter mai eguagliarlo di fatto: così se  $G$  accostandosi ad  $\Omega$  giunga a differirne della quantità  $\omega$ , sarà  $G = \Omega - \omega$ , e tanto più si avvicinerà  $G$  al valor di  $\Omega$  quanto più scemerà  $\omega$ ; cosicchè se divenisse  $\omega = 0$ , si avrebbe realmente  $G = \Omega$ ; in tal caso  $\Omega$  si chiama il limite di  $G$ .

Segue da ciò 1° che per avere il limite d'una grandezza bisogna fare zero la differenza tra essa e la grandezza a cui sempre si accosta: 2° che accostandosi  $G$  alle grandezze  $L, \Lambda$  fino a differirne delle quantità  $l, \lambda$ , si avrà  $G = L - l$ , e  $G = \Lambda - \lambda$ , onde  $L - l = \Lambda - \lambda$ ; e fatto  $l = 0$ ,  $\lambda = 0$ , saranno  $L, \Lambda$  due limiti di  $G$ , e verrà  $L = \Lambda$ , cioè i limiti d'una stessa grandezza  $G$  sono eguali: 3° che se le grandezze  $G, \Gamma$  conservando tra loro la stessa invariabil ragione  $m : n$ , si accostino ad  $L, \Lambda$  fino a differirne delle quantità  $l, \lambda$ , si avrà  $G = L - l$ ,  $\Gamma = \Lambda - \lambda$ , ed  $L - l : \Lambda - \lambda :: m : n$ :

$G : \Gamma$ , cioè se  $G, \Gamma$  si accostino *proporzionalmente* ai limiti  $L, A$ , le grandezze e i limiti staranno tra loro nella stessa ragione: 4.<sup>o</sup> che una grandezza  $G$  continuamente accostandosi al limite  $L$ , può riguardarsi ( se basti una certa approssimazione ) come eguale ad  $L$  quando è giunta allo stato che o immediatamente precede l'eguaglianza perfetta o ne è anche un poco più remoto. Quest'ultima conseguenza che talvolta ha luogo nelle stesse Scienze Matematiche, come nella somma delle serie convergenti, ne ha poi moltissimo in tutte le Scienze Fisiche.

17. Ora il *Calcolo differenziale* è il metodo di trovare i limiti della relazione tra le differenze delle quantità variabili: il metodo inverso che consiste nel risalire da questi limiti alla relazione stessa delle quantità, si chiama *Calcolo integrale*. Alcuni esempj renderanno chiare queste nozioni.

18. Vogliasi la tangente  $MT$  al punto  $M$  2: della curva concava  $AMm$ , o che è lo stesso, debba determinarsene la sottangente  $PT$ . Condotta un'altra ordinata  $mp$  e per  $m, M$  la corda  $mMS$  sino all'incontro della linea  $pS$  dell'ascisse, e di più  $Mr$  parallela ad  $Ap$ , sia  $AP = x$ ,  $PM = y$ ,  $Pp = Mr = \delta x$ , ed  $mr = \delta y$ . Ora attesi i triangoli simili  $MP S$ ,  $mr M$ , si avrà  $\frac{MP}{PS} = \frac{mr}{rM} = \frac{\delta y}{\delta x}$ : ma  $\frac{MP}{PT} > \frac{MP}{PS}$ ; dunque  $\frac{MP}{PT} > \frac{\delta y}{\delta x}$ . Per altro quanto più  $m$  si accosta ad  $M$ , cioè quanto più scemeranno  $\delta y$  e  $\delta x$ , tanto più  $S$  si accosterà a  $T$ , e tanto meno differiranno tra loro le due relazioni o ragioni  $\frac{MP}{PT}$ ,  $\frac{\delta y}{\delta x}$ ; dunque la ragione  $\frac{MP}{PT}$  è il limite dell'altra  $\frac{\delta y}{\delta x}$  (16); dunque per determinar la prima, basta trovare una nuova espressione del limite della seconda. Sia per esempio  $AMm$

B

FIG. 10  
 un circolo, la cui equazione è  $y^2 = 2ax - x^2$ ;  
 presa la differenza (7), si avrà  $2y \delta y + \delta y^2$   
 $= 2a \delta x - 2x \delta x - \delta x^2$ , cioè  $\frac{\delta y}{\delta x} = \dots$   
 $\frac{2a - 2x - \delta x}{2y + \delta y}$ , ove quanto più scemano  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  
 tanto più la ragione  $\frac{\delta y}{\delta x}$  si accosta a quella di  
 $\frac{2a - 2x}{2y} = \frac{a - x}{y}$ ; dunque fatto  $\delta x = 0$ ,  $\delta y$   
 $= 0$  (7), sarà  $\frac{a - x}{y}$  il limite di  $\frac{\delta y}{\delta x}$ : ma lo era  
 2. anche  $\frac{MP}{PT}$ ; dunque (7)  $\frac{MP}{PT} = \frac{a - x}{y} = \frac{y}{PT}$ , e  
 però  $PT = \frac{y^2}{a - x}$ , come già si sapeva. Dal che  
 si vede con qual prontezza e generalità il calco-  
 lo differenziale risolve il problema delle tangen-  
 ti da cui dipendono quasi tutte le proprietà delle  
 curve.

19. Per convincersi poi che  $\delta y$ ,  $\delta x$  anche  
 divenendo zero, serban tra loro una ragione, sia  
 $\delta y = a^2 - x^2$ ,  $\delta x = a - x$ , e si supponga  $x = a$ :  
 in tal caso si avrà  $\delta y = 0$  e  $\delta x = 0$ ; eppure  
 intanto  $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{a^2 - x^2}{a - x} = a + x = 2a$ . Similmente  
 3. se nel triangolo  $PBE$  sia  $PB = a$ ,  $BE = b$ , e  
 sull'ascissa  $BI = x$  si conduca l'ordinata  $IG = y$   
 parallela a  $BE$ , si avrà  $PB (a) : BE (b) :: PI$   
 $(a - x) : IG (y)$ , onde  $ay = ab - bx$ : e prese le  
 differenze, osservando che l'una delle coordinate  
 scema mentre l'altra cresce, sarà  $-a \delta y = -b \delta x$ ,  
 ovvero  $a \delta y = b \delta x$ , e però  $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{b}{a} = \frac{y}{a - x}$ ,  
 cioè le differenze  $\delta y$ ,  $\delta x$  anche annullandosi, come  
 avviene in  $GI$ , conservan tra loro la ragion co-  
 stante  $b : a$  delle quantità primitive  $y$ ,  $a - x$ , a cui

11  
 appartengono. Tale è l'idea che bisogna farsi del FIG.  
 calcolo differenziale.

20. Quanto all'integrale, egli è l'opposto del differenziale (17) ed ogni integrazione esige l'aggiunta d'una costante (5). Per dare anche di questo un esempio, sia  $OD$  una linea retta o curva con due coordinate,  $HC = x$ ,  $CD = y$  in angolo retto, e presa  $Cc = \delta x$ , si conduca l'ordinata  $cd = cr + rd = y + \delta y$ ; è chiaro (4) che lo spazio  $Cd$  sarà la differenza di qualunque spazio corrispondente  $HD$ , l'arco  $Dd$  di qualunque arco corrispondente  $OD$ , la superficie descritta da  $Dd$  della descritta da  $OD$  nella rivoluzione della figura sull'asse  $HC$ , il solido generato da  $Cd$  del solido generato da  $HD$  ec.; cosicchè sommate secondo il bisogno queste differenze, il calcolo integrale determinerà la quadratura degli spazj, la lunghezza delle linee, la dimensione delle superficie curve, la cubatura dei solidi ec.

21. Supposta dunque per ora  $OD$  una retta, sia  $PH = a$  e la normale  $HO = b$ ; avremo perciò  $a : b :: a + x : y = \frac{b(a+x)}{a}$ , onde differen-

ziando,  $\delta y = \frac{b \delta x}{a}$ , e lo spazio differenziale  $Cd =$

$Cr + Drd = \delta x \times y + \frac{\delta x \times \delta y}{2} = \frac{b}{a} \left( a \delta x + x \delta x + \frac{\delta x^2}{2} \right)$ ; quindi per aver la quadratura d'uno spazio corrispondente  $HD$  o  $PCD$ , bisogna integrar quest'

ultima equazione: ma  $\sigma a \delta x = ax$  e  $\sigma \left( x \delta x + \frac{\delta x^2}{2} \right)$

$= \frac{x^2}{2}$  (7); dunque l'integrale completo con l'aggiunta della costante sarà  $\sigma(Cd) = \frac{b}{a} \left( ax + \frac{x^2}{2} \right)$

+ C. Ora come l'area del trapezio  $HD$  è diver-

FIG.  
3.

12

sa da quella del triangolo  $PCD$ , così la costante  $C$  avrà nei due casi un diverso valore: infatti il trapezio è nullo quando l'ascissa è ridotta al punto  $H$ , cioè quando  $x = 0$ , ma il triangolo è nullo quando l'ascissa è ridotta al punto  $P$ , cioè quando  $x + a = 0$  ovvero  $x = -a$ ; dunque supposti nulli i due spazj e sostituito nell'integrale il doppio valore di  $x$ , verrà 1.º  $0 + C = 0$ , e però  $C = 0$ ; 2.º  $\frac{b}{a} \left( \frac{a^2}{2} - a^2 \right) + C = 0$ , e però  $C = \frac{ab}{2}$ ; onde  $\sigma(Cd) = HD = \frac{b}{a} \left( ax + \frac{x^2}{2} \right) = (b+y) \frac{x}{2}$ , come ben si sapeva e  $\sigma(Cd) = PCD = \frac{b}{a} \left( ax + \frac{x^2}{2} \right) + \frac{ab}{2} = (a+x) \frac{y}{2}$ , come pur si sapeva. Tale è l'idea che bisogna farsi del calcolo integrale.

22. Ciò supposto, si è convenuto di esprimere con  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  il limite della relazione o ragione

$\frac{\delta y}{\delta x}$  tra le differenze prime delle variabili  $y, x$ ,

con  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  o  $\frac{d^2 x}{dx^2}$  i limiti delle ragioni  $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$ ,  $\frac{\delta^2 x}{\delta x^2}$

tra le lor differenze seconde ec.; e i termini  $dy$ ,

$dx$  del limite  $\frac{dy}{dx}$  si son chiamati *differenziali del*

*prim' ordine*, i termini  $d^2 y$ ,  $d^2 x$ ,  $dx^2$  dei limiti

$\frac{d^2 y}{dx^2}$ ,  $\frac{d^2 x}{dx^2}$ , *differenziali del second' ordine* ec.; onde

*differenziar le quantità* significa ora cercare il limi-

te della ragione tra le lor differenze, e dicesi

*quantità ed equazione differenziale* quella che nasce

dalla *differenziazione*. All'incontro il carattere o

segno  $\int$  posto avanti ad una differenziale, indi-

ca *somma o integrazione*. Del resto molti Geome-

tri a cui piace di abbracciare sotto il comun nome di *Calcolo Infinitesimale* i due Calcoli di cui trattiamo, concepiscono una variabile aumentata o diminuita d'una quantità infinitamente piccola  $dy$  o  $dx$ , e chiamano  $dy$ ,  $dx$  *infinitamente piccoli* o *infinitesimi del prim' ordine*,  $d^2y$ ,  $d^2x$ ,  $dx^2$  *infinitesimi del secondo* ec., riguardando intanto l'integrazione come il ritorno dagli infinitesimi ai finiti. Altri danno a  $dy$ ,  $d^2y$ ,  $d^3y$  ec. il nome di *flussioni del primo, secondo, terzo* ec. *ordine*, e chiamano *fluenti* le quantità che si ritrovano col calcolo integrale. Queste idee ed espressioni, benchè poco esatte, sono assai comuni, e noi non lasceremo di farne uso dopo aver derivate dai fondamenti già stabiliti le prime regole dei due calcoli, nelle quali supporremo tutte le variabili crescenti, giacchè in caso diverso si sa come bisogna condursi (13).

23. Abbiam veduto (16) che il limite d'una ragione si ottiene col fare zero la differenza tra essa e quella a cui sempre si accosta. Dunque 1<sup>o</sup> per differenziar  $b^2 + ax = u$ , si avrà  $\delta u = u \delta x$  (6), onde  $\frac{\delta u}{\delta x} = a$ , ove non essendo differenza al-

tuna, sarà  $a$  il limite di  $\frac{\delta u}{\delta x}$ , e però anche  $\frac{du}{dx} = a$ ,

e  $du = a dx$ . Quindi per differenziare  $a^2 + bx + cy - fz = u$ , sarà (6)  $\frac{\delta u}{\delta x} = b + \frac{c \delta y}{\delta x} - \frac{f \delta z}{\delta x}$ ;

ma  $\frac{\delta u}{\delta x}$  divenendo  $\frac{du}{dx}$ , anche  $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta z}{\delta x}$  debbon di-

venire  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{dz}{dx}$ ; dunque  $\frac{du}{dx} = b + \frac{c dy}{dx} - \frac{f dz}{dx}$ ,

e però  $du = b dx + c dy - f dz$ , cioè le variabili al primo grado si differenziano come nel calcolo delle differenze finite, sostituendo ad esse le lor differenziali e scancellando le costanti se vi sono.



24. Dunque II<sup>o</sup> per differenziare  $x^n = u$ , avremo prima  $\delta u = nx^{n-1} \delta x + n \cdot \frac{n-1}{2} x^{n-2} \delta x^2$

ec. (7), onde  $\frac{\delta u}{\delta x} = nx^{n-1} + n \cdot \frac{n-1}{2} x^{n-2} \delta x$  ec.,

e poi fatta  $\delta x = 0$ , verrà  $\frac{d u}{d x} = nx^{n-1}$  e  $du$

$= nx^{n-1} dx$ , cioè si differenzia una variabile a qualunque grado diminuendone l'esponente d'un'unità e moltiplicandola per il prodotto dell'esponente primitivo nella sua differenziale: così  $d(x^2) = 2x dx$ ,  $d(x^3) = 3x^2 dx$  ec.

25. Da ciò si raccoglie che  $d[\sqrt{(a+x)}] =$

$d(a+x)^{\frac{1}{2}} = \frac{dx}{2\sqrt{(a+x)}}$ , come può dedursi anche dalla dottrina dei limiti (9);  $d[\sqrt{(ay+y^2)}] =$

$d(ay+y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{(a+2y)dy}{2\sqrt{(ay+y^2)}}$ , e in generale

$d[\sqrt[m]{(ax+x^2)}] = \frac{(a+2x)dx}{m\sqrt[m]{(ax+x^2)^{m-1}}}$ , cioè si dif-

ferenzia un radicale del grado  $m$  dividendo la differenziale della quantità sotto il segno per il prodotto dell'esponente  $m$  nella radice  $m$  di questa quantità alzata alla potenza  $m-1$ .

26. Dunque III<sup>o</sup> per differenziare  $xy = u$ , si avrà prima  $\delta u = x \delta y + y \delta x + \delta y \delta x$  (13), onde

$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{x \delta y}{\delta x} + y + \delta y$ , e poi fatto  $\delta y = 0$ , verrà

$\frac{d u}{d x} = \frac{x dy}{d x} + y$ , e  $du = x dy + y dx$ , cioè si

differenzia un prodotto di variabili sommandò i prodotti della differenziale di ciascuna variabile per tutte l'altre: così  $d(z\phi\omega) = \phi\omega dz + z\omega d\phi + z\phi d\omega$ ;  $d(x^2y) = 2yx dx + x^2 dy$ , ec.

27. Dal che segue che volendo differenziare

$$\frac{x}{y} = u, \text{ si avrà } x = uy, \quad dx = \frac{xdy}{y} + ydu \text{ e } du =$$

$$\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2} \quad (13) \text{ cioè si differenzia un}$$

rotto prendendo il prodotto del denominatore per la differenziale del numeratore, sottraendone quello del numeratore per la differenziale del denominatore, e dividendo il resto per il quadrato del denominatore:

$$\text{così } d\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{dy}{y^2}; \quad d\left(\frac{x^2}{a+x}\right) = \frac{(2ax+x^2)dx}{(a+x)^2}.$$

$$d\left(\sqrt{\frac{a+x}{x}}\right) = \frac{-adx}{2x\sqrt{(ax+x^2)}}, \text{ come risulta an-}$$

cora dalla consueta dottrina dei limiti (8.9) ec.

28. Dunque IV<sup>o</sup> per differenziar  $\text{sen } x = u$ ,

$$\text{si avrà prima (10); } \delta u = \delta x \cos x - \frac{\delta x^2 \text{sen } x}{2} \text{ ec.,}$$

$$\text{onde } \frac{\delta u}{\delta x} = \cos x - \frac{\delta x \text{sen } x}{2} \text{ ec., e poi fatto } \delta x = 0,$$

$$\text{verrà } \frac{du}{dx} = \cos x \text{ e } du = d(\text{sen } x) = dx \cos x,$$

cioè si differenzia il seno d'un arco moltiplicando la differenziale dell'arco nel suo coseno. Del pari  $d(\cos x) = -dx \text{sen } x$  (10), cioè si differenzia il coseno d'un arco moltiplicando la differenziale negativa dell'arco per il suo seno. Così  $d(\text{sen}^m x) = m \text{sen}^{m-2} x dx \cos x$ ;

$$d(\text{sen } m x) = m dx \cos m x; \quad d(\cos m x) = -m dx \text{sen } m x; \quad d(\text{sen } x \cos x) = dx \cos^2 x - dx \text{sen}^2 x = dx \cos 2x;$$

$$d\left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right) = d\left(\cos \frac{x}{2}\right) =$$

$$-\frac{dx}{2} \text{sen } \frac{x}{2}; \quad d[\sqrt{(a^2 - b \text{sen } x)}] = d(a^2 - b \text{sen } x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-b dx \cos x}{2\sqrt{(a^2 - b \text{sen } x)}}; \quad d(x \text{sen } x) = dx \text{sen } x +$$

$x dx \cos x$ , ec.: e si osservi che se il raggio non fosse 1 ma  $a$ , avrebbe sempre luogo la regola data altrove.

29. Dal che si ha 1°  $d(\operatorname{tang} x) = d \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$   
 $= (25) \frac{d x \operatorname{cos}^2 x + d x \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{cos}^2 x} = \frac{d x}{\operatorname{cos}^2 x}$ ; 2°  $d(\operatorname{cot} x) =$   
 $d \frac{1}{\operatorname{tang} x} = \frac{-d x}{\operatorname{cos}^2 x \cdot \operatorname{tang}^2 x} = \frac{-d x}{\operatorname{sen}^2 x}$ ; 3°  $d(\operatorname{sec} x) =$   
 $d\left(\frac{1}{\operatorname{cos} x}\right) = \frac{d x \operatorname{tang} x}{\operatorname{cos} x}$ ; 4°  $d(\operatorname{cosec} x) = d\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) =$   
 $\frac{-d x \operatorname{cot} x}{\operatorname{sen} x}$ ; 5°  $d(\operatorname{sen} v. x) = d(1 - \operatorname{cos} x) = d x \operatorname{sen} x$ ;  
 6°  $d(\operatorname{cos} v. x) = d(1 - \operatorname{sen} x) = -d x \operatorname{cos} x$ .

30. Onde se  $x$  è un arco qualunque, sarà la sua differenziale  $d x = \frac{d(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{cos} x} = \frac{-d(\operatorname{cos} x)}{\operatorname{sen} x} =$   
 $\operatorname{cos}^2 x \times d(\operatorname{tang} x) = \frac{d(\operatorname{tang} x)}{\operatorname{sec}^2 x} = \frac{d(\operatorname{tang} x)}{1 + \operatorname{tang}^2 x} =$   
 $-\operatorname{sen}^2 x \times d(\operatorname{cot} x) = \frac{-d(\operatorname{cot} x)}{\operatorname{cosec}^2 x} = \frac{-d(\operatorname{cot} x)}{1 + \operatorname{cot}^2 x}$ ,  
 ec.; ciò risulta dai varj valori che possono aversi per  $d x$ . (28. 29)

31. Dunque V° per differenziare  $\log x = u$ , si avrà prima (11)  $\delta u = \frac{\delta x}{x} - \frac{\delta x^2}{2 x^2}$  ec., onde  $\frac{\delta u}{\delta x} =$   
 $\frac{1}{x} - \frac{\delta x}{2 x^2}$  ec., e poi fatto  $\delta x = 0$ , verrà  $\frac{d u}{d x} =$   
 $\frac{1}{x}$ , e  $du = d(\log x) = \frac{d x}{x}$ , cioè si differenzia il logaritmo d'una variabile dividendo per essa la sua differenziale, e si noti che per un sistema del modulo  $m$ , si avrebbe  $d(\log x) = \frac{m d x}{x}$ , ma noi parleremo dei soli logaritmi naturali il cui modulo è 1: così  $d(\log x^n) = d(n \log x) = \frac{n d x}{x}$ ;  $d(\log x y) = \frac{y d x + x d y}{x y}$ ;  $d\left(\log \frac{x}{y}\right) = \frac{y d x - x d y}{x y}$ ;  $d[\log(a^2 - x^2)] =$

$$\frac{-2x dx}{a^2 - x^2}; d\left(l \frac{a+x}{a-x}\right) = \frac{2a dx}{a^2 - x^2}; d[l \sqrt[m]{(a+bx^n)^r}] =$$

$$\frac{r}{m} d[l(a+bx^n)] = \frac{b n r x^{n-1} dx}{m(a+bx^n)}; d\left(l \sqrt{(1+x^2)}\right) = (17)$$

$$\frac{dx}{x(1+x^2)}; d(\cos lx) = (26) - dx \operatorname{sen} lx = -\frac{dx}{x}$$

*sen lx* ec. Del pari volendo differenziare potenze di logaritmi, si troverebbe  $d(l^m x) = (24) m l^{m-1} x \frac{dx}{x}$ ;

$$d(x^m l^n x) = (26) m x^{m-1} dx l^n x + n x^{m-1} dx l^{n-1} x = x^{m-1}$$

$dx l^{n-1} x (n + m l x)$ . In fine la differenziale d' un logaritmo di logaritmo come  $l l x = u$ , si avrà col mezzo d' una sostituzione; poichè fatto  $l x = t$ ,

$$\text{sarà } l l x = l t = u, \text{ onde } dx = \frac{dt}{t} = \frac{d(l x)}{l x} =$$

$$\frac{dx}{x l x}, \text{ ec.}$$

Dall' equazione  $d(l x) = \frac{dx}{x}$  si ha  $dx =$

$x d(l x)$ , cioè si differenzia una quantità qualunque  $x$  prendendo il prodotto di essa nella differenziale del suo logaritmo, il che offre un nuovo metodo di differenziare o di verificar la differenziazione già fatta: non vi ci fermeremo.

32. Dunque VI<sup>o</sup> per differenziare  $a^x = u$ , si avrà prima (12)  $\delta u = a^x \delta x l a + \frac{a^x \delta x^2 l^2 a}{2}$  ec,

$$\text{onde } \frac{\delta u}{\delta x} = a^x l a + \frac{a^x \delta x l^2 a}{2} \text{ ec., e poi fatto } \delta x = 0,$$

$$\text{verrà } \frac{du}{dx} = a^x l a \text{ e } du = a^x dx l a: \text{ così } d(x^y) = x^y$$

$$d(y l x) = (26) x^y \left( dy l x + \frac{y dx}{x} \right); \text{ onde se sia}$$

$1 = l 2, 7182818 = l e$ , cioè se si chiami  $e$  il numero il cui logaritmo naturale è 1, sarà  $d(e^x) =$

$$e^x dx l e = e^x dx; d(e^{-m x}) = -m e^{-m x} dx; \text{ e } d(e^{l x}) = dx. \text{ Del pari la differenziale degli espo-}$$

nenziali di second' ordine, come  $x^{y^2} = u$ , si avrà col mezzo d'una sostituzione; poichè fatto  $y^1 = t$  sarà  $x^{y^2} = x^t = a$ , onde  $x^t d(t \mid x) = x^{y^2} d(y^1 \mid x) = x^{y^2} \left[ y^1 (dz \mid y \mid x) \dagger \frac{z dy \mid x}{y} \right] \dagger \frac{y^1 dx}{x} = \dots$   
 $x^{y^2} y^2 (dz \mid x \mid y \dagger \frac{z dy \mid x}{y} \dagger \frac{dx}{x})$ , e se  $x=y=e$ , sarà  $d(e^{e^2}) = e^{e^2} e^2 dz$ , perchè in tal caso  $x, y$  sono costanti.

33. Dunque VII<sup>o</sup> la differenziale delle funzioni  $\varphi(x), f(x, y), F(ay \dagger x^2)$  ec. sarà  $dx \varphi'(x), d(x, y) f'(x, y), (ady \dagger 2x dx) F'(ay \dagger x^2)$ , ec. (15).

34. Dunque VIII<sup>o</sup> per differenziare la seconda volta  $x^n = u$ , o per trovarne, presa  $dx$  costante, la differenziale seconda, si avrà primieramente (14)  $\delta^2 u = n(n-1)x^{n-2} \delta x^2 \dagger n(n-1)(n-2)x^{n-3} \delta x^3$  ec. onde  $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = n(n-1)x^{n-2} \dagger n(n-1)(n-2)x^{n-3} \delta x$  ec., e poi fatto  $\delta x = 0$ , verrà  $\frac{d^2 u}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$  e  $d^2 u = n(n-1)x^{n-2} dx^2$ : così  $d^2(x^2) = 2 dx^2$ ;  $d^2(x^3) = 6x dx^2$  ec. Ma se  $dx$  non sia costante, siccome  $d(x^2) = 2x dx$  (24), avremo  $d^2(x^2) = d(2x dx) = (26) 2 dx^2 \dagger 2x d^2 x$ ; in generale, poichè  $d(x^n) = nx^{n-1} dx$ , sarà  $d^2(x^n) = d(nx^{n-1} dx) = (n-1)x^{n-2} dx^2 \dagger nx^{n-1} d^2 x$ . Similmente essendo  $d(xy) = x dy \dagger y dx$ , sarà  $d^2(xy) = x d^2 y \dagger 2 dx dy \dagger y d^2 x$ , e presa  $dx$  costante,  $d^2(xy) =$

$x d^2 y + 2 dx dy$ : così nella stessa ipotesi di  $dx$  costante, si troverà  $d\left(\frac{y dx}{dy}\right) = dx - \frac{y dx d^2 y}{dy^2}$ ; ma se sia costante piuttosto  $dy$ , si avrà  $d\left(\frac{y dx}{dy}\right) = dx + \frac{y d^2 x}{dy^2}$ ; e se nulla sia costante, verrà  $d\left(\frac{y dx}{dy}\right) = dx + \frac{y d^2 x}{dy} - \frac{y dx d^2 y}{dy^2}$ .

È presa pur costante  $dx$ , sarà  $d^2 [\varphi(x)] = dx^2 \varphi''(x)$  ec.

Il metodo stesso farà trovar le differenziali terze, quarte ec.

35. Da quanto si è detto fin qui, facilmente si comprenderanno le prime regole del calcolo integrale: così  $\int a dx = ax + C$  (23);  $\int n x^{n-1} dx$

$= x^n + C$  (24), e quindi  $\int x^{n-1} dx = \frac{x^n}{n} + C$ ;

dunque fatto  $n-1 = m$ , sarà  $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$ ,

cioè si integra una differenziale monomia accrescendo d' un' unità l' esponente della variabile, e dividendola per la sua differenziale moltiplicata nell' esponente accresciuto: così  $\int \frac{dx}{2 \sqrt{a+x}} = \int \frac{dx(a+x)^{-\frac{1}{2}}}{2} = \dots$

$\frac{dx(a+x)^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot \frac{1}{2} dx} = \sqrt{a+x} + C$  (25) ec.

36. Nel caso però di  $m = -1$  la regola non ha luogo, poichè allora  $\frac{x^{m+1}}{m+1} = \frac{1}{0}$ : per altro essendo  $m = -1$ , si avrà  $x^m dx = x^{-1} dx = \frac{dx}{x}$ , e

si sa che  $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$  (31).

37. Talora si integra più facilmente per mezzo d'una sostituzione: così volendo  $a \int x^{n-1} x dx (b+x^n)^m$ , fatto  $b+x^n = z$  e però  $n x^{n-1} dx = dz$  ed  $x^{n-1} dx = \frac{dz}{n}$ , verrà  $a \int \frac{z^m dz}{n} = \frac{a z^{m+1}}{n(m+1)} = \frac{a(b+x^n)^{m+1}}{n(m+1)} + C$  ec. Bisogna però preparar, se occorre, tali sostituzioni: così  $dx \sqrt{(a^2 x^2 + x^4)}$  e  $(3ax^3 + 4x^4) dx \sqrt{(ax + x^2)}$  si ridurranno prima a  $x dx \sqrt{(a^2 + x^2)}$  e a  $(3ax^2 + 4x^3) dx \sqrt{(ax^3 + x^4)}$ , e poi fatto  $\sqrt{(a^2 + x^2)} = z$  e  $\sqrt{(ax^3 + x^4)} = z$ , si integrerà facilmente.

Se  $m = -1$ , si avrà nel primo esempio di sopra  $a \int \frac{x^{n-1} dx}{b+x^n} = \frac{a \ln(b+x^n)}{n} + C$ .

38. In generale  $\int x^n dx (a+bx^m)^r$  può aver-  
si in due casi: I° se  $n = m-1$ ; poichè fatto  $z = a+bx^m$ , sarà  $dz = mbx^{m-1} dx = mbx^n dx$ , onde  $\int x^n dx (a+bx^m)^r = \int \frac{z^r dz}{bm} = \frac{(a+bx^m)^{r+1}}{(r+1)bm}$  (39): II° se  $r$  sia numero intero e positivo; poichè sviluppando la differenziale e integrandone ciascun termine separatamente, si ha  $\int (a^r x^n dx + r a^{r-1} b x^{m+n} dx + r \frac{r-1}{2} a^{r-2} b^2 x^{2m+n} dx \text{ ec.}) = C + \dots + \frac{a^r x^{n+1}}{n+1} + \frac{r a^{r-1} b x^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{r(r-1) a^{r-2} b^2 x^{2m+n+1}}{2(2m+n+1)} \text{ ec.}$ , espressione finita nel nostro caso.

Se l'espressione sviluppata abbia dei termini della forma  $\frac{dx}{x}$ , si integrerà coi logaritmi come sopra.

39. In due altri casi è integrabile la formula  $x^n dx (a + bx^m)^r$ . Sia  $\frac{n+1}{m} = s$ , e fatto  $a + bx^m$

$= z$  onde  $mbx^{m-1} dx = dz$  ed  $x = \sqrt[m]{\frac{z-a}{b}}$ , si avrà

$x^{n+1} = \frac{(z-a)^s}{b^s}$ ,  $x^n = \frac{(z-a)^s}{b^s x}$ ,  $x^n dx = \dots$

$\frac{dz (z-a)^{s-1}}{m b^s}$ , ed  $x^n dx (a + bx^m)^r = \dots$

$\frac{z^r dz (z-a)^{r-1}}{m b^s}$ , quantità integrabile se  $s = \frac{n+1}{m}$

sia numero intero e positivo (38): così  $x^3 dx (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$

ove  $n = 3$ ,  $m = 2$  ed  $\frac{n+1}{m} = 2$ , è inte-

grabile; poichè  $\int x^3 dx (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = \dots$

$\int \frac{z^{\frac{1}{2}} dz (z-a^2)}{2} = \int \left( \frac{z^{\frac{3}{2}} dz}{2} - \frac{a^2 z^{\frac{1}{2}} dz}{2} \right) = \dots$

$3z^{\frac{3}{2}} \left( \frac{z}{14} - \frac{a^2}{8} \right) = \frac{3}{56} (4x^2 - 3a^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{a^2 + x^2} + C.$

40. II°.  $x^n dx (a + bx^m)^r = x^n x^{mr} dx \left( \frac{a + bx^m}{x^m} \right)^r$

$= x^{n+mr} dx (b + ax^{-m})^r$ , differenziale integrabile

se  $\frac{n+mr+1}{-m} (=s)$  è numero intero e positivo

(39), nel qual caso l'operazione di sopra lo riduce a

$\frac{z^r dz (z-b)^{r-1}}{-m a^s}$ : così  $x^{-3} dx (a + x^3)^{-\frac{1}{2}}$  ove  $n = -3$ ,

$b = 1$ ,  $m = 3$ ,  $r = -\frac{5}{3}$  ed  $\frac{n+mr+1}{-m} = 2$ , può inte-

grarsi; poichè  $\int x^{n+mr} dx (b + ax^{-m})^r = \int x^{-7} dx (1 +$

$ax^{-3})^{-\frac{5}{2}} = \int \frac{z^{-\frac{1}{2}} dz (z-1)}{-3a^2} = \int \left( \frac{-z^{-\frac{3}{2}} dz}{3a^2} + \frac{z^{-\frac{5}{2}} dz}{3a^2} \right) =$



FIG.

$$\frac{-2^{\frac{2}{3}}}{a^2} - \frac{2^{-\frac{2}{3}}}{2a^2} = -\frac{2^{\frac{1}{3}}}{a^2} \left( 1 + \frac{1}{2z} \right) = -\frac{1}{a^2} \left( 1 + \frac{a}{x^3} \right)^{\frac{1}{3}} \left( 1 + \frac{1}{2(1+ax^{-3})} \right) + C.$$

41. Infine è manifesto che  $\int dx \cos x = \sin x + C$ ,  $\int dx \sin x = -\cos x + C$  (28),  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$ ,  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$  (29), ec.

42. E' chiaro egualmente che  $\int \frac{dx^m x}{x} = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$ ,  $\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln x + C$ ,  $\int \frac{dx}{x \ln x \ln x} = \ln \ln x + C$  (31) ec.; come pure  $\int a^x dx \ln a = a^x + C, \dots$   
 $\int x^y (dy \ln x + \frac{y dx}{x}) = x^y + C$  (32) ec.; e parimente  $\int dx \varphi'(x) = \varphi(x)$ ,  $\int d(x, y) f'(x, y) = f(x, y)$  ec. (33). Tra poco daremo altre regole del calcolo integrale.

### *Applicazioni del Calcolo Differenziale alla Teoria delle Curve*

43. Dei problemi da sciogliersi sopra una curva, il più semplice è di condurre una tangente a un punto della medesima. Ora abbiamo già trovato che se sia  $AP = x$ ,  $PM = y$ , la ragione  $\frac{PM}{PT}$  è il limite di  $\frac{\delta y}{\delta x}$  (18); dunque  $\frac{MP}{PT} = \frac{dy}{dx}$  (22), e la sottangente  $PT = \frac{y dx}{dy}$ ; l'elemento

della curva  $AMm$  o l'arco infinitesimo  $Mm = \sqrt{(Mr^2 + rm^2)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$ ; la

tangente  $MT = \sqrt{(PM^2 + PT^2)} = \sqrt{\left(y^2 + \frac{y^2 dx^2}{dy^2}\right)} = \frac{y ds}{dy} = t$ ; la sunnormale  $PN =$

$\frac{PM^2}{PT} = \frac{y dy}{dx}$ ; la normale  $MN = \sqrt{(PM^2 + PN^2)} = \frac{y ds}{dx} = n$ ; e se per  $A$  si conduca  $AQ$

parallela a  $MP$ , si avrà  $\frac{y dx}{dy} : \frac{y dx}{dy} = x (=$

$AT) :: y : AQ = y - \frac{x dy}{dx}$ . Con ciò si trovano

i valori di queste varie linee in ciascuna curva: poichè sostituito nelle formole il valor di  $dx$ ,  $dy$  ricavato dall'equazioni delle curve, si determineranno quelle linee, purchè per avere gli asintoti si faccia di più  $x$  infinita. Diamo alcuni esempj.

L'equazione al circolo è  $y^2 = a^2 - x^2$ ; dunque  $y dy = -x dx$ , e  $\frac{y dx}{dy} = -\frac{y^2}{x} = -\dots$

$\left(\frac{a^2 - x^2}{x}\right) = PT$  (il segno  $-$  indica che la sut-

tangente dev'esser presa nel senso stesso dell'ascissa, perchè nella costruzione della formola si è presa in senso contrario, e dall'equazione  $y^2 = 2ax - x^2$  si è avuto un risultato positivo (18): la sunnormale

$\frac{y dy}{dx} = -x$ ; la normale  $\sqrt{\left(y^2 + \frac{y^2 dy^2}{dx^2}\right)} = \sqrt{(x^2 + y^2)} = a =$  al raggio, come dev'essere;

l'arco  $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{a dx}{y} = -$

$\frac{a dy}{x}$ .

Nella parabola,  $y^2 = px$ ; dunque  $\frac{y dy}{dx} = \frac{p}{2}$ , e  $\frac{y dx}{dy} = 2x$ .

Nell' ellisse,  $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$ ; dunque  $y dy = \frac{b^2}{a^2} (-x dx)$ ,  $\frac{y dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2}$ , ed  $\frac{y dx}{dy} = \frac{- (a^2 - x^2)}{x}$ .

Nell' iperbola,  $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax + xx)$ ; dunque  $\frac{y dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2} (a + x)$ , e  $\frac{y dx}{dy} = \frac{2ax + xx}{a + x}$ .

Si ha ancora  $AT = \frac{ax}{a+x}$ , espressione  $= a$

quando  $x$  è infinita; come  $AQ = y - \frac{x dy}{dx} =$

$y - \frac{b^2 x}{a^2 y} (a + x) = \frac{b^2 x}{ay} = \sqrt{\left(\frac{b^2 x}{2a+x}\right)}$ , si riduce a  $\pm b$ . Questi valori di  $AT$  e di  $AQ$  danno la posizione degli asintoti.

44. Sia  $y^m = x^n a^{m-n}$ ; si avrà  $n'lx + (m - n) la = mly$ , onde (31)  $\frac{ndx}{x} = \frac{m dy}{y}$ , e la sut-

tangente  $\frac{y dx}{dy} = \frac{mx}{n}$ . Tutte le curve rappresen-

tate dall' equazion generalè  $y^m = x^n \times a^{m-n}$  si chiaman parabole quando  $m, n$  son positive: se  $m=2, n=1$ , si ha  $y^2 = ax$ , equazione alla parabola ordinaria detta *Apolloniana*, da Apollonio antico Geometra; se  $m=3, n=1$ , si ha  $y^3 = a^2 x$ , e la curva che ne risulta è la *prima parabola cubica* a cagion di  $n=1$ , se  $m=3, n=2$ , la curva è la *seconda parabola cubica*, la cui equazione è  $y^3 = ax^2$ .

45. Se  $n$  è negativa, le parabole divengono iperboliche, la cui equazione è  $y^m = x^{-n} a^{m+n} = \frac{a^{m+n}}{x^n}$ , cioè  $x^n y^m = a^{m+n}$ ; onde la sottangente di queste curve è in generale  $-\frac{m x}{n}$ , cioè dee prendersi nel senso stesso delle  $x$ . Se  $m = n = 1$ , si ha l'iperbola ordinaria la cui sottangente  $= -x$ .

Nella logaritmica,  $x = A \log y$  e  $dx = \frac{A dy}{y}$ ; onde  $\frac{y dx}{dy} = A$ , e però la sottangente è sempre eguale al modulo.

46. Siano due curve  $BIOC$ ,  $BMA$  tali che prolungando l'ordinate  $OP$  della prima fino alla seconda, la linea  $MO$  sia una funzione qualunque dell'arco  $BIO$ , e debba condursi per  $M$  la tangente  $MT$ . Immagino l'ordinata  $mp$  infinitamente vicina ad  $MP$ , ed  $Mr$  parallela alla tangente  $TO$ : fatto  $BIO = z$ ,  $MO = u$ , sarà (22)  $mr = du$ ,  $rM = Ov = dz$ , e  $du : dz :: u : OT = \frac{u dz}{du}$ , con che si determina il punto  $T$ .

Sia per esempio  $u = \frac{bz}{a}$ , sarà  $du = \frac{b dz}{a}$ , ed  $OT = \frac{u dz}{du} = z = BIO$ . Se  $BIOC$  è un arco di circolo,  $AMB$  è una cicloide, e questa costruzione è nota.

Nella quadratrice, prese l'ascisse dal centro si ha  $y = \frac{x}{a} \cot \frac{cx}{a}$ ; dunque ricordandosi che il raggio è qui  $a$ , avremo  $dy = \frac{dx}{a} \cot \frac{cx}{a} - \dots$

D

FIG. <sup>26</sup>  $\frac{cx dx}{\text{sen}^2 \frac{cx}{a}}$  ed  $\frac{xdy}{dx} = \frac{x}{a} \cot \frac{cx}{a} - \frac{cx^2}{\text{sen}^2 \frac{cx}{a}}$ . Ma

condotta un'ordinata infinitamente vicina ad  $MP$ ,

6. si trova  $-\frac{xdy}{dx} = OT$  (presa  $-dy$  perchè  $y$  diminuisce mentre  $x$  cresce); dunque  $OT = \frac{cx^2}{\text{sen}^2 \frac{cx}{a}} - \frac{x}{a} \cot \frac{cx}{a}$ , e  $CT = OT + y = \dots$

$$\frac{cx^2}{\text{sen}^2 \frac{cx}{a}} = \frac{c}{a^2} CM^2 \text{ perchè } CB(a) : \text{sen } BE \left( \text{sen} \frac{cx}{a} \right) ::$$

$CM : MO(x)$ ; ma quando  $CM$  è nel punto  $D$ ,

si ha  $CM = CT = CD = \frac{a^2}{c}$ ; dunque  $CT = \frac{CM^2}{CD}$ ; onde presa  $CT$  terza proporzionale dopo

la base  $CD$  e la retta  $CM$ , si avrà il punto  $T$  della tangente cercata,

7. 47. Con un raggio  $CA$  sia descritto un circolo, e sia una curva  $CKM$  tale che condotto il raggio  $CMN$ , la linea  $CM$  sia una funzione dell'arco  $ADBN$ ; condurre una tangente  $MT$  al dato punto  $M$ . Immagino due raggi infinitamente vicini  $CMN, Cmn$ , e il piccolo arco  $Mr$  descritto dal centro  $C$  col raggio  $CM$ , e conduco  $CT$  perpendicolare a  $CM$ . Sia ora  $CM = y$ ,  $ADBN = x$ ,  $CA = a$ , e si avrà  $a : y :: Nn(dx) : Mr = \frac{y dx}{a}$ , e  $rm(dy) : \frac{y dx}{a} :: y : CT = \frac{y^2 dx}{a dy}$ . Sia

per esempio  $y = \frac{ax}{\pi}$ , la curva  $CKM$  sarà la spi-

rale d' Archimede , e si avrà  $\frac{dx}{dy} = \frac{\pi}{a}$  ,  $CT = \frac{y^2 \pi}{a^2} = \frac{axy}{a^2} = \frac{xy}{a} = MQO$  .

Sia la spirale iperbolica , in cui  $xy = ab$  ; si 8. avrà  $x dy + y dx = 0$  ,  $y dx = -x dy$  ,  $CT = -\frac{xy dy}{ady} = -\frac{xy}{a} = -b$  .

48. Nella spirale logaritmica , ove l'angolo 9.  $CMT$  è costante , immagino i raggi infinitamente vicini  $CM$  ,  $Cm$  e descritto dal centro  $C$  con un raggio  $CN$  un circolo , faccio  $CM = z$  ,  $CN = a$  , e segnato sulla circonferenza del circolo un punto fisso  $A$  , suppongo l'ascissa  $AN = x$  , il che mi dà  $a : dx :: z : Mr = \frac{z dx}{a}$  . Sia  $t = \text{tang } Mmr$  ,

e sarà  $t = \frac{\text{sen } Mmr}{\text{cos } Mmr} = \frac{Mr}{mr} = \frac{z dx}{adz}$  onde  $\frac{dx}{at} =$

$\frac{dz}{z} = d(\ln z)$  (31) , dunque  $\ln z = \frac{x}{at} + C$  . Ora

quest' equazione fa vedere 1° che la spirale fa un' infinità di rivoluzioni intorno al suo centro tanto per accostarsene quanto per allontanarsene ; poichè in luogo di  $x$  può sostituirsi successivamente  $x + \pi$  ,  $x + 2\pi$  ,  $x + 3\pi$  ec.  $-\pi + x$  ,  $-2\pi + x$  , ec. essendo  $\pi$  la circonferenza  $ANB$  : 2° che facendo  $C = lC'$  , si avrà  $l \frac{z}{C'} = \frac{x}{at} = \frac{x}{at} \ln(32)$

ovvero  $\frac{z}{C'} = e^{\frac{x}{at}}$  e  $z = C' e^{\frac{x}{at}}$  ; dunque nel punto  $A$  ove  $x = 0$  , si ha  $CD = z = C$  : 3° che l'ascisse  $AN$  crescendo in progressione aritmetica  $x$  ,  $2x$  ,  $3x$  ec. , l'ordinate formano la progressione

$\frac{x}{at}$  ,  $\frac{2x}{at}$  ,  $\frac{3x}{at}$  ec. : 4° che se

geometrica ,  $C' e^{\frac{x}{at}}$  ,  $C' e^{\frac{2x}{at}}$  ,  $C' e^{\frac{3x}{at}}$  ec. : 4° che se

FIG. <sup>28</sup>  
 $t = \infty$ , si ha  $z = C'$ , proprietà del circolo che taglia ad angoli retti tutti i suoi raggi, come si sa.

Questi esempj bastano per condur le tangenti a ogni sorta di curve o meccaniche o geometriche. Vedete l' *Analisi degli infinitesimi* di De l'Hôpital.

*Dell' Evolute .*

10. 49. Immagino un filo  $ABC$  applicato sopra una curva  $BC$ , la cui origine è in  $B$  ove  $AB$  è tangente: se si sviluppa questo filo tenendolo sempre egualmente teso, la sua estremità  $A$  descriverà una curva  $AM$  che avrà le seguenti proprietà: 1.º la tangente  $MC$  della curva  $BC$  sarà sempre perpendicolare alla curva  $AM$ : 2.º  $MC$  sarà eguale ad  $AB +$  l'arco  $BC$ : 3.º l'arco infinitesimo  $Mm$  potrà riguardarsi come un arco di circolo descritto dal centro  $C$  col raggio  $CM$ ; 4.º onde nel punto  $C$  si riuniranno le due normali infinitamente vicine  $MN, mn$ . Ora la curva  $BC$  dicesi l' *Evoluta* della curva  $AM$ , ed  $MC$  è il *Raggio Osculatore*, o *Raggio di Curvatura*, che si tratta di determinare, supposta nota la curva  $AM$ .

50. Sieno  $MP, mp$  due perpendicolari all'asse  $AQ$  infinitamente vicine, e  $CO, Mr$  parallele allo stesso asse: fatta  $MO = u, AP = x, PM = y, Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$  e . . . ,  $dx ddx + dy ddy = ds dds$ , sarà  $dx : ds :: u : MC = \frac{u ds}{dx}$ : ma mentre  $AP, PM, MO$  variano,  $MC$  non varia (49); dunque differenziando l'equazione  $MC = \frac{u ds}{dx}$ , verrà . . . . .

$$\frac{(u \, d \, ds + ds \, d \, u) \, dx - u \, ds \, d \, dx}{dx^2} = 0, \text{ cioè } (u \, d \, ds + ds \, d \, u) \, dx = u \, ds \, d \, dx;$$

e poichè  $du = mr = dy$ , si troverà  $u = \frac{ds \, dx \, dy}{ds \, dx - dx \, ds}$  onde  $MC = \dots$

$$\frac{ds^2 \, dy}{ds \, dx - dx \, ds} = \frac{ds^2 \, dy}{ds^2 \, dx - dx \, (dx \, dx + dy \, dy)} = \frac{ds^2 \, dy}{ds^2} = \frac{dy \, dx - dx \, dy}{-dx^2 \, d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

per compendio che una di queste differenziali sia costante, per esempio  $ds$ , ed ho  $MC = \frac{ds \, dy}{d \, dx} = \frac{dy \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{d \, dx}$ . Supposta costante  $dy$ , si ha

$$MC = \frac{ds^3}{dy \, dx} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy \, dx}. \text{ Ma supposta, come si fa d'ordinario, costante } dx, \text{ allora } MC =$$

$$\frac{ds^3}{-dx \, dy} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx \, dy}, \text{ cioè dividendo tut-$$

$$\text{to per } dx^3, MC = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} : \frac{-d \, dy}{d \, dx^2}.$$

§1. Siccome le curvature dei circoli sono in ragione inversa dei loro raggi, così in due punti diversi d'una cùrva le curvature sono in ragione inversa dei raggi dell'evoluta: onde per sapere in qual punto sia la massima curvatura, si cerca il *minimo* raggio dell'evoluta. Inoltre se la tangente in  $A$  è normale all'asse, allora per determinar la retta  $BA$  o la distanza del vertice  $A$  dall'origine  $B$  dell'evoluta, si farà  $x = 0$  nell'espressione del raggio  $MC$ , e si avrà il valor di  $BA$ . Finalmente per trovar l'equazione dell'evoluta, si conduca  $CQ$  perpendicolare all'asse e sia  $AB = a, BQ = t, CQ = z$ ; avremo primieramente, presa  $dx$  costan-



FIG. 30

10. te,  $MO = u = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$  (50) e  $z = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$   
 $-y$ ; poi  $Mr(dx) : rm(dy) :: MO : CO = PQ$   
 $= \frac{dy(dx^2 + dy^2)}{-dxddy}$ . Dunque  $AP + PQ = AB$   
 $= t = x - a + \frac{dy(dx^2 + dy^2)}{-dxddy}$ ; valori che coll'  
 equazion della curva determinano l'equazion dell'  
 evoluta.

11. 52. Fin qui le ordinate eran parallele fra loro.  
 Partendo da un punto medesimo, ecco come si  
 determinerebbe il raggio  $MC$ . Immagino due ordi-  
 nate infinitamente vicine  $BM, Bm$ , e  $CO, Co$  per-  
 pendicolari ad esse: quindi descritto col centro  $B$   
 l'arco  $Mr$ , sia  $BM = y$ ,  $Mr = dx$ ,  $mr = dy$ ,  
 $Mm = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ,  $MO = u$ ; per i  
 triangoli simili  $Mr m, CMO$ , si ha  $dx : u :: dy :$   
 $CO \left( = \frac{udy}{dx} \right) :: ds : MC = \frac{uds}{dx}$ . Differenzian-  
 do quest'ultima equazione, presa  $dx$  costante, si  
 avrà  $d(MC) = 0$  (50) e  $du = -\frac{udds}{ds}$ , e ...

$$d(CO) = Co - CO = -OQ = \frac{du dy + uddy}{dx}$$

$$= \frac{uddy - \frac{udydds}{ds}}{dx} = \frac{uddy}{dx} - \frac{udy^2 ddy}{ds^2 dx} = \dots$$

$$+ \frac{udx ddy}{ds^2}. \text{ Dunque } OQ = -\frac{udx ddy}{ds^2}, \text{ e } BM$$

$$(y) : Mr(dx) :: BO(y - u) : \frac{-udx ddy}{ds^2}; \text{ onde}$$

$$u = \frac{y ds^2}{ds^2 - y ddy}, \text{ ed } MC = \frac{y ds^3}{ds^2 dx - y dx ddy} =$$

$$\frac{y(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3 + dx dy^2 - y dx ddy}, \text{ che si riduce a } \frac{ds^3}{-dx ddy}$$

quando  $y = \infty$  ( poichè allora  $ds^2 dx$  del denomi-  
natore diventa 0 ) cioè quando l'ordinate son pa-  
rallele, come già abbiamo trovato. E se nei valori  
di  $CO, MC$  non si fosse presa  $dx$  costante, si sa-  
rebbe avuto  $MC = \frac{y ds^3}{ds^2 dx - y dx ddy + y dy ddx}$ .

Ecco alcuni esempj.

53. Sia l'equazione alle sezioni coniche  $y^2 =$   
 $px \pm \frac{p x^2}{2a}$  che fatto  $2a = \infty$  si cangia in quella  
della parabola, e fatto  $2a = p$  diventa quella dell'  
iperbola equilatera e del circolo. Differenziando due  
volte, presa  $dx$  costante, si ha  $2y dy = p dx \pm$   
 $\frac{p x dx}{a}$  onde  $dy = \frac{p dx (a \pm x)}{2ay}$ , e  $2y ddy +$   
 $2dy^2 = \pm \frac{p dx^2}{a}$ ; onde  $ddy = -\frac{p^2 dx^2}{4y^3}$ , so-  
stituito il valor di  $dy$  e poi di  $y^2$ . Dunque  
 $MC \left( = \frac{ds^3}{-dx ddy} \right) = \frac{4y^3 ds^3}{p^2 dx^3}$ : ma  $\frac{y^3 ds^3}{dx^3} = n^3$   
(43); dunque  $MC = \frac{n^3}{\frac{1}{4}p^2}$ ; cioè il raggio oscu-

latore in tutte le sezioni coniche è uguale al cubo della  
normale diviso per il quadrato della metà del parame-  
tro. Onde nel circolo, dove  $n = \frac{p}{2}$ , il raggio  
osculatore eguaglia la normale, come è evidente.

54. Poichè  $n = \frac{y}{dx} \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{1}{2a}$   
 $\sqrt{[4a^2 y^2 + p^2 (a \pm x)^2]}$ , al vertice ove  $x = 0$   
e perciò  $y = 0$ , sarà  $n = \frac{p}{2} = AB$ .

Nell'ellisse l'evoluta ha quattro rami  $BD, Db, 12.$   
 $bd, dB$  eguali che fanno tra loro quattro punti di  
regresso. La distanza  $CB = Cb = a - \frac{p}{2}$ , ed

FIG. <sup>33</sup>  $ED = ed =$  alla metà del parametro dell'asse minore.

13. Nella parabola, poichè  $MN^2 = TN \times PN$  e  $PN = \frac{p}{2}$ , sarà il raggio  $MC \left( = \frac{4MN^2}{p^2} \right) = NT \times \frac{MN}{PN}$ , ed  $MN:NP::MC:NT = CO = PQ = 2x + \frac{p}{2}$ ; dunque  $QN = 2x$ ,  $AQ = 3x + \frac{p}{2} = 3x + AB$ , onde  $BQ = 3x$ , il che dà una costruzione assai semplice per determinare il centro  $C$  del circolo osculatore. Prendete  $BQ = 3AP$ , e condotta  $CQ$  perpendicolare ad  $AQ$ , il punto di concorso  $C$  delle due  $MC, CQ$  sarà il centro cercato.

Per trovar l'equazione dell'evoluta, sia  $BQ = t$ ,  $CQ = z$ , si avrà  $x = \frac{t}{3}$ , e  $\frac{p}{2} : y :: QN : CQ :: 2x : z = \frac{4xy}{p} = \frac{4x\sqrt{px}}{p}$ ; onde  $\frac{p^2 z^2}{16} = x^3 = \frac{t^3}{27}$ , e  $t^3 = \frac{27pz^2}{16}$ ; cioè l'evoluta della parabola ordinaria è una seconda parabola cubica il cui parametro è  $\frac{27}{16}$  di quello della data. Ora nell'evolute,

$AB + BC = MC$ ; dunque  $BC = MC - \frac{p}{2} = \frac{4MN^2}{p^2} - \frac{p}{2}$ ; ma  $MN = \sqrt{px + \frac{p^2}{4}}$  (54) =

$\frac{p}{2} \sqrt{\left(\frac{4x}{p} + 1\right)}$ ; dunque facendo  $\frac{27}{16}p = a$  e per-

ciò  $MN = \frac{p}{2} \sqrt{\left(\frac{9t}{4a} + 1\right)}$ , si ha  $BC = \dots$

$\frac{8a}{27} \left[ \left(1 + \frac{9t}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]$ , espressione d'un arco

qualunque della seconda parabola cubica la cui <sup>33</sup> FIG. equazione è  $x^3 = ax^2$ .

55. Sia la cicloide ordinaria  $AMBa$  col circolo genitore  $BOD$  del diametro  $BD = 2a$ , con l'ordinata  $MP = y$  e con l'ascissa  $PB = x$ : si avrà per la nota analogia  $mq(dy) : qM(dx) :: OP(\sqrt{2ax - x^2}) : PB(x)$ ; dunque  $dy = dx \sqrt{\frac{2a-x}{x}}$ , equazione differenziale della cicloide: e se si faccia piuttosto  $MP = x$ ,  $PD = y$  onde  $PB = 2a - y$ , verrà  $dx : dy :: \sqrt{2ay - y^2} : 2a - y$ , e perciò  $dy = dx \sqrt{\frac{2a-y}{y}}$ , altra equazione differenziale della cicloide. Stando alla prima e posta  $dx$  costante, avremo differenziando,  $ddy = \frac{-adx^2}{x\sqrt{2ax-x^2}}$ ,  $dx^2 + dy^2 = \frac{2adx^2}{x}$ . Dunque  $MC = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy} = 2\sqrt{2a(2a-x)} = 2OD$ : ora  $MNC$  è parallela a  $OD$  poichè la tangente  $MT$  è parallela a  $OB$ ; dunque  $OD = MN = NC$ ; quindi 1° nel punto  $A$  si ha  $x = 2a$  ed  $MC = 0$ , onde il raggio osculatore in  $A$  è zero; e perciò l'evoluta passa per  $A$ : 2° questo raggio nel punto  $B$  è la linea  $BE$  doppia di  $BD$ .

56. Per determinar l'evoluta  $ACE$ , compilo il rettangolo  $AE$ , sul lato  $AB' = DE = BD$  come diametro si descriva un semicircolo  $AQB'$ , si conduca  $AQ$  parallela a  $CM$  e si unisca  $C$  e  $Q$ ; posto ciò, l'angolo  $NAQ = NDO$ ; dunque  $OD = AQ$  e l'arco  $OID$  (o la retta  $AN$ ) = all'arco  $ALQ$ . Ora  $OD = CN$ ; dunque  $CN = AQ$ , e però  $CQ = AN =$  all'arco  $ALQ$ , proprietà distintiva della cicloide ordinaria; onde l'evoluta  $ACE$  è una semicicloide eguale ad  $AMB$ . Si sarebbe trovato lo stesso cercando direttamente

E

FIG. <sup>34</sup> l'equazione dell'evoluta come abbiamo spiegato (51).

L'arco  $AC = MC = 2AQ$ ; dunque un arco qualunque di cicloide è doppio della corda corrispondente del circolo genitore. Così  $MB = 2OB$ ,  $AMB = 2BD$ , e la cicloide intera  $ABa$  è quadrupla del diametro  $BD$ .

57. Sia la spirale logaritmica  $ADM$ , il cui centro è  $A$ ; si avrà  $\cos Mm A = \frac{mr}{Mr} = \frac{dy}{dx}$ , e differenziando, supposta  $dx$  costante, si avrà  $ddy = 0$ , e il raggio osculatore  $MC = \frac{y ds}{dx}$  (52): onde condotte  $AC, CM$  normali ad  $MA$  e alla tangente in  $M$ , il loro punto d'incontro  $C$  sarà all'evoluta, perchè  $Mr(dx) : Mm(ds) :: AM(y) : MC$ .

58. L'angolo  $ACM = AMT$ ; onde l'evoluta  $ABC$  è la medesima spirale logaritmica  $ADM$ . Quindi (49) la tangente  $MC$  è eguale alla spirale  $ABC$ , benchè questa faccia un'infinità di rivoluzioni intorno al punto  $A$ ; dunque del pari condotta  $AT$  perpendicolare ad  $AM$ , sarà  $MT =$  all'arco  $ADM$ ; onde la spirale logaritmica e la cicloide sono evolute di se medesime.

*Del Metodo dei Massimi e dei Minimi, e dei punti di flesso contrario e di regresso.*

59. L'ordinata  $MP$  d'una curva  $BM$  essendo maggiore o minore di quelle che la precedono ( $p'm$ ) e la seguono ( $p'm'$ ), si chiama *Massima* o *Minima*, e il metodo che insegna a determinar queste sorte di quantità dicesi *Metodo dei massimi e dei minimi*.

60. Se  $CM$  è il raggio del circolo osculatore

nel punto  $M$ , l'ordinata  $MP$  sarà maggiore o minore di ogn'altra ordinata corrispondente a qualche punto dell'arco  $KMD$  descritto col raggio  $CM$ ; onde  $MP$  (prolungata nel caso del minimo) passa per il centro del circolo osculatore; e però la tangente in  $M$  è parallela all'asse  $AP$ , e quindi la sottangente  $\frac{y dx}{dy} = \infty$ ; dunque  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\infty} = 0$ .

Può anche succedere che l'ordinata  $PM$  sia un massimo o un minimo quando la tangente in  $M$  è normale all'asse; allora  $\frac{y dx}{dy} = 0$  e però  $\frac{dy}{dx} =$

$\frac{y}{0} = \infty$ . Ora  $y$  può riguardarsi come una funzione dell'ascissa  $AP = x$ ; e però per sapere in qual caso ella diventa un massimo o un minimo, si differenzierà l'equazione tra  $y$  ed  $x$ , e si eguaglierà a zero o all'infinito il rotto  $\frac{dy}{dx}$ ; l'equazione che ne risulterà combinata con la prima, darà dei valori di  $y, x$  i quali se non sieno assurdi, determineranno il massimo o il minimo.

61. Ma per distinguer l'un dall'altro osservate che il raggio osculatore nel punto del massimo è positivo, e nel punto del minimo è negativo. Ora l'espressione di esso presa  $dx$  costante, è  $(1 + \dots$

$$\frac{dy^2}{dx^2})^{\frac{1}{2}} : - \frac{ddy}{dx^2} (50); \text{ e poichè } \frac{dy}{dx} = 0, \text{ si ha}$$

$$CM = \frac{-dx^2}{d dy}; \text{ dunque se } y \text{ è un massimo,}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} \text{ dee esser negativo, e se è un minimo, } \frac{ddy}{dx^2}$$

dee esser positivo. Accadendo che  $\frac{ddy}{dx^2}$  sia infinito o zero,  $M$  sarà forse un punto di flesso con.

FIG. 36  
18.

trario o di regresso, o la tangente in  $M$  sarà parallela all'asse: ma non ne seguirà che  $MP$  sia un massimo o un minimo se non quando oltre  $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$  fosse anche  $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ ; poichè allora se  $\frac{d^4y}{dx^4}$  sia negativo, avremo un massimo come prima, e se sia positivo, un minimo, e così sempre; dovendo in generale essere impari il numero dei rotti  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$  ec. che divengono zero. Ciò si deduce dal n.º 3. Ecco degli esempj.

62. 1.º Dividere una retta  $a$  in due parti il cui rettangolo sia un massimo o un minimo. Chiamata  $x$  una parte, l'altra  $a - x$ , l'espressione del massimo o del minimo sarà  $ax - x^2$ . Sia dunque  $y = ax - x^2$ , e si avrà  $\frac{dy}{dx} = a - 2x = 0$ , e però  $x = \frac{1}{2} a$ . Per saper se la soluzione dà un massimo o un minimo, differenzio l'equazione  $\frac{dy}{dx} = a - 2x$ , ed ho  $\frac{d^2y}{dx^2} = -2$ , quantità negativa, onde il valore  $x = \frac{1}{2} a$  dà un massimo  $y = \frac{a^2}{4}$ . In generale, se  $y = x^m (a - x)^n$ , affinchè questa quantità sia un massimo o un minimo bisogna che  $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}(a-x)^n - nx^m(a-x)^{n-1} = 0 = m(a-x) - nx$ . Allora  $x = \frac{am}{m+n}$ , e questo valore dà un massimo per  $y$ , perchè  $\frac{d^2y}{dx^2} = -m - n$ .

II<sup>o</sup>. Trovar due diametri conjugati dell'ellisse che faccian tra loro il minimo angolo. Sieno  $m, n$  i diametri,  $p$  l'angolo che fanno tra loro, e si avrà  $mn \operatorname{sen} p = ab$ , ed  $m^2 + n^2 = a^2 + b^2$ , onde

$$\operatorname{sen} p = \frac{ab}{n(a^2 + b^2 - n^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{d \operatorname{sen} p}{dn} = \dots$$

$$= \frac{-ab(a^2 + b^2 - 2n^2)}{n^2(a^2 + b^2 - n^2)^{\frac{3}{2}}} = 0, \quad \text{ed } n = \dots$$

$$n^2(a^2 + b^2 - n^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)} = m. \quad \text{Il denominatore eguagliato a}$$

zero, cioè il rotto  $\frac{d \operatorname{sen} p}{dn}$  eguagliato all'infinito

(60), darebbe  $n^2 = a^2 + b^2$  ed  $m = 0$ , valori che non servono. Sicchè i diametri conjugati ed

eguali dell'ellisse forman con la loro intersezione il minimo angolo cercato, il cui seno è  $\frac{2ab}{a^2 + b^2} =$

$$\frac{2ab}{a^2 + b^2} =$$

$$\frac{2}{a:b + b:a}. \quad \text{Perciò se } a:b = \operatorname{tang} u = \operatorname{tang} CaB,$$

19.

$$\text{sarà } \operatorname{sen} p = \frac{2 \operatorname{tang} u}{1 + \operatorname{tang}^2 u} = \frac{2 \operatorname{tang} u}{\sec^2 u} = 2 \operatorname{sen} u$$

$\cos u = \operatorname{sen} 2u$ ; onde l'angolo  $p$  è quello di due rette condotte dalle estremità dell'asse minore a una del maggiore.

III<sup>o</sup>. Di tutte le parabole che posson tagliarsi nel cono retto  $DCB$ , determinat la massima in superficie. Sia  $BD = a, CD = b, PB = x$ , e

20.

$$\text{sarà } a:b :: x:AP = \frac{bx}{a}, \quad PM = \sqrt{ax - x^2},$$

$$\text{la superficie } mAMPm = \frac{4bx}{3a} \sqrt{ax - x^2} = y;$$

$$\text{dunque } \frac{dy}{dx} = \frac{4b}{3a} \sqrt{ax - x^2} + \frac{4bx}{3a} \left(\frac{a}{2} - x\right):$$

$$\sqrt{ax - x^2} = 0 = ax - x^2 + x\left(\frac{a}{2} - x\right) =$$



$\frac{3ax}{2} - 2xx$ ; onde  $x = \frac{3a}{4}$ , che è un *massimo*,

perchè  $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{3a}{2}$ . Il denominatore eguagliato a zero darebbe due *minimi*, riducendo la parabola ad un punto o ad una linea retta coi due valori  $x = 0$ ,  $x = a$  (60).

21. IV<sup>o</sup>. Di tutti i triangoli della stessa base  $AB$  e dello stesso perimetro, qual è quello della massima superficie? Sia  $q$  il semiperimetro, la base  $AB = a$ , il lato  $AM = x$ , sarà  $MB = 2q - a - x$ . Dunque chiamando  $y$  la superficie, si avrà  $y = \sqrt{[q \cdot q - a \cdot q - x \cdot (a + x - q)]} \dots 2ly = lq + l(q - a) + l(q - x) + l(a + x - q)$ ,  $\frac{2dy}{y} = \frac{-dx}{q-x} + \frac{dx}{a+x-q}$ ,  $\frac{dy}{dx} = \dots$   
 $\frac{y}{2} \left( \frac{1}{a+x-q} - \frac{1}{q-x} \right) = 0$ ; dunque  $a + x - q = q - x$ ,  $2q - a - x = x$ ; perciò il triangolo cercato è isoscele.

63. Fin qui abbiamo considerato il *massimo* o il *minimo* delle funzioni d'una sola variabile  $x$ . Per trovare in quali casi una funzione  $Y$  di due variabili  $x, y$  divenga un *massimo* o un *minimo*, supponghiamo che  $y$  abbia già il valor proprio a render la funzione  $Y$  un *massimo* o un *minimo*; si tratterà dunque di trovare il valor conveniente di  $x$ , cioè bisognerà differenziar la funzione  $Y$  facendo variare  $x$  sola, ed eguagliare a zero il coefficiente di  $dx$ . Così per aver  $y$  si differenzierà la funzione  $Y$  facendo variare  $y$  sola, ed eguagliando il coefficiente di  $dy$  a zero. Onde se  $dY = Pdx + Qdy$ , si deve aver  $P = 0$ ,  $Q = 0$ , equazioni che daranno i valori di  $x$  e di  $y$  propri a render la funzione  $Y$  un *massimo* o un *minimo*. Per distinguer l'uno dall'altro, posto  $dY = Pdx + Qdy$  e prese  $dx, dy$  costanti, sarà  $d^2Y = dPdx + dQdy$ ; onde fatto

$dP = A dx + B dy$ ,  $dQ = B dx + C dy$  (34),  
 verrà  $d^2 Y = (A dx + B dy) dx + (B dx + C dy) dy$ :  
 ma si è visto che dee aversi  $P = 0$  è però  $dP =$   
 $A dx + B dy = 0$ ; dunque  $dx = -\frac{B dy}{A}$  e  $d^2 Y$   
 $= dQ dy = (B dx + C dy) dy = \left(-\frac{B^2}{A} + C\right) dy^2$

ovvero  $\frac{d^2 Y}{dy^2} = C - \frac{B^2}{A}$ . Ora quando si ha una

sola variabile  $x$  o  $y$ , e però  $y = 0$  ovvero  $x = 0$ ,  
 viene  $dY = P dx$ ,  $d^2 Y = dP dx = A dx^2$  ovve-  
 ro  $dY = Q dy$ ,  $d^2 Y = dQ dy = C dy^2$ , e si è  
 detto che  $Y$  è *minimo* o *massimo* se  $A > 0$  e  $C > 0$   
 ovvero  $A < 0$  e  $C < 0$  (61); dunque se si abbiano

$x, y$  insieme, sarà  $Y$  un *minimo* quando  $A > 0$ ,  
 $C > 0$  ed inoltre  $C - \frac{B^2}{A} > 0$ , ovvero  $AC > B^2$ :  
 e sarà un *massimo* quando  $A < 0$ ,  $C < 0$  ed inol-  
 tre  $C - \frac{B^2}{A} < 0$  ovvero (fatto  $A = -A', C = -C'$

giacchè ora  $A, C$  son negativi)  $-C' + \frac{B^2}{A'} < 0$  cioè  
 $B^2 < A' C' (= AC)$  ed  $AC > B^2$  come nel caso  
 del *minimo*. Questa teoria facilmente si estende alle  
 funzioni di tre, quattro ec. variabili.

Si voglia dividere il numero dato  $a$  in tre par-  
 ti il cui prodotto sia un *massimo*. Chiamando  $x, y$   
 due di queste parti, la terza sarà  $a - x - y$ , ed  
 avremo  $xy(a - x - y)$ , la cui differenziale è  
 $(a - 2x - y)y dx + (a - 2y - x)x dy$ . Egua-  
 gliando a zero separatamente i coefficienti di  $dx$ ,  
 $dy$ , si avrà  $a - 2x - y = 0 = a - 2y - x$ , on-  
 de  $y = x = \frac{a}{3}$ ; e poichè  $P = (a - 2x - y)y$ ,  
 $dP = -2y dx + (a - 2x - 2y) dy$ ,  $A (= -$   
 $2y = -\frac{2a}{3}) < 0$ ,  $B = a - 2x - 2y = -\frac{a}{3}$ ,

FIG. <sup>40</sup> e poi  $Q = (a - 2y - x)x$ ,  $dQ = -2x dy + (a - 2x - 2y)dx$ ,  $C (= -2x = -\frac{2a}{3}) < 0$ , sarà  $AC (= \frac{4a^2}{9}) > B^2 (= \frac{a^2}{9})$ , e perciò dividendo il dato numero in tre parti eguali, il loro prodotto darà un *massimo*.

Tra tutti i triangoli isoperimetri vogliasi quello che ha maggior superficie, Sieno  $x, y$  due de' suoi lati,  $2q$  il perimetro,  $2q - x - y$  sarà l'altro lato, e la superficie  $\sqrt{[q \cdot q - x \cdot q - y \cdot (x + y - q)]}$  dovendo essere un *massimo*, se si chiama  $Y$ , si avrà  $2lY - lq = l(q - x) + l(q - y) + l(x + y - q)$ . Dunque  $dY = \frac{Y dx}{2} \left( \frac{1}{x + y - q} - \frac{1}{q - x} \right) + \frac{Y dy}{2} \left( \frac{1}{x + y - q} - \frac{1}{q - y} \right)$ ; eguagliando a zero i coefficienti di  $dy, dx$ , si ha  $x + y - q = q - y = q - x$ ; onde  $x = y = \frac{2q}{3} = 2q - x - y$ . Dunque il triangolo ricercato è equilatero.

22. e 18. 64. Serve questo metodo a determinare ancora i punti di *flessa contrario* e di *regresso*; poichè la differenza  $dy$  dell'ordinata che da  $A$  scorre in  $PM$ , e da  $PM$  o procede avanti o torna indietro, scema sempre nella concavità della curva, e sempre cresce nella sua convessità, come può vedersi in due triangoli rettangoli infinitesimi d'una stessa base  $dx$ , terminati da una stessa tangente e descritti di quà e di là dall'ordinata nel punto di contatto. Dunque nel punto  $M$  di *flessa contrario* o di *regresso*, la differenza  $dy$  diviene un minimo o un massimo, cioè fatta  $z = dy$ , si ha (60)  $dz = ddy = 0$  ovvero  $\infty$ : ma il raggio osculatore  $MC$ , presa  $dx$  costante, diviene infinito se  $ddy = 0$ , e diviene zero se  $ddy = \infty$  (50. 52); dunque nel punto di

flesso contrario o di regresso il raggio osculatore è sempre infinito o nullo, e perciò  $\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} : -$

$\frac{ddy}{dx^2} = \infty$  ovvero  $= 0$ , e  $-\frac{ddy}{dx^2} = 0$  ovvero  $\infty$ ,

Si differenzierà dunque due volte l'equazione della curva, posta  $dx$  costante, e il valor finito di  $-\frac{ddy}{dx^2}$  si eguaglierà a zero o all'infinito; e combinando quest'equazione con quella della curva, si avranno i valori di  $x, y$  convenienti ad uno o più punti di flesso contrario o di regresso. Che se l'ordinate partano da un punto fisso, si avrà . . .

$\frac{dx^2 + dy^2 - yddy}{dx^2} = 0$  ovvero  $\infty$  (52).

ESEMP. I. Sia la prima parabola cubica dell'

equazione  $y^3 = a^2 x$ ; si avrà  $y = a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}$ ,  $dy = \frac{2}{3} a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{2}{3}} dx$ ,  $-\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2 a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{5}{3}}}{9} = 0$  nel punto di flesso contrario o di regresso; dunque  $x = 0$ , onde questo punto è nell'origine.

II. Sia la conoide dell'equazione  $y = \frac{h+x}{x}$

$\sqrt{(a^2 - x^2)}$ ; si avrà  $dy = \frac{-dx(a^2 b + x^3)}{x^2 \sqrt{(a^2 - x^2)}}$ ,  $-\frac{ddy}{dx^2} = \frac{a^2 x^3 + 3 a^2 b x^2 - 2 a^4 b}{(a^2 x^3 - x^5) \sqrt{(a^2 - x^2)}} = 0$ ; onde  $x^3 + 3 b x^2 - 2 a^2 b = 0$ , equazione che risolta darà per  $x$  il valor conveniente al punto di flesso contrario o di regresso.

III. Sia la curva dell'equazione  $y = a = (x -$

$a)^{\frac{3}{5}}$ ; si avrà  $dy = \frac{3 dx}{5 \sqrt[5]{(x-a)^2}}$ ,  $-\frac{ddy}{dx^2} = \dots$

$\frac{5}{25(x-a)^2}$ , che eguagliato a zero, nulla fa conoscere; ma eguagliato all'infinito dà  $x = a = y$ , valori corrispondenti al punto di flesso contrario o di regresso.

65. E qui pure si osservi che dall'aversi un certo valor di  $x$  per mezzo di  $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ , non segue che al corrispondente punto della curva si trovi un'inflessione se non nel caso che questo valor di  $x$  non annulli  $\frac{d^3 y}{dx^3}$  o che annullandolo sparisca anche  $\frac{d^4 y}{dx^4}$  senza che sparisca  $\frac{d^5 y}{dx^5}$  ec., come per i massimi e minimi notammo di sopra (61). Del resto il metodo dà confusamente i flessi contrari ed i regressi; una regola per distinguergli può vedersi nel *Corso di Matematiche di Sauri*,

*Dei rotti il cui Numeratore e Denominatore si riducono a zero in certi casi.*

66. Si trovano talvolta dell'espressioni algebriche in forma di rotti che si riducono a  $\frac{0}{0}$ , come  $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$  quando  $x = a$ . Questi risultati apparentemente indeterminati, son suscettibili di valori determinati; ed ecco un metodo per trovarli.

Sia  $\frac{P}{Q}$  un rotto il cui numeratore e denominatore siano funzioni di  $x$  che si riducono ambedue a zero quando  $x = a$ . Per trovarne il valore si sostituisca  $x \pm dx$  ad  $x$  in  $P$  ed in  $Q$  (si prende  $-$ , se  $+$  guida ad assurdo) e trascurati i termini

ove è  $dx^2$ ,  $dx^3$  ec. come infinitesimi rispetto a  $dx$ , si avrà  $\frac{P+dP}{Q+dQ}$ : quindi fatto  $x = a$  in questo rotto, egli si ridurrà a  $\frac{dP}{dQ}$ , valore della frazione proposta nella supposizione di  $x = a$ , se però i termini del rotto  $\frac{dP}{dQ}$  non si annullassero ancora facendo  $x = a$ .

Es. Si cerca il valore di  $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$  quando  $x = a$ . Qui  $P = x^2 - a^2$ , e  $Q = x - a$ ; dunque  $\frac{dP}{dQ} = \frac{2a dx}{dx} = 2a$ .

Sia la progression geometrica  $x : x^2 : x^3 \dots x^n$ , la cui somma è  $\frac{x^{n+1} - x}{x - 1}$ ; si cerca il valor di questa somma quando  $x = 1$ . Si troverà  $\frac{dP}{dQ} = n$ .

Sia la quantità  $\frac{\sqrt{(2a^3x - x^4)} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$  che diviene  $\frac{0}{0}$  quando  $x = a$ . Sostituito  $a + dx$  ad  $x$ , si avrà  $\frac{\sqrt{(2a^3(a+dx) - (a+dx)^4)} - a\sqrt[3]{a^2(a+dx)}}{a - \sqrt[4]{a(a+dx)^3}}$  ec.,  $- a\sqrt[3]{a^2x} = - a\sqrt[3]{(a^3 + a^2dx)}$   $= - a(a + \frac{a^2dx}{3a^2})$  ec.,  $a - \sqrt[4]{ax^3} = a - \sqrt[4]{(a^4 + 3a^3dx)}$   $= a - (a + \frac{3a^3dx}{4a^3})$  ec.; riducendo, si troverà  $\frac{dP}{dQ} = \frac{-4ad dx}{3 \times - \frac{3dx}{4}} = \frac{16a}{9}$ .

67. Ma se succeda che sostituendo  $a$  ad  $x$  in  $\frac{dP}{dQ}$ , questo rotto anch' esso divenga  $\frac{0}{0}$ , si passerà a considerare i termini ove si trova  $dx^2$ , e così di

seguito, finchè non si abbia un valore tale che uno almeno dei suoi termini sia finito.

Es. Differenziata l'equazione  $x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}$ , si divida per  $\frac{dx}{x}$ , e verrà

$$x + 2x^2 + 3x^3 \dots + nx^n = \frac{x + nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1}}{(1-x)^2};$$

che si riduce a  $\frac{0}{0}$  quando  $x = 1$ . Sostituendo dunque  $1 + dx$  ad  $x$ , avremo nuovamente  $\frac{dP}{dQ} = \frac{0}{0}$ ;

ma se non si trascuri  $dx^2$ , come si era fatto in principio (66), si troverà  $\frac{dP}{dQ} = \dots$

$$\frac{n(n+2) \frac{n+1}{2} dx^2 - (n+1)^2 \frac{n dx^2}{2}}{dx^2} =$$

$\frac{n(n+1)}{2}$ , somma della progressione  $1, 2, 3 \dots n$ .

68. Con questi principj posson trovarsi in ogni caso particolare i valori indeterminati di  $0 \times \infty$  e

di  $\infty - \infty$ ; poichè  $0 \times \infty = 0 \times \frac{a}{0} = \frac{0}{0}$ ; ed

$\infty - \infty = \frac{a}{0} - \frac{b}{0} = \frac{0}{0}$ : così se  $x = 1$ , si

ha  $\frac{1}{1x} - \frac{x}{1x} = \infty - \infty$ , onde sostituendo  $1 +$

$dx$  ad  $x$ , verrà  $\frac{-dx}{1(1+dx)} = \frac{-dx}{dx} = -1$ . Pos-

sono anche determinarsi i punti multipli delle curve e la loro molteplicità; poichè come l'esser  $\frac{dy}{dx} = 0$

significa che la tangente è parallela all'asse (60),

così il trovar  $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$  esprime molteplicità di tan-

genti in un punto stesso della curva e perciò un

punto multiplo. Infatti differenziando l'equazione  $a(y-b)^2 - x(x-a)^2 = 0$ , si trova

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax(x-a) + (x-a)^2}{2a(y-b)} = \frac{0}{0} \text{ quando } x =$$

$a, y = b$ : sostituendo dunque  $a + dx$  ad  $x$ , e  $b$

$+ dy$  ad  $y$ , trascurato  $dx^2$ , verrà  $\frac{dy}{dx} = \frac{2adx}{2ady}$ ,

cioè  $\frac{dy^2}{dx^2} = 1$ , e  $\frac{dy}{dx} = \pm 1$ : ma  $\frac{dy}{dx}$  esprime la tan-

gente dell'angolo che la curva (o la sua tangente) forma con l'asse; dunque se questa tangente ha più valori, apparterrà a più rami di curva che passano per uno stesso punto; e nel nostro caso all'ascissa  $x = a$  corrisponderà un'ordinata  $y = b$  che incontra la curva in un punto multiplo, ove son due tangenti eguali al raggio 1, e che fanno perciò un angolo di  $45^\circ$  con la linea condotta per il punto multiplo parallelamente all'asse ec.

69. Questo metodo per valutare  $\frac{0}{0}$  è generale; quello di Bernoulli che prescrive di differenziar separatamente quante volte occorre il numeratore e il denominatore del rotto, non sempre riesce: così dato  $\sqrt{\left(\frac{2a^2 - 2ax + x^2}{a-x}\right)}$  e supposto  $x = a$ , dal nostro metodo se ne avrà subito il valore  $\sqrt{a}$  che da quello di Bernoulli non si otterrà giammai.

### *Alcune altre Applicazioni del Calcolo Differenziale.*

70. Sia  $x = ly$  sarà  $dx = l\left(1 + \frac{dy}{y}\right)$  (11) =  $l(1 + dx) = dxle = le^{dx}$ ; dunque  $e^{dx} = 1 + dx$ ,

ed  $e^x = (1 + dx)^{\frac{x}{dx}}$ . Sia dunque  $\frac{x}{dx} = \omega$ ; la

quantità  $\omega$  sarà infinita e si avrà  $e^x = \left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^\omega$ .

Sviluppando questa espressione ed osservando che:



$\omega \rightarrow 1, \omega \rightarrow 2$  ec.  $= \omega$ , si ha  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} +$  ec.  $= \left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^\omega$ ; onde se si faccia  $\alpha = 2\sqrt{-1}$ , sarà  $e^{2\sqrt{-1}} = \left(1 + \frac{2\sqrt{-1}}{\omega}\right)^\omega$ ,  $e^{-2\sqrt{-1}} = \left(1 - \frac{2\sqrt{-1}}{\omega}\right)^\omega$ , e  $\cos z = \dots$

$$\frac{\left(1 + \frac{2\sqrt{-1}}{\omega}\right)^\omega + \left(1 - \frac{2\sqrt{-1}}{\omega}\right)^\omega}{2}, \cos z =$$

$$\frac{\left(1 + \frac{2\sqrt{-1}}{\omega}\right)^\omega + \left(1 - \frac{2\sqrt{-1}}{\omega}\right)^\omega}{2}$$

71. Ma sia  $y$  una funzione della variabile  $x$ ; se questa divenga  $x \pm n dx$  e sia  $n dx = a$  quantità finita, sarà  $n$  infinita e però  $n = n - 1 = n - 2$  ec. Dunque se in  $y$  si sostituisce  $x \pm a$  in luogo di  $x$ , la funzione  $y$  si cangerà (3) in  $y \pm \frac{a dy}{dx} + \frac{a^2 d^2 y}{2 dx^2} \pm \frac{a^3 d^3 y}{2 \cdot 3 dx^3} + \frac{a^4 d^4 y}{2 \cdot 3 \cdot 4 dx^4} \pm$  ec., presa  $dx$  costante e posto per  $\pm x$  il suo valore  $\pm \frac{a}{dx}$ .

72. Per veder la verità di questa formula in un esempio semplice, suppongasi  $y = xx - 2x + 1$ , e si cerchi il valor di questa quantità sostituendo  $x + 1$  ad  $x$ . Avremo  $a = 1, \frac{dy}{dx} = 2x - 2, \frac{d^2 y}{dx^2} = 2, \frac{d^3 y}{dx^3} = 0$  ec.; dunque  $y$  si cangia in  $xx - 2x + 1 + 2x - 2 + 1 = xx$ , il che è evidente.

73. Sia  $y = x^m$ , e si avrà  $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$ ,  $\frac{d^2 y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$  ec. Dunque se  $x$  di-

viene  $x + a$ ,  $y$  diventerà  $(x + a)^m = x^m + m a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} a^2 x^{m-2} + \text{ec.}$ ; facen-

do  $a = \frac{-bx}{x+b}$  e però  $x + a = \frac{x^2}{x+b}$ , avremo

$$(x + a)^m = \frac{x^{2m}}{(x+b)^m} = x^m - \frac{mbx^m}{x+b} + \dots$$

$$\frac{m(m-1)b^2x^m}{2(x+b)^2} - \text{ec. ovvero } \frac{1}{(x+b)^m} = (x+b)^{-m}$$

$$= x^{-m} - \frac{mx^{-m}b}{x+b} + \frac{m(m-1)x^{-m}b^2}{2(x+b)^2} - \text{ec.} =$$

$$x^{-m} \left( 1 - \frac{mb}{x+b} + \frac{m(m-1)b^2}{2(x+b)^2} - \dots \right)$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)b^3}{2 \cdot 3(x+b)^3} + \text{ec.} ) : \text{serie che avrà}$$

un numero finito di termini quando  $m$  sarà un intero.

Sia  $-m = n$ ; si avrà  $(x+b)^n = x^n \left( 1 + \frac{nb}{x+b} + \frac{n(n+1)b^2}{2(x+b)^2} + \text{ec.} \right)$ ; si possono verificar

queste formule riducendo in serie i rotti  $\frac{1}{x+b}$ ,

$\frac{1}{(x+b)^2}$  ec. Ora queste serie servono a trovar le

radici dei numeri prontamente perchè possono sempre rendersi convergentissime.

74. Sia ora  $y = l x$ ; se si pone  $x \pm a$  in luogo di  $x$  essendo  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$  ec., si

avrà  $l(x \pm a) = l x \pm \frac{a}{x} - \frac{a^2}{2x^2} \pm \frac{a^3}{3x^3} -$

$\frac{a^4}{4x^4} \pm \text{ec.}$  Sia  $\pm a = \frac{\pm x x}{b \pm x}$ , e avremo  $l(x$

$\pm a) = l \frac{bx}{b \pm x} = l b x - l(b \pm x) = l x \mp \frac{x^2}{b \pm x}$

48  
 $\frac{x^2}{2(b \pm x)^2} \mp \frac{x^4}{3(b \pm x)^3} \mp \text{ec.}$  Dunque  $l(b \pm x) =$   
 $lb \pm \frac{x}{b \pm x} \left( 1 \pm \frac{x}{2(b \pm x)} + \frac{x^2}{3(b \pm x)^2} \pm \text{ec.} \right)$ ,  
 serie convergenti che facilitan molto il calcolo dei  
 logaritmi .

75. Sia  $y = b^x$ ; avremo  $\frac{dy}{dx} = b^x l b$ ,  $\frac{d^2 y}{dx^2} =$   
 $b^x l^2 b$  ec. ; dunque  $b^{x+a} = b^x ( 1 + alb + \dots$   
 $\frac{a^2 l^2 b}{2} + \frac{a^3 l^3 b}{2 \cdot 3} + \text{ec.} )$ , e perciò  $b^a = 1 + alb +$   
 $\frac{a^2 l^2 b}{2} + \frac{a^3 l^3 b}{2 \cdot 3} + \text{ec.}$

76. Sia  $y$  un arco di circolo il cui seno  $= x$   
 che indicheremo con  $y = A \text{ sen } x$ , si avrà  $x = \text{sen } y$   
 $\dots \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} \dots \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\text{sen } y}{\cos^3 y} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$   
 $\dots \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1 + 2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$  ec. ; dunque l'arco il cui

seno è  $x \pm a$ , ovvero  $A \text{ sen } (x \pm a) = A \text{ sen } x$   
 $\pm \frac{a}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a^2 x}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \pm \frac{a^3(1+2x^2)}{6(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} + \text{ec.}$

77. Queste serie sono attissime a calcolar l'ar-  
 co che corrisponde a un seno dato . Si cerchi nelle  
 Tavole l'arco più vicino; la differenza del suo se-  
 no  $x$  dal dato renderà  $a$  piccolissima . e poichè  
 $\sqrt{(1-x^2)} = \cos y$ , si avrà l'arco cercato aggiun-  
 gendo  $\pm \frac{a}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a^2 x}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \pm \text{ec.}$  a quel-

lo il cui seno è  $x$ . Osservate 1<sup>o</sup> che la serie è sì  
 convergente che i due primi termini basteranno  
 sempre quando non vogliasi l'approssimazione più

là dei minuti quinti in circa: 2° che l'arco avuto da questa serie sarà espresso in parti del raggio 1; e che per ridurle a secondi, a terzi ec., bisognerà dividerle per la lunghezza dell'arco di 1", posto il logaritmo dell'unità = 10. Il resto è quello del numero dei secondi dell'arco cercato, il che dà subito i terzi, i quarti ec.

78. ESEMP. Sia un'iperbola della potenza 1 e  $b$  l'angolo fatto dai suoi asintoti; sarà  $\text{sen } b/2$  la superficie d'un trapezio asintotico compreso tra l'ordinate 1,  $\frac{1}{2}$ , e questo spazio rappresenterà il lo-

garitmo tavolare dell'ascissa  $z$  quando sia il modulo 0,4342944819 =  $\text{sen } b$ ; cerchiamo dunque l'angolo  $b$ . Il più prossimo a 0,4342 ec. nelle Tavole ordinarie è di 25°, 44'; il suo seno =  $x$  = 0,4341833, il suo coseno =  $\sqrt{1-x^2}$  = 0,9008245, ed  $a$  = 0,0001112. Calcolando i due prim' termini

$\frac{a}{(1-x^2)^2} + \frac{a^2 x}{2(1-x^2)^2}$ , fatto 25°, 44' =  $y$ , si

$$\text{avrà } \frac{a}{\cos y} + \frac{a^2 \text{sen } y}{2 \cos^3 y} = \frac{a}{2 \cos^3 y} (2 \cos^2 y + a \text{sen } y)$$

$$= \frac{a}{2 \cos^3 y} (1 + \cos 2y + a \text{sen } y) = \frac{a}{2 \cos^3 y} (1 + \cos$$

$$51^\circ, 28' + a \text{sen } 25^\circ, 44') = \frac{a}{2 \cos^3 y} \times 1,623080,$$

il cui logaritmo è 6,0914775; togliendo quello dell'arco di 1" cioè 4,6855749, resta 1,4059026 per il logaritmo del numero dei secondi dell'arco cercato = 125,4626; dunque l'arco cercato ha 25" + 0,4626" = 25", 27", + 11" ec., onde l'angolo degli asintoti d'un'iperbola i cui spazj rappresentano i logaritmi delle Tavole, o quello che ha per seno il modulo, è di 25°, 44', 25", 27" ec.

50

79. Facciamo attualmente  $y = A \cos x$ , e avremo  $x = \cos y$ ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ ,  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ ,  $\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$ , ec.; dunque  $A \cos(x \pm a) = A \cos x \mp \frac{a}{\sqrt{(1-x^2)}} - \frac{a^2 x}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\mp \frac{a^3(1+2x^2)}{6(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$  — ec., serie di cui si fa lo stesso uso che delle precedenti. Se ne troveranno delle simili per l'arco la cui tangente sia  $x \pm a$ .

80. Sia ora  $y = \sin x$ , e avremo  $\frac{dy}{dx} = \cos x$ ,

$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\sin x$ ,  $\frac{d^3 y}{dx^3} = -\cos x$  ec.; dunque

$\sin(x \pm a) = \sin x \pm a \cos x - \frac{a^2}{2} \sin x \mp \frac{a^3}{6} \cos x + \frac{a^4}{24} \sin x +$  ec. Parimente se  $y = \cos x$ , si avrà

$\cos(x \pm a) = \cos x \mp a \sin x - \frac{a^2}{2} \cos x \pm \frac{a^3}{6} \sin x + \frac{a^4}{24} \cos x -$  ec. Queste formule son di grandissimo

uso per interpolare le Tavole dei seni. Se sia  $x = 0$ , i valori di  $\sin(x \pm a)$ ,  $\cos(x \pm a)$  diverranno a ragion di  $\sin x = 0$  e di  $\cos x = 1$ ; quelli che già troviamo.

81. Fatto  $y = \tan x$  onde  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$  . . .

$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$  . . .  $\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{3 \sin^2 x}{\cos^4 x} =$

$\frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$  ec., sarà  $\tan(x \pm a) = \tan x \pm$

$$\frac{a}{\cos^2 x} + \frac{a^2 \operatorname{sen} x}{\cos^3 x} \pm \frac{a^3}{\cos^4 x} + \frac{a^4 \operatorname{sen} x}{\cos^5 x} \pm \text{cc.} \mp \dots$$

$$\frac{2 a^3}{3 \cos^2 x} - \frac{a^4 \operatorname{sen} x}{3 \cos^3 x} \mp \text{cc.} : \text{ma } \frac{\pm a + a^2 \operatorname{tang} x}{\cos^2 x},$$

$$\frac{\pm a^3 + a^4 \operatorname{tang} x}{\cos^4 x}, \pm \text{cc.} \text{ è una progression geo-}$$

metrica il cui primo termine =  $\frac{\pm a + a^2 \operatorname{tang} x}{\cos^2 x}$ ,  
 l'ultimo =  $\frac{1}{\infty} = 0$ , e il quoziente =  $\frac{a^2}{\cos^2 x}$ ;

dunque la somma =  $\frac{a^2 \operatorname{tang} x \pm a}{\cos^2 x - a^2}$ , e però  $\operatorname{tang}$   
 $(x \pm a) = \operatorname{tang} x + \frac{a^2 \operatorname{tang} x \pm a}{\cos^2 x - a^2} \mp \frac{2 a^3}{3 \cos^2 x} -$

$$\frac{a^4 \operatorname{sen} x}{3 \cos^3 x} - \text{cc.} = \frac{\operatorname{sen} x \cos x \pm a}{\cos^2 x - a^2} \mp \frac{2 a^3}{3 \cos^2 x} - \dots$$

$$\frac{a^4 \operatorname{sen} x}{3 \cos^3 x} \mp \text{cc.} \text{ Si troveranno delle formule simili}$$

per  $\cot(x \pm a)$ .

82. Sia ora  $y = m \operatorname{sen} x$  o al logaritmo ordi-  
 nario di  $\operatorname{sen} x$  se  $m$  rappresenta il modulo; si avrà

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m \cos x}{\operatorname{sen} x} \text{ (81), } \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{m}{\operatorname{sen}^2 x} \dots \frac{d^3 y}{dx^3} =$$

$$\frac{2 m \cos x}{\operatorname{sen}^3 x} \text{ ec.; dunque } \operatorname{sen}(x \pm a) = \operatorname{sen} x \pm a m$$

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{m a^2}{2 \operatorname{sen}^2 x} \pm \frac{a^3 m \cos x}{3 \operatorname{sen}^3 x} \text{ ec.}$$

83. Se  $y = m \operatorname{cos} x$ , sarà  $\frac{dy}{dx} = \frac{-m \operatorname{sen} x}{\cos x}$

$$(81), \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-m}{\cos^2 x} \dots \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{2 m \operatorname{sen} x}{\cos^3 x} \text{ ec.;}$$

dunque  $\operatorname{cos}(x \pm a) = \operatorname{cos} x \mp \frac{a m \operatorname{sen} x}{\cos x} - \dots$

$$\frac{a^2 m}{2 \cos^2 x} \mp \frac{a^3 m \operatorname{sen} x}{3 \cos^3 x} - \text{cc.} \text{ Sia } y = m \operatorname{tang} x, \text{ e si}$$

$$\text{avrà } \frac{dy}{dx} = \frac{2 m}{\operatorname{sen} 2 x} \dots \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-2 m \cos 2 x}{\operatorname{sen}^2 2 x} \text{ ec. e}$$

perciò  $l \operatorname{tang}(x \pm a) \pm l \operatorname{tang} x \pm \frac{2 a m}{\operatorname{sen} 2 x} \pm \text{ec.}$

Lo stesso sarà per  $m l \operatorname{cot} x$ .

84. Supposto ora che  $y$  sia l'arco il cui logaritmo del seno  $= x$ , ovvero  $y = A l \operatorname{sen} x$ , si avrà  $x = l \operatorname{sen} y$ , e perciò  $\frac{d y}{d x} = \frac{\operatorname{sen} y}{m \cos y} \dots \frac{d d y}{d x^2} = \frac{\operatorname{sen} y}{m^2 \cos^3 y}$  ec.; dunque  $A l \operatorname{sen}(x \pm a) = y \pm \frac{a \operatorname{sen} y}{m \cos y} + \frac{a^2 \operatorname{sen} y}{2 m^2 \cos^3 y} \pm \text{ec.}$

85. Sia  $y = A l \operatorname{tang} x$ ; verrà  $\frac{d y}{d x} = \frac{\operatorname{sen} 2 y}{2 m}$ ,  $\frac{d d y}{d x^2} = \frac{\operatorname{sen} 4 y}{4 m^2}$ ,  $\frac{d^3 y}{d x^3} = \frac{\operatorname{sen} 2 y \cos 4 y}{2 m^3}$  ec.; dunque  $A l \operatorname{tang}(x \pm a) = y \pm \frac{a \operatorname{sen} 2 y}{2 m} + \frac{a^2 \operatorname{sen} 2 y \cos 2 y}{4 m^2} \pm \frac{a^3 \operatorname{sen} 2 y \cos 4 y}{12 m^3} + \text{ec.}$  Queste formole possono servire a risolvere con molta approssimazione i problemi sull'uso delle Tavole dei seni.

86. La serie  $y \pm \frac{a d y}{d x} + \text{ec.}$  (71) da cui nascono queste ed infinite altre applicazioni, si chiama il *Teorema di Taylor* dal dotto Geometra Inglese che la trovò. Talvolta induce in inganno se si adopri senza cautela, come può vedersi nei casi benchè semplicissimi di  $y = l x$  (74) e di  $y =$

$\frac{m}{n} x$  quando  $x = 0$  nel primo, ed  $n > m$  nel secondo.

# ALTRE REGOLE

## DEL CALCOLO INTEGRALE

*Metodo per ridurre l'integrazione di più differenziali binomie a quella d'altre differenziali conosciute.*

87. **D**ebbasi integrar la differenziale  $x^n dx (a + bx^m)^k$  supponendo conosciuta l'integrale di  $x^p dx (a + bx^m)^k$ , ed  $n > p$ :

Osservo che  $d[x^{q+1} (a + bx^m)^{k+1}] = (aq + a)x^q dx (a + bx^m)^k + (bmk + bm + bq + b)x^{m+q} dx (a + bx^m)^k$ ; dunque  $\int x^{m+q} dx (a + bx^m)^k = \frac{x^{q+1} (a + bx^m)^{k+1}}{b(mk + m + q + 1)}$ .

$\frac{a(q+1) \int x^q dx (a + bx^m)^k}{b(mk + m + q + 1)}$ . Sia  $m + q = n$ ;

ovvero  $q = n - m$ ; si avrà  $\int x^n dx (a + bx^m)^k = \frac{x^{1+n-m} (a + bx^m)^{k+1}}{b(mk + n + 1)} - \frac{a(n-m+1)}{b(mk + n + 1)}$ .

$\int x^{n-m} dx (a + bx^m)^k$ . Per questa stessa formula

$\int x^{n-m} dx (a + bx^m)^k = \frac{x^{1+n-2m} (a + bx^m)^{k+1}}{b(1+n+mk-m)} - \frac{a(1+n-2m)}{b(1+n+mk-m)}$

$\int x^{n-2m} dx (a + bx^m)^k$ ; dunque  $\int x^n dx (a +$



$$\begin{aligned}
 bx^m)^k &= \frac{x^{1+n-m} (a + bx^m)^{k+1}}{b(mk+n+1)} - \dots \\
 & \frac{a(n-m+1)x^{1+n-2m} (a + bx^m)^{k+1}}{b^2(mk+n+1)} + \\
 & \frac{a^2(1+n-m)(1+n-2m)}{b^2(1+n+mk)(1+n+mk-m)} \int x^{n-2m} dx (a \\
 & + bx^m)^k.
 \end{aligned}$$

Può dunque ridursi l'integrale della differenzial proposta  $x^n dx (a + bx^m)^k$  a quella di  $x^{n-m} dx (a + bx^m)^k$  o in generale di  $x^{n-im} dx (a + bx^m)^k$ , essendo  $i$  un numero intero positivo, per mezzo della seguente formola dedotta dalle passate, ove posto  $\delta = i - 1$ , i numeri  $1, 2 \dots \delta$  indicano che il termine in cui sono, dee moltiplicarsi per il precedente:  $\int x^n dx (a + bx^m)^k = (a + \dots + bx^m)^{k+1} \left( \frac{x^{1+n-m}}{b(1+n+mk)} - \frac{a(1+n-m)(1)}{bx^m(1+n+m(k-1))} - \frac{a(1+n-2m)(2)}{bx^m(1+n+m(k-2))} \dots - \frac{a(1+n-\delta m)(\delta)}{bx^m(1+n+m(k-\delta))} \right) + \frac{a^i(1+n-m)(1+n-2m) \dots (1+n-im)}{b^i(1+n+mk)(1+n+m(k-1)) \dots (1+n+m(k-\delta))} \int x^{n-im} dx (a + bx^m)^k$ . Il segno superiore ha luogo quando  $i$  è pari, l'inferiore quando è impari.

Dunque se  $n - im = p$ , cioè se  $\frac{n-p}{m} = i$  numero intero e positivo, si potrà ridur l'integrale di  $x^n dx (a + bx^m)^k$  a  $\int x^p dx (a + bx^m)^k$  per mezzo della formola precedente.

ESEMP. Sia  $\int x^{10} dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ , da ridursi a  $\int dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$  che dipende dalla quadratura del circolo, come vedremo. Si avrà  $m=2$ ,  $n=10$ ,  $p=0$ ,  $k=\frac{1}{2}$ ,  $a=1$ ,  $b=-1$ ,  $\frac{n-p}{m}=5=i$ ,  $\delta=4$ ; dunque la riduzione è possibile e bisogna prender la formula fino al termine ove è l'indice (4), cioè cinque termini di essa ed altrettanti fattori nel numeratore e denominator dell'ultimo termine tra le parentesi: perciò si avrà  $\int x^{10} dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{x^9 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{12} - \frac{9x^7 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{12 \cdot 10} + \dots$$

$$= \frac{9 \cdot 7 x^5 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{12 \cdot 10 \cdot 8} - \frac{9 \cdot 7 \cdot 5 x^3 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6} + \frac{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 x (1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4}$$

$$+ \frac{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4} \int dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

88. Che se  $\frac{n-p}{m}$  fosse un numero intero ma negativo, cioè se  $p > n$ , in luogo di ridurre  $\int x^n dx (a+bx^m)^k$  a  $\int x^p dx (a+bx^m)^k$ , si ridurrebbe questa alla prima, e determinata  $(a+bx^m)^{k+1} \left( \frac{x^{1+n-m}}{b(1+n+mk)} - \text{cc.} \right) = X$ , e...

$$\frac{\pm a^{1+n-m} (\text{ec.})}{b^{1+n+mk} (\text{ec.})} = A \quad (87),$$

si avrebbe  $\int x^p dx (a+bx^m)^k = X + A \int x^n dx (a+bx^m)^k$ ; dunque  $\int x^n dx (a+bx^m)^k = -\frac{X}{A} + \frac{1}{A} \int x^p dx (a+bx^m)^k$ .

ESEMP. Sia  $\int x^{-4} dx (-1+x^2)^{-1}$  da ridur-

si a  $\int dx(1+x^2)^{-1}$ ; si avrebbe  $n = -4, m = 2,$   
 $p = 0$  ed  $\frac{n-p}{m} = -2$ ; riducendo dunque la se-  
 conda alla prima, si avrà  $n = 0, a = 1, b = 1,$   
 $m = 2, k = -1, p = -4, \frac{n-p}{m} = 2 = i, \theta =$   
 $i$ ; onde  $\int dx(1+x^2)^{-1} = -x^{-1} + \frac{x^{-3}}{3} +$   
 $\int x^{-4} dx(1+x^2)^{-1}$ ; dunque  $\int x^{-4} dx(1 + \dots$   
 $x^2)^{-1} = x^{-1} - \frac{x^{-3}}{3} + \int dx(1+x^2)^{-1}$ . Ora  
 $\int dx(1+x^2)^{-1} = \int \frac{dx}{1+x^2} =$  all' arco  $z$  d' un  
 circolo il cui raggio è 1 e la tangente è  $x$ ; poichè  
 $d(\text{tang } z) = \frac{dz}{\cos^2 z}$  (29), e  $dz = \frac{d(\text{tang } z)}{1+\text{tang}^2 z} =$   
 $\frac{dx}{1+x^2}$  se si fa  $\text{tang } z = x$ . In generale il metodo  
 serve a ridurre  $\int x^{-2k} dx(1+x^2)^{-1}$  a  $\int dx(1$   
 $+x^2)^{-1}$  o a un arco di circolo.

89. Sia proposto ora di ridur  $\int x^n dx(a + \dots$   
 $bx^m)^p$  a  $\int x^r dx(a + bx^m)^q$ . Poichè  $d[x^{n+1}$   
 $(a + bx^m)^p] = (n+1)x^n dx(a + bx^m)^p + \dots$   
 $bx^m p x^{m+n} dx(a + bx^m)^{p-1}$ , sarà  $\int x^n dx(a +$   
 $bx^m)^p = \frac{x^{n+1}(a + bx^m)^p}{n+1} - \frac{b m p}{n+1} \int x^{m+n} \dots$   
 $dx(a + bx^m)^{p-1}$ . Per la stessa ragione  $\int x^{m+n}$   
 $dx(a + bx^m)^{p-1} = \frac{x^{m+n+1}(a + bx^m)^{p-1}}{m+n+1} - \dots$

$\frac{b m (p-1)}{m+n+1} \int x^{n+2m} dx (a+bx^m)^{p-2}$ ; dunque

$$\int x^n dx (a+bx^m)^p = \frac{x^{n+2} (a+bx^m)^p}{n+1} - \dots$$

$$\frac{b p m x^{n+2m} (a+bx^m)^{p-1}}{(n+1)(n+1+m)} + \dots$$

$$\frac{b^2 m^2 \cdot p(p-1) \int x^{n+2m} dx (a+bx^m)^{p-2}}{(n+1)(n+1+m)}, \text{ e in}$$

generale, posto  $\delta = i-2$ , si avrà  $\int x^n dx (a+bx^m)^p = (a+bx^m)^p \times \left( \frac{x^{n+2}}{1+n} - \frac{b m p x^m (1)}{(1+n+m)(a+bx^m)} \right.$

$$\left. - \frac{b m (p-1) x^m (2)}{(1+n+2m)(a+bx^m)} - \dots - \frac{b m (p-\delta) x^m (\delta+1)}{(1+n+m(\delta+1))(a+bx^m)} \right) \mp \dots$$

$$\frac{b^i m^i \cdot p(p-1) \dots (p-(\delta+1))}{(1+n)(1+n+m) \dots (1+n+m(\delta+1))} \int x^{n+im} dx (a+bx^m)^{p-i}.$$

Il segno superiore è per il numero intero  $i$  impari, e l'inferiore per  $i$  pari. Ora se  $p-i=q$ , o se  $p-q=i$  è numero intero, l'integrale di  $x^n dx (a+bx^m)^p$  si ridurrà a...

$$\int x^{n+im} dx (a+bx^m)^q, \text{ la quale potendo ridursi a } \int x^r dx (a+bx^m)^q \text{ quando } \frac{n+im-r}{m}$$

cioè  $\frac{n-r}{m}$  è un numero intero positivo, anche la formula proposta vi si potrà ridurre.

Es. Sia da ridursi  $\int x^4 dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$  a  $\int dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ ; si avrà  $a=1$ ,  $b=-1$ ,  $n=4$ ,  $m=2$ ,  $p=\frac{1}{2}$ ,  $q=\frac{1}{2}$ ,  $r=0$ ,  $p-q=i=2$ ,  $\delta=0$  e  $\delta$

+ 1 = 1, cioè bisogna prender la formula fino al termine ove è l'indice (1), e perciò due termini di essa ed altrettanti fattori nel numeratore e denominatore dell'ultimo termine tra le parentesi; dunque

$$\begin{aligned} \int x^4 dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}} &= \frac{x^5 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{5} + \frac{5x^7 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{5 \cdot 7} \\ &+ \frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 7} \int x^3 dx (1-x^2)^{\frac{3}{2}}; \text{ ma } \int x^3 dx (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{x^4 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{4} - \frac{7x^6 (1-x^2)^{\frac{5}{2}}}{10 \cdot 8} - \dots \\ &\frac{7 \cdot 5}{10 \cdot 8 \cdot 6} x^5 (1-x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4} x (1-x^2)^{\frac{7}{2}} + \\ &\frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4} \int dx (1-x^2)^{\frac{7}{2}}; \text{ dunque } \int x^4 dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{x^5 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{5} + \frac{x^7 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{10} - \frac{3}{10 \cdot 8} x^5 (1-x^2)^{\frac{5}{2}} \\ &- \frac{3 \cdot 5}{10 \cdot 8 \cdot 6} x^3 (1-x^2)^{\frac{7}{2}} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 3}{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4} x (1-x^2)^{\frac{9}{2}} + \\ &\frac{3 \cdot 5 \cdot 3}{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4} \int dx (1-x^2)^{\frac{9}{2}} + C. \end{aligned}$$

90. Se sia  $q > p$ , si opererà come sopra (88) e si dedurrà in generale che il metodo serve a ridurre  $\int x^{2k} dx (1+x^2)^{-m}$  a  $\int dx (1+x^2)^{-m}$  o a un arco di circolo.

### Dell'Integrazione dei Rotti differenziali razionali.

91. Suppongasì che  $\frac{P dx}{Q}$  sia un rotto razionale, e che il maggiore esponente di  $x$  in  $P$  sia minore almeno d'un'unità che in  $Q$ . Non essendo, si dividerà il numeratore per il denominatore finchè abbia luogo quest'ultima condizione. Sia per esem-

pio  $\frac{x^2 dx}{a + bx^2}$ ; si avrà dividendo,  $\frac{x dx}{b} - \frac{ax dx}{b(a + bx^2)}$  la cui seconda parte è quale l'abbiamo supposta per  $\frac{P dx}{Q}$ . Ora si cerchino i fattori di  $Q$ , e se questi son tutti del primo grado, reali, ed ineguali, il rotto proposto sarà di questa forma

$$\frac{ax^{m-1} + bx^{m-2} + ec. \dots + u}{(x-f)(x-g)(x-k) ec.} \times dx, \text{ supponendo}$$

che il numero de' fattori  $x-f, x-g$  ec. sia  $m$ . Per integrare in questo caso, si decomporrà il rotto così:  $\frac{A dx}{x-f} + \frac{B dx}{x-g} + ec.$  la cui integrale è  $A \ln(x-f) + B \ln(x-g) + ec. + C$ , e si determineranno al solito i coefficienti di  $A, B$  ec.

Es. Si dimanda l'integrale di  $\frac{dx}{(a^2 - x^2)x}$ : lo decompongo in  $\frac{A dx}{x} + \frac{B dx}{a-x} + \frac{C dx}{a+x} = \frac{dx}{(a^2 - x^2)x}$ , e operando al solito, trovo

$$\left. \begin{array}{l} Aa^2 + Bax + Bxx \\ -1 + Ca - A \\ -C \end{array} \right\} = 0; \text{ dunque}$$

$$A = \frac{1}{a^2}, B = \frac{1}{2a^2}, C = -\frac{1}{2a^2}, \text{ e } \frac{dx}{(a^2 - x^2)x} =$$

$$\frac{dx}{a^2x} + \frac{dx}{2a^2(a-x)} - \frac{dx}{2a^2(a+x)}, \text{ la cui inte-}$$

$$\text{grale è } \frac{1}{a^2} \ln x - \frac{1}{2a^2} \ln(a-x) - \frac{1}{2a^2} \ln(a+x) + \frac{1}{a^2} = \dots$$

$$\frac{1}{a^2} \ln \frac{xc}{(a^2 - x^2)}. \text{ Si troverà pure } \int \frac{dx}{a^2 - x^2} =$$

$$\frac{1}{2a} \ln \frac{c(a+x)}{a-x}.$$

92. I fattori del denominator  $Q$  si son supposti reali ed ineguali: se alcuni fossero eguali, ed  $(x-a)^m$  esprimesse un numero  $m$  di questi fattori,

il rotto si decomporrebbe in  $\frac{A dx}{x-f} + \frac{B dx}{x-g} + \text{ec.}$   
 $+ \frac{A'x^{m-1} + B'x^{m-2} + \text{ec.} \dots + R}{(x-a)^m} dx$ , e determinati  
 i coefficienti come sopra, s'integrerebbe  
 $\frac{A'x^{m-1}}{(x-a)^m} dx + \frac{B'x^{m-2}}{(x-a)^m} dx + \text{ec.}$  o in generale  
 $x^k dx (x-a)^{-m}$ , facendo  $x-a=z$ .

Es. Sia da integrarsi  $\frac{(x^3 + x^2 + 2) dx}{x(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A dx}{x}$   
 $+ \frac{(Bx + C) dx}{(x-1)^2} + \frac{(Dx + E) dx}{(x+1)^2}$ , onde  $A=2$ ,  
 $B=-\frac{3}{4}$ ,  $C=\frac{3}{4}$ ,  $D=-\frac{1}{4}$ ,  $E=-\frac{1}{4}$ ; e però  
 $\frac{(x^3 + x^2 + 2) dx}{x(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{2 dx}{x} + \frac{(7-3x) dx}{4(x-1)^2} -$   
 $\frac{(5x+7) dx}{4(x+1)^2}$ : per integrare il rotto  $\frac{(7-3x) dx}{4(x-1)^2}$ ,  
 faccio  $x-1=z$ , il che lo cangia in  $\frac{(4-3z) dz}{4z^2}$   
 $= \frac{dz}{z^2} - \frac{3 dz}{4z}$ , la cui integrale è  $-\frac{1}{z} - \frac{3}{4} \ln z =$   
 $-\frac{1}{x-1} - \frac{3}{4} \ln(x-1)$ , e trattando così l'altro rotto,  
 trovo per integrale totale,  $2 \ln x - \frac{1}{x-1} +$   
 $\frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{4} \ln(x-1) - \frac{1}{4} \ln(x+1) + C$ .

93. Se vi fossero in  $Q$  dei fattori immaginari, esprimendosi un di essi con  $x+a+b\sqrt{-1}$ , ve ne sarebbe un altro della forma  $x+a-b\sqrt{-1}$ . Dunque il loro prodotto  $x^2 + 2ax + b^2 + a^2$  sarebbe un fattore reale di  $Q$ . Perciò si determinerebbe il fattore reale del secondo grado  $x^2 + 2ax + a^2 + b^2$ , o per brevità  $x^2 + mx + n$ , e poi si supporrebbe che  $\frac{(Ax+B) dx}{x^2 + mx + n}$  fosse uno dei rot-

ti parziali di  $\frac{P dx}{Q}$ , e si avrebbe  $A$  e  $B$  come so-

sopra. Quindi facendo  $x + \frac{m}{2} = z$  ed  $n - \frac{m^2}{4} = b'b'$ , il rotto diventerebbe  $\frac{(A'z + B') dz}{z^2 + b'b'}$ . . . .  
 $\frac{A'z dz}{z^2 + b'b'} + \frac{B' dz}{z^2 + b'b'}$ . Ora  $\int \frac{A'z dz}{z^2 + b'b'} = \frac{A'}{2}$

$$I(z^2 + b'b') (31) = \int \frac{B' dz}{z^2 + b'b'} = \frac{B'}{b'} \int \frac{dz}{1 + \frac{z^2}{b'b'}}$$

$$= \frac{B'}{b'} \times \text{Arco di circolo la cui tangente è } \frac{z}{b'} \quad (88)$$

$= \frac{B'}{b'} \times \text{Arco tang } \frac{z}{b'} + C$ ; perciò si avrebbe l'integrale cercata.

Es. Sia  $\frac{(z^2 - z + 1) dz}{(1+z)(1+zz)} = \frac{A dz}{1+z} + \dots + \frac{(Bz + C) dz}{1+zz}$ ; si troverà  $A = \frac{1}{2}$ ,  $B = C = -\frac{1}{2}$ ,

il che muta il rotto nel seguente  $\frac{z dz}{2(1+z)} - \frac{z dz}{2(1+zz)}$   
 $= \frac{dz}{2(1+z)}$  il cui integrale è  $\frac{1}{2} I(1+z) = \frac{1}{4}$

$$I(1+z^2) = \frac{1}{2} \times \text{Arco tang } z + C.$$

Sia anche  $\frac{dx}{x(1+x)^2(1+x+xx)}$  che si riduce a  $\frac{dx}{x} = \frac{(2x+3) dx}{(1+x)^2} + \frac{xdx}{1+x+xx}$ .

Per integrare quest'ultima quantità, faccio  $x = z$   
 $= \frac{1}{2}$ , e diviene  $\frac{z dz}{z^2 + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{2} dz}{z^2 + \frac{3}{4}}$ , la cui inte-



grale, fatto  $B' = 1$ ,  $b' = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , sarà  $\frac{1}{4} l(x^2 + \frac{3}{4}) - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Arc tang} \frac{2x}{\sqrt{3}}$ . Sostituendo dunque il valore di  $z$ , si trova per l'intera integrale  $lx - 2l(1+x) + \frac{1}{2} l(1+x+x^2) + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Arc tang} \frac{(2x+1)}{\sqrt{3}} + C$ .

94. Infine se  $Q$  abbia uno o più fattori di questa forma  $(x^2 + ax + b)^m$ , si supponrà che il rotto parziale provenuto da questo fattore sia . . .

$d x \left( \frac{A x^{2m-1} + B x^{2m-2} + \text{ec.} + R}{(x^2 + ax + b)^m} \right)$  e si determineranno i coefficienti  $A, B$  ec. come sopra.

Quindi facendo  $x = z - \frac{a}{2}$  e sostituendo, il rotto

diverrà  $\frac{A' z^{2m-1} + B' z^{2m-2} + \text{ec.} + R'}{(z^2 + b'b')^m} dz$  che

può decomporre così,  $\frac{A' z^{2m-1}}{(z^2 + b'b')^m} dz + \dots$

$\frac{B' z^{2m-2}}{(z^2 + b'b')^m} dz + \text{ec.}$ : ma i termini ove il numeratore ha una potenza impari sono integrabili in

parte algebricamente e in parte per logaritmi (38); e quelli ove  $z$  nel numeratore ha una potenza pari

essendo della forma  $\frac{M z^{2t} dz}{(z^2 + b'b')^m}$  posson ridursi (38)

a  $\frac{dz}{z^2 + b'b'}$ , cioè posson integrarsi in parte algebricamente e in parte per archi di circolo; dunque con questo mezzo si avrà l'integrale del dato rotto.

95. Per rischiarare questi varj metodi, ecco un esempio che tutti gli comprende.

Sia il rotto  $\frac{dx}{(1+x)xx(x^2+2)(x^2+1)^2}$

$$= \frac{A dx}{1+x} + \frac{(Bx+C) dx}{x^2} + \frac{(Dx+E) dx}{x^2+2} + \frac{(Fx^3+Gx^2+Hx+I) dx}{(x^2+1)^2} .$$

Riducendo allo

stesso denominatore, si troverà  $A = \frac{1}{12}$ ,  $B = -\frac{1}{2}$ ,  $C = \frac{1}{2}$ ,  $D = \frac{1}{6}$ ,  $E = -\frac{1}{6}$ ,  $F = \frac{1}{4}$ ,  $G =$

$-\frac{1}{4}$ ,  $H = \frac{3}{4}$ ,  $I = -\frac{3}{4}$  e il rotto proposto

$$= \frac{dx}{12(1+x)} + \frac{(1-x) dx}{2x^2} + \frac{(x-1) dx}{6(x^2+2)} + \frac{(x^3-x^2+3x-3) dx}{(4x^2+1)^2} .$$

Ora  $\int \frac{dx}{12(1+x)} = \frac{1}{12} \int \frac{dx}{1+x}$

$$= \frac{1}{12} \log(1+x) \dots \int \frac{(1-x) dx}{2x^2} = \frac{1}{2} \log x - \frac{1}{2x} \dots$$

$$\int \frac{x dx - dx}{6(x^2+2)} = \frac{1}{12} \int \frac{2x dx}{x^2+2} - \frac{1}{6\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}x^2+1}$$

$$= \frac{1}{12} \log(x^2+2) - \frac{1}{6\sqrt{2}} \text{Arc tang} \frac{x}{\sqrt{2}} \dots \dots \dots$$

$$\int \frac{x^3 dx}{4(x^2+1)^2} = \frac{1}{8} \log(x^2+1) + \frac{1}{8(x^2+1)} \quad (39) \dots$$

$$\int \frac{x dx}{4(x^2+1)^2} = -\frac{1}{8(x^2+1)} .$$

Per integrare ....

$$\frac{-x^2 dx}{4(x^2+1)^2} - \frac{3 dx}{4(1+x^2)^2} ,$$

bisogna proporsi di ridar-

re  $\int \frac{dx}{1+x^2}$  alla prima, e si avrà (90)  $\int \frac{dx}{1+x^2} =$

$$\frac{x}{1+x^2} + 2 \int x^2 dx (1+x^2)^{-2} ;$$

dunque  $\int x^2$

$$dx (1+x^2)^{-2} = -\frac{\frac{1}{2}x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \text{Arc tang} x : \text{ ma}$$

riducendo la prima alla seconda (87),  $\int x^2 dx (1+x^2)^{-2} = -x(1+x^2)^{-1} + \int dx (1+x^2)^{-2}$ ; dunque  $\int dx (1+x^2)^{-2} = x(1+x^2)^{-1} + \int x^2 dx (1+x^2)^{-2} = \frac{\frac{1}{2}x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \text{Arc tang } x$ . Riunendo dunque tutte queste integrali, sarà . . . . .

$$\int \frac{dx}{(1+x)x^2(x^2+2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{12} l(1+x) + \frac{1}{12} l(x^2+2) + \frac{1}{8} l(x^2+1) + \frac{1}{2} l \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} - \frac{(x+1)}{4(1+x^2)} - \frac{1}{2} \text{Arc tang } x - \frac{1}{6\sqrt{2}} \text{Arc tang } \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

96. Dunque ogni differenziale frazionaria e razionale è integrabile o algebricamente o per logaritmi o per archi di circolo. La sola difficoltà consiste nel trovare i fattori del denominator  $Q$ : ma questo è piuttosto un difetto dell'Algebra ordinaria che del metodo d'integrazione. Se dunque un rotto differenziale potrà rendersi razionale, saremo sicuri di trovarne l'integrale. Ecco alcuni casi in cui questa riduzione è possibile.

97. Sia primieramente una quantità con soli radicali monomj, come  $\left( \frac{\sqrt{x+x} \sqrt{x+xx}}{x + \sqrt{x}} \right) dx$ : ridotti i radicali allo stesso grado verrà . . . . .  $\frac{dx (\sqrt{x^2} + x \sqrt{x^6} + x^2)}{x + \sqrt{x^3}}$ , e fatto  $\sqrt{x} = z$ , onde  $x = z^2$ ,  $dx = 2z dz$ , la differenziale diverrà razionale e però integrabile.

Sia ora  $X$  una funzione razionale di  $x$ ; per trovare l'integrale di  $dy = X dx \sqrt{(a + bx + \dots + cx^2)^{\pm 1}}$ , cerco i due fattori di  $a + bx + cx^2$  e se son reali si troverà  $x$  per la nota formula, e quindi  $dx$ , dopo di che si potrà integrare.

Sia per esempio  $dy = dx \sqrt{(\pm a^2 \mp x^2)}$ ; si farà  $\pm a^2 \mp x^2 = Q = \frac{(x+a)(\pm a \mp x)}{(\pm a \mp x)^2} = \frac{x+a}{\pm a \mp x} = z^2$ , onde  $x = \frac{\mp a + az^2}{z^2 \pm 1}$ ,  $dx = \frac{\pm 4az dz}{(z^2 \pm 1)^2}$ , e  $\sqrt{(\pm a^2 \mp x^2)} = \frac{2az}{z^2 \pm 1}$ ; dunque  $dy = \frac{\pm 8a^2 z^2 dz}{(z^2 \pm 1)^3}$ . L'integrazione della formula

col segno  $+$  si ha riducendo  $\int dz (z^2 + 1)^{-3}$  a  $\int z^2 dz (z^2 + 1)^{-3}$  (90), il che la cangia in  $\int z^4 dz (z^2 + 1)^{-3}$ , onde poi riducendo questa a  $\int z^2 dz (z^2 + 1)^{-3}$  (87), si trova  $8a^2 \int z^2 dz (1 + z^2)^{-3} = \frac{2a^2 z^3}{(1+z^2)^2} - \frac{a^2 z}{1+z^2} + a^2 \times \text{arc tang } z + C$ , ovvero sostituito il valor di  $z$ ,  $\int dx \sqrt{(a^2 - x^2)} = \frac{x \sqrt{(a^2 - x^2)}}{2} + a^2 \times \text{arc tang } \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C$ .

L'integrazione della formula col segno  $-$  si ha col solito metodo (92), che dà  $\int -\frac{8a^2 z^2 dz}{(z^2 - 1)^3} = -\frac{a^2}{2} \left[ \frac{z+1}{z-1} + \frac{a^2 z}{2(z+1)^2} + \frac{a^2 z}{2(z-1)^2} \right] + C$ , ovvero sostituito il valor di  $z$  e osservando che  $\frac{z+1}{z-1}$

$$= \frac{(z+1)^2}{z^2-1} = \frac{x + \sqrt{(x^2 - a^2)}}{x - \sqrt{(x^2 - a^2)}}, \int dx \sqrt{(x^2 - a^2)}$$

$$a^2) = \frac{x \sqrt{(x^2 - a^2)}}{2} - \frac{a^2}{2} \ln \frac{x + \sqrt{(x^2 - a^2)}}{a} + C.$$

Sia ancora  $dy = \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$ ; fatto come prima  $\frac{x+a}{x-a} = z^2$ , sarà  $dy = \frac{-2dz}{z^2-1}$ , ed  $y = l \frac{C(z+1)}{z-1}$

$$(91) = l \frac{C}{a} [x + \sqrt{(x^2 - a^2)}].$$

98. Se i fattori di  $a + bx + cx^2$  sono immaginari, bisogna farne svanire il secondo termine supponendo  $x + \frac{b}{2c} = z$ , e allora  $\sqrt{a + bx + cx^2} = Z \sqrt{z^2 + b'b'}$ . Sia dunque  $z^2 + b'b' = Q$ , onde fatto nella nota formula  $a = 1$ ,  $A = u$ , sarà  $z = \dots = \frac{u^2 - b'^2}{2u}$  e  $dz = \frac{du}{2u^2} (b'b' + uu)$ , dopo di che si potrà integrare.

Così se sia  $dy = dx \sqrt{(x^2 + a^2)}$ , avremo  $x = \frac{u^2 - a^2}{2u}$ ,  $u = x + \sqrt{(x^2 + a^2)}$ ,  $dx = \frac{du}{2u^2} (u^2 + a^2)$ ,  $\sqrt{(x^2 + a^2)} = \frac{u^2 + a^2}{2u}$ , onde  $dy = \frac{du(u^2 + a^2)^2}{4u^3} = \frac{u du}{4} + \frac{a^2 du}{2u} + \frac{a^4 du}{4u^3}$ ; dunque  $y = C + \frac{u^2}{8} + \frac{a^2}{2} \ln u - \frac{a^4}{8u^2} = C + \frac{u^4 - a^4}{8u^2} + \frac{a^2}{2} \ln u$ : ma  $\frac{u^4 - a^4}{8u^2} = \left(\frac{u^2 - a^2}{4u}\right) \left(\frac{u^2 + a^2}{2u}\right) = \frac{x}{2} \sqrt{(x^2 + a^2)}$ ; dunque  $y = C + \frac{x}{2} \sqrt{(x^2 + a^2)} + \frac{a^2}{2} l [\sqrt{(x^2 + a^2)} + x]$ .

*Metodi di integrar per Serie.*

99. Quando una differenziale non è suscettibile d'una integrazione esatta, si ricorre alle approssimazioni, e le serie sono allora uno degli ultimi compensi. Infatti riducendo in serie una funzione  $X$  della variabile  $x$ , si avrà una serie di termini monomj, le cui integrali riunite daranno un valore approssimato di  $\int X dx$ . Per esempio, si sa che

l'integrale di  $\frac{dx}{a+x}$  è  $l(a+x)$  e che  $\frac{dx}{a+x} = \dots$

$\frac{dx}{a} - \frac{x dx}{a^2} + \frac{x^2 dx}{a^3} - \text{ec.}$ ; dunque  $\int \frac{dx}{a+x}$  ov-

vero  $l(a+x) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \text{ec.} + C$ .

Ma se si fa  $x=0$ , sarà la costante  $C=la$ ; dunque

che  $l(a+x) = la + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \text{ec.}$ ,

e per conseguenza  $l(a-x) = la - \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} -$

$\frac{x^3}{3a^3} - \text{ec.}$  Supponghiamo  $\frac{x}{a} = \frac{z}{a+z}$ , ed avremo

$l(a-x) = 2la - l(a+z) = la - \frac{z}{a+z} - \dots$

$\frac{z^2}{2(a+z)^2} - \text{ec.}$ ; dunque  $l(a+z) = la + \dots$

$\frac{z}{a+z} + \frac{z^2}{2(a+z)^2} + \text{ec.}$ , serie tanto più conver-

gente quanto sarà  $z$  minor di  $a$ . Per esempio  $l(1) =$

$l(10+1) = l10 + \frac{1}{11} + \frac{1}{2 \cdot 11^2} + \text{ec.} = 2,397 \text{ ec.}$

Se si ha  $dy = \frac{dx}{1+xx}$ , allora  $y = \text{Arco tang } x$ :

ma  $\frac{dx}{1+xx}$  ridotta in serie dà  $dy = dx - x^2 dx +$

$x^4 dx - x^6 dx + \text{ec.}$ ; dunque  $y$  ovvero *Arco tang*  $x$   
 $= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \text{ec.}$

Sia  $y$  un arco,  $x$  il suo seno, ovvero  $y =$   
*Arco seno*  $x$  cioè  $\text{sen } y = x$ , si avrà  $dy = \dots$

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = dx (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = dx \left( 1 + \frac{1}{2} x^2 \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \text{ec.} \right).$$
 Dunque  $y$  ovvero

$$\text{Arco seno } x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} +$$

ec., integrale a cui non vi è costante da aggiungere.

Sia  $x = 1$ , e la circonferenza  $= \pi$ , sarà  $y =$   
 $\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \text{ec.}$  Se  $x =$

$\frac{1}{2}$ , l'arco diventa  $\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^5}$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2^7} + \text{ec.}$$

100. Bastino questi esempj: ma il seguente *Metodo di integrar per parti* dà delle serie più convergenti.

La formula  $d(xz) = x dz + z dx$ , dà  $xz =$   
 $\int x dz + \int z dx$ ; dunque generalmente  $\int z dx = xz$   
 $- \int x dz$ , e posta  $z = X$  funzione qualunque di

$x$ , si avrà  $dz = dX$  e  $\int X dx = Xx - \int x dX$ .

Sia  $dX = X' dx$ ; dunque  $\int x dX = \int X' x dx$  e

fatto  $x dx = dz$  onde  $\frac{x^2}{2} = z$ , sarà  $\int X' dz = X' z$

$$- \int z dX = \frac{X' x x}{2} = \frac{\int x x dX'}{2}. \text{ Sia } dX' = X'' dx;$$

dunque  $\frac{\int x^2 dX'}{2} = \frac{\int X'' x^2 dx}{2}$ , è fatto  $x^2 dx$   
 $= dz$  onde  $\frac{x^3}{3} = z$ , sarà  $\frac{\int X'' dz}{2} = \frac{X'' z}{2} -$   
 $\frac{\int z dX''}{2} = \frac{x^3}{2 \cdot 3} X'' - \int \frac{x^2}{2 \cdot 3} dX''$ , ec. Sostituendo  
 questi valori nella prima espressione, si trova  $\int X dx$   
 $= Xx - \frac{x^2}{2} X' + \frac{x^3}{2 \cdot 3} X'' - \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} X''' + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$   
 $X^{(4)} - \text{ec.}$ , ovvero supposta  $dx$  costante onde  $\frac{dX}{dx}$   
 $= X'$ ,  $\frac{ddX}{dx} = dX'$ ,  $\frac{dX'}{dx} = X'' = \frac{ddX}{dx^2}$  ec., si avrà  
 $\int X dx = Xx - \frac{x^2 dX}{2 \cdot dx} + \frac{x^3 ddX}{2 \cdot 3 \cdot dx^2} - \frac{x^4 dddX}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^3}$   
 $+ \text{ec.}$

Es. Sia  $X = \frac{1}{a+x}$ ; si avrà  $\frac{dX}{dx} = \frac{-1}{(a+x)^2}$ ,  
 $\frac{ddX}{dx^2} = \frac{2}{(a+x)^3}$ ,  $\frac{dddX}{dx^3} = \frac{-2 \cdot 3}{(a+x)^4}$ , ec. Dunque  
 $\int \frac{dx}{a+x} = \frac{x}{a+x} + \frac{x^2}{2(a+x)^2} + \frac{x^3}{3(a+x)^3} +$   
 $\text{ec.} \dots + C$ , ovvero  $\log(a+x) = \log a + \frac{x}{a+x}$   
 $+ \frac{x^2}{2(a+x)^2} + \frac{x^3}{3(a+x)^3} + \text{ec.}$ , come si è  
 già trovato.

101. Sia ora  $dy = m(a+x)^{m-1} dx$ , la cui  
 integrale è  $y = (a+x)^m$ ; si avrà  $X = m(a+x)^{m-1}$ ,  
 $\frac{dX}{dx} = m(m-1)(a+x)^{m-2}$ ,  $\frac{ddX}{dx^2} =$   
 $m(m-1)(m-2)(a+x)^{m-3}$ , ec. Dunque  $y$ ,  
 ovvero  $(a+x)^m = C + mX(a+x)^{m-1} -$



70  
 $\frac{m(m-1)}{2} x^2 (a+x)^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} x^3 (a+x)^{m-3} - \text{ec.}$ , e fatto  $x=0$ , verrà  $C=a^m$ , ed  
 $(a+x)^m = a^m + mx(a+x)^{m-1} - \frac{m(m-1)}{2} x^2 (a+x)^{m-2} + \text{ec.}$  Facendo  $a+x=z$ , avremo  $z^m =$   
 $(z-x)^m + mxz^{m-1} - \frac{m(m-1)}{2} x^2 z^{m-2} + \text{ec.}$ ,  
 onde  $(z-x)^m = z^m (1 - \frac{mx}{z} + \frac{m(m-1)x^2}{2z^2} -$   
 ec.)...  $(z+x)^m = z^m (1 + \frac{mx}{z} + \frac{m(m-1)x^2}{2z^2}$   
 + ec.)...  $\frac{(z+x)^m}{z^m} = 1 + \frac{mx}{z} + \frac{m(m-1)x}{2z^2}$   
 + ec. .... e  $\frac{(z+x)^{-m}}{z^{-m}} = \frac{1}{(z+x)^m} = 1 - \frac{mx}{z} +$   
 $\frac{m(m+1)x^2}{2z^2} - \text{ec.}$ ; dunque se  $z+x=b$ , avremo  
 $(b-x)^m = b^m (1 - \frac{mx}{b-x} + \frac{m(m+1)x^2}{2(b-x)^2} - \text{ec.})$  e  
 $(b+x)^m = b^m (1 + \frac{mx}{b+x} + \frac{m(m+1)}{2(b+x)^2} + \text{ec.})$ .

102. Per trovare il valor di  $y=a^x$  differenzio,  
 ed ho  $dy = a^x dx la$  (32). Dunque  $X = a^x la$ ,  
 $\frac{dX}{dx} = a^x l^2 a$ ,  $\frac{ddX}{dx^2} = a^x l^3 a$  ec., il che dà  $y = a^x$   
 $= C + a^x x la - \frac{xx l^2 a}{2} a^x + \frac{x^3 l^3 a}{2 \cdot 3} a^x - \text{ec.}$  Sia  $x$   
 $= 0$ , si avrà  $C = 1$ , ed  $a^x = 1 + x la \cdot a^x -$   
 $\frac{xx l^2 a}{2} a^x + \text{ec.}$ ; dividendo per  $a^x$ , verrà  $1 = a^{-x}$   
 $+ x la - \frac{xx l^2 a}{2} + \text{ec.}$  Dunque  $a^{-x} = 1 - x la +$   
 $\frac{x^2 l^2 a}{2} - \text{ec.}$ ; e per conseguenza, supposta  $x$  posi-  
 tiva, le sue potenze impari debbono cangiar segno,  
 il che rende la serie tutta positiva cioè  $a^x = 1 +$

$x^1 a + \frac{x^2 1^2 a}{2} + \frac{x^3 1^2 a}{2 \cdot 3} + \text{ec. come si sa d'altronde.}$

103. Sia  $y$  un arco qualunque e  $x$  la sua tangente; avremo  $dy = \frac{dx}{1+xx}$  (88); ma siccome de-

terminando  $X$ ,  $\frac{dX}{dx}$  ec. la serie è troppo complicata,

pongo  $\frac{1}{1+x^2} = u$  onde  $-\frac{2x dx}{(1+x^2)^2} = du$ ; dunque

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int u dx = ux - \int x du = \frac{x}{1+x^2} +$$

$$\int \frac{2x^2 dx}{(1+x^2)^2}. \text{ Pongo } \frac{1}{(1+x^2)^2} = u \text{ onde } -$$

$$\frac{4x dx}{(1+x^2)^3} = du, \text{ e fatto } 2x^2 dx = dz \text{ onde } \frac{2x}{3}$$

$$= z, \text{ sarà } \int \frac{2x^2 dx}{(1+x^2)^2} = \int u dz = uz - \int z du =$$

$$\frac{2x^3}{3(1+x^2)^2} + \int \frac{2 \cdot 4 x^4 dx}{3(1+x^2)^3}. \text{ Pongo } \frac{1}{3(1+x^2)^3}$$

$$= u \text{ onde } -\frac{6x dx}{3(1+x^2)^4} = du, \text{ e fatto } 2 \cdot 4 x^4 dx = dz$$

$$\text{onde } \frac{2 \cdot 4 x^5}{5} = z, \text{ sarà } \int \frac{2 \cdot 4 x^4 dx}{3(1+x^2)^3} = \int u dz = uz$$

$$- \int z du = \frac{2 \cdot 4 x^5}{3 \cdot 5 (1+x^2)^3} + \int \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 x^6 dx}{3 \cdot 5 (1+x^2)^4}$$

$$\text{ec. Dunque } \text{Arco tang } x = y = \frac{x}{1+xx} +$$

$$\frac{2x^3}{3(1+xx)^2} + \frac{2 \cdot 4 \cdot x^5}{3 \cdot 5 (1+xx)^3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 x^7}{3 \cdot 5 \cdot 7 (1+xx)^4} +$$

$$\text{ec. Dunque in generale poichè } x = \text{tang } y = \frac{\text{sen } y}{\text{cos } y},$$

$$\text{sostituendo e riducendo, si ha } y = \text{cos } y (\text{sen } y +$$

$$\frac{2}{3} \text{sen}^3 y + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \text{sen}^5 y + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \text{sen}^7 y + \text{ec.}) =$$

$$\frac{\text{sen } 2y}{2} \left( 1 + \frac{2}{3} \text{sen}^2 y + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \text{sen}^4 y + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \text{sen}^6 y \right)$$

72  
 + ec. ). Se  $y = 45^\circ$ , sarà la circonferenza  $\pi = 4(1 + \frac{1}{1.3} + \frac{1.2}{1.3.5} + \frac{1.2.3}{1.3.5.7} + \text{ec.})$ .

*Dell' Integrazione delle Differenziali Logaritmiche ed Esponenziali.*

104. Per integrar la differenziale logaritmica  $X dx/x$ , supponendo  $X$  una funzione di  $x$ , sia  $y = lx$ , e  $dz = X dx$ : si avrà  $\int X dx/x = \dots$   
 $\int y dz = yz - \int z dy = lx \int X dx - \int \frac{z dx}{x}$ ;  
 dunque l'integrale della quantità proposta si riduce a quella di  $X dx$  e di  $\frac{dx}{x} \int X dx$ . Si potrà dunque trovarla colle regole precedenti se  $\int X dx$  non contiene alcuna trascendente, come logaritmi, archi di circolo ec.

ESEMPIO. Sia  $X = x^n$ ; si avrà  $\int X dx = z = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ,  $\int \frac{z dx}{x} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ ; dunque  $\int x^n dx/x = \frac{x^{n+1}}{n+1} (lx - \frac{1}{n+1})$ , integrale che non è soggetta ad eccezione fuorchè nel caso di  $n = -1$ : ma allora si ha  $\int \frac{dx}{x} lx = \int lx dx = \frac{1}{2} l^2 x$  (31).

Sia ancora  $X = \frac{1}{(1-x)^2}$ ; si avrà  $\int X dx = \dots$   
 $\frac{1}{1-x} = z$ ,  $\int \frac{z dx}{x} = \int \frac{dx}{x(1-x)} = lx - l(1-x)$

(91). Dunque  $\int \frac{dx \, lx}{(1-x)^2} = \frac{lx}{1-x} - lx + l(1-x)$   
 $x) = \frac{x \, lx}{1-x} + l(1-x)$ .

105. Per integrare  $dX^n x$  si farà come prima

(104)  $\int dX^n x = X l^n x - n \int \frac{X dx}{x} l^{n-1} x$ ; quin-

di ponendo  $\frac{X dx}{x} = dX$ , si ha  $\int dX' l^{n-1} x$   
 $= X' l^{n-1} x - (n-1) \int \frac{X' dx}{x} l^{n-2} x$ , e fatto...

$\frac{X' dx}{x} = dX''$ , verrà  $\int dX'' l^{n-2} x = X'' l^{n-2} x -$

$(n-2) \int \frac{X'' dx}{x} l^{n-3} x$  ec. Dunque  $\int dX^n x =$

$X^n x - n X' l^{n-1} x + n(n-1) X'' l^{n-2} x - n(n-1)(n-2) X''' l^{n-3} x +$  ec., espressione che dipende solo dall'integrazione di quantità algebriche e che avrà un numero finito di termini se  $n$  sarà intero e positivo.

Sia per esempio  $dX = x^m dx$ ; sarà  $X = \dots$

$\frac{x^{m+1}}{m+1}$ ,  $\int \frac{X dx}{x} = X' = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$ ,  $\int \frac{X' dx}{x} = X''$

$= \frac{x^{m+1}}{(m+1)^3}$ ,  $X''' = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^4}$  ec. Dunque  $\int x^m dx \, l^n x$

$= \frac{x^{m+1}}{m+1} (l^n x - \frac{n}{m+1} l^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2} l^{n-2} x$

$- \frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)^3} l^{n-3} x + \text{ec.})$ . Il solo caso che

sfugge alla regola generale è quello in cui  $m = -1$

e allora si ha  $\int \frac{dx}{x} l^n x = \frac{l^{n+1} x}{n+1} + C$  (+2).

106. Questa formola si applica egualmente ad  $n$  negativa; ma avendosi allora per integrale una serie infinita, ecco un altro mezzo d'integrare. Sia

$K$

la quantità  $\frac{X dx}{(lx)^n}$  che riduco alla forma  $Xx \cdot \frac{dx}{x(lx)^n}$ ;

fatto  $lx = u$ , sarà  $l^n x = u^n$  e  $\frac{dx}{x} = du$ , onde...

$$\int \frac{dx}{x l^n x} = \int u^{-n} du = \frac{u^{-n+1}}{-n+1} = \frac{-1}{(n-1) l^{n-1} x}$$

$$= z, \text{ e posto } Xx = y, \text{ si avrà } \int Xx \cdot \frac{dx}{x l^n x} =$$

$$\int \frac{X dx}{l^n x} = \int y dz = yz - \int z dy = \frac{-Xx}{(n-1) l^{n-1} x}$$

$$+ \frac{1}{n-1} \int \frac{d(Xx)}{l^{n-1} x}. \text{ Se ora sia } d(Xx) = X' dx,$$

$d(X'x) = X'' dx$ ,  $d(X''x) = X''' dx$  ec., avremo

$$\text{ponendo } n-1 = m, \int \frac{d(Xx)}{l^{n-1} x} = \int \frac{X' dx}{l^m x},$$

formula simile alla prima e che si integra perciò nel

$$\text{modo stesso: dunque } \int \frac{X dx}{(lx)^n} = \frac{-Xx}{(n-1) l^{n-1} x}$$

$$+ \frac{X'x}{(n-1)(n-2) l^{n-2} x} + \frac{X''x}{(n-1)(n-2)(n-3) l^{n-3} x}$$

ec. fino a un termine della forma . . . . .

$$\frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3) \dots 2 \cdot 1} \int \frac{X dx}{lx}, \text{ la cui}$$

integrazione, se è possibile, darà quella della formula proposta.

Sia per esempio  $X = x^m$ ; avremo  $d(Xx) = X' dx = d(x^{m+1}) = (m+1)x^m dx$ , onde  $X' =$

$(m+1)x^m, X^u = (m+1)^2 x^m, X^{uv} = (m+1)^3 x^m$   
 ec. ; dunque  $\int \frac{x^m dx}{l x} = \frac{-x^{m+1}}{(n-1)l^n x} \left( lx + \frac{m+1}{n-2} l^2 x \right.$   
 $\left. + \frac{(m+1)^2}{(n-2)(n-3)} l^3 x + \frac{(m+1)^3}{(n-2)(n-3)(n-4)} l^4 x + \text{ec.} \right)$   
 $+ \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\dots 1} \int \frac{x^m dx}{l x}$ , onde la proposta inte-  
 grale si riduce a quella di  $\frac{x^m dx}{l x}$ . Ora fatto  $x^{m+1}$   
 $= u$ , sarà  $\frac{x^m dx}{l x} = \frac{du}{lu}$ , differenziale che si inte-  
 gra sol per le serie, come vedremo, fuorchè nel  
 caso di  $m = -1$ ; poichè allora  $\int \frac{dx}{x l^n x} = \frac{1}{1-n} x$   
 $l^{1-n} x$ .

107. Debba ora integrarsi la formula esponen-  
 ziale  $a^x X dx$ . Osservo che  $a^x dx la = d(a^x)$  (32),  
 onde fatto  $a^x dx = dz = \frac{d(a^x)}{la}$ , sarà  $z = \frac{a^x}{la}$  e  
 perciò  $\int a^x X dx = \int X dz = zX - \int z dX = \dots$   
 $\frac{a^x X}{la} - \frac{1}{la} \int a^x dX$ . Sia  $dX = X' dx$ , si avrà  
 $\int a^x dX = \int a^x X' dx = \int X' dz = X' z - \int z dX'$   
 $= \frac{a^x X'}{la} - \frac{1}{la} \int a^x dX'$  ec. ; dunque  $\int a^x X dx =$   
 $\frac{a^x}{la} \left( X - \frac{X'}{la} + \frac{X''}{l^2 a} - \dots \dots + \frac{X^{n-1}}{l^{n-1} a} \right) + \dots$   
 $\frac{1}{l^{n-1} a} \int a^x X^{n-1} dx$  che sarà almeno la più  
 semplice delle integrali trascendenti della sua spe-  
 cie, se non è suscettibile d' un' integrazione esatta.  
 Se la formula fosse  $a^{mx} X dx$ , fatta  $a^m = b$ , si trovereb-  
 be egualmente  $\int a^{mx} X dx = \frac{a^{mx}}{mla} \left( X - \frac{X'}{mla} \text{ ec.} \right) \text{ ec.}$

108. Se  $t$  è il numero il cui logaritmo  $\equiv t$ ; si ha  $\int e^x X dx \equiv e^x (X - X' + X'' - X''' + X^{(4)} - \dots)$ . Sia per esempio  $X = x^n$ ; sarà  $X' = nx^{n-1}$ ,  $X'' = n(n-1)x^{n-2}$ ,  $X''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$  ec.; dunque  $\int e^x x^n dx \equiv e^x (x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \dots)$ . E così si avrebbe  $\int e^{mx} x^n dx \equiv e^{mx} \left( \frac{x^n}{m} - \dots - \frac{n x^{n-1}}{m^2} + \dots \right)$ .

109. Per trovar  $\int \frac{a^x dx}{x}$ , poichè le date regole divengono inutili, riduco in serie ed ho (102)  $\frac{a^x dx}{x} \equiv \frac{dx}{x} + dx \log a + \frac{x dx}{2} \log^2 a + \dots$ ; dunque  $\int \frac{a^x dx}{x} \equiv C + \log x + x \log a + \frac{x^2 \log^2 a}{2 \cdot 2} + \frac{x^3 \log^3 a}{3 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$ , e  $\int \frac{e^x dx}{x} \equiv C + \log x + x + \frac{x^2}{2 \cdot 2} + \frac{x^3}{3 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$  ec. Sia  $e^x \equiv z$ , si avrà  $\frac{e^x dx}{x} \equiv \frac{dz}{lz}$ ; differenziale di una quantità trascendente che sarà eguale alla serie infinita  $C + \log z + \log z + \frac{\log^2 z}{2 \cdot 2} + \frac{\log^3 z}{3 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$  ec: e poichè  $\int \frac{dz}{lz} \equiv \log z$  (42)  $\equiv y$ , sarà  $\int \frac{dz}{lz} \equiv \int z \cdot \frac{dz}{lz} \equiv \int z dy \equiv zy - \int y dz \equiv z \log z - \int \log z dz$ , e però  $\int \log z dz \equiv z \log z - \int \frac{dz}{lz}$ , integrale che pur dipende dalla quantità trascendente  $\int \frac{dz}{lz}$ .

110. Quando le precedenti regole non abbiano luogo, la quantità esponenziale si ridurrà in serie per la formula  $a^x = 1 + x \ln a + \text{ec.}$  (104) e sarà facile d'integrare. Sia  $dy = x^{mx} dx$ ; si avrà per le serie,  $dy = dx (1 + mx \ln x + \frac{m^2 x^2 \ln^2 x}{2} + \frac{m^3 x^3 \ln^3 x}{2 \cdot 3} + \text{ec.}) = dx + m x dx \ln x + \frac{m^2}{2} x^2 dx \ln^2 x + \text{ec.}$ ,

la cui integrale si trova per mezzo di quella di  $x^{mx} dx \ln^n x$  (105) e si ha  $\int x^{mx} dx = x (1 - \frac{m x}{2} + \frac{m^2 x^2}{3^2} - \frac{m^3 x^3}{4^3} + \text{ec.}) + m x^2 \ln x (\frac{1}{2} - \frac{m x}{3^2} + \frac{m^2 x^2}{4^3} - \text{ec.}) + \frac{m^2 x^3 \ln^2 x}{2} (\frac{1}{3} - \frac{m x}{4^2} + \frac{m^2 x^2}{5^3} - \text{ec.}) + \text{ec.}$  che nel caso particolare di  $x = 1$ , si riduce alla serie convergente  $1 - \frac{m}{2^2} + \frac{m^2}{3^3} - \frac{m^3}{4^4} + \text{ec.}$

*Dell'Integrazione delle Quantità differenziali ove entrano Seni, Coseni ec.*

111. Poichè  $dx \cos x = d \sin x$ , e  $-dx \sin x = d \cos x$  (28), è chiaro che  $\int dx \cos x = \sin x$  e che  $\int dx \sin x = -\cos x$ ; che  $\int dy \cos ny = \frac{\sin ny}{n}$  e che  $\int dy \sin ny = -\frac{\cos ny}{n}$  (28); che  $\int dz \cos z \sin^n z = \frac{\sin^{n+1} z}{n+1}$ , e che  $\int dz \sin z \cos^n z = \frac{\cos^{n+1} z}{n+1}$ .



$\cos^n z = -\frac{\cos^{n+1} z}{n+1}$  (28). Similmente se si dovesse integrare  $dy \operatorname{sen} y \cos ay$ , si farebbe  $\operatorname{sen} y \cos ay = \frac{1}{2} \operatorname{sen} (a+1)y - \frac{1}{2} \operatorname{sen} (a-1)y$ , e l'integrale diventerebbe  $-\frac{\cos (a+1)y}{2(a+1)} + \frac{\cos (a-1)y}{2(a-1)}$ .

112. Sarebbe lo stesso per  $dx \operatorname{sen} x \operatorname{sen} ax$ ,  $dx \cos x \cos ax$  ec.; e si tratterebbe colla stessa facilità  $dx \operatorname{sen} x \operatorname{sen} ax \cos bx$  ec. riducendo questi prodotti a seni o coseni semplici per mezzo dei valori di  $\operatorname{sen} a \cos b$ ,  $\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$  ec. Si potrebbe dunque far uso di questo metodo per integrare  $dx \operatorname{sen}^2 x$ ,  $dx \operatorname{sen}^3 x$ ,  $dx \cos^2 x$  ec.: ma riesce più semplice l'integrarli nel modo che segue.

113. Poichè  $dx \operatorname{sen}^n x = dx \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^{n-1} x$  e  $\int dx \operatorname{sen} x = -\cos x = z$ , fatto  $\operatorname{sen}^{n-1} x = y$ , sarà  $\int dx \operatorname{sen}^n x = \int y dz = zy - \int z dy = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1) \int dx \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1) \int dx \operatorname{sen}^{n-2} x - (n-1) \int dx \operatorname{sen}^n x$ ; e trasportando,  $\int dx \operatorname{sen}^n x = -\frac{\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int dx \operatorname{sen}^{n-2} x$ : dunque anche  $\int dx \operatorname{sen}^{n-2} x = -\frac{\cos x \operatorname{sen}^{n-3} x}{n-2} + \dots$   
 $\frac{n-3}{n-2} \int dx \operatorname{sen}^{n-4} x$ ; onde in generale  $\int dx \operatorname{sen}^n x = -\frac{\cos x}{n} \left( \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n-2} \operatorname{sen}^{n-3} x + \dots \right)$

$$\frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)} \operatorname{sen}^{n-5} x + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n-2)(n-4)(n-6)} \times$$

$$\operatorname{sen}^{n-7} x + \text{ec.} \dots + \frac{(n-1)(n-3) \dots \cdot 2}{(n-2)(n-4) \dots \cdot 1} x,$$

formula che ha luogo solamente nel caso in cui  $n$  è impari, nel quale l'integrale non dipende da altro che dalle quantità  $\cos x$ ,  $\operatorname{sen} x$ . Ma quando è pari, l'integrale sarà

$$-\frac{\cos x}{n} \left( \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n-2} \operatorname{sen}^{n-3} x + \text{ec.} \right) \dots + \frac{(n-1)(n-3) \dots \cdot 1}{2 \cdot 4 \dots n} x,$$

cioè conterrà l'arco o quantità trascendente  $x$ . Per esempio,  $\int dx \operatorname{sen}^3 x = C - \frac{\cos x}{3} \left( \operatorname{sen}^2 x + \dots + \frac{4 \operatorname{sen}^2 x}{3} + \frac{4 \cdot 2}{3} \right)$ ; e  $\int dx \operatorname{sen}^6 x = C - \frac{\cos x}{6} \left( \operatorname{sen}^5 x + \frac{5}{4} \operatorname{sen}^3 x + \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2} \operatorname{sen} x \right) + \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} x$ .

114. Facciasi  $x = 90^\circ - z$ ; avremo  $dx = -dz$ ,  $\operatorname{sen} x = \cos z$ ,  $\cos x = \operatorname{sen} z$ , e  $\int dz \cos^n z =$

$$\frac{\operatorname{sen} z}{n} \left( \cos^{n-1} z + \frac{n-1}{n-2} \cos^{n-3} z + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)} \times \right.$$

$$\left. \cos^{n-5} z + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n-2)(n-4)(n-6)} \cos^{n-7} z + \dots + \frac{(n-1)(n-3)(n-5) \dots \cdot 2}{(n-2)(n-4) \dots \cdot 1} \right)$$

se  $n$  è impari; e se è pari, l'ultimo termine  $= + \frac{(n-1)(n-3) \dots \cdot 1}{n(n-2) \dots \cdot 2} z$ .

Per esempio,  $\int dy \cos^5 y = C + \frac{\operatorname{sen} y}{5} \left( \cos^4 y + \frac{4}{3} \cos^2 y + \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 1} \right)$ ; e  $\int dy \cos^6 y = C + \frac{\operatorname{sen} y}{6} \left( \cos^5 y + \frac{5}{4} \cos^3 y + \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2} \cos y \right) + \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} y$ .

115. Sia ora da integrarsi  $dy \operatorname{sen}^m y \cos^n y$ ; poichè  $d(\operatorname{sen}^p y \cos^q y) = p \cos^{q+1} y \operatorname{sen}^{p-1} y dy - q \cos^{q-1} y \operatorname{sen}^{p+1} y dy$  (28), sarà  $\int dy \operatorname{sen}^{p-1} y \cos^{q+1} y = \frac{1}{p} \operatorname{sen}^p y \cos^q y + \frac{q}{p} \int dy \cos^{q-1} y \operatorname{sen}^{p+1} y$ : dunque fatto  $p-1 = m$ ,  $q+1 = n$ , verrà  $\int dy \operatorname{sen}^m y \cos^n y = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} y \cos^{n-1} y}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int dy \cos^{n-2} y \operatorname{sen}^{m+2} y$ ; sostituendo  $1 - \cos^2 y$  in vece di  $\operatorname{sen}^2 y$  e trasponendo, si ha  $\int dy \operatorname{sen}^m y \cos^n y = \dots$ ,  $\frac{\operatorname{sen}^{m+1} y \cos^{n-1} y}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int dy \operatorname{sen}^m y \cos^{n-2} y = C + \frac{\operatorname{sen}^{m+1} y}{m+n} \left( \cos^{n-1} y + (n-1) \frac{\cos^{n-3} y}{m+n-2} + \frac{(n-1)(n-3) \cos^{n-5} y}{(m+n-2)(m+n-4)} + \dots + \dots \frac{(n-1)(n-3) \dots 2}{(m+n-2) \dots m+1} \right)$  se  $n$  è impari, o fino all'ultimo termine  $+ \frac{(n-1)(n-3) \dots 1}{(m+n)(m+n-2) \dots m+2} \int dy \operatorname{sen}^m y$ , se  $n$  è pari,

116. Facciasi  $y = 90^\circ - z$ ; avremo  $\int dz \cos^m z \operatorname{sen}^n z = C - \frac{\cos^{m+1} z}{m+n} \left( \operatorname{sen}^{n-1} z + \frac{(n-1) \operatorname{sen}^{n-3} z}{m+n-2} + \frac{(n-1)(n-3) \operatorname{sen}^{n-5} z}{(m+n-2)(m+n-4)} + \dots + \dots \frac{(n-1)(n-3) \dots 2}{(m+n-2) \dots m+1} \right)$  se  $n$  è impari, e fino al termine  $+ \frac{(n-1)(n-3) \dots 1}{(m+n)(m+n-2) \dots m+2} \int dz \cos^m z$ , se è pari.

Per esempio, la prima formula dà  $\int dy \cos^3 y$   
 $\text{sen}^5 y = C + \frac{1}{8} \text{sen}^6 y (\cos^2 y + \frac{1}{3}) = C + \frac{1}{8}$   
 $\text{sen}^6 y (\frac{4}{3} - \text{sen}^2 y)$ , e la seconda  $\int dy \cos^2 y \text{sen}^5 y$   
 $= C - \frac{1}{8} \cos^4 y (\text{sen}^4 y + \frac{2}{3} \text{sen}^2 y + \frac{1}{3})$ : Bisogna dunque che o questi due risultati siano eguali, o differiscan solo d'una quantità costante, che nel caso nostro è  $\frac{1}{24}$ , riducendo tutto in seni, osservando che  $\cos^4 = (1 - \text{sen}^2)^2$  e paragonando i due risultati.

117. Consideriamo ora i rotti nei quali entrano seni ec., e cominciamo dai più semplici  $\frac{dy}{\text{sen } y}$ ,

$$\frac{dy}{\cos y}, \frac{dy \cos y}{\text{sen } y}, \frac{dy \text{sen } y}{\cos y}, \frac{dy}{\text{sen } y \cos y}$$

$$\text{Il primo } \frac{dy}{\text{sen } y} = \frac{dy \text{sen } y}{\text{sen}^2 y} = \frac{-d \cos y}{1 - \cos^2 y} = (91)$$

$$= \frac{\frac{1}{2} d \cos y}{1 + \cos y} - \frac{\frac{1}{2} d \cos y}{1 - \cos y}; \text{ dunque } \int \frac{dy}{\text{sen } y} = \dots$$

$$\frac{1}{2} l \frac{1 - \cos y}{1 + \cos y} = \frac{1}{2} l \text{tang}^2 \frac{1}{2} y = l \text{tang} \frac{1}{2} y. \text{ Fatto } y =$$

$$90^\circ - z, \text{ avremo } dy = -dz, \text{ sen. } y = \cos z; \text{ dunque il secondo } \int \frac{dz}{\cos z} = -l \text{tang} (45^\circ - \frac{z}{2}) =$$

$$-l \cot (45^\circ + \frac{z}{2}) = l \text{tang} (45^\circ + \frac{z}{2}). \text{ Il terzo}$$

$$\int \frac{dy \cos y}{\text{sen } y} = \int \frac{d(\text{sen } y)}{\text{sen } y} = l \text{sen } y = \int dy \cot y.$$

$$\text{Il quarto } \int \frac{dy \text{sen } y}{\cos y} = \int \frac{-d(\cos y)}{\cos y} = -l \cos y$$

$$= l \sec y = \int dy \text{tang } y. \text{ Il quinto } \int \frac{dy}{\text{sen } y \cos y} =$$

$$\int \frac{dy}{\cos^2 y \frac{\sin y}{\cos y}} = \int \frac{dy}{\cos^2 y \tan y} = l \tan y .$$

118. Posto ciò, cerchiamo  $\int \frac{dy}{\sin^m y}$ . Poichè

$$(113) \int dy \sin^n y = -\frac{\cos y \sin^{n-1} y}{n} + \frac{n-1}{n} \times$$

$\int dy \sin^{n-2} y$ , facciamo  $n-2 = -m$  ovvero  $n =$

$$2 - m, \text{ ed avremo } \int \frac{dy}{\sin^{m-2} y} = \frac{\cos y \sin^{1-m} y}{m-2} +$$

$$\frac{1-m}{2-m} \int \frac{dy}{\sin^m y}; \text{ dunque } \int \frac{dy}{\sin^m y} = -\frac{\cos y}{(m-1)\sin^{m-1} y}$$

$$+ \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dy}{\sin^{m-2} y} = -\frac{\cos y}{m-1} \left( \frac{1}{\sin^{m-1} y} + \dots \right)$$

$$\frac{1}{(m-2)\sin^{m-3} y} + \frac{1}{(m-2)(m-4)\sin^{m-5} y} + \text{ec.} )$$

$$\text{fino al termine } + \frac{1}{(m-1)(m-3)\dots 2} \int \frac{dy}{\sin y} =$$

$$\frac{(m-2)(m-4)\dots 1}{(m-1)(m-3)\dots 2} l \tan \frac{1}{2} y \text{ se } m \text{ è impari, e fino}$$

$$a \frac{(m-2)(m-4)\dots 2 \cos y}{(m-1)(m-3)\dots 1 \sin y} \text{ se } m \text{ è pari .}$$

119. Suppongasi  $y = 90^\circ - z$ , e la formula

$$\text{precedente darà } \int \frac{dz}{\cos^m z} = \frac{\sin z}{m-1} \left( \frac{1}{\cos^{m-1} z} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{(m-2)\cos^{m-3} z} + \frac{1}{(m-2)(m-4)\cos^{m-5} z} + \text{ec.} \right)$$

$$\text{fino al termine } + \frac{1}{(m-1)(m-3)\dots 1} \frac{\sin z}{\cos z} \text{ se } m \text{ è}$$

$$\text{pari, e fino al termine } + \frac{1}{(m-1)(m-3)\dots 2} \int \frac{dz}{\cos z}$$

$$= \frac{(m-2)(m-4)\dots 1}{(m-1)(m-3)\dots 2} l \tan \left( 45^\circ + \frac{z}{2} \right) \text{ se } m \text{ è im-}$$

$$\text{pari. Per esempio } \int \frac{dy}{\cos^7 y} = \frac{\sin y}{6} \left( \frac{1}{\cos^6 y} + \frac{5}{4 \cos^4 y} \right.$$

$$\left. + \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2 \cdot \cos^2 y} \right) + \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} l \tan \left( 45^\circ + \frac{y}{2} \right).$$

120. È dunque facile integrar la formula  $\frac{dy \cos^m y}{\text{sen}^n y}$ ; poichè se  $m$  è un numero impari  $2k+1$ , si ha  $\frac{dy \cos^{2k+1} y}{\text{sen}^n y} = \frac{d(\text{sen } y)}{\text{sen}^n y} (1 - \text{sen}^2 y)^k$  che fatto  $\text{sen } y = z$ , diventa  $z^{-n} dz (1 - z^2)^k$  integrabile, giacchè qui  $k$  è numero intero e positivo (38). Se  $m$  è un numero pari  $2k$ , allora  $\frac{dy \cos^{2k} y}{\text{sen}^n y} = \frac{dy (1 - \text{sen}^2 y)^k}{\text{sen}^n y}$ , espressione che sviluppata s'integrerà per mezzo della formula  $\int \frac{dy}{\text{sen}^m y}$  (118).

Lo stesso sarebbe per  $\int \frac{dy \text{sen}^m y}{\cos^n y}$  e  $\int \frac{dy}{\text{sen}^m y \cos^n y}$ ; onde è facile d'integrar le differenziali ove entrano seni e coseni, quando esse son suscettibili d'integrazione.

### *Dell'Integrazione delle Differenziali a più Variabili.*

121. Se  $T$  sia una funzione di più variabili  $x, y, z$  ec., le differenze  $d^x T$  di  $T$  per  $x$ ,  $d^y T$  di  $T$  per  $y$ ,  $d^z T$  di  $T$  per  $z$  ec., le quali si hanno facendo variar solamente  $x$  o  $y$  o  $z$  ec., si chiamano *differenze parziali* di  $T$ : ed all'incontro le somme  $\int^x T dx$ ,  $\int^y T dy$ ,  $\int^z T dz$  ec. che si hanno integrando per  $x$  o per  $y$  o per  $z$  ec., cioè considerando come variabile la sola  $x$ , la sola  $y$ , la sola  $z$  ec., posson dirsi *somme parziali* di  $T$ . Tale è la notazione che adottiamo per le differenze parziali; ella ci sembra più espressiva e meno equivoca di quante ne sono in uso tra gli Scrittori, i più dei quali indicano con  $\frac{dT}{dx} dx$ ,  $\frac{dT}{dy} dy$ ,  $\frac{dT}{dz} dz$

ec. ciò che noi intendiamo per  $d^x T$ ,  $d^y T$ ,  $d^x d^y T$  ec. Si osservi intanto, come per principio fondamentale di simili differenze, che supposto  $T = \varphi(x, y)$

(1), sarà  $d^x T = \varphi(x + dx, y) - T$  (6) e  $d^y d^x T = \varphi(x + dx, y + dy) - d^y T - d^x T$ : parimente  $d^y T = \varphi(x, y + dy) - T$  e  $d^x d^y T = \varphi(x + dx, y + dy) - d^x T - d^y T$ ; dunque  $d^y d^x T = d^x d^y T$ .

122, Data pertanto una differenziale  $P dx + Q dy$  a due variabili in cui  $P, Q$  son funzioni di  $x, y$ , se  $T$  ne sia l'integrale, avremo  $dT = P dx + Q dy$ ; dunque supponendosi  $x, y$  indipendenti l'una dall'altra, si potranno formar le particolari equazioni  $d^x T = P dx$ ,  $d^y T = Q dy$ : e poichè  $d^y d^x T = dx d^y P$ ,  $d^x d^y T = dy d^x Q$  e  $d^y d^x T = d^x d^y T$  (121), sarà  $dx d^y P = dy d^x Q$  e  $\frac{d^y P}{dy} =$

$\frac{d^x Q}{dx}$ , cioè una differenziale  $P dx + Q dy$  sarà esatta o potrà integrarsi se la differenza parziale di  $P$  per  $y$  divisa per  $dy$  eguagli quella di  $Q$  per  $x$  divisa per  $dx$ .

Dunque 1° giacchè  $d^x T = P dx$ ,  $d^y T = Q dy$ , sarà  $d^x T + d^y T = P dx + Q dy = dT$ , e in generale da  $V$ , funzione di  $x, y$ , si ha sempre  $d^x V + d^y V = dV$ : 2° se varj la sola  $x$  e poi la sola  $y$ , sarà I°.  $T = \int^x P dx + C$ , II°.  $T = \int^y Q dy + C'$  e potrà esser  $C = \varphi(y)$ ,  $C' = \varphi(x)$ : 3° le due espressioni  $\int^x P dx$ ,  $\int^y Q dy$  avranno co-

*mnini* tutti i termini ove si trova  $xy$ ; onde i termini *non comuni* in quelle espressioni conterranno  $x$  senza  $y$  in  $\int^x P dx$ , ed  $y$  senza  $x$  in  $\int^y Q dy$

(13): 4° poichè dalla I. equazione si ha  $d^y T (= Q dy) = d^y \int^x P dx + dy \varphi'(y)$  (33), dalla II.  $d^x T (= P dx) = d^x \int^y Q dy + dx \varphi'(x)$ , sarà

(42)  $\varphi(y) = \int(Q dy - d^y \int^x P dx)$ ,  $\varphi(x) = \int(P dx - d^x \int^y Q dy)$ , e perciò III.  $T = \int^x P dx + \int(Q dy - d^y \int^x P dx)$ , IV.  $T = \int^y Q dy + \int(P dx - d^x \int^y Q dy)$ .

123. Per render più comode queste integrali, chiamo  $S$  i termini *comuni* o simili, e  $D, D'$  i *non comuni* o dissimili in  $\int^x P dx, \int^y Q dy$  (122. 3°), onde  $\int^x P dx = S + D, \int^y Q dy = S + D'$ . Sostituiti questi valori nella somma della III. e IV. equazione, verrà a  $T = D + D' + 2S + \int(P dx + Q dy) - \int(d^y D + d^y S + d^x D' + d^x S)$ : ma...  $\int(P dx + Q dy) = T, d^y S + d^x S = dS$  (122. 1°),  $d^y D = 0, d^x D' = 0$  (122. 3°); dunque  $T = D + D' + S$ , cioè l'integrale d'una differenziale esatta  $P dx + Q dy$  si ha dalle somme parziali di  $P dx$  per  $x$  e di  $Q dy$  per  $y$ , presi una sola volta i termini simili. Così giacchè la differenziale  $(3x^2 + 2bxy - 3y^2) dx + (bx^2 - 6xy + 3cy^2) dy$  è esatta



trovandosi  $\frac{d^y P}{dy} = \frac{d^x Q}{dx} = 2bx - 6y$ , integro  $3x^2 dx + 2byx dx - 3y^2 dx$  per  $x$  e viene  $x^3 + byx^2 - 3xy^2$ ; integro  $bx^2 dy - 6xy dy + 3cy^2 dy$  per  $y$  ed ho  $bx^2 y - 3xy^2 + cy^3$ : onde  $T = D + D' + S = x^3 + byx^2 - 3y^2 x + cy^3 + C$ . Ma poichè talora è necessaria qualche sostituzione per giungere all'integrale d'una differenziale esatta, ne porremo qui varj esempj.

I.  $\int \frac{x dy - y dx}{(x-y)^2}$ : fatto  $\frac{y}{x} = z$ ; si ha . . . .

$$\int \frac{x^2 dz}{(x-zx)^2} = \int \frac{dz}{(1-z)^2}.$$

II.  $\int \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$ : fatto  $\frac{x}{y} = z$  onde  $x^2 + y^2 = y^2(z^2 + 1)$ , si ha  $\int \frac{dz}{z^2 + 1}$ .

III.  $\int \frac{3xdx + ydx - xdy - 3ydy + 2dy \sqrt{a} \sqrt{x+y}}{2 \sqrt{x+y}}$ :

fatto  $\sqrt{x+y} = z$ , si ha  $\int [(2z - \sqrt{a}) dx + (2x - 3z^2 + 2z\sqrt{a}) dz]$ .

IV.  $\int \frac{(a+y) 3 dx + x dy + 9(a+y) x dy}{3x \sqrt[3]{(a+y)^2}}$ : fatto

$$\sqrt[3]{(a+y)} = z, \text{ si ha } \int \left( \frac{z dx}{x} + dz \sqrt[3]{x + 9z^3 dz} \right).$$

V.  $\int \frac{-(5xy + 6y^2) dx - (4xy + 6x^2) dy}{2x^2 y^2 \sqrt{x+y}}$ : fatto

I.  $xy = p$ , II.  $x+y = z^2$ , onde III.  $x dy + y dx = dp$ , IV.  $dx + dy = 2z dz$ , multiplico la I. per la IV. e la II. per la III. ed ho  $xy dx + xy dy = 2pz dz$ , ed  $x^2 dy + xy dx + xy dy + y^2 dx = z^2 dp$ ; dunque  $5xy dx + 5xy dy = 10pz dz$  e  $6x^2 dy + 6y^2 dx = 6z^2 dp - 6xy dx - 6xy dy = 6z^2 dp - 12pz dz$ ; dunque sommando queste

due equazioni,  $-(5xy + 6y^2)dx - (5xy + 6x^2)dy = 2pzdz - 6z^2dp$ , e la data integrale diviene  $\int \frac{pdz - 3zdp}{p^2}$ .

$$\text{VI. } \int \frac{xdy + y^2 dx}{(x^2 + y^2) \sqrt{(x^2 + y^2 - \frac{x^2 y^2}{a^2})}} : \text{ fatto}$$

I.  $xy = p$ , II.  $x^2 + y^2 = z^2$ , onde III.  $xdy + ydx = dp$ , IV.  $x dx + y dy = z dz$ , multiplico come sopra ed ho  $x^2 y dx + xy^2 dy = p z dz$ , ed  $x^3 dy + yx^2 dx + xy^2 dy + y^3 dx = z^2 dp$ ; dunque sottraendo queste due equazioni,  $x^3 dy + y^3 dx = z(z dp - p dz)$ , e la data integrale diviene  $\int \frac{z(z dp - p dz)}{z^2 \sqrt{(z^2 - \frac{p^2}{a^2})}}$ , ove fatto  $\frac{p}{z} = u$ , si ha . . . .

$$\int \frac{a du}{\sqrt{(a^2 - u^2)}}.$$

$$\text{VII. } \int \frac{(2x^2y - y^3)dx + (x^3 - 2xy^2)dy}{\sqrt{(x^2 - y^2)}} : \text{ fatto I.}$$

$xy = p$ , II.  $x^2 - y^2 = z^2$ , onde III.  $xdy + ydx = dp$ , IV.  $x dx - y dy = z dz$ , multiplico al solito ed ho  $yx^2 dx - xy^2 dy = p z dz$ , ed  $x^3 dy + yx^2 dx - xy^2 dy - y^3 dx = z^2 dp$ ; dunque sommando queste due equazioni, la data diviene  $\int (pdz + z dp)$ .

124. Data una differenziale a tre variabili  $Pdx + Qdy + Rdz$ , e chiamata la sua integrale  $T$ , sarà  $d^x T = Pdx$ ,  $d^y T = Qdy$ ,  $d^z T = Rdz$ ; dunque (122) perchè la differenziale sia completa o

possa integrarsi, bisogna che sia  $\frac{d^y P}{dy} = \frac{d^x Q}{dx}$ ,

$$\frac{d^z P}{dz} = \frac{d^x R}{dx}, \quad \frac{d^z Q}{dz} = \frac{d^y R}{dy}.$$

125. Avverandosi queste condizioni, l'integrale  $T = D + D' + D'' + S$  si otterrà integrando  $P dx$  per  $x$ ,  $Q dy$  per  $y$ ,  $R dz$  per  $z$ , presi tutti i termini diversi e una sola volta i simili (123). Così poichè in  $(2y^2x + 4bz^2x^3) dx + \left( \frac{y}{\sqrt{(y^2+z^2)}} + 3y^2 + 2x^2y \right) dy + (4z^3 + 2bx^4z + \dots \frac{z}{\sqrt{(y^2+z^2)}}) dz$  si avverano le tre condizioni, viene  $\int^x P dx = y^2x^2 + bz^2x^4$ ,  $\int^y Q dy = \sqrt{(y^2+z^2)} + y^3 + x^2y^2$ ,  $\int^z R dz = z^4 + bx^4z^2 + \sqrt{(y^2+z^2)}$ ; onde  $T = D + D' + D'' + S = y^2x^2 + bz^2x^4 + \sqrt{(y^2+z^2)} + y^3 + z^4 + C$ . Ora non è difficile di trovar le condizioni che debbono aver le differenziali di un più gran numero di variabili, e d'integrare quando esse hanno luogo.

126. Posto ciò, vediamo come si integrano le differenze seconde. Supposta  $P$  una funzione di  $x$ , differenzio  $P dx$  ed ho  $P ddx + dx dP$ ; e poichè  $P$  è funzione di  $x$ , fatto  $dP = Q dx$ , verrà  $P ddx + Q dx^2$ . Dunque  $dP = Q dx$  è la condizione necessaria perchè una differenziale del second'ordine  $P ddx + Q dx^2$  sia integrabile: se la condizione ha luogo, verrà  $\int (P ddx + Q dx^2) = P dx$ . Così  $m x^{m-1} ddx + m(m-1)x^{m-2} dx^2$  è integrabile, poichè  $dP = m(m-1)x^{m-2} dx = Q dx$ , e l'integrale è  $m x^{m-1} dx$ , che nuovamente integrata dà  $x^m + C$ .

127. Se  $dx$  è stata supposta costante, la differenziale è  $Q dx^2$ ; ora poichè  $dx$  è costante, si avrà  $\int Q dx^2 = dx \int Q dx +$  la costante  $C dx$ .

Per esempio  $\int dx^2(1-x^2) = dx \int (dx - x^2 dx)$   
 $= dx(x - \frac{x^2}{2}) + C dx$ , e nuovamente inte-  
 grando,  $Cx + C' + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$ .

128. Sia una differenzial generale del second' ordine  $P ddx + Q dx^2$ ; differenziandola si avrà  $P d^3 x + (dP + 2Q dx) ddx + dQ dx^2$ : dunque reciprocamente data una differenzial generale del terz' ordine  $R d^3 x + S dx ddx + T dx^2$ , si avrà  $R = P$ ,  $S dx = dP + 2Q dx$ ,  $T dx = dQ$  e perciò  $Q = \int T dx$ ; sostituiti i valori di  $P, Q$

nella seconda equazione, verrà  $\frac{S}{2} - \frac{dR}{2 dx} =$

$\int T dx$ , onde se questa equazione si avveri, la proposta differenziale sarà integrabile, e l'integrale sarà  $R ddx + dx^2 \int T dx$ . Per esempio  $x^2 d^3 x + 2x^3 dx ddx + (3x^2 - 1) dx^2$  ha la condizione necessaria per essere integrabile, ed il suo integrale è  $x^2 ddx + dx^2(x^2 - x)$ .

129. Se  $dx$  è costante, si avrà  $dx^2 \int T dx + C dx^2$ ; l'integrale di questa differenziale sarà dunque  $dx \int (dx \int T dx) + Cx dx + C' dx$ , e l'integrale di questa,  $\int (dx \int dx \int T dx) + \frac{Cxx}{2} + C'x + C''$ . Così  $dx^2 \int x^m dx = \frac{x^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \frac{Cxx}{2} + C'x + C''$ . Nella maniera medesima si troverebbero le integrali delle differenziali più elevate e le condizioni dei loro coefficienti.

M

130. Consideriamo ora le differenziali del second' ordine a due variabili, espresse generalmente per  $Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdx dy + Tdy^2$ . Per trovar le condizioni dei coefficienti  $P, Q, R$  ec. prendo la differenziale di  $A dx + B dy$ , nella quale  $A$  e  $B$  son funzioni qualunque di  $x, y$ , ed ho  $A ddx + B ddy + dA dx + dB dy$ , che fatto  $dA = d^x A + d^y A, dB = d^x B + d^y B$ , diviene  $A ddx + B ddy + \frac{d^x A}{dx} \cdot dx^2 + \left( \frac{d^y A}{dy} + \frac{d^x B}{dx} \right) dx dy + \frac{d^y B}{dy} \cdot dy^2$ ; onde  $P = A, Q = B$ , e

perciò  $R = \frac{d^x P}{dx}, S = \frac{d^y P}{dy} + \frac{d^x Q}{dx}$ , e  $T = \frac{d^y Q}{dy}$ .

Verificandosi queste condizioni, l'integrale sarà  $P dx + Q dy$ : tanto avviene in  $y ddx - x ddy$  il cui integrale è  $y dx - x dy$ .

131. Se  $dx$  si suppone costante, dovrà integrarsi  $Qddy + Rdx^2 + Sdx dy + Tdy^2$ , che nascendo come prima da  $A dx + B dy$ , darà  $Q =$

$B, R = \frac{d^x A}{dx}, S = \frac{d^y A}{dy} + \frac{d^x Q}{dx}, T = \frac{d^y Q}{dy}$ ; dun-

que  $d^x A = R dx, A = \int^x R dx, A dx = dx$

$\int^x R dx$ , e le condizioni per integrare saranno

$S = \frac{d^x Q}{dx} + \frac{d^y \int^x R dx}{dy}, T = \frac{d^y Q}{dy}$ ; quindi l'integrale  $A dx + B dy$  diverrà  $dx \int^x R dx + Q dy$

+  $C dx$ . Per esempio,  $6x^2 dx dy + 6xy dx^2 + x^2 ddy$ , nella quale  $dx$  è costante, ha le condizioni precedenti e la sua integrale è  $x^3 dy + 3x^2 y dx + C dx$  che integrando di nuovo, dà  $x^3 y + Cx$

+ C'. Nella maniera medesima si troverebbero le 91 FIG. condizioni per un maggior numero di variabili.

### *Applicazioni del Calcolo Integrale.*

Le applicazioni del Calcolo Integrale si estendono a tutte le parti delle Matematiche; ma per limitarci a quelle che son puramente geometriche e che servono di fondamento all'altre, determineremo le formole delle quadrature e delle rettificazioni delle curve, le solidità dei corpi, quelle dei solidi di rivoluzione, come altresì le lor superficie (20), e finiremo con alcuni usi del metodo inverso delle tangenti.

#### *Della quadratura delle Curve.*

132. Sia la curva  $AM$  con l'asse  $AP$  e con l'ordinata  $PM$  al punto  $M$ ; per trovar la quadratura dello spazio  $AMP$  conduco un'altra ordinata  $mp$ , e la linea  $Mr$  parallela a  $Pp$ ; allora ho la superficie  $MmpP = MP \times Pp + Mmr$ , e se il punto  $m$  si avvicini al punto  $M$ , il triangolo  $Mmr$  diminuirà sempre più, ma non potrà diventare zero se il punto  $m$  non cada sul punto  $M$ ; allora  $MmpP$  svanirà e sarà la differenziale dello spazio  $AMP$  (16); onde fatto  $Pp = dx$ , avremo  $d(AMP) = y dx \times \text{sen } \varphi$  se le coordinate facciano un angolo  $P = \varphi$  o, se l'angolo  $P$  sia retto,  $d(AMP) = y dx$  (4); e però  $AMP = \int y dx + C$  ed  $AQM = \int x dy + C$ . 23,

133. Es. I. Sia un quadrante di circolo descritto col centro  $A$  e col raggio  $a$ ; si avrà  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$  e  $\int y dx = AQMP = \int dx \sqrt{aa - xx} +$  24.

24.  $C = C + ax - \frac{x^2}{2 \cdot 3 a} - \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 4 \cdot 5 a^2} - \frac{1 \cdot 3 x^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 a^3} - \dots$   
 $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 x^5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 a^4} - \text{cc.}$  Fatto  $x = 0$ , sarà  $AQMP = 0$ , e però  $C = 0$ ; dunque  $AQMP = ax - \frac{x^2}{6a} - \frac{x^3}{40a^2} - \frac{x^4}{112a^3} - \text{cc.}$

II. Nell' ellisse,  $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ ; dunque  
 $\int y dx = \frac{b}{a} (ax - \frac{x^2}{6a} - \frac{x^3}{40a^2} - \text{cc.})$ .

23. III. Nella parabola,  $y dx = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$  e  $\int y dx = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} xy$ , cioè lo spazio  $APM$  è due terzi del rettangolo circoscritto. L' equazione alle parabole di tutti i gradi è  $y^m = x^n a^{m-n}$ ; dunque  $mly = nlx' + (m-n)la$ ; dunque  $\frac{m dy}{y} = \frac{n dx}{x}$ , ovvero  $m:n :: y dx : x dy :: \int y dx : \int x dy :: AMP : AMQ$ ; onde lo spazio  $AMP$  sta al rettangolo circoscritto  $APMQ :: m : m+n$ .

25. IV. Nell' iperbola equilatera,  $xy = aa$  ed  $y dx = \frac{a a dx}{x}$ ; dunque  $\int y dx = aalx + C$ . Se si vogliono prendere gli spazi dall' origine  $A$ , lo spazio sarà  $= 0$  quando  $x = 0$ ; dunque  $C = -aal0 = -\infty$ , e lo spazio  $Q'APMN = aalx - aal0 = \infty$ . Se  $x = AD$ , allora lo spazio  $Q'ADBN = aala - aal0$ ; dunque  $BDPM = aalx - aala = aal \frac{x}{a}$ .

14. V. Nella cicloide  $AEB$ ,  $x dy = dx \sqrt{2ax - x^2}$  (55) e  $\int x dy (= AGR)$  (132)  $= \int dx x$

$\sqrt{(2ax - x^2)} = ALQP' (55. 132)$ ; dunque tut-  
to lo spazio  $AED$  eguaglia tutto il semicircolo  $14.$   
 $AQB'$  ec.

VI. Nella cissoide,  $y = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$  e  $\int y dx =$   
 $AKMPA = \int x^{\frac{3}{2}} dx (a-x)^{-\frac{1}{2}}$ . Ora  $\int x^{\frac{3}{2}} dx (a-x)^{-\frac{1}{2}}$   $26.$   
 $= AC ONP (133)$ ; e se si riduca  $\int x^{\frac{3}{2}}$   
 $dx (a-x)^{-\frac{1}{2}}$  a  $\int x^{\frac{3}{2}} dx (a-x)^{-\frac{3}{2}}$ , si troverà (89)  
 $\int x^{\frac{3}{2}} dx (a-x)^{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} (a-x)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \int x^{\frac{3}{2}} dx$   
 $(a-x)^{-\frac{3}{2}}$ . Dunque  $\int x^{\frac{3}{2}} dx (a-x)^{-\frac{1}{2}} = 3 \int x^{\frac{3}{2}}$   
 $dx (a-x)^{-\frac{3}{2}} - 2x(ax - xx)^{\frac{1}{2}}$ , ovvero  $APMKA$   
 $= 3 AC ONP = 4 ANP = 3 AC ONA - ANP$ .  
Dunque poichè quando  $x = a$  il triangolo  $ANP$   
svanisce e il segmento  $AC ONA$  si cangia nel se-  
micircolo  $ACNB$ , lo spazio infinitamente lungo  
 $MKABQ$  è triplo del semicircolo genitore:

VII. Nella logaritmica,  $y dx = A dy (45')$ , e  $27.$   
 $\int y dx = BAPM = Ay + C$ : ma quando  $y = 1.$   
 $= AB$ , lo spazio  $ABMP$  diventa nullo; dunque  
 $C = -A$ , e  $ABMP = A(y - 1) =$  al rettan-  
golo  $OIQM$ . Se si fa  $y = 0$ , si avrà lo spazio  
infinitamente lungo  $BXYA = -A =$  al rettangolo  
 $PQIT$ .

VIII. Sia una curva  $BM$  che abbia per equa-  
zione  $y = x^2$ ; si avrà (110) lo spazio  $ABMP = 28.$   
 $\int x^2 dx = x \left( 1 - \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{3^2} - \frac{x^3}{4^2} + ec. \right) +$   
 $x x \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{3^2} + \frac{x^2}{4^2} - ec. \right) + \frac{x^2 2x}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{3^2} + \frac{x^2}{4^2} - ec. \right)$



FIG.

94

28.  $\frac{x}{4^2} + \frac{x^2}{5^2} - \text{ec.} ) + \text{ec.}$ ; e quando  $x = AP =$

$PM = 1$ , si ha lo spazio  $ABMP = 1 - \frac{1}{2^2} +$

$\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \text{ec.} = 0,783430510712 \text{ ec.}$

29. IX. Sia la curva dei seni  $AM A' M'$  ec. la cui equazione è  $x = \text{arc. sen } y$  ovvero  $y = \text{sen } x$ ; si

avrà  $APM = \int dx \text{ sen } x = C - \cos x$ . Facciamo

$x = 0$ , e sarà  $C = 1$ ,  $APM = 1 - \cos x$ . Sia  $x = 180^\circ = c$ , si avrà  $AM A' = 2 =$  al doppio del

quadrato del raggio. Se si suppone  $x = 2c = A A''$ , si avrà lo spazio  $AM A' A'' + A' M A'' A''' = 0$ , il che

è chiaro, poichè l'uno è positivo e l'altro negativo. In generale se  $x = 2kc$ , lo spazio sarà zero;

30. e se  $x = (2k + 1)c$ , lo spazio sarà  $= 2$ . Posta l'origine degli  $x$  nel punto  $A$ , medio di  $A' A''$ , si avrà  $y = \cos x$ ; onde lo spazio  $ABMP = \text{sen } x$ , lo spazio  $ABA' A'' = 1$ , e  $A' M B A' A'' = 0$ , o non attendendo alle sue due parti positiva e negativa,  $A' M B A' A'' = 2$ .

31. 134. Se l'ordinate parton da un punto fisso  $C$ , ecco come può trovarsi la quadratura della curva. Condotti i due raggi  $CM, Cm$ , si descriverà col centro  $C$  e col raggio  $CM$  l'arco  $Mr$ ; allora il

triangolo  $CMm = \frac{Mr \times CM}{2} + Mmr$ ; ma quando

il punto  $m$  è infinitamente vicino ad  $M$ , lo spazio  $Mmr$  svanisce, e resta  $d(COMC) = \frac{Mr \times CM}{2}$ ;

se dunque  $Mr = dx$ ,  $CM = y$ , si avrà  $COMC = \frac{1}{2} \int y dx + C$ .

Chiamando  $\phi$  l'angolo che fa  $CM$  con una linea fissa che parte dal punto  $C$ , o l'arco che mi-

sura quest' angolo in un circolo il cui raggio è  $r$ , si avrà  $Mr = y d\varphi$  e  $COMC = \frac{1}{2} \int y^2 d\varphi + C$ .

135. Esemp. I. Sia la concoide  $AM$ , il suo polo  $P$ ,  $PM = y$ ,  $QM = a$ ,  $PB = b$ , e l'angolo  $APM = \varphi$ ; si avrà  $PQ = \frac{b}{\cos \varphi}$ , ed  $y = \frac{b}{\cos \varphi} \pm a$ ; dunque lo spazio  $APM = \frac{1}{2} \int \frac{b^2 d\varphi}{\cos^2 \varphi} \pm ab \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} + \int \frac{a^2 d\varphi}{2} = \frac{b^2 \text{tang } \varphi}{2} \pm ab l \text{tang} (45^\circ + \frac{\varphi}{2}) + \frac{a^2 \varphi}{2}$  senza costante; dunque poichè  $PBQ = \frac{b^2 \text{tang } \varphi}{2}$ , sarà  $\pm APM \mp PBQ = ABQM = ab l \text{tang} (45^\circ + \frac{\varphi}{2}) \pm \frac{a^2 \varphi}{2}$ , ed  $AMM = 2ab l \text{tang} (45^\circ + \frac{\varphi}{2})$ .

II. Nella cissoide se si fa  $AM = y$ ,  $MAB = \varphi$ , sarà  $AQ = \frac{a}{\cos \varphi}$ ,  $AO = MQ = a \cos \varphi$ ,  $y = \frac{a}{\cos \varphi} - a \cos \varphi = \frac{a \text{sen}^2 \varphi}{\cos \varphi}$ , ed  $y^2 = \frac{a^2 (1 - \cos^2 \varphi)^2}{\cos^2 \varphi} = \frac{a^2}{\cos^2 \varphi} - 2a^2 \cos^2 \varphi$ ; dunque  $AKMOA = \frac{a^2}{2} \int \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} - a^2 \int d\varphi + \frac{a^2}{2} \int d\varphi \cos^2 \varphi = \frac{a^2}{2} (\text{tang } \varphi + \frac{\text{sen } 2\varphi}{4} - \frac{3\varphi}{2})$  (114). Dunque  $AKMPA = AOMP (= \frac{y^2 \text{sen } \varphi \cos \varphi}{2}) - AKMOA = \frac{a^2}{2} (\frac{3\varphi}{2} - \frac{5 \text{sen } 2\varphi}{4} + \text{sen } \varphi \cos^3 \varphi)$ . Ma  $\text{sen } \varphi \cos^3 \varphi = \frac{\text{sen } 4\varphi}{4} + \text{sen}^3 \varphi \cos \varphi = \frac{\text{sen } 4\varphi}{4} + \text{sen } \varphi \cos \varphi - \text{sen } \varphi \cos^3 \varphi$  e però  $\text{sen } \varphi \cos^3 \varphi$

FIG. 96

26. 
$$= \frac{1}{4} \left( \frac{\text{sen } 4\varphi}{2} + \text{sen } 2\varphi \right); \text{ dunque } AKMPA =$$

$$\frac{a^2}{2} \left( \frac{3\varphi}{2} - \text{sen } 2\varphi + \frac{\text{sen } 4\varphi}{8} \right). \text{ Fatto } \varphi = 90^\circ = \frac{\pi}{2},$$
 si ha  $\text{sen } 2\varphi = 0 = \text{sen } 4\varphi$ , e poichè  $\frac{a^2\varphi}{4}$  è il semicircolo  $AONB$ , sarà lo spazio infinitamente lungo  $MKABQ = \frac{3a^2\varphi}{4} = 3AONB$ .

31. III. Nella spirale d'Archimede,  $AGFBN = x$ ,  $AGFBA = a$ ,  $CM = y$ ,  $CA = a$ ,  $Mr = \frac{y dx}{a}$ ,  $d(COMC) = \frac{Mr : CM}{2} (134) = \frac{y^2 dx}{2a}$ ,  
 $x = \frac{cy}{a}$ ,  $dx = \frac{c dy}{a}$ ; dunque  $COMC = \frac{c y^3}{2 \cdot 3 \cdot a^2}$  senza costante; onde fatto  $y = a$ , lo spazio  $COMAC = \frac{ac}{2 \cdot 3} =$  al terzo di tutto il circolo.

Non si è preso quì l'integrale  $\frac{1}{2} \int y^2 d\varphi$  perchè questo non può estendersi al di là di  $\varphi = 360^\circ$ , altrimenti i triangoli elementari  $\frac{1}{2} y^2 d\varphi$  conterrebbero i già sommati, difetto a cui può supplirsi calcolando i trapezj elementari compresi tra due spire vicine. Lo stesso inconveniente ha luogo per la formula ordinaria  $\int y dx$  se più ordinate corrispondano alla stessa ascissa.

33. IV. Nella spirale iperbolica scemando  $x$  mentre cresce  $y$ , sarà  $CN(a) : Nn(-dx) :: CM(y) : Mr = -\frac{y dx}{a}$ ; dunque  $COMC = \frac{1}{2} \int \frac{-y^2 dx}{a}$ ; ma  $xy = ab$ , e però  $-y dx = x dy = \frac{ab dy}{y}$ ; dunque  $-\frac{y^2 dx}{a} = b dy$ , e lo spazio compreso tra la curva e due ordinate  $= \frac{1}{2} by + C$ .

*Della Rettificazione delle Curve.*

136. Se sia il punto  $m$  infinitamente vicino ad  $M$ , sarà  $Mm = ds$  la differenziale dell'arco  $AM = s$ , e si avrà  $dAM = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ; onde  $AM = s = \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + C$  o l'ordinate sieno parallele o partano da un punto fisso. 34.

137. Es. I. Nel circolo,  $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ ,  $dy^2 = \frac{x^2 dx^2}{a^2 - x^2}$  e  $QM = \int \frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = (99) x^{24} + \frac{x^3}{2 \cdot 3 a^2} + \frac{1 \cdot 3 x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5 a^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 a^6} + \text{ec.}$ ; dunque l'arco  $MB = y + \frac{y^3}{2 \cdot 3 a^2} + \frac{1 \cdot 3 y^5}{2 \cdot 4 \cdot 5 a^4} + \text{ec.}$  come si trova nella trigonometria.

II. Nella parabola,  $AM = \int dy \sqrt{(1 + \frac{4y^2}{p^2})}$  23.  
 $= \int \frac{2dy}{p} \sqrt{(\frac{p^2}{4} + y^2)}$ : ma abbiám trovato (98)  $\int dx \sqrt{(x^2 + a^2)} = C + \frac{x}{2} \sqrt{(x^2 + a^2)} + \frac{a^2}{2} l[x + \sqrt{(a^2 + x^2)}]$ ; dunque  $AM = C + \frac{y}{p} \sqrt{(y^2 + \frac{p^2}{4})} + \frac{p}{4} l[y + \sqrt{(y^2 + \frac{p^2}{4})}]$ . Facciamo  $y = 0$ , e sarà  $C = -\frac{p}{4} l \frac{p}{2}$ ; dunque  $AM = \dots$   
 $\frac{y}{p} \sqrt{(y^2 + \frac{p^2}{4})} + \frac{p}{4} l \left[ \frac{y + \sqrt{(y^2 + \frac{p^2}{4})}}{p} \right]$ .

138. Può osservarsi che se col centro  $A$  e col semiasse maggiore  $BA = \frac{p}{2}$  si descrive un'iperbole 34.  
 la equilatera  $BN'$ , lo spazio  $ABN'Q$  sarà  $\int x dy$

N

23.  $(132) = \int dy \sqrt{y^2 + \frac{p^2}{4}}$ ; dunque  $AM = \frac{2}{p} \int dy \sqrt{y^2 + \frac{p^2}{4}} = \frac{2}{p} \times ABN'Q$  e però  $AM \times \frac{p}{2} = ABN'Q$ ; onde la rettificazione della parabola dipende dalla quadratura dell'iperbola e reciprocamente.

III. Nell'ellisse supposto il semiasse maggiore  $= 1$ , sarà  $y = b \sqrt{1 - x^2}$ , e fatto  $\sqrt{1 - b^2} = c$ , cioè la semidistanza dei fuochi  $= c$ , si ha  $BM = \int \frac{dx \sqrt{1 - c^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}$ , integrale che non può aversi con le regole precedenti. Bisogna dunque ridurre in serie: ma per maggior semplicità riducendo solamente  $\sqrt{1 - c^2 x^2}$ , avremo  $BM = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \times$

$$\left( 1 - \frac{c^2 x^2}{2} - \frac{c^4 x^4}{2.4} - \frac{1.3 c^6 x^6}{2.4.6} - \frac{1.3.5 c^8 x^8}{2.4.6.8} - \text{ec.} \right)$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{c^2}{2} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{c^4}{2.4} \times \dots$$

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1.3 c^6}{2.4.6} \int \frac{x^6 dx}{\sqrt{1 - x^2}} - \text{ec.}$$

Ora riducendo le integrali di ciascun termine a  $\int dx (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

(87) fatto  $k = -\frac{1}{2}$ ,  $m = 2$ ,  $a = 1$ ,  $b = -1$ ,  $n = 2, 4, 6, \text{ec.}$   $i = 1, 2, \text{ec.}$   $p = 0$ , si avrà  $BM =$

$$\left( 1 - \frac{c^2}{2^2} - \frac{3c^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{3^2 \cdot 5 c^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} - \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 c^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \text{ec.} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + c^2 x (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{2^2} + \dots \right]$$

$$\frac{3c^2}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{3^2 \cdot 5 c^4}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \text{ec.} \left] + c^4 x^3 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \times \right.$$

$$\left[ \frac{1}{2 \cdot 4^2} + \frac{3 \cdot 5 c^2}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{3 \cdot 5^2 \cdot 7 c^4}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} + \text{ec.} \right]: \text{ ma DN}$$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \quad (137)$ ; dunque son note tutte le quantità di questa serie di cui è facile conoscer la legge.

Sia  $x = 1$ ; si avrà  $AMB = (1 - \frac{c^2}{2^2} - \frac{3c^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{3^2 \cdot 5c^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} - \text{ec.}) AND$ . Dunque la periferia dell'ellisse è a quella del circolo circoscritto  $:: 1 - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{c^2}{a^2} - \frac{1 \cdot 1^2}{2^2 \cdot 4^2} \cdot \frac{3c^4}{a^4} - \frac{1 \cdot 1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cdot \frac{5c^6}{a^6} - \text{ec.} :: 1$  (supposto  $a$  il semiasse maggiore).

Questa serie sarà convergentissima quando i fuochi saran vicini. Per esempio se  $c = \frac{a}{10}$ , la circonferenza dell'ellisse sarà a quella del circolo circoscritto  $:: 0,997495292861261 :: 1$ .

139. La rettificazione dell'iperbola si ha quasi collo stesso metodo, e può vedersi nelle Memorie di Berlino an. 1746 e seg. la maniera di ridurre alla rettificazione di queste due curve l'integrali d'un gran numero d'altre differenziali.

IV. L'equazione alla seconda parabola cubica è  $y^3 = ax^2$ ; dunque  $s = \int dy \sqrt{(1 + \frac{9y}{4a})} = \dots$   
 $\frac{8}{27} a (1 + \frac{9y}{4a})^{\frac{3}{2}} + C(39)$ ; facendo  $y=0$ , si ha  $C = -\frac{8}{27} a$ , e un arco di questa curva preso dall'origine  $= \frac{8}{27} a [(1 + \frac{9y}{4a})^{\frac{3}{2}} - 1] \quad (54)$ .

V. Nella cicloide,  $dy = dx \sqrt{(\frac{a-x}{x})} \quad (55)$  86.  
 preso  $AB = a$ ; dunque  $s = \int dx \sqrt{\frac{a}{x}} = 2\sqrt{ax} = 2AN \quad (56)$ .

VI. Nella logaritmica,  $y dx = a dy$ ,  $s = \int \frac{dy}{y} \sqrt{y^2 + a^2}$ ; se  $\sqrt{y^2 + a^2} = z$ , si avrà  $\frac{dy}{y} = \frac{z dz}{z^2 - a^2}$  ed  $s = \int \frac{z dz}{z^2 - a^2} = z + \frac{a}{2} \log \frac{z - a}{z + a}$  (91), ovvero moltiplicando i due termini del rotto logaritmico per  $z + a$  ed estraendo la radice,  $z + a \times \log \left( \frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{z + a} \right) = \sqrt{y^2 + a^2} + \dots$   
 $a \log \left( \frac{y}{a + \sqrt{y^2 + a^2}} \right) = \sqrt{y^2 + a^2} - \dots$   
 $a \log \left( \frac{a + \sqrt{aa + yy}}{y} \right) + C$ , espressione d'un arco qualunque di logaritmica nella quale  $C$  è facile a determinarsi (133. VI.).

31. VII. Nella spirale d'Archimede,  $M r = \frac{y dx}{a}$  (135),  $M m = d(COM) = \sqrt{dy^2 + \frac{y^2 dx^2}{a^2}}$ ; ma  $x = \frac{cy}{a}$ ; dunque  $COM = \int \frac{c dy}{a^2} \left( yy + \frac{a^4}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}$ . Descriviamo una parabola  $CN'$  il cui parametro  $= \frac{2a^2}{c}$ ; avremo, facendo  $CQ = CM = y$  e conducendo l'ordinata  $QN'$ ,  $CN' = \int \frac{c dy}{a^2} \sqrt{\left( \frac{a^4}{c^2} + yy \right)}$  (137); dunque  $CN' = COM$ , onde regna dell'analogia tra la spirale di Archimede e la parabola.

33. VIII. Nella spirale iperbolica l'equazione  $x = \frac{ab}{y}$  dà  $dx = -\frac{ab dy}{y^2}$  ed  $rM (= -\frac{y dx}{a}$  (135))  $= \frac{b dy}{y}$ , onde  $mM^2 (= r m^2 + r M^2) = dy^2 + \frac{b^2 dy^2}{y^2}$ , e l'arco  $COM = \int \frac{dy}{y} \sqrt{bb + yy}$ . Dunque descritta una logaritmica  $NK$  la cui suttan-

101

gente  $\equiv b \equiv a$  quella della spirale (47) si avrà (Esem. VI.)  $MOC \equiv$  all' arco infinito  $NK$ , prendendo l'ordinata  $NK \equiv CQ \equiv CM$ . Ma per l'espressione d'un arco di spirale  $\sigma$  di logaritmica compreso tralle due ordinate  $y, y'$ , si troverà  $\sqrt{(b^2 + y^2)} - \sqrt{(b^2 + y'y')} + b \log \frac{y[b + \sqrt{(b^2 + y'^2)}]}{y' [b + \sqrt{(b^2 + y^2)}]}$ . FIG. 33.

IX. Nella spirale logaritmica  $\cos Mmr(\sigma)$ :  $mr(dy) : r : Mm \equiv \frac{dy}{y}$ ; dunque  $ADM \equiv \frac{y}{e} \equiv MT$  per esser simili i triangoli  $mrM, MAT$ . 14.

### Della misura delle Solidità.

140. Un solido da misurarsi s'immagini decomposto in un'infinità di piccoli strati paralleli. Chiamando  $s$  la base d'uno di essi,  $dx$  la sua altezza o una parte infinitesima della distanza  $x$  dello strato dal vertice, sarà  $\int s dx + C$  la sua solidità, e solo dovrà esprimersi  $s$  per  $x$ .

141. Per esempio, sia  $B$  la base del solido;  $A$  la sua altezza; posto che le basi degli strati sieno proporzionali a una potenza  $m$  della loro distanza dal vertice, si avrà  $A^m : B :: x^m : s \equiv \frac{Bx^m}{A^m}$ ; dunque l'elemento d'una porzione del solido sarà  $\frac{Bx^m dx}{A^m}$ , ed integrando  $\int \frac{Bx^m dx}{A^m} \equiv \frac{Bx^{m+1}}{(m+1)A^m} + C$ , o senza costante, se la porzione cominci dal vertice. Onde il solido intero  $\equiv \frac{BA}{m+1}$ , poichè allora  $x \equiv A$ : perciò la solidità delle piramidi, in cui  $m \equiv 2$ , è  $\frac{BA}{3}$ .



FIG.

194

39.

III. Nell'ellisse fatto  $a$  il semiasse di rivoluzione, ne che sarà il trasverso nell'ellissoide allungata e il conjugato nella compressa, e posto ne' due diversi casi  $\pm a^2 \mp b^2 = c^2$ , si avrà  $n = \frac{bc}{a^2} \sqrt{\left(\frac{a^4}{c^2} \mp x^2\right)}$ , e però se la curva giri o intorno ad  $AA$  o

intorno ad  $EE$ , si avrà  $\frac{2bc\pi}{a^2} \int dx \sqrt{\left(\frac{a^4}{c^2} \mp x^2\right)}$ .

Nel primo caso, descritto col raggio  $CD = \frac{a^2}{c}$  un arco  $DBN$ , la superficie fatta da  $AM$  intorno ad  $AA$  sarà (133)  $\frac{2bc\pi}{a^2} \times ABNP$ : ma nel secondo,

determinata  $C$  col porre  $x = 0$ , sarà (98)  $\frac{bc\pi x}{a^2} \sqrt{\left(\frac{a^4}{c^2} + x^2\right)} + \frac{a^2 b \pi}{c} \int \frac{c}{a^2} \left[ x + \sqrt{\left(\frac{a^4}{c^2} + x^2\right)} \right]$ .

40.

IV. Nell'iperbola fatto  $a$  il semiasse di rivoluzione che può essere o il trasverso o il conjugato, e posto  $a^2 + b^2 = c^2$ , si avrà  $n = \frac{bc}{a^2} \sqrt{\left(x^2 \mp \frac{a^4}{c^2}\right)}$ , e però se la curva giri o intorno a  $CA$  o

intorno a  $CQ$ , si avrà  $\frac{2bc\pi}{a^2} \int dx \sqrt{\left(x^2 \mp \frac{a^4}{c^2}\right)}$ .

Nel primo caso determinata  $C$  col fare  $x = a$ , la superficie cercata sarà (97)  $\frac{bc\pi x}{a^2} \sqrt{\left(x^2 - \frac{a^4}{c^2}\right)}$

$- b^2 x - \frac{a^2 b \pi}{c} \int \frac{cx + \sqrt{(c^2 x^2 - a^4)}}{a(c+b)}$ : ma nel secondo

determinata  $C$  col fare  $x = 0$ , sarà (98)  $\frac{bc\pi x}{a^2}$

$\sqrt{\left(x^2 + \frac{a^4}{c^2}\right)} + \frac{a^2 b \pi}{c} \int \left[ \frac{cx}{a^2} + \sqrt{\left(1 + \frac{c^2 x^2}{a^4}\right)} \right]$ .

*Del Metodo inverso delle Tangenti, e dell'Integrazione dell'Equazioni differenziali.*

145. Si chiama *Metodo inverso delle Tangenti* quello che insegna a trovar l'equazione d'una curva in cui si conosca una proprietà qualunque delle tangenti. Cerchisi per es. la curva in cui la subnormale è costante ed  $= a$ . Poichè (43) l'espressione generale di questa linea è  $\frac{y dy}{dx}$ , avremo  $\frac{y dy}{dx} = a$ ,  $y dy = a dx$ ; e integrando, per esprimere che la proprietà data conviene a tutti i punti della curva, si ha  $\frac{1}{2} y^2 = ax$ , cioè  $y^2 = 2a(x + C)$ , equazione alla parabola che risolve il problema proposto. E' dunque chiaro che questo *Metodo* conduce alla soluzione di equazioni differenziali che diconsi *del primo, del secondo* ec. *ordine* se contengono le differenze prime, seconde ec; e son poi *lineari, quadratiche, subicbe* ec. se le variabili vi si trovano alla prima, seconda, terza ec. dimensione.

146. Sieno  $P, Q$  due funzioni di  $x, y$ ; tutte l'equazioni differenziali del prim'ordine a due variabili verranno rappresentate da  $Pdx + Qdy = 0$ , equazione integrabile 1.º se  $P$  e  $Q$  sieno funzioni di  $x$  o di  $y$  sola, giacchè in tal caso ella diventa  $dy = Xdx$  o  $dx = Ydy$ : anzi simili equazioni si integreranno quando pur fossero di un qualunque ordine  $n^{\text{esimo}}$ , supposta  $dx$  o  $dy$  costante. Poichè

$$\text{da } \frac{d^n y}{dx^n} = X \text{ si ha } \frac{d^n y}{dx^{n-1}} = X dx, \text{ ed integrando,}$$

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int X dx + C; \text{ di nuovo } \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = dx \int X dx$$

$$+ C dx, \text{ ed integrando, } \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = \int dx \int X dx + Cx$$

+ C' ec., ripetuta l'operazione finchè si abbia  $y$ .

Così se debba sommarsi la serie  $y = \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{3.4.5}$

+  $\frac{x^7}{5.6.7}$  + ec. *in inf.*, supposto  $x$  non maggiore

di 1, differenziando si ha  $dy = \left( \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{3.4} + \right.$

$\left. \frac{x^6}{5.6} + \text{ec.} \right) dx$ , e di nuovo differenziando,  $ddy =$

$\left( x + \frac{x^2}{3} + \frac{x^5}{5} + \text{ec.} \right) dx^2$ , e differenziando una

terza volta,  $d^3y = (1 + x^2 + x^4 + \text{ec.}) dx^3 =$

$\frac{dx^3}{1-x^2}$ ; dunque 1.<sup>o</sup>  $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dx}{1-x^2}$ , ed integrando

(91),  $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{l(1+x) - l(1-x)}{2}$  senza costante,

perchè  $x = 0$  dà  $y = 0$ : 2.<sup>o</sup>  $\frac{ddy}{dx} = \dots$

$\frac{dx l(1+x) - dx l(1-x)}{2}$ , ed integrando (104),

$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+x)l(1+x) + (1-x)l(1-x)}{2}$ : 3.<sup>o</sup>  $dy =$

$\frac{dx(1+x)l(1+x) + dx(1-x)l(1-x)}{2}$ , ed integran-

do (104),  $y = \left( \frac{1+x}{2} \right)^2 l(1+x) - \left( \frac{1-x}{2} \right)^2 l(1-x) - \frac{x}{2}$ .

Con questo metodo che dicesi delle *ri-*

*petute integrazioni*, si sommano tutte le serie analoghe a quella che abbiamo sommata.

147. 1.<sup>o</sup> Si integrerà l'equazione  $Pdx + Qdy$

$= 0$  se  $\frac{d^y P}{dy} = \frac{d^x Q}{dx}$  (122). Spesso avviene però

che anche non avverandosi quella condizione, la

data differenziale può integrarsi col solo moltiplicarla per un fattore idoneo: così  $x dy - y dx + x dx$

$\equiv 0$  se si moltiplichi per  $\frac{1}{x^2}$  si integra facilmente (27. 31). Sia dunque  $F$  il fattor cercato, e l'equazione diverrà  $FPdx + FQdy = 0$ , che supponendosi ora integrabile, darà  $\frac{d^y(FP)}{dy} = \frac{d^x(FQ)}{dx}$ ,

o differenziando,  $\frac{Fd^yP}{dy} + \frac{Pd^yF}{dy} - \frac{Fd^xQ}{dx} - \frac{Qd^xF}{dx} = 0$ ,

formula generale da cui si avrà  $F$  se si prenda per  $F$  un' idonea funzione di  $x$  e di  $y$  con esponenti indeterminati, come  $F = x^m y^n$ ; ed  $m, n$  si determineranno col sostituir nella formula i valori di  $F, P, Q$  e loro differenziali, e con eguagliare a zero i termini omologhi. Così data l'equazione  $2adx - 2bydx - bxdy = 0$ , avrò  $P = 2a - 2by$ ,

$$\frac{d^yP}{dy} = -2b, \quad Q = -bx, \quad \frac{d^xQ}{dx} = -b, \quad \frac{d^yF}{dy} =$$

$n x^m y^{n-1}, \quad \frac{d^xF}{dx} = m y^n x^{m-1}$ , e sostituendo nella

formula, trovò  $(m - 2n - 1)bx^m y^n + 2anx^m y^{n-1} = 0$ . Eguaglio a zero i termini omologhi, ed ottengo 1.º  $m - 2n - 1 = 0$ : 2.º  $2an = 0$ ; dalla seconda equazione ricavo  $n = 0$ , onde la prima dà  $m = 1$ ; dunque  $F = xy^0 = x$ , per cui moltiplicando la data equazione, si ha  $2axdx - 2bxydx - bx^2dy = 0$ , ed integrando,  $ax^2 - byx^2 = C$ .

Si osservi 1.º che lo stesso metodo ha luogo se si voglia il fattore che rende esatta una data differenziale, come  $dy - ydx$ : 2.º che se  $m, n$  si abbiano da una sola equazione, come da  $m = n + 1$ , si potrà fare  $n = 0$  e anche prender per  $n$  un numero qualunque: 3.º che non si ha fin qui regola alcuna generale per dare ad  $F$  una forma adattata ai particolari bisogni, benchè in certi casi sia facile di determinarlo; ed eccone il modo.

Supposto  $dF = A dx + B dy$  onde  $\frac{d^x F}{dx} = A$ ,

$\frac{d^y F}{dy} = B$  (122), la trovata formola generale diverrà

$$\frac{Fd^y P}{dy} + BP - \frac{Fd^x Q}{dx} - A Q = 0, \text{ cioè } \frac{d^y P}{dy} - \frac{d^x Q}{dx}$$

$= \frac{AQ - BP}{F}$ ; dunque se il primo membro di quest'equazione sia funzione della sola  $x$  onde  $dQ = dQ$ , lo sarà anche il secondo e perciò anche  $F$ , e si avrà

$$B = 0, dF = A dx, \frac{dx d^y P}{dy} - dQ = \frac{Q dF}{F}, \int \frac{dF}{F} (=$$

$$F) = \int \frac{dx a^y P}{Q dy} - \int \frac{dQ}{Q} (= -lQ), \text{ e quindi } F$$

$$= \frac{1}{Q} e^{\int \frac{dx d^y P}{Q dy}}. \text{ Data per esempio, l'equazione}$$

$rdx + tydx + udy = 0$  ove  $r, t, u$  son funzioni

della sola  $x$ , sarà  $P = r + ty, Q = u, \frac{d^y P}{dy} = t$

ed  $F = \frac{1}{u} e^{\int \frac{t dx}{u}}$ , fattore che rende esatta la da-

ta, e che per l'equazione  $x dy - y dx + x dx = 0$  accennata di sopra, si trova essere  $= \frac{1}{x^2}$  come dicemmo.

E si noti che alla proposta  $rdx + tydx + udy = 0$  si riduce anche l'altra  $ry^n dx + tydx + udy = 0$  dividendola per  $y^n$  e ponendo  $y^{1-n} = z$ : vi si riducono anche delle equazioni più complicate, ma non dobbiamo allungarci di più. Intanto il metodo è particolare, e perciò qualor non riesca, si passa

a separar l'equazione, cioè a dividerla in due membri, ciascun de' quali contenga una sola variabile con la sua differenziale. Anche questo metodo non è generale: ecco alcuni casi in cui la separazione riesce.

148. Se  $P = XY$ , e  $Q = X'Y'$ , essendo  $X, X'$  delle funzioni di  $x$ , ed  $Y, Y'$  delle funzioni di  $y$ , sarà  $\frac{X dx}{X} = -\frac{Y' dy}{Y}$ , equazione separata e ridotta all'integrazione delle differenziali a una sola variabile.

149. Se  $P$  e  $Q$  son funzioni omogenee di  $x$  e di  $y$ , cioè se tutti i lor termini hanno lo stesso numero di dimensioni di  $x$  e di  $y$ , facendo  $\frac{x}{y} = z$ , si vede facilmente che  $\frac{Q}{P}$  sarà una funzione  $Z$  di  $z$ . Onde si avrà  $dx + Z dy = 0$ , ovvero  $z dy + y dz + Z dy = 0$ , e separando si troverà  $\frac{dz}{Z + z} = -\frac{dy}{y}$ . Per esempio  $(ax + by) dx = (m x + n y) dy$ , facendo  $\frac{x}{y} = z$  onde  $x = yz$ ,  $dx = z dy + y dz$ , e  $\frac{Q}{P} = Z = \frac{-mz - n}{az + b}$ , diviene  $-\frac{dy}{y} = \frac{(az + b) dz}{az^2 + (b-m)z - n}$ , equazione facile a integrare (94. 98).

150. Sia ora l'equazione generale  $ax^m y^n dx^p dy^q + bx^{m'} y^{n'} dx^{p'} dy^{q'} + cx^{m''} y^{n''} dx^{p''} dy^{q''} + \text{ec.} = 0$  ove per la natura di tali equazioni si ha sempre  $p + q = p' + q' = p'' + q'' = \text{ec.}$ : fatto  $y = z^r$ , ella diventa  $r^q ax^m z^{r(n+q)} - q dx^{p'} dz^q + \dots$

$r q' b x^{m'} z^{r(n'+q')} - q' dx^{p'} dz^{q'} + \dots$   
 $r q'' c x^{m''} z^{r(n''+q'')} - q'' dx^{p''} dz^{q''} + \text{ec.} = 0$ , e  
 sarà omogenea se  $m+r(n+q) - q = m'+r(n'+q') - q' = m''+r(n''+q'') - q''$  ec., cioè  
 se  $r = \frac{m-q-m'+q'}{n'+q'-n-q} = \frac{m-q-m''+q''}{n''+q''-n-q} = \text{ec.}$

Così l'equazione  $ay^2 x^2 dx + b dx + c y x dx + f x^4 y^2 dy = 0$  dà  $m=n=2$ ,  $m'=n'=0$ ,  $m''=n''=1$ ,  $m'''=4$ ,  $n'''=3$ ,  $q=q'=q''=0$ ,  $q'''=1$   
 e però  $r = \frac{2}{-2} = \frac{2-1}{1-2} = \frac{2-4+1}{2+1-2} = -1$ ;

dunque fatto  $y = z^{-1}$ , si avrà  $az^{-2} x^2 dx + b dx + cz^{-1} x dx + f x^4 z^{-2} dz = 0$ , equazione omogenea e perciò integrabile (149). Parimente l'equazione  $ax^2 dx^2 + bx^3 y^3 dx^2 dy^2 + cx^4 y^{-1} dx^2 dy + gx^5 y dy^4 = 0$  dà  $m=2$ ,  $n=0$ ,  $m'=n'=3$ ,  $m''=5$ ,  $n''=-11$ ,  $m'''=5$ ,  $n'''=1$ ,  $q=0$ ,  $q'=2$ ,  $q''=1$ ,  $q'''=4$  e però  $r = \frac{2-3+2}{3+2} =$

$\frac{2-5+1}{-11+1} = \frac{2-5+4}{1+4} = \frac{1}{5}$ ; dunque fatto  $y = z^{\frac{1}{5}}$ , si avrà  
 $625ax^2 dx^2 + 25bx^3 z^{-\frac{3}{5}} dx^2 dz^2 + 125cx^4 z^{-3} dx^2 dz + gx^5 z^{-3} dz^4 = 0$ , equazione omogenea che facendo  $z = ux$  e  $dz = (t+u) dx$ , si riduce a  
 $\frac{625a}{u^2} + \frac{25b(t+u)^2}{u} + \frac{125c(t+u)}{u^3} +$

$625a = 0$ : da questa si ha  $t$  data per  $u$ , onde supposta  $t = U$ , da  $u dx + x du = (t+u) dx$  viene  $\frac{dx}{x} = \frac{du}{t} = \frac{du}{U}$ . Del resto, se taluno dei

rotti  $\frac{m-q-m'+q'}{n'+q'-n-q}$  ec. divenisse  $\frac{0}{0}$ , non se ne farebbe conto, cioè solamente significando che qualunque valore di  $r$  rende omogenei i termini d'ordine quel rotto risulta; e se divenissero  $\frac{0}{0}$  tutti i rot-

ti, o andassero a zero tutti i loro numeratori o denominatori, ciò indicherebbe che per separar le variabili non vi è bisogno di metodo.

151. Passiamo ad altre equazioni, e sieno da integrarsi I.  $y + \frac{p dy}{dx} = 0$ , II.  $y + \frac{p dy}{dx} = X$  ove  $p$ ,  $X$  son funzioni di  $x$ . La I. si integrerà riducen-

dola a  $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{p}$ , onde  $ly = -\int \frac{dx}{p} + C$

ed  $y = Ce^{-\int \frac{dx}{p}}$ . Nella II. si farà  $y = rz$  ( $r$  è funzione di  $x$ ) e avremo  $rz dx + pr dz + pz dr = X dx$ ; onde potendosi dar tali valori ad  $r, z$  che sia III.  $rz dx + pz dr = 0$ , verrà la IV.  $pr dz = X dx$ . La III. si integra come la I. e viene

$r = e^{-\int \frac{dx}{p}}$  e perciò la IV. ci dà  $X dx (=$

$pr dz) = p e^{-\int \frac{dx}{p}} dz, z (= \frac{y}{r}) = \dots$

$\int \frac{e^{-\int \frac{dx}{p}} X dx}{p}$  ed  $y = e^{-\int \frac{dx}{p}} \left( \int \frac{e^{-\int \frac{dx}{p}} X dx}{p} \right.$

$+ C$ ). Così se si abbia  $y + \frac{dy}{dx} = x^2$ , sarà  $p =$

$x^0 = 1, X = x^2$  ed  $y = e^{-x} \int e^x x^2 dx + Ce^{-x}$

$= Ce^{-x} + e^{-x} [e^x (x^2 - 2x + 2)]$  (108)  $=$

$Ce^{-x} + x^2 - 2x + 2$ . Alla II. equazione si ri-

duce 1.º  $y + \frac{p dy}{dx} = X y^{n+1}$  col dividerla per  $y^{n+1}$

e far poi  $\frac{1}{y^n} = u$ : 2.º  $y^{m+1} + \frac{p y^m dy}{dx} = X y^m$



col dividerla per  $y^n$  e far quindi  $y^{m-n+1} = u$ :  
 3°  $X y^m dy + X' y^{m+1} dx = X^n y^n dx$  dividendola  
 per  $X' dx$ , facendo  $\frac{X}{X'} = p$ ,  $\frac{X''}{X'} = q$ , e trattan-  
 dola quindi come l'antecedente.

152. Ma sia l'equazion lineare del second' or-  
 dine  $y + \frac{a dy}{dx} + \frac{b ddy}{dx^2} = 0$  ove  $a, b, dx$  son co-  
 stanti. Fatto  $p = \frac{dy}{dx}$  ovvero  $mp - \frac{m dy}{dx} = q$  ( $m$

è indeterminata) e sommata questa con la data,  
 viene I.  $y + (a+m)p - (m dy - b dp) \frac{1}{dx} = 0$ ,

che potrebbe integrarsi se la prima sua parte  $y +$   
 $(a+m)p$  o un suo  $m^{plo}$  qualunque fosse l'integrale del-  
 la seconda  $m dy - b dp$  (31). Supponghiamolo dun-  
 que giacchè l'indeterminata  $m$  lo permette, e avre-

mo  $y + (a+m)p = \frac{1}{m} \int (m dy - b dp) = y - \frac{b p}{m}$ ,

onde  $a+m = -\frac{b}{m}$  e II.  $m = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)}$ .

Fatto ora III.  $y + (a+m)p = u = y - \frac{b p}{m}$  e per-

ciò  $du = dy - \frac{b dp}{m}$  ovvero  $m du = m dy - b dp$ ,

la I. diverrà  $u - \frac{m du}{dx} = 0$  che ci dà (151) IV.

$u = C e^{\frac{x}{m}}$ . Quindi poichè dalla II. nascono due va-  
 lori  $m', m''$  di  $m$  che posti nella IV. ne danno due  
 $u', u''$  di  $u$ , la III. si scioglierà nelle due  $y + (a+m')$   
 $p = u'$ ,  $y + (a+m'')p = u''$  dalle quali si ha  
 la V.  $y = \frac{(a+m')u'' - (a+m'')u'}{m' - m''}$ . Così data

$y + \frac{4 dy}{5 dx} - \frac{d dy}{5 dx^2} = 0$ , sarà  $a = \frac{4}{5}$ ,  $b = -\frac{1}{5}$ ,  
 onde per la II. viene  $m = -\frac{2}{5} \pm \frac{3}{5}$  e perciò  
 $m' = \frac{1}{5}$ ,  $m'' = -1$ ; dunque per la IV.  $u' = C e^{5x}$   
 ed  $u'' = C' e^{-x}$ , con che dalla V. si ottiene  $y =$   
 $\frac{1}{6} (C e^{5x} + 5 C' e^{-x})$ .

Di qui si ha la somma  $y$  di tutte le serie tra-  
 scendenti della forma  $1 + \frac{x^r}{1.2.3 \dots r} + \frac{x^{2r}}{1.2.3 \dots 2r} +$   
 $\frac{x^{3r}}{1.2.3 \dots 3r} + \text{ec. in infn.}$ , essendo  $r$  numero intero  
 e positivo. Si voglia la somma della serie  $y = 1$   
 $+ \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{ec.}$ ; differen-  
 ziando abbiamo  $dy = (x + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \text{ec.})$   
 $dx$ , e nuovamente differenziando presa  $dx$  costan-  
 te,  $d dy = (1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{ec.}) dx^2 = y dx^2$ .

Si ha dunque  $y - \frac{d dy}{dx^2} = 0$ , ove  $a = 0$ ,  $b = -$   
 $1$ ,  $m = \pm \sqrt{1}$ ,  $m' = 1$ ,  $m'' = -1$  e perciò  $y =$   
 $\frac{C e^x + C' e^{-x}}{2}$ . Per determinar le costanti si osservi  
 che quando  $x = 0$ , viene  $y = \frac{C + C'}{2} = 1$ ,  $dy =$   
 $\frac{C e^x dx - C' e^{-x} dx}{2} = 0$ ; dunque  $\frac{C + C'}{2} = C = C'$   
 $= 1$  ed  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}$ .

153. Se nella II. equazione sia  $\frac{a^2}{4} = b$ , verrà

$m' = m'' = -\frac{a}{2}$  e quindi  $u' = u''$  nella IV., ed  $y = \frac{0}{0}$  nella V., ciò che non potrebbe avverarsi se non fosse anche  $C = C'$ . Ora per determinar  $y$  in questo caso, prendo  $K$  per la costante comune ed  $\omega$  per un infinitesimo, e suppongo  $m' = -\frac{a}{2}$

$$+ \omega, m'' = -\frac{a}{2} - \omega; \text{ dunque } u' = C e^{\frac{x}{m'}} = \dots$$

$$K e^{\frac{2x}{2\omega - a}} = K e^{-\frac{2x}{a} + \frac{4\omega x}{a(2\omega - a)}} = \dots$$

$$K e^{-\frac{2x}{a} \left(1 + \frac{4\omega x}{a(2\omega - a)}\right)}, u'' = C e^{\frac{x}{m''}} = K e^{\frac{-2x}{2\omega + a}} =$$

$$K e^{-\frac{2x}{a} + \frac{4\omega x}{a(2\omega + a)}} = K e^{-\frac{2x}{a} \left(1 + \frac{4\omega x}{a(2\omega + a)}\right)} \quad (70)$$

trascurando sempre  $\omega^2, \omega^3$  ec.: e poichè  $m' = m'' =$

$$2\omega, \text{ la V. equazione diverrà } y = \frac{a + 2x}{a} K e^{-\frac{2x}{a}},$$

onde fatto  $K = C, \frac{2K}{a} = C'$ , viene  $y = (C +$

$$C'x) e^{-\frac{2x}{a}}$$
 con le due costanti che l'equazione esige. Così se si abbia  $y + \frac{4}{5} \frac{dy}{dx} + \frac{4}{25} \frac{d^2y}{dx^2} = 0$ , sa-

rà  $a = \frac{4}{5}, b = \frac{4}{25}$  ed  $y = (C + C'x) e^{-\frac{5x}{2}}$ .

$$r\grave{a} a = \frac{4}{5}, b = \frac{4}{25} \text{ ed } y = (C + C'x) e^{-\frac{5x}{2}}.$$

154 Nel modo stesso potranno integrarsi due

equazioni  $y + ax + \frac{b dx}{dt} = 0$ ,  $y + fx + \frac{g dy}{dt} = 0$

supposte  $a, b, f, g$  costanti; poichè se la seconda si moltiplichi per l'indeterminata  $m$  e si sommi con la prima, verrà  $(m+1)y + (a+fm)x + (gmdy + bdx) \frac{1}{dt} = 0$ ; onde fatto come sopra (152),

$$(m+1)y + (a+fm)x = \frac{1}{m} \int (gmdy + bdx) \\ = gy + \frac{bx}{m}, \text{ si avrà } m+1 = g, a+fm = \frac{b}{m} \text{ ed } \\ \frac{am + fm^2}{b} = g - m, \text{ equazione che determina } m.$$

Quindi se sia  $(m+1)y + (a+fm)x = u = gy + \frac{bx}{m}$  e perciò  $mdu = gmdy + bdx$ , l'equazione sommata diverrà  $u + \frac{mdu}{dt} = 0$  e avremo, al

solito  $u = Ce^{-\frac{t}{m}}$ . Il rimanente si fa come sopra (152), e tutto ciò ha luogo quando pur l'equazioni fossero  $y + ax + \frac{b dx + c dy}{T dt} = 0$ ,  $y + a'x + \frac{b' dx + c' dy}{T dt} = 0$ , trovandosi allora  $u = \dots$

$$Ce^{-\int \frac{T dt}{m}}$$

155. Sia anche l'equazione  $y + \frac{a dy}{dx} + \frac{b d^2 y}{dx^2} = X$  ove  $X$  è funzione di  $x$ . Tutto si farà come sopra (152), se non che l'equazione che ivi diveniva  $u - \frac{m du}{dx} = 0$ , è qui  $u - \frac{m du}{dx} = X$ , cioè  $du - \frac{u dx}{m} = -\frac{X}{m}$  che integrata al solito (151)

dà  $u = e^{\frac{x}{m}} \left( C + \frac{1}{m} \int -e^{-\frac{x}{m}} X dx \right)$ . Così avend.

do  $y = \frac{dy}{dx} = \frac{3}{4} \frac{d^2y}{dx^2} = 2x$ , sarà  $a = -1$ ,  $b =$

$= \frac{3}{4}$ ,  $m = \frac{1}{2} \pm 1$ ,  $m' = \frac{3}{2}$ ,  $m'' = -\frac{1}{2}$ ,  $X = 2x$ ,

$u' = Ce^{\frac{3}{2}x} + 2x + 3$ ,  $u'' = Ce^{-\frac{1}{2}x} + 2x - 1$  ed

$y = \frac{1}{4} (Ce^{-2x} + 2x - 1) + \frac{3}{4} (Ce^{\frac{3}{2}x} + 2x + 3)$ .

156. Questo metodo che a cagione dell'indeterminate  $m$  ec. introdotte nell'equazioni, si chiama *dei Coefficienti Indeterminati*, vale anche per l'equazioni lineari di un qualunque ordine  $n^{\text{esimo}}$ , le quali sommate con un numero  $n - 1$  d'equazioni  $mp = \frac{m dy}{dx} = 0$ ,  $kq = \frac{k dp}{dx} = 0$ ,  $gr = \frac{g dq}{dx} = 0$  ec. ; si integreranno con la stessa facilità, fuorchè quando  $y$  ha un coefficiente  $q = 0$ , o l'equazione si riduce a  $\frac{d^n y}{dx^n} = X$ , che per altra via si è già integrata (146): il giro però sarà in queste più lungo attese l'equazioni  $n - 1$  da cui debbon dedursi i valori dell'indeterminate  $k, g$  ec. dati per  $m$ , e quelle del grado  $(n - 1)^{\text{esimo}}$  dalla cui risoluzione dipendono  $m', m'', m'''$  ec. e quindi  $u', u'', u'''$  ec. L'equazioni che non hanno la forma delle precedenti, o non possono affatto integrarsi o esigono delle artificiose sostituzioni per separarne le variabili. D'ordinario si sostituisce con frutto eguagliando ad una nuova variabile i termini che ammettono integrazione: ma non vi è regola generale per so-

sostituire, e poichè il molto esercizio supplisce in questi casi alle regole, porremo qui varj esempi di sostituzioni con cui si giunge a separar le variabili in diverse equazioni del primo e second'ordine. ove  $X, Y$  esprimon sempre una funzione di  $x$  o di  $y$ .

I.  $x^2 dx^2 + axy dx dy = b dy^2$ : compiendo il quadrato si ha  $(x dx + \frac{ay dy}{2})^2 = (\frac{a^2 y^2}{4} + b) dy^2$ , ed estraendo la radice,  $x dx = \frac{dy}{2} [\sqrt{(a^2 y^2 + 4b)} - dy]$ .

II.  $4a^2 x^2 dx + 4a^2 b x dx + 4aby x dx + 2ab^2 y dx + b^2 y^2 dx - ab^3 dy = 0$ . Osservo che l'equazione può scriversi così:  $(2ax + by + ab)^2 dx - a^2 b^2 dx - ab^3 dy = 0$ ; e supposto  $(2ax + by + ab)^2 dx = 0$ , verrebbe  $y = -\frac{2ax}{b} - a$ . Faccio dunque  $y = z - \frac{2ax}{b} - a$ ,  $dy = dz - \frac{2x dx}{b}$ , e sostituendo e riducendo, viene  $dx = \frac{abd z}{a^2 + z^2}$ .

III.  $-a^3 dx - 3yx^2 dx + 3y^2 x dx - y^3 dx + x^3 dy + a^3 dy = 0$ . Osservo che supposto  $3yx dx (y - x) = 0$ , verrebbe  $y = x$ , il che si avrebbe anche dall'equazioni combinate  $-dx(a^2 + y^2) = 0$ ,  $dy(x^3 + a^3) = 0$ . Faccio dunque  $y = z + x$ ,  $dy = dz + dx$ , e sostituendo e riducendo, viene  $\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{a^2 + x^2}$ .

IV.  $x^2 dx + xy dy + y^2 dx = X dx$ ; fatto  $xy = z$ , si ha  $z dz = (X - x^2) x dx$ .

V.  $2y dy + x dy + y dx = (a + x + y) Y dy$ ; fatto  $x + y = z$ , viene  $y dz + z dy = (a + z) Y dy$ .

fatto  $yz = u$ , viene  $du = \frac{u Y dy}{y} = a Y dy$ ; fatto  $\frac{Y dy}{y}$

$= \frac{dq}{q}$ , viene  $\frac{qdu - udq}{q^2} = \frac{aYdy}{q}$ : fatto  $\frac{u}{q} = p$ , viene infine  $dp = \frac{aYdy}{q}$ .

VI.  $\frac{zx^2dx + xydy + y^2dx}{x^4 + x^2y^2 + a^4} = \frac{xdx + ydy}{a^2\sqrt{(x^2 + y^2)}}$   
 fatto  $x^2 + y^2 = z^2$ , viene  $\frac{z(xdz + zdx)}{x^2z^2 + a^4} = \frac{dz}{a^2}$ ;  
 fatto  $zx = p$ , viene  $\frac{a^2dp}{p^2 + a^4} = \frac{dz}{z}$ .

VII.  $\frac{Ydy}{x^2} = aY'dy - \frac{dx}{x}$ : fatto  $aY'dy = \frac{dz}{z}$ ,  
 viene  $\frac{Ydy}{x^2} = \frac{xzs - zdx}{2x^2}$ : fatto  $\frac{z}{x} = p$ , viene  $\frac{Ydy}{z^2}$   
 $= \frac{dp}{p^3}$ .

VIII.  $(x + y)^2 dy = a^2 dx$ : fatto  $x + y = z$ ,  
 si ha  $z^2 (dz - dx) = a^2 dx$ , cioè  $dx = \frac{z^2 dz}{a^2 + z^2}$ .

IX.  $-\frac{a^3 dx}{x} + bydx = aydy$ : fatto  $bx - ay = az$ ,  
 viene  $bx dz = az dz + \frac{a^3 dx}{x}$ : fatto  $z dz = \frac{a^2 dp}{p}$ ;  
 viene  $bx dz = \frac{a^2 (p dx + x dp)}{px}$ : fatto  $px = u$ , viene  
 $\frac{bdz}{p} = \frac{a^2 du}{u^2}$ .

X.  $\frac{-x^m dx}{a^{m-1}} + \frac{(m+1)bydx}{x} + \frac{(m+1)y^2 dx}{x}$   
 $= ydy$ , cioè  $\frac{-x^m dx}{a^{m-1}} + \frac{(m+1)bydx}{x} = y^2 \left( \frac{dy}{y} - \frac{(m+1)dx}{x} \right)$ : fatto  $ly - (m+1)lx = lp$ ,  $y = px^{m+1}$ ,  
 viene  $\frac{-x^m dx}{a^{m-1}} + (m+1)bp x^m dx = px^{2m+2} dp$ ,  
 cioè  $\frac{dx}{x^{m+2}} (-1 + (m+1)a^{m-1} bp)$

$$= a^{m-1} p dp, \text{ cioè } \frac{dx}{x^{m+2}} = \frac{a^{m-1} p dp}{(m+1)a^{m-1} p^{m-1}}.$$

XI.  $mydx + nxdy = y^r dy$  ovvero  $xy \left( \frac{mdx}{x} + \frac{ndy}{y} \right) = y^r dy$  : fatto  $mlx + nly = lp$ ,  $x^m y^n = p$ ,

viene  $\frac{p^{\frac{1}{m}} dp}{y^m p} = y^{r-1} dy$ , cioè  $\frac{dp}{p^m} = y^{\frac{rm+n-m}{m}} dy$ .

XII.  $\frac{xdy - ydx}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  : fatto  $x =$

$pz$ ,  $y = p\sqrt{1-z^2}$ , viene  $\frac{-dz}{\sqrt{(p^2 dz^2 + dp^2(1-z^2))}}$   
 $= p$  : fatto  $dz = udp$ , quadrando, sostituendo il va-  
 lor di  $u = \frac{dz}{dp}$  ed estraendo la radice, viene

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{pdp}{\sqrt{1-p^2}}.$$

XIII.  $aydy = y^2 dx + x^2 dx$  cioè  $x^2 dx =$   
 $y^2 \left( \frac{ady}{y} - dx \right)$  : fatto  $aly - x = lz$ ,  $\frac{y^a}{e^x} = z$ ,  $y$

$= z^{\frac{1}{a}} e^{\frac{x}{a}}$ , viene  $x^2 dx = \frac{z^{\frac{2}{a}} e^{\frac{2x}{a}} dz}{2}$ , cioè . . .

$$\frac{x^2 dx}{e^{\frac{2x}{a}}} = \frac{dz}{z^{\frac{2}{a}}}.$$

XIV.  $dy = \frac{yxdx}{x^2 - a^2} - \frac{y^3 dx}{x^3}$  : fatto  $x^2 = a^2$   
 $= z^2$ ,  $y = pz$ ,  $dy = zdp + pdz = zdp + \frac{pxdx}{z}$ ,

viene  $zdp + \frac{pxdx}{z} = \frac{pxdx}{z} - \frac{z^2 p^3 dx}{x^3}$ , cioè  $\frac{dp}{p^3}$   
 $= \frac{(a^2 - x^2) dx}{x^3}$ .



$$\text{XV. } \frac{y^2 dx - xy dy}{\sqrt{(y^2 dx^2 - 2xy dy dx + y^2 dy^2)}} = Y: \text{ fatto}$$

$\frac{x}{y} = z$  onde  $x = yz$  e  $dx = y dz + z dy$ , si ha

$$\frac{y^2 dz}{\sqrt{(y^2 dz^2 - z^2 dy^2 + dy^2)}} = Y; \text{ quadrando, riducendo allo stesso denominatore e separando, viene}$$

$$\frac{dz^2}{1-z^2} = \frac{Y^2 dy^2}{y^4 - Y^2 y^2}, \text{ cioè } \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{Y dy}{y \sqrt{(y^2 - Y^2)}}.$$

XVI.  $2y^2 dy ddy \sqrt{xy} + y^2 dy^3 \sqrt{\frac{x}{y}} = dx^2 (y dx - x dy)$  ove  $dx$  è costante: fatto  $\frac{x}{y} = z$ , viene  $y dy^2 = dx^2 (2\sqrt{z} + C)$ .

XVII.  $x ddx + dx^2 = -\frac{yx^2 dx^2}{a^3}$  ove  $dy$  è costante: fatto  $x dx = z dy$ , viene  $\frac{a^3 dz}{z^2} = -y dy$ .

XVIII.  $a^{2m} dy^{m-2} ddy = Y dx^m$  ove è costante  $dx$ : fatto  $dy = z dx$ , viene  $a^{2m} z^{m-1} dz = Y dy$ .

XIX.  $a dx ddy = (2a ddx - 2x ddx - 2ddy \sqrt{x - dx^2})(a - x) \sqrt{x}$ : se si faccia  $a - x = p^2$  e  $dy = p dz$ , viene  $\frac{a dx dz}{2p^2 \sqrt{x}} = p ddx - \frac{dp dz \sqrt{x}}{p} - d dz \sqrt{x} - \frac{dx^2}{2p}$ , cioè posto il valor di  $a = p^2 + x$  e di  $dx = -2p dp$ ,  $d dz \sqrt{x} + \frac{dx dz}{2\sqrt{x}} = p ddx - \frac{dx^2}{2p}$  il cui integrale è  $dz \sqrt{x} = p dx$  cioè  $p dz (= dy) = \frac{p^2 dx}{\sqrt{x}} + C$ .

XX.  $Y dx^2 - m dy^2 - ny ddy = 0$  ove  $dx$

$$\begin{aligned}
 & \text{è costante: fatto } dx = zy^n dy \text{ onde } 0 = y^n dy dz \\
 & + \frac{m-n}{m} zy^n dy^2 + zy^n ddy, \text{ cioè } nyddy = \\
 & - mdy^2 - \frac{nydydz}{z}, \text{ viene } \int y^n dy = - \\
 & \frac{ndz}{z^2} e dx = y^n dy \int \frac{n}{2m-n} \frac{1}{y} dy + C
 \end{aligned}$$

157. Del resto dal non potersi separar le variabili non bisogna dedurre che l'equazione non è integrabile: ve ne sono alcune che ricusando in certi casi la separazione, posson generalmente integrarsi; e tale è la famosa *Equazione del Conte Riccati*  $dy = ax^m dx + by^2 dx$ , sopra cui lasceremo che si consulti il *Calcolo Integrale* di Le Seur e Jacquier. Ecco ora dei problemi sul metodo inverso delle tangenti.

PROBL. I. Trovar la curva la cui sottangente  $\frac{y dx}{dy} = \frac{mx}{n}$ . Si avrà dunque separando,  $\frac{ndx}{x} = \frac{m dy}{y}$ , e integrando,  $n \ln x = m \ln y + lC$ ; fatto dunque  $x = y = c$ , sarà  $lC = (n - m) \ln c$ , onde  $y^m = x^n c^{m-n}$ , equazione cercata.

II. Qual'è la curva che ha per sottangente  $\frac{y dx}{dy} = \frac{a^2 + x^2}{x}$ ? Si avrà  $\frac{dy}{y} = \frac{x dx}{a^2 + x^2}$  ed integrando,  $\ln y = \ln(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} + lC = \ln C(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ , onde  $y = C \sqrt{a^2 + x^2}$ : fatto  $x = 0$ ,

Q

FIG. <sup>122</sup> divien costante l'ordinata  $y = Ca = b$ , onde  $C = \frac{b}{a}$ ; perciò  $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 + x^2)$ , equazione all'iperbola.

41. III. Qual'è la curva in cui lo spazio  $ABM = \frac{m}{n} AMQ$ ? si ha dunque  $\frac{m}{n} \int x dy = \int y dx$  (132),  
 $\frac{m dy}{y} = \frac{n dx}{x}$ ,  $y^m = n^n a^{m-n}$ .

42. IV. Trovar la curva  $BM$  il cui spazio  $ABMP$  eguagli l'arco  $BM$  moltiplicato per una costante  $a$ , onde  $\int y dx = a \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$ . Dunque  $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{\sqrt{y^2 - a^2}}$ ; ed integrando,  $\frac{x}{a} = l \frac{c}{a} [y + \sqrt{y^2 - a^2}]$  (97).

43. V. Trovar la curva  $AM$ , in cui il raggio osculatore  $MC = \frac{m}{n} MN$ . Poichè  $MO : MC :: MP : MN$ , supposta  $dx$  costante, sarà (31)  $\frac{m}{n} y = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ , ovvero  $\frac{m}{n} y ddy + dx^2 + dy^2 = 0$ . Per integrare, sia  $dx = p dy$  e differenziando,  $ddy = -\frac{dp dy}{p}$  e sostituendo nell'equazione,  $\frac{n dy}{m y} = \frac{dp}{p(p^2 + 1)}$ ; dunque  $\frac{n}{m} l \frac{y}{c} = l \frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}}$   
 (31),  $p = \frac{\pm y^{\frac{n}{m}}}{\sqrt{c^{\frac{m}{n}} - y^{\frac{m}{n}}}}$ , e  $dx = \frac{\pm y^{\frac{n}{m}} dy}{\sqrt{c^{\frac{m}{n}} - y^{\frac{m}{n}}}}$ , e questa è l'equazione differenziale del primo ordine della curva cercata.

Se  $n = m$ , si ha  $dx = \pm y dy (c^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}$ , ed  $x = c' = \sqrt{c^2 - y^2}$ , equazione al circolo. Se

$m = 1$ , si ha  $dx = \frac{\pm dy \sqrt{y}}{\sqrt{c-y}}$ , equazione alla cicloide.

VI. Trovar la curva  $BM$  tale che conducendo per l'origine  $A$  dell'ascisse la retta  $AO$  che faccia coll'asse un angolo di  $45^\circ$ , stia sempre l'ordinata  $PM$  alla sottangente  $PT$ :: una linea data  $a:OM$ . Dunque  $dy:dx::a:y-x$ , e  $adx = (y-x)dy$ . Sia  $y-x = z$  e si avrà  $dx = dy - dz$ , onde sostituendo nell'equazione,  $\frac{dy}{a} = \frac{dz}{a-z}$ ,  $\frac{y}{a} = l \frac{C}{a-z}$ ,

ed  $x = y - a + Ce^{\frac{y}{a}}$ , che potea trovarsi anche per i numeri 151 e 152. La minima ordinata  $BD$  si ha facendo  $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{y-x} = \infty$  (60) e allora  $x = y = a l \frac{C}{a} = BD = AD$ . Lo spazio  $DBMP = PQ - DC - BCQM = xy - a^2 l^2 \frac{C}{a} - \int x dy$  (132).

Ora  $\int x dy = \int (y dy - a dy + Ce^{\frac{y}{a}} dy) = C' + \frac{y^2}{2} - ay - aCe^{\frac{y}{a}}$  (108), e sostituendo in

$-ay$  il valor di  $y = x + a - Ce^{\frac{y}{a}}$ , verrà  $\int x dy = C' + \frac{y^2}{2} - ax - a^2$ : ma quando lo spazio  $BCQM$  svanisce, si ha  $y = AC = al \frac{C}{a}$ : ed  $x = CB = al \frac{C}{a}$ , onde  $C' = a^2 + a^2 l \frac{C}{a} - \frac{a^2}{2}$

FIG.

$$124$$

$$12 \frac{C}{a}; \text{ dunque } \int x dy = \frac{y^2}{2} - ax + a^2 \int \frac{C}{a} - \frac{a^2}{2}$$

$$12 \frac{C}{a}, \text{ ed infine } DBMP = xy - \frac{y^2}{2} + ax + a^2 \int \frac{a}{C}$$

$$+ \frac{a^2}{2} 12 \frac{a}{C}.$$

45. VII. Trovar la curva  $EM$  che faccia per tutto coll'ordinata  $PM$  un angolo  $EMP$  o  $TMP$  proporzionale all'ascisa  $AP$ , che sarà perciò  $m^{pla}$  dell'arco o angolo  $TMP$ .

Si avrà dunque  $TMP = \frac{x}{m}$ , e  $y: \frac{y dx}{dy} :: 1:$

$$\text{tang } \frac{x}{m} = \frac{dx}{dy}; \text{ dunque } \frac{dy}{m} = \frac{dx}{m} \cot \frac{x}{m} =$$

$$\frac{dx}{m} \frac{\cos \frac{x}{m}}{\sin \frac{x}{m}}, \text{ e però } y = C + m \int \frac{\cos \frac{x}{m}}{\sin \frac{x}{m}}; \text{ equazio.}$$

ne che nel caso di  $y = 0$  dando  $\int \frac{\cos \frac{x}{m}}{\sin \frac{x}{m}} = - \frac{C}{m}$

$$= - \frac{C}{m} e, \text{ cioè } \sin \frac{x}{m} = e^{-\frac{C}{m}}, \text{ e però } x = m \times \arcsin$$

di  $\frac{C}{m}$ , fa vedere che la curva incontra la linea dell'ascisse in punti  $E, F, E', F'$  ec. tali, che  $\sin \frac{x}{m} = \frac{C}{m}$ , ed  $x$  eguaglia  $m$  multi-

plicata per tutti gli archi, i cui seni sono  $= e^{-\frac{C}{m}}$ . Ora il numero di questi archi è infinito; poichè se il primo è  $a$ , quelli che avranno lo stesso seno saranno  $a, c - a, 2c + a, 3c - a, 4c + a, 5c - a$ , ec.: quindi le distanze a cui la curva incontrerà la

linea dell'ascisse, saranno espresse per  $ma, m(c - a), m(2c + a), m(3c - a)$  ec. Presa dunque  $AE = ma, AF = mc - ma, AE = 2mc + ma, AF = 3mc - ma$  ec., si avranno i valori positivi di  $x$ . Si troveranno parimente i suoi valori negativi, cioè le ascisse prese verso la sinistra di  $AS$ , e si vedrà inoltre che gli intervalli  $EF, E'F'$  ec. sono eguali.

Fatto ora  $\frac{dy}{dx} = \cot \frac{x}{m} = 0$  per avere il massimo, sarà  $\text{sen} \frac{x}{m} = 1$ , e i valori che soddisfanno nel senso positivo a quest'equazione, preso  $a = 90^\circ = \frac{c}{2}$  nella serie  $a, c - a, 2c + a$  ec., sono

$$\frac{x}{m} = \frac{1}{2}c, \frac{x}{m} = \frac{5}{2}c, \frac{x}{m} = \frac{9}{2}c, \frac{x}{m} = \frac{13}{2}c, \text{ ec.}$$

e poichè in questo caso  $\text{sen} \frac{x}{m} = 1$  e  $l \text{sen} \frac{x}{m} = 0$ , si ha  $y = C$ ; onde ai punti più elevati  $C, C'$  ec. le ordinate son eguali fra loro ed alla costante.

Se nell'equazione  $y = C + l \text{sen}^n \frac{x}{m}$  si faccia  $\text{sen}^n \frac{x}{m} = 0$ , sarà  $y = C + le = C - \infty = -\infty$ , ovvero  $-y = \infty$ , e però a tutti gli archi o ascisse  $x$  che danno  $\text{sen}^n \frac{x}{m} = 0$ , corrisponde un'ordinata negativa  $-y$  che è infinita o asintoto della curva; ora questi archi sono  $x = 0, x = \pm cm, x = \pm 2cm$  ec. in infinito; dunque la curva ha un numero infinito d'asintoti perpendicolari all'asse. Il primo passa per l'origine dell'ascisse ove  $n = 0$  ed è  $AS$ , il secondo passa per  $D$  alla distanza  $AD = cm$ , il terzo ad una distanza  $AD' = 2AD = 2cm$  ec. Lo stesso è nel senso negativo.

Prima di passare ad altro proporremo alcuni Problemi sopra i due Calcoli Differenziale ed Integrale .

148. I. Data una Curva di nota tangente e presa in ogni sua ordinata una media proporzionale tra l'ordinata stessa e la corrispondente ascissa, condur la tangente alla nuova Curva che passa per l'estremità delle medie proporzionali. *Ris.* Se  $x, y$  sieno le coordinate della curva data e  $z$  l'ordinata della nuova curva, la sua sottangente sarà, . . . .

$\frac{2z^2 dx}{x dy + y dx}$ , che essendo la data curva o una parabola o un circolo del raggio  $a$ , diviene  $\frac{4x}{3}$  o  $\frac{4ax - 2x^2}{3a - 2x}$  cc.

159. II. Trovare il punto di flesso contrario nella curva dell'equazione  $y = \frac{ax}{\sqrt{rx - x^2}}$ . *Ris.* il punto cercato corrisponde all'ordinata che ha per ascissa  $x = \frac{r}{4}$ .

160. III. Qual'è la linea retta che con due date forma il triangolo massimo? *Ris.* L'ipotenusa; cioè il triangolo massimo è il rettangolo.

161. IV. Qual è il massimo dei triangoli inscrittibili in un dato circolo e sopra una corda data? *Ris.* L'isoscele.

162. V. Di una data superficie  $ab$  formare un rettangolo  $xz$  che abbia il minimo perimetro. *Ris.* Si troverà  $x = z = \sqrt{ab}$ .

163. VI Di una data superficie  $ab$  formare un rettangolo  $xz$ , tre de' cui lati abbiano il minimo perimetro. *Ris.* Si troverà  $x = \sqrt{\frac{ab}{2}}$ ,  $z = \sqrt{2ab}$ .

164. VII. Qual è il minimo dei quadrati iscrit-

zibili in un dato quadrato? *Ris.* Se  $a$  sia il lato del dato, quello del minimo si troverà  $\sqrt{\frac{a^2}{2}}$ .

165. VIII. Qual è il massimo in superficie convessa di tutti i cilindri isertttibili in una data sfera? *Ris.* Se  $2r$  sia il diametro della sfera, quello della base del massimo cilindro sarà  $r\sqrt{2}$ .

166. IX. Qual deve essere il rapporto tra il diametro della base e l'altezza d'una Misura cilindrica di data capacità affinchè la sua superficie interiore sia un minimo? *Ris.* Il rapporto dee essere di  $2 : 1$ , come si trovò sopra (159).

167. X. Qual è il massimo dei cilindri iscritti in un cono dato? *Ris.* Se  $2c$  sia il diametro della base del cono, quella del cilindro cercato avrà per diametro  $\frac{4c}{3}$ .

168. XI. Determinare il valor dei rotti  $1^\circ$   $\frac{b(a-x)^2}{(a-x)^2}$  quando  $x = a$ ;  $2^\circ$   $\frac{1 - \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x - 1}$  quando  $x = 90^\circ$ ;  $3^\circ$   $\frac{1-x}{1x}$  quando  $x = 1$ ;  $4^\circ$ ...  $\frac{x^2 - x}{1-x+1x}$  quando  $x = 1$ . *Ris.* I valori cercati si troveranno  $b, 1, -1, -2$ .

169. XII. Integrare  $\frac{x dz}{z^3 - c^3}$ . *Ris.*  $\int \frac{x dz}{z^3 - c^3} = \frac{l(z-c)}{3c} - \frac{l(c^2 + cz + z^2)}{6c} + \frac{1}{c\sqrt{3}} \times \text{arc. tang} \frac{2z+c}{c\sqrt{3}} + C$ .

170. XIII. Integrare  $y x dx$  posto  $y = \sqrt{(2ax - x^2) - x^2}$ . *Ris.*  $\int y x dx = a \int y dx - \frac{\sqrt{(2ax - x^2)^2}}{3}$ .

171. XIV. Integrar le formule  $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ , ...



$$\frac{dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}, \frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}, \frac{adx}{2\sqrt{(ax-x^2)}}, \dots$$

$$\frac{adx-xdx}{\sqrt{(ax-x^2)}}. \text{ Ris. } 1^\circ \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \text{arc. sen } x; 2^\circ$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}} = \text{arc. cos} \left(1 - \frac{x}{a}\right); 3^\circ \dots \dots$$

$$\int \frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \text{arc. cos} \left(\frac{2x}{b} - 1\right); 4^\circ \dots \dots$$

$$\int \frac{adx}{2\sqrt{(ax-x^2)}} = \text{arc. sen } v. x \text{ in un circolo del rag-}$$

gio  $\frac{a}{2}$ ; 5<sup>o</sup>.  $\int \frac{adx-xdx}{\sqrt{(ax-x^2)}} = \sqrt{(ax-x^2)} +$   
 arc. sen  $v. x$  in un circolo del raggio  $\frac{a}{2}$ .

172. XV. Integrar  $\frac{d\varphi}{(1-b\cos\varphi)^2}$  supposto  $b < 1$ .

$$\text{Ris. } \int \frac{d\varphi}{(1-b\cos\varphi)^2} = \frac{b\text{sen}\varphi}{(1-b^2)(1-b\cos\varphi)} + \dots$$

$$\frac{2}{(1-b^2)^{\frac{3}{2}}} \text{arc. tang} \frac{(1+b)\text{sen}\varphi}{(1+\cos\varphi)\sqrt{(1-b^2)}} + C.$$

173. XVI. Integrar le formule  $x^n dx \text{ sen } x$ ,  
 $x^n dx \text{ cos } x$ . Ris. 1<sup>o</sup>  $\int x^n dx \text{ sen } x = -x^n \text{ cos } x +$   
 $n x^{n-1} \text{ sen } x + n(n-1)x^{n-2} \text{ cos } x - n(n-1)(n-2)x^{n-3} \text{ sen } x - n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} \text{ cos } x +$   
 $\dots + \dots - \dots - \text{cc.}; 2^\circ \int x^n dx \text{ cos } x = x^n \text{ sen } x$   
 $+ n x^{n-1} \text{ cos } x - n(n-1)x^{n-2} \text{ sen } x + n(n-1)(n-2)x^{n-3} \text{ cos } x + \dots + \dots - \dots -$   
 cc.: preso alternativamente in ambedue i casi  $\text{sen } x$   
 e  $\text{cos } x$  fino al termine ove si trova  $x^{n-n}$  col quale è compiuta l'integrazione.

174. XVII. Quadrar la curva dell'equazione

$y^m = a + x$ . *Ris.*  $\int y dx = \dots$

$$m \left[ \frac{(a+x)^{m+1}}{m+1} - a^{\frac{m+1}{m}} \right].$$

175. XVIII. Quadrare e rettificare la curva trascendente dell'equazione  $dx = \pm \frac{dy}{y} \sqrt{a^2 - y^2}$ .

*Ris.* Lo spazio asintotico ed infinitamente lungo compreso dalla curva e dal suo asintoto eguaglia il quadrante d'un circolo del raggio  $a$ : un suo arco qualunque eguaglia la corrispondente ascissa d'una logaritmica che cominci dal vertice della curva ed abbia  $a$  per sottangente.

176. XIX. Rettificare la curva dell'equazione

$$dy = \frac{a dx}{\sqrt{2ax + x^2}}. \quad \text{Ris. } \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{2ax + x^2}.$$

177. XX. Misurar l'intero solido prodotto dalla rivoluzione della cissoide intorno al diametro del suo circolo genitore. *Ris.* Il solido è infinito.

178. XXI. Misurar la superficie del solido generata dalla rivoluzione intorno all'asintoto dello spazio asintotico ed infinitamente lungo del n.º 175. *Ris.* La superficie eguaglia il circolo del raggio  $a\sqrt{2}$ .

179. XXII. Misurar la solidità e la superficie convessa dell'unghia cilindrica formata dal taglio obliquo d'un cilindro retto in modo che la sezione passi per il centro della base. *Ris.* Se sia  $r$  il raggio della base del cilindro,  $a$  l'altezza dell'unghia, se ne troverà la solidità  $= \frac{2ar^2}{3}$ , e la superficie  $= 2ar$ .

180. XXIII. Trovar la curva la cui tangente è

R

costante ed  $= a$ . *Ris.* L'equazione della curva cercata sarà  $dx = \pm \frac{dy}{y} \sqrt{a^2 - y^2}$ .

181. XXIV. Trovar la curva la cui sottangente è  $\frac{x^2}{2x^2 + ay^2 + y^2x}$ . *Ris.* L'equazione è  $y^2 =$

$$\frac{4C - 2ax - x^2}{x^2}$$

182. XXV. Trovar la curva la cui surnormale è  $\frac{-y^2}{x^2 + by^2}$ . *Ris.* L'equazione è  $y^2 = C^2 (b +$

183. XXVI. Trovar la curva la cui area è  $\frac{x^2}{3a}$ . *Ris.* La curva è una parabola.

### Dell'Integrazione dell'Equazioni a Differenze finite.

184. Sieno l'equazioni lineari del prim' ordine  
 I<sup>a</sup>.  $y + \frac{p\delta y}{\delta x} = 0$ , II<sup>a</sup>.  $y + \frac{p\delta y}{\delta x} = X$ , ove  $\delta x = x$   
 (2) e  $p$ ,  $X$  son funzioni di  $x$ . Per integrar la I.,  
 giacchè se  $\delta y$  fosse infinitesimo si avrebbe  $y =$   
 $e^{-\int \frac{p dx}{x}}$  (51), prendo  $y = e^u$  ed ho  $y + \delta y =$   
 $e^u + \delta e^u$  (3),  $\delta y = e^u (e^{\delta u} - 1)$ ,  $\frac{\delta y}{y} = e^{\delta u} - 1 =$   
 $-\frac{\delta u}{p}$ ,  $\delta u = 1 - \frac{1}{p}$  ed  $u = \sigma(1 - \frac{1}{p})$ ,  $y =$   
 $e^u = e^{\sigma(1 - \frac{1}{p})} + C$ . Per integrar la seconda  
 equazione, fatto come sopra (151)  $y = rz$ , avremo  
 $\delta y = r\delta z + z\delta r + \delta r\delta z$ , e l'equazione si cangierà  
 in  $r\delta z + z\delta r + \delta r\delta z = X$ , onde se sia al  
 solito (15.) III<sup>a</sup>.  $r\delta z + p\delta r = c$ , verrà IV<sup>a</sup>.  $p\delta z$

+ pδrδz = X. La III. si integra come la I. e si ha  $r = e^{\sigma l(1 - \frac{1}{p})}$  ed  $r + \delta r = e^{\sigma l(1 - \frac{1}{p})} + \delta \sigma l(1 - \frac{1}{p}) = e^{\sigma l(1 - \frac{1}{p})} + l(1 - \frac{1}{p}) = e^{\sigma l(1 - \frac{1}{p})} \times e^{l(1 - \frac{1}{p})} = (p-1)(1 - \frac{1}{p}) e^{\sigma l(1 - \frac{1}{p})}$ ;

perciò la IV. ci dà  $\delta z = \frac{X}{p(r + \delta r)} = \frac{X}{(p-1)e^{\sigma l(1 - \frac{1}{p})}}$

e  $z = C + \sigma \frac{X}{(p-1)e^{\sigma l(1 - \frac{1}{p})}} = \frac{y}{r}$ , onde  $y = e^{\sigma l(1 - \frac{1}{p})} (C + \sigma \frac{X}{(p-1)e^{\sigma l(1 - \frac{1}{p})}})$ .

186. Poichè la somma  $\sigma$  di tutti i valori di  $l(1 - \frac{x}{p})$  dipende da  $x$  di cui  $1 - \frac{x}{p}$  è funzione (184), ed  $x = \delta(x - 1 + x - 2 + x - 3 \text{ ec.})$  (4), si avrà  $\sigma l(1 - \frac{x}{p})$  col cangiar successivamente  $x$  in  $x - 1$ , in  $x - 2$ , in  $x - 3 \dots$  in  $3$ , in  $2$ , in  $1$  e col prender la somma dei logaritmi di queste quantità o il logaritmo del loro prodotto che chiamo  $\ln(1 - \frac{x}{p})$ . Quindi l'equazione III. di sopra di-

verrà integrandola  $r = e^{\ln(1 - \frac{x}{p})} = \pi(1 - \frac{x}{p})$ , e chiamando  $p'$  il termine che viene immediatamente dopo  $p$  nella serie ec.  $p, p, p'$  ec., sarà  $r + \delta r = \pi(1 - \frac{x}{p'})$ ; dunque  $\delta z = \frac{X}{p \cdot \pi(1 - \frac{x}{p'})}$ ,  $z =$

$$C + \sigma \frac{X}{p \cdot \pi(1 - \frac{1}{p})} = \frac{g}{r}, \text{ ed } y = \pi(1 - \frac{1}{p}) (C + \sigma \frac{X}{p \cdot \pi(1 - \frac{1}{p})}). \text{ Così data } y + (\pi + 1)\delta y +$$

$$a(2x + 1) = 0, \text{ sarà } p = x + 1, 1 - \frac{1}{p} = \frac{x}{x+1},$$

$$\pi(1 - \frac{1}{p}) = \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{x-3}{x-2} \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{1}{x},$$

$$p' = x + 2, 1 - \frac{1}{p'} = \frac{x+1}{x+2}, \pi(1 - \frac{1}{p'}) =$$

$$\frac{x}{x+1} \cdot \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x-2}{x-1} \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{1}{x+1}, \text{ ed } X =$$

$$-a(2x + 1); \text{ onde } y = \frac{1}{x}(C - a\sigma(2x + 1))$$

$$= \frac{1}{x}(C - ax^2) (7) = \frac{C}{x} - ax. \text{ Parimente data}$$

$$y' = fy + g, \text{ atteso } y' = y + \delta y (2), \text{ si avrà } y +$$

$$\frac{\delta y}{1-f} = \frac{g}{1-f}, \text{ onde } p = \frac{1}{1-f}, 1 - \frac{1}{p} = f,$$

$$1 - \frac{1}{p'} = f', X = \frac{g}{1-f} \text{ ed } y = \pi f (C + \sigma \frac{g}{nf});$$

ove supposta  $f$  costante, saranno  $\pi f, \pi f'$  dei prodotti  $f^n, f^{n+1}$  di  $f$  moltiplicata per se stessa tante volte  $n, n+1$  quanti sono i termini che precedono  $y, y'$  nella serie ec.  ${}^{n-1}y, {}^ny, {}^{n+1}y, y, y'$  ec., ed in tal caso si avrà  $y = f^n (C + \sigma \frac{g}{f^{n+1}})$ ; e se sia costante

anche  $g$ , il rimanente integrale  $\sigma \frac{1}{f^{n+1}}$  esprimerà la somma  $\frac{f^n - 1}{f^n(f-1)}$  della progression geometrica  $\frac{1}{f^n}, \frac{1}{f^{n-1}} \dots \frac{1}{f}$ , cioè la somma di tutti i valori che si hanno da  $\frac{1}{f^{n+1}}$  cangiando successivamente  $n$  in  $x$

$n=1, 2, 3, \dots, 3, 2, 1$ ; si avrà dunque allora  $y = C f^n + \frac{g(f^n - 1)}{f - 1}$ .

Può sciogliersi con questo metodo il Problema seguente. Data al frutto semplice di  $m$  per 1 una sorte  $p$ , risolvolo di consumar in  $t$  anni e sorte e frutti, spendendo annualmente un' egual somma. Cerco la somma  $x$  che potrò spendere ogn' anno.

Suppongo che nell' anno  $n^{\text{esimo}}$  la sorte sia ridotta ad  $y$  onde tra sorte e frutti si abbia  $y(1 + m)$ ; e giacchè in quest' anno si spende  $x$ , la sorte nel seguente anno  $(n + 1)^{\text{esimo}}$  sarà  $y' = (m + 1)y - x$ , equazione da cui si ha  $f = m + 1, g = x$ , ed essendo  $x$  costante,  $y = C(m + 1)^n - \dots$

$\frac{x[(m + 1)^n - 1]}{m}$ : ma quando gli anni sono  $n = t$  si ha la sorte  $y = p$ ; dunque  $p = C(m + 1)^t - \frac{x}{m}$ ,  $C = \frac{p + \frac{x}{m}}{m + 1}$  ed  $y = \frac{x}{m} + (p - \frac{x}{m})(m + 1)^{n-t}$ .

Or tutto vuol consumarsi negli anni  $n = t$ , e perciò nell' anno  $n = t + 1$  dee aversi  $y = 0$ ; dunque

$0 = \frac{x}{m} + (p - \frac{x}{m})(m + 1)^t$  e la somma cercata

$$x = \frac{mp(m + 1)^t}{(m + 1)^t - 1}$$

186. Sia anche l'equazione lineare del second' ordine  $y + a \delta y + b \delta^2 y = X$  in cui  $a, b$  son costanti e  $\delta x = 1$ . Secondo il metodo dei coefficienti indeterminati (152) pongo  $mp = m \delta y = b$  e sommate le due equazioni, viene I<sup>a</sup>,  $y + (a + m)p - m \delta y + b \delta p = X$ . Supposto al solito (152)  $y + (a + m)p = \frac{1}{m} \delta(m \delta y - b \delta p) = y - \frac{b p}{m}$ , abbia-

mo  $a + m = \frac{-b}{m}$ , con che si determinano i valori  $m', m''$  di  $m$  (152); e fatto II<sup>a</sup>,  $y + (a + m)p$

$= u = y - \frac{b\delta p}{m}$  e perciò  $\delta u = \delta y - \frac{b\delta p}{m}$  ovvero  $m\delta u = m\delta y - b\delta p$ , la I. equazione diverrà  $u - m\delta u = X$  che ci dà (185)  $u = \pi \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \left( C - \sigma \frac{X}{m \cdot \pi \left( 1 + \frac{1}{m} \right)} \right)$ ; onde fatta la costante

$1 + \frac{1}{m} = h$  e però  $m = \frac{1}{h-1}$ , si avrà  $u = h^n \left( C - (h-1)\sigma \frac{X}{h^n + 1} \right)$  (185); e se anche  $X$  fosse

costante, verrebbe  $u = h^n \left( C - (h-1)X\sigma \frac{1}{h^n + 1} \right) = Ch^n - X(h^n - 1)$  (185). Posti pertanto in questi i due valori  $m', m''$  di  $m$  o  $h', h''$  di  $h$ , si avranno i due  $u', u''$  di  $u$ , e quindi al solito  $y = \frac{(a+m')u'' - (a+m'')u'}{m' - m''}$  (152).

E' evidente che l'equazioni simili del terzo, quarto... <sup>esimo</sup> ordine si possono risolvere con lo stesso metodo (154, 156).

187. Bisogna eccettuarne al solito (156) l'equazione  $qy + a\delta y + b\delta^2 y \dots + \omega \delta^r y = X$  quando si ha  $q = 0$ , o resta solamente  $\omega \delta^r y = X$ : ma in quest'ultimo caso può applicarsi alle differenze finite il metodo delle ripetute integrazioni (146). Supponghiamo per brevità  $\omega = 1, r = 4, X = 0$ , e dovrà integrarsi  $\delta^4 y = 0$  ovvero  $\frac{\delta^4 y}{\delta x^4} = 0$ : dunque

$$1^\circ \frac{\delta^4 y}{\delta x^4} = \frac{\delta^3 y}{\delta x^3} = C, \text{ e } \frac{\delta^3 y}{\delta x^3} = C\delta x; \quad 2^\circ \dots$$

$$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = C\delta x \sigma 1 + C = (\gamma) C\delta x + C; \quad 3^\circ \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \delta x Cx + C' \delta x; \quad 3^{\circ} \frac{\sigma \delta^2 y}{\delta x} = \frac{\delta y}{\delta x} = C \delta x \sigma x + \\
&C' \delta x \sigma x + C'' = (7) C \left( \frac{x^2 - x}{2} + C' x + C'' \right), \quad \sigma \delta y \\
&= C \delta x \left( \frac{x^2 - x}{2} \right) + \delta x C' x + C'' \delta x; \quad 4^{\circ} \sigma \delta y = \\
&y = C \delta x \sigma \frac{x^2}{2} - C \delta x \sigma \frac{x}{2} + C' \delta x \sigma x + C'' \delta x \sigma x \\
&+ C''' = (7) C \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12} \right) - C \left( \frac{x^2 - x}{2} \right) + \\
&C' \left( \frac{x^2 - x}{2} \right) + C'' x + C''' = \frac{C x^3}{6} + \frac{(C' - C) x^2}{2} \\
&+ \left( \frac{C}{3} - \frac{C'}{2} + C'' \right) x + C'''.
\end{aligned}$$

188. Si ha di qui la teoria di varie specie di *Serie Ricorrenti*: ma noi ci limiteremo alle più semplici. Già si sa che l'equazione  $\frac{a^2}{a^2 + 2ax - x^2} = A + Bx + Cx^2$  ec. si riduce a

$$\circ = \begin{cases} a^2 A + a^2 Bx + a^2 Cx^2 + a^2 Dx^3 + a^2 Ex^4 + \text{ec.} \\ -a^2 + 2aAx + 2aBx^2 + 2aCx^3 + 2aDx^4 + \text{ec.} \\ -Ax^2 - Bx^3 - Cx^4 - \text{ec.} \end{cases}$$

e i due primi coefficienti  $A, B$  si determinano dall'equazioni  $a^2 A - a^2 = 0, a^2 Bx + 2aAx = 0$ : riguardo agli altri  $C, D, E$  ec., si ha  $C = \frac{-2B}{a}$

$$+ \frac{A}{a^2}, \quad D = \frac{-2C}{a} + \frac{B}{a^2}, \quad E = \frac{-2D}{a} + \frac{C}{a^2} \text{ ec. } ,$$

d'onde la serie ricorrente  $1 - \frac{2x}{a} + \frac{5x^2}{a^2} - \dots$

$$\frac{12x^3}{a^3} + \frac{29x^4}{a^4} \text{ ec.} = \frac{a^2}{a^2 + 2ax - x^2}, \text{ rotto genitore}$$

della serie. Ora le costanti quantità  $\frac{-2}{a}, + \frac{1}{a^2}$  dal cui prodotto nei rispettivi coefficienti  $B, A$  e



$C, B$  o  $D, C$  che precedono, nascono ciascuno dei coefficienti  $C, D, E$  ec. che seguono, si chiama *scala di relazione*; ed è facile osservare 1.<sup>o</sup> che la scala di relazione è formata dai coefficienti che ha la variabile nel denominatore ordinato del rotto genitore, presi con segni contrari e divisi per i termini costanti; 2.<sup>o</sup> che per avere il coefficiente di un nuovo termine della serie bisogna moltiplicar l'ultimo già trovato per il primo termine della scala di relazione, il penultimo per il secondo ec., e far la somma di tutto. Così il

rotto  $\frac{1+x+2^2}{1-2-2^2+2^3}$  si cangia nella serie  $1+2x+3x^2+3x^3+4x^4+5x^5+6x^6+6x^7+7x^8$  ec., la cui scala di relazione sarà  $1, +0, +0, +1, -1$ , e supposti trovati i primi cinque coefficienti  $1, 2, 3, 3, 4$ , per avere il sesto, il settimo ec., si farà  $1 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 5$ , coefficiente del sesto termine,  $1 \cdot 5 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 6$ , coefficiente del settimo ec.

189. Data dunque una serie ricorrente  $f+gx+bx^2+hx^3$  ec. con la scala di relazione  $p, +q, +r$  ec., la sua somma all'infinito sarà un rotto genitore  $\frac{s+tx+ux^2}{1-px-qx^2-rx^3}$  ec. di cui la scala di

relazione già somministra il denominatore (188). Per avere i coefficienti  $s, t, u$ , ec. del numeratore, si divida  $s+tx+ux^2$  ec. per  $1-px-qx^2$  ec. e paragonando il quoziente  $s+(t+ps)x+(u+qs+pt+p^2s)x^2$  ec. con la serie data, si avrà  $s=f, t=g-pf, u=h-pg-qs$ , ec.; dunque la somma cercata sarà

$\frac{f+(g-pf)x+(h-pg-qs)x^2}{1-px-qx^2-rx^3}$  ec. Così se la

serie sia  $1-\frac{2x}{a}+\frac{x^2}{a^2}$  ec., e la scala di relazione  $\frac{-2}{a}, +\frac{1}{a^2}$ , avremo  $f=1, g=\frac{-2}{a}, h=\frac{-3}{a^2}$

$\frac{1}{a^2}$  ec.,  $p = -\frac{1}{a}$ ,  $q = \frac{1}{a^2}$ , e la sua somma all'infinito sarà  $\frac{a^2}{a^2 + 2ax - x^2}$  (188). Che se si voglia

la somma fino ad un dato termine  $rx^n$ , i termini dopo di esso all'infinito saranno  $ux^{n+1} + \varphi x^{n+2} + \chi x^{n+3}$  ec.  $= x^{n+1} (v + \varphi x + \chi x^2 \text{ ec.}) = x^{n+1} [v + (\varphi - pv)x + (\chi - p\varphi - qu)x^2 \text{ ec.}]$ ,  
 $\frac{1 - px - qx^2 - rx^3 \text{ ec.}}$

e però la somma della serie si troverà  $f + (g - pf)x + (h - pg - qf)x^2 \text{ ec.} - vx^{n+1} + (\varphi - pv)x^{n+2} + (\chi - p\varphi - qu)x^{n+3} \text{ ec.}$   
 $\frac{1 - px - qx^2 - rx^3 \text{ ec.}}$

onde nel caso d'una scala bimembre  $p, +q$  quando  $b = pg + qf$  e  $\chi = p\varphi + qu$  (188), la somma

fino al termine  $rx^n$  sarà  $f + (g - pf)x - vx^{n+1} - (\varphi - pv)x^{n+2} =$   
 $\frac{f + (g - pf)x - (pv + q\sigma)x^{n+1} - qr x^{n+2}}{1 - px - qx^2}$ , perchè  $v$

$= p\tau + q\sigma$ ,  $\varphi = pv + q\tau$  (188). Così volendo la somma della serie di sopra  $\frac{2x}{a}$  ec. fino al

quinto termine  $\frac{29x^5}{a^4}$ , ella si troverà

$$\frac{a^6 + 70ax^5 - 29x^6}{a^6 + 2a^5x - a^4x^2}$$

190. Ma questa formula della somma involvendo i termini particolari  $f, g, b$  ec.  $v, \varphi, \chi$  ec., non può darci il termine generale; onde alla ricerca di esso applicheremo l'equazioni a differenze finite. Supposta  $q, +r$  la scala di relazione,  $yx^n$  il termine generale,  $y$  il general coefficiente della serie ec.  $y'x^{n-1}, y''x^n, y'''x^{n+1}, y''''x^{n+2}$  ec. ed  $a$  il numero dei termini la cui differenza costante è

$\delta n = 1$ , si avrà  $y'' = qy' + ry$  (188); ma  $y' = y + \delta y$ ,  $y'' = y + 2\delta y + \delta^2 y$  (3); dunque  $y + \dots$   
 $\frac{(2-q)\delta y + \delta^2 y}{1-q-r} = 0$ , che paragonata con l'e.

quazione di sopra (186) ci dà  $a = \frac{2-q}{1-q-r}$ ,  $b =$

$$\frac{1}{1-q-r}, X = 0, \frac{2-q}{1-q-r} + m = \frac{-1}{m(1-q-r)},$$

$$m' = \frac{q-2 + \sqrt{(q^2+4r)}}{2(1-q-r)}, m'' = \dots$$

$$b' = \frac{q-2 - \sqrt{(q^2+4r)}}{2(1-q-r)}, b'' = \frac{\sqrt{(q^2+4r)} - q - 2r}{q-2 + \sqrt{(q^2+4r)},$$

$$b''' = \frac{-\sqrt{(q^2+4r)} - q - 2r}{q-2 - \sqrt{(q^2+4r)}, u' = Cb^{m'}, u'' =$$

$$C' b^{m''} \text{ ed } yx^n = \frac{[(a+m')u'' - (a+m'')u']x^n}{n' - m''} \text{ (186)}.$$

Così data la serie  $1 + 2x^2 + 2x^2 + 6x^4$  ec. =  $1x^0 + 0x^1 + 2x^2 + 2x^2 + 6x^4$  ec., la cui scala di relazione 1, + 2, sarà  $q = 1, r = 2, a = -\frac{1}{2}$ ,

$$m' = -\frac{1}{2}, m'' = 1, b' = -1, b'' = 2, u' =$$

$$C(-1)^n, u'' = C' 2^n, y = \frac{C' 2^{n+1} + C(-1)^n}{3};$$

e poichè fatto  $n = 0$ , si ha dalla serie  $y = 1$ , e fatto  $n = 1$  si ha  $y = 0$ , le due equazioni  $1 = \frac{2C' + C}{3}$ ,  $0 = \frac{4C' - C}{3}$  daranno  $C' = \frac{1}{2}$ ,  $C = 2$  ed

$$yx^n = \frac{(2^{n+1} + 2)x^n}{3}, \text{ preso il segno } +, \text{ o il segno } - \text{ secondo che } n \text{ è pari o impari.}$$

191. Accade talvolta che per esser  $1 - q = 0$  ed  $1 - q - r = 0$ , si trovi  $m' = m'' = \frac{0}{0}$ : allora l'equazione  $y + \frac{(2-q)\delta y + \delta^2 y}{1-q-r} = 0$  si riduce

a  $\delta^2 y = 0$  ove la differenziale costante è  $\delta n = 1$  (190); dunque  $\sigma \delta^2 y = Cn + C'$  (187). Così data la serie  $1 + 6x + 11x^2 + 16x^3$  ec. la cui scala di relazione  $q, +r = 2, -1$  e perciò  $q - 2 = 0$ , ed  $1 - q - r = 0$ , sarà  $y = Cn + C'$ ; e poichè quando  $n = 0$  si ha  $y = 1$ , e quando  $n = 1$  si ha  $y = 6$ , le due equazioni  $1 = C'$ ,  $6 = C + C'$  o  $5 = C$  danno  $y x^n = (5n + 1)x^n$ . Può anche avvenire che si trovi  $m' = m^n = -\frac{a}{2}$  (153): allora

fatta al solito  $m' = -\frac{a}{2} + \omega$ ,  $m'' = -\frac{a}{2} - \omega$ ,  
 $b' = 1 + \frac{1}{m'} = \frac{2\omega - a + 2}{2\omega - a}$ ,  $b'' = 1 + \frac{1}{m''} = \dots$   
 $\frac{2\omega + 2 - 2}{2\omega + a}$ ,  $C = C' = K$  (153), e posto per comodo  $a - 2 = g$ , sarà  $u' = K \left( \frac{g - 2\omega}{a - 2\omega} \right)^n$ ,  $u'' =$

$K \left( \frac{g + 2\omega}{a + 2\omega} \right)^n$ , cioè sviluppando i binomj con trascurare  $\omega^2, \omega^3$  ec.,  $u' = \frac{K(g^n - 2ng^{n-1}\omega)}{a^n - 2na^{n-1}\omega}$ ,

$u'' = \frac{K(g^n + 2ng^{n-1}\omega)}{a^n + 2na^{n-1}\omega}$ , e però (186)  $y = \dots$

$\frac{K(a + 2\omega)(g^n + 2ng^{n-1}\omega)}{4\omega(a^n + 2na^{n-1}\omega)} \dots$

$\frac{K(a - 2\omega)(g^n - 2ng^{n-1}\omega)}{4\omega(a^n - 2na^{n-1}\omega)} = [Kan - Kg(n -$

1)]  $\frac{g^{n-1}}{a^n}$ ; onde fatto  $Ka = C$ ,  $Kg = C'$  e resti-

tutto il valor di  $g \equiv a - 2$ , avremo  $y \equiv [Cn - C'(n-1)] \frac{(a-2)^{n-1}}{a}$ . Così data la serie

$1 + 2x - 5x^2 + 8x^3$  ec. la cui scala di relazione è  $q, +r \equiv -2, -1$ , sarà (190)  $a \equiv \frac{2-q}{1-q-r} \equiv$

1 ed  $y \equiv [Cn - C'(n-1)] (-1)^{n-1}$ ; e poichè quando  $n \equiv 0$  si ha  $y \equiv 1$ , e quando  $n \equiv 1$  si ha  $y \equiv 2$ , le due equazioni  $1 \equiv -C'$ ,  $2 \equiv C$  danno  $yx^n \equiv (3n-1)(-1)^{n-1}x^n$ .

192. Anche nell'Analisi del *Caso* e della *probabilità* si adoperano le Differenze finite. Chiamando noi fortuito o *casuale* un successo allorchè ignoriamo le cagioni che posson farlo avvenire, siamo costretti a riguardar come *egualmente probabile* l'esistenza o inesistenza di due successi casuali se l'uno o l'altro dovendo necessariamente accadere, non vi sia maggior ragione per cui l'uno debba accader piuttosto che l'altro. Si riguarda pure come egualmente probabile l'esistenza di tre avvenimenti che a vicenda escludendosi mentre un di essi dee certamente aver luogo, non ci offrono intanto ragione alcuna onde lo debba aver questo piuttosto che quello: ma qui l'inesistenza di ciascuno è *più probabile* della sua esistenza nel rapporto di 2 a 1, perchè di tre casi possibili l'inesistenza ne ha due in favore e uno solo contrario. Quindi le probabilità  $\Pi, \Pi'$  dell'esistenza o inesistenza d'un avvenimento son tanto maggiori o minori, quanto direttamente è più grande o più piccolo il numero dei casi  $F, C$  a lei favorevoli o contrari, e quanto reciprocamente è più piccolo o più grande quello dei casi possibili  $P$ , onde sarà  $\Pi \equiv P \times \frac{1}{P} \equiv \frac{F}{P}$  e  $\Pi' \equiv$

$C \times \frac{1}{P} = \frac{C}{P}$ , e poichè i casi favorevoli  $F$  insieme coi contrari  $C$  formano i casi possibili  $P$ , cioè  $F + C = P$ , si avrà  $\Pi + \Pi' = 1$  ed  $1$  rappresenterà la *certezza*, essendo chiaro che un avvenimento dee di certo accadere o non accadere. Trovata la probabilità si determina la *speranza*  $\Sigma$  degli interessati all'esistenza dell'avvenimento, e questa speranza evidentemente risulta e dalla somma sperata  $S$  e dalla probabilità  $\Pi$  d'ottenerla, cioè  $\Sigma = \Pi S = \frac{FS}{P}$ . Ecco ora un Problema sulle probabilità per far vedere come si applichino a somiglianti ricerche le Differenze finite.

Presa a caso una quantità di monete da un mucchio  $n$  di esse, determinar la probabilità che il numero preso sia pari o caffo, supponendo che possa prendersi una sola moneta, o più, o tutte. Chiamando  $y$  i casi in cui il numero preso può esser pari, e  $z$  quelli in cui può esser caffo, una nuova moneta aggiunta al mucchio e combinata coi precedenti casi in caffo, gli renderà tutti pari, onde allora la somma dei pari sarà  $I^a$ .  $y' = y + z$ ; ma combinata coi precedenti casi pari, gli cangierà tutti in caffo oltre l'unità aggiunta che è caffo, onde la somma dei casi in caffo sarà  $II^a$ .  $z' = z + y + 1$ . La  $I$ . dà  $y + \delta y = y + z$  cioè  $\delta y = z$  e però  $\delta^2 y = \delta z$ ; dalla  $II$ . si ha  $z + \delta z = z + y + 1$  cioè  $\delta z (= \delta^2 y) = y + 1$  e però  $y + \delta^2 y = -1$ , equazione da cui abbiamo (186)  $a = 0, b = -1, X = -1, m' = 1, m'' = -1, h' = 2, h'' = 0, u' = (C + 1)z^n - 1, u'' = -1$  ed  $y = (C + 1)z^{n-1} - 1$ : ma quando  $n = 1$  non si hanno casi pari e però  $y = 0$ ; dunque  $C = 0, y = 2^{n-1} - 1, y' = 2^n - 1, z (= y' - y) = 2^{n-1}$ .

Ora i casi  $y$  pari coi casi  $z$  in caso danno i casi possibili  $P = y + z = 2^n - 1$ ; dunque la probabilità per i casi pari è  $\Pi = \frac{F}{P} = \frac{y}{y+z} = \dots = \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1}$ , e quella per gli impari  $\Pi' = \frac{C}{P} = \dots = \frac{z}{y+z} = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}$ ; e poichè  $2^{n-1} > 2^{n-1} - 1$ , la scommessa per il numero caso sarà sempre più vantaggiosa che per il pari.

*Dell'Integrazione dell'Equazioni a Differenze parziali.*

193. Supposta  $z$  una funzione di più variabili  $x, y$  ec., diconsi *a differenze parziali del prim'ordine* quelle equazioni in cui  $z, x, y$  ec. vanno unite con  $\frac{d^x z}{dx}, \frac{d^y z}{dy}$  ec. (121); del secondo allorchè oltre  $z, x, y$  ec.,  $\frac{d^x z}{dx}, \frac{d^y z}{dy}$  ec. trovansi anche  $\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d^{2x} z}{dx^2}, \frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{d^{2y} z}{dy^2}$  ec.,  $\frac{d^x d^y z}{dx dy} = \frac{d^y d^x z}{dy dx}$  ec. (121), differenze parziali seconde che nascono e dal differenziar  $\frac{d^x z}{dx}$  per  $x, \frac{d^y z}{dy}$  per  $y$  ec. essendo costanti  $dx, dy$  ec., e dal differenziar  $\frac{d^x z}{dx}$  per  $y$  o  $\frac{d^y z}{dy}$  per  $x$  ec.; così si dica degli altri ordini successivi. Tali equazioni qualche volta s'incontrano nell'alta Geometria, e assai spesso nella Fisica Matematica più sublime: ma come il Calcolo Infinitesimale suppone perfetta l'Algebra, così quello dell'equazioni a differenze parziali suppone perfetto l'Infinitesima-

le. Per esempio, quì si assume che possa sempre trovarsi il fattore  $m$  che rende esatta la differenziale qualunque  $P dx + Q dy$  (147), e si riguarda come integrata un'equazione a differenze parziali quando è ridotta all'integrazione d'un'equazione a differenze ordinarie: se il fattore non possa aversi o se non si possa integrar l'equazione differenziale, il difetto sarà dei Calcoli inferiori, non di quello di cui trattiamo. Eccone alcune più elementari nozioni.

194. Se  $z$  sia funzione di  $x, y$ , si avrà  $dz =$

$$P dx + Q dy = d^x z + d^y z \text{ e però } \frac{d^x z}{dx} = P, \frac{d^y z}{dy} =$$

$Q$  (122). Dal che si raccoglie 1.º che l'espressioni

$\frac{d^x z}{dx}, \frac{d^y z}{dy}$  son quantità variabili ma finite, denotanti

il coefficiente  $P$  o  $Q$  di  $dx$  o di  $dy$  quando si differenzia  $z$  o per  $x$  o per  $y$ : 2.º che se nella differenziazione di  $z$  si prenda  $x$  o  $y$  costante, si ha

$dz = d^y z = Q dy$  o  $dz = d^x z = P dx$ , e l'integrale

di queste equazioni sarà  $z = \int^y Q dy + C$  o  $z =$

$\int^x P dx + C'$  ove potrà essere  $C = \phi(x)$ ,  $C' = \Phi(y)$  (122. 2.º) se d'altra parte non si sappia che tali funzioni non hanno luogo: 3.º che avendosi

$\int P dx = Px - \int x dP$ , e  $\int Q dy = Qy - \int y dQ$  (100),

sarà  $z = \int P dx + \int Q dy = Px + Qy - \int (x dP +$

$y dQ) = \frac{x d^x z}{dx} + \frac{x d^y z}{dy} - \int (x \cdot d(\frac{d^x z}{dx}) +$

$y \cdot d(\frac{d^y z}{dy}))$ .

195. Dico ora che se  $z$  sia una funzione di  $x, y$

onde  $dz = d^x z + d^y z$ , ella sarà anche una funzione di  $x, u$  (supposta  $u$  funzione di  $x, y$ ) onde deno-



tando con  $d^x z$  la differenza di  $z$  per la nuova  $x$ , si avrà  $dz = d^x z + d^y z$ . Infatti se  $z = ax + by = nax + by - (n-1)ax = \frac{(ax+by)}{x^n} x^n = ec.$ , potrà farsi  $u = nax + by$ ,  $u = by - (n-1)ax$ ,  $u = \frac{ax+by}{x^n}$ ,  $z = (ax+by)x^n$ ,  $u = ec.$  ed  $u$  sarà sempre funzione di  $x, y$ , onde  $z$  lo sarà anche di  $x, u$ . Perciò  $u$  è indeterminata e suscettibile di infinite forme differenti.

196. Anzi può  $x$  soggettarsi a soddisfare ad una condizione richiesta, per esempio, che sia tale

onde abbiasi  $\frac{d^x u}{dx} + \frac{pd^y u}{dy} = 0$ , intendendo per  $p$  una data funzione di  $x, y$ ; poichè preso dall'equazione proposta e sostituito in  $du = d^x u + d^y u$  il valor di  $d^x u$ , si avrà  $du = d^y u - \frac{pd^y u}{dy} = . .$

$\frac{d^y u}{dy} (dy - pdx)$ : dunque supposto  $m$  il fattore che rende esatta la differenziale  $dy - pdx$  (147) onde si

abbia  $m dy - m pdx = dt$ , verrà  $du = \frac{d^y u}{dy} \cdot \frac{dt}{m}$ ; dunque  $u$  è funzione di  $t$ , ed essendo  $u$  indeterminata

(195), può farsi  $u = t$  onde  $\frac{d^y u}{dy} = m$ , valori che

danno  $\frac{d^x u}{dx} + \frac{pd^y u}{dy} = 0$ . Così se si voglia  $u$  di

modo che sia  $\frac{d^x u}{dx} - \frac{y d^y u}{x dy} = 0$ , avremo  $p = -$

$\frac{y}{x}$  e  $dy - pdx = dy + \frac{y dx}{x}$ , differenziale esatta se

si moltiplichi per  $m = x = \frac{d^y u}{dy}$ ; dunque  $xy = z =$

$$u \text{ e } \frac{d^x u}{dx} - \frac{y d^y u}{x dy} = y - \frac{y x}{x} = 0.$$

197. Considerando dunque  $z$  come funzione di  $x, y$  e di  $x, u$ , si avrà  $dz = d^x z + d^y z = d^x z + d^u z$  (195); ma  $du = d^x u + d^y u$  ovvero  $dud^u z = (d^x u + d^y u) d^u z$ , e però  $d^u z = \frac{d^u z}{du} (d^x u + d^y u)$ ;

$$\text{dunque } dz = d^x z + \frac{d^u z}{du} \cdot d^x u + \frac{d^u z}{du} \cdot d^y u = d^x z +$$

$$d^y z, \text{ e quindi (194) } d^x z = d^x z + \frac{d^u z}{du} \cdot d^x u \text{ e } d^y z$$

$$= \frac{d^u z}{du} \cdot d^y u.$$

198. Ciò premesso, poco vi vuole a integrar l'equazioni lineari del prim' ordine a tre variabili,

che tutte comprendonsi nella generale  $\frac{d^x z}{dx} + \frac{p d^y z}{dy} + q = 0$ , essendo  $p$  una data funzione di  $x, y$  mentre  $q$  può esserlo di  $x, y, z$ . Poichè sostituiti in

$$\text{essa i valori di } d^x z, d^y z \text{ (197), si ha } \frac{d^x z}{dx} +$$

$$\frac{d^u z}{du} \left( \frac{d^x u}{dx} + \frac{p d^y u}{dy} \right) + q = 0; \text{ e fatto } \frac{d^x u}{dx} + \frac{p d^y u}{dy}$$

$$= 0 \text{ per determinare } u \text{ (196), viene } \frac{d^x z}{dx} + q = 0.$$

Posto dunque in  $q$  il valor di  $y$  ricavato da quello di  $u$ , onde  $q$  si cangi in  $q'$ , avremo  $d^x z + q' dx = 0$ : ma  $z$  è qui funzione di  $x, u$  e manca  $d^u z$ ; dunque

$\kappa$  è costante (194. 2°); dunque  $d^x z = dz = -q'dx$ ,  
dunque  $z = -\int^x q'dx + \varphi(u)$  (194. 1°).

ESEMPIO. Debba integrarsi  $\frac{d^x z}{dx} + \frac{y d^y z}{x dy} + \frac{z}{y}$   
 $- a\sqrt{(x^2 + y^2)} = 0$ : avremo  $p = \frac{y}{x}$ ,  $q = \frac{z}{y}$

$- a\sqrt{(x^2 + y^2)}$  e  $\frac{d^x u}{dx} + \frac{p d^y u}{dy} = 0 = \frac{d^x u}{dx} +$

$\frac{y d^y u}{x dy}$ . Da questa equazione si ha (196)  $du = \dots$

$\frac{d^y u}{dy} (dy - \frac{y dx}{x})$ , e poichè il fattore  $m = \frac{1}{x}$  ren-

de esatta la differenziale  $dy - \frac{y dx}{x}$ , verrà  $\frac{y}{x} = t$

$= u$ ,  $y = ux$ ,  $q' = \frac{z}{ux} - a x \sqrt{(1 + u^2)}$ , e

dovrà integrarsi  $dz = -\frac{z dx}{ux} + a x dx \sqrt{(1 + u^2)}$

ovvero  $ux dz + z dx = a u x^2 dx \sqrt{(1 + u^2)}$  fat-

ta  $u$  costante: integrando pertanto (156. XI.) e

restituendo quindi il valor di  $u = \frac{y}{x}$ , si ottiene

$$z = \frac{a y x \sqrt{(x^2 + y^2)}}{1 y + x} + \kappa \frac{x}{y} \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

199. Ho supposta  $p$  una data funzione di  $x, y$ :  
ma si deve aggiungere che può essere anche fun-

zione di  $x, y, z$ , senza che si alteri l'operazione.

Per dimostrarlo basta osservare che da un'equazio-

ne  $z - axz = by$  può aversi o  $z = \frac{by}{1 - ax}$ , valo-

re assoluto di  $z$ , o  $z = axz + by$ , valore che de-

termina  $z$  quando essa nel secondo membro si ri-

guardi come una costante. In tal caso  $u$  che era funzione di  $x, y$  (194), lo sarà anche di  $x, y, z$ ,

e perciò nell'equazione  $\frac{d^x u}{dx} + \frac{p d^y u}{dy} = 0$  (196) potrà esserlo anche  $p$ , ma  $z$  vi si dovrà prender per costante, e quindi tutte l'operazioni dovranno farsi

nella consueta maniera. Così per l'equazione  $\frac{d^x z}{dx}$

$$+ \frac{x z d^y z}{y^2 dy} = 0 \text{ si ha } p = \frac{xz}{y^2}, q = 0, du = \dots$$

$$\frac{d^y u}{dy} \left( dy - \frac{x dx}{y^2} \right), \text{ il fattore } m = y^2, \text{ onde } u = \frac{y^3}{3} - \frac{z x^2}{2} \text{ e } z = \varphi(u) = \varphi\left(\frac{y^3}{3} - \frac{z x^2}{2}\right) = \varphi(2y^3 - 3zx^2).$$

Nè faccia stupore se qui si sopprime il denominator 6; poichè le costanti soppresse, o sieno coefficienti o esponenti o denominatori comuni, ricompariscono in seguito allorchè si determina la forma delle funzioni  $\varphi$  secondo certe condizioni assegnate. Per esempio, se si voglia la forma della funzione  $\varphi$  tale che fatto  $y = mx$  nell'equazione

$$z = \varphi(y^2 + x^2), \text{ si abbia } z = \frac{x^2}{a}, \text{ è chiaro che}$$

sostituiti i valori di  $z$  ed  $y$ , l'equazione diverrà

$$\frac{x^2}{a} = \varphi(x^2 + m^2 x^2); \text{ onde posto } u = x^2 + m^2$$

$$x^2 \text{ e però } x^2 = \frac{u}{m^2 + 1}, \text{ si avrà } \varphi(u) = \dots$$

$$\frac{u}{a(m^2 + 1)} = \frac{x^2 + y^2}{a(m^2 + 1)} = \varphi(x^2 + y^2) = z; \text{ e si}$$

vede che in  $\varphi$  era stato soppresso il denominator costante  $a(m^2 + 1)$ . In tal guisa (per avvisarne qui di passaggio) si determinano le funzioni arbitrarie dell'equazioni a differenze parziali, finchè al-

meno le condizioni assegnate per la loro determinazione possono esprimersi analiticamente.

200. Del resto, si integrano con questo metodo anche certe equazioni per cui si vuol ricorrere alla formula accennata di sopra (194. 3<sup>o</sup>). Tale

è l'equazione  $\frac{d^x z}{dx} \cdot \frac{d^y z}{dy} = 1$ , che ridotta a  $\frac{d^x z}{dx} - \frac{dy}{d^y z} = 0$ , ci dà  $p = 0$ ,  $q = -\frac{dy}{d^y z}$ ,  $du = \frac{d^y u}{dy} \cdot dy$ , onde  $u = y$ ,  $q' = -\frac{du}{d^y z}$ , e quindi  $dz = \dots$

$$\frac{du}{d^y z} dx \text{ cioè } z = \frac{x dy}{d^y z} + \varphi(y) = \frac{x dx}{dx} + \varphi(y);$$

duunque differenziando  $z$  per  $y$ , si avrà  $d^y z (= \frac{dx}{d^x z} dy) = dy \varphi'(y)$ ; ed integrando,  $\frac{y dx}{d^x z} =$

$\varphi(y) +$  una Costante che può esser funzione di  $\frac{d^x z}{dx}$ ; dunque  $\varphi(y) = \frac{y dx}{d^x z} - f\left(\frac{d^x z}{dx}\right)$ , e per-

ciò  $z = \frac{x dy}{d^y z} + \frac{y dx}{d^x z} + f\left(\frac{d^x z}{dx}\right)$ ; cosicchè se

sia  $\frac{d^x z}{dx} = \frac{dy}{d^y z} = r$  onde  $\frac{dx}{d^x z} = \frac{d^y z}{dy} = \frac{1}{r}$ , ver-

rà  $z = rx + \frac{y}{r} - f(r)$ , precisamente come si avrebbe dalla citata formula.

201. Per assicurarsi poi che l'operazione è ben fatta, si torna dall'integrale all'equazione differenziale 1<sup>o</sup> differenziando tutta l'integrale per  $x$  dal che in luogo di  $\varphi$  si ha  $\varphi'(z)$ : 2<sup>o</sup> differenzian-

dola nuovamente per y dal che pure si ha  $\phi'$  in luogo di  $\phi$ : 3° eliminando  $\phi'$  per mezzo delle due equazioni. Si integri al solito (198) l'equazione

$$\frac{d^x z}{dx} + \frac{m^2 y d^y z}{n^2 x dy} - \frac{m^2 z}{x} = 0, \text{ ove } p = \frac{m^2 y}{n^2 x}, q = -\frac{m^2 z}{x}, du = \frac{d^y u}{dy} \left( dy - \frac{m^2 y dx}{n^2 x} \right), \text{ il fattore} = \frac{1}{mm}, \text{ e percio } \frac{y}{mm} = u, dz = \frac{m^2 z dx}{x} \text{ e}$$

$$z = x^{\frac{mm}{nn}} \phi \left( \frac{y}{\frac{mm}{nn}} \right) \text{ ovvero } \frac{z}{x} = \phi \left( \frac{y}{\frac{mm}{nn}} \right):$$

per ritornare alla data, differenzio questa per x e

viene  $\frac{x^{\frac{mm}{nn}} dz - m^2 z x^{\frac{mm}{nn} - 1} dx}{2mm} = \dots$

$$- m^2 y x^{\frac{mm}{nn}} dx \phi' \left( \frac{y}{\frac{mm}{nn}} \right); \text{ differenzio per } y$$

$$\text{ed ho } \frac{d^y z}{mm} = \frac{dy \phi' \left( \frac{y}{\frac{mm}{nn}} \right)}{\frac{mm}{nn}}; \text{ elimino } \phi', \text{ [riduco, e}$$

trovo la data.

202. Sia ora da integrarsi l'equazione lineare dell'ordine  $n^{\text{esimo}}$  e della forma  $\frac{x^n d^{nx} z}{dx^n} + \dots$

$$\frac{nx^{n-1} y d^{(n-1)x} y z}{dx^{n-1} dy} + \text{cc.} \dots + \frac{y^n d^{ny} z}{dy^n} =$$

$Y\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + Y'\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \text{cc.} \dots + X\psi\left(\frac{y}{x}\right) + X'\psi'\left(\frac{y}{x}\right) + \text{cc.}$ , e per render più facile l'intelligenza del metodo, riduciamola ad un caso particolare e sia

$$I. \frac{x^2 d^{3x} z}{dx^3} + \frac{3x^2 y d^{2x} y z}{dx^2 dy} + \frac{3xy^2 d^{xy} z}{dx dy^2} + \dots$$

$$\frac{y^2 d^{3y} z}{dy^3} = 0. \text{ Pongo } \frac{x^2 d^{2x} z}{dx^2} + \frac{3xy d^{xy} z}{dx dy} + \frac{y^2 d^{2y} z}{dy^2} = V \text{ (} V \text{ è funzione di } x, y \text{) e differenziando prima}$$

$$\text{per } x \text{ e poi per } y, \text{ viene II. } \frac{2xd^{2x} z}{dx} + \frac{x^2 d^{3x} z}{dx^2} +$$

$$\frac{2yd^{xy} z}{dy} + \frac{2xy d^{2x} y z}{dx dy} + \frac{y^2 d^{2y} d^{xy} z}{dy^2} = d^x V, \text{ III.}$$

$$\frac{x^2 d^{2x} d^{xy} z}{dx^2} + \frac{2xd^{xy} d^{xy} z}{dx} + \frac{2xy d^{xy} d^{2y} z}{dx dy} + \frac{2y d^{2y} z}{dy} +$$

$$\frac{y^2 d^{3y} z}{dy^2} = d^y V. \text{ Moltiplico la II. per } \frac{x}{dx}, \text{ la III.}$$

per  $\frac{y}{dy}$  e sostituiti nella data i valori di  $\frac{x^2 d^{3x} z}{dx^3}$  e di

$$\frac{y^2 d^{3y} z}{dy^3}, \text{ ella dopo la riduzione diventa } \frac{d^{xy} V}{dx} +$$

$$\frac{y d^{xy} V}{x dy} - \frac{2V}{x} = 0, \text{ che integrata (198) dà } V =$$

$$x^2 \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \text{ onde l'integrale della I. sarà IV. } \frac{x^2 d^{2x} z}{dx^2}$$

$$+ \frac{2xy d^2 y z}{dx dy} + \frac{y^2 d^2 y z}{dy^2} = x^2 \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \text{ Questa nuo}$$

vamente si integra ponendo  $\frac{x d^x z}{dx} + \frac{y d^y z}{dy} = V$ , differenziando prima per  $x$  e poi per  $y$ , moltiplicando le due differenziali rispettivamente per  $\frac{x}{dx}$ ,  $\frac{y}{dy}$ ,

e sostituendo nella data i valori di  $\frac{x^2 d^{2x} z}{dx^2}$  e di

$\frac{y^2 d^{2y} z}{dy^2}$ , che fatta la riduzione, la trasformano in

$$\frac{d^x V}{dx} + \frac{y d^y V}{x dy} - \frac{V}{x} - x \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \text{ d'onde si ha } V = x^2 \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x \Psi\left(\frac{y}{x}\right) \text{ e per integrale della IV.,}$$

$\frac{x d^x z}{dx} + \frac{y d^y z}{dy} = x^2 \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x \Psi\left(\frac{y}{x}\right)$ . E finalmente per l'integrale di quest'ultima, che sarà l'integrale finita della I., si trova  $z = \frac{x^2}{2} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) +$

$x \psi\left(\frac{y}{x}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right)$ . Così si trattano tutte l'altre della medesima forma e d'un ordine qualunque, e perciò anche l'equazione proposta in principio, giacchè il secondo membro  $V \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$  ec. non altera punto il giro delle prescritte operazioni.

203. E' però tanto simmetrica questa equazione, che il metodo d'integrarla si stimerà forse d'un uso assai raro. Eppur con esso integreremo più facilmente di quel che altri abbia fatto finora, l'equazioni omogenee di un ordine  $n^{\text{esimo}}$  quelle cioè che hanno tutti i termini con differenziali al mede-



simo grado e con coefficienti costanti. Sia, per esempio, l'equazione I<sup>a</sup>.  $\frac{d^{2x}z}{dx^2} + \frac{bd^x d^y z}{dxdy} + \dots$   
 $\frac{cd^{2y}z}{dy^2} = R$  ove  $R$  può esser funzione di  $x, y$ .

Pongo II<sup>a</sup>.  $\frac{d^x z}{dx} + \frac{m d^y z}{dy} = V$  ( $m$  è un coefficiente indeterminato) e differenziando al solito per  $x$  e per  $y$ , moltiplicando le differenziali rispettivamente

per  $\frac{1}{dx}$ ,  $\frac{c}{m dy}$ , e sostituendo nella I. i valori di  $\frac{d^{2x}z}{dx^2}$  e di  $\frac{cd^{2y}z}{dy^2}$ , ella, se si faccia III<sup>a</sup>.  $b - m -$

$\frac{c}{m} = 0$ , diverrebbe IV<sup>a</sup>.  $\frac{d^x V}{dx} + \frac{c d^y V}{m dy} = R$ . Ma qui bisogna osservare che la risoluzione della III. dando due valori  $m'$ ,  $m''$  di  $m$ , la II. si scioglie

nelle due  $\frac{d^x z}{dx} + \frac{m' d^y z}{dy} = V$ ,  $\frac{d^x z}{dx} + \frac{m'' d^y z}{dy} = V$ ,

d'onde viene  $\frac{d^x z}{dx} = V$  ovvero  $\frac{d^y z}{dy} = 0$ ; dunque  $V$  non è ora funzione di  $x, y$  ma di  $x$  solamente; dunque la IV. dee ridursi a  $\frac{dV}{dx} = R$  (194. 2<sup>o</sup>), da

cui abbiamo  $V = \int^x R dx$  senza la solita  $\phi(y)$  che si è trovata  $= 0$ ; dunque l'integrale della I.

sarà  $\frac{d^x z}{dx} + \frac{m d^y z}{dy} = \int^x R dx$ , che nuovamente

integrata (198) dà  $z = \int dx \int^x R dx + \phi(y - mx)$ , ricordandosi di mettere in  $R$  il valor di  $y =$

$u + m x$  (198) prima di integrar  $\int^x R dx$ : ma dai due valori  $m'$ ,  $m''$  di  $m$  si ha  $z = \int dx \int^x R dx + \varphi(y - m'x)$  e  $z = \int dx \int^x R dx + f(y - m''x)$ ; dunque sommando verrà finalmente  $z = \int dx \int^x R dx + \frac{1}{2} \varphi(y - m'x) + \frac{1}{2} f(y - m''x) = \int dx \int^x R dx + \varphi(y - m'x) + f(y - m''x)$ , la cui differenziale restituisce in fatti la data. Così presso a poco si integreranno l'equazioni omogenee degli altri ordini.

204. Al caso di  $m' = m'' = \frac{b}{2}$  soddisfa anche più direttamente il metodo stesso (202); poichè avendosi allora  $c = \frac{b^2}{4}$  la proposta equazione (203)

diventa  $\frac{d^{2x}z}{dx^2} + \frac{b d^x d^y z}{dx dy} + \frac{b^2 d^{2y}z}{4 dy^2} = R$ , i cui coefficienti costanti formano un quadrato perfetto.

Si ponga dunque  $\frac{d^x z}{dx} + \frac{b d^y z}{2 dy} = V$ : differenziando per  $x$  e per  $y$ , moltiplicando rispettivamente le due differenziali per  $\frac{1}{dx}$ ,  $\frac{b}{2 dy}$  e sostituendo al solito, si troverà  $\frac{d^x V}{dx} + \frac{b d^y V}{2 dy} = R$  da cui si ottiene (198)  $V = \int^x R dx + \varphi(y - \frac{bx}{2})$ ; dunque l'integrale della data sarà  $\frac{d^x z}{dx} + \frac{b d^y z}{2 dy} = \int^x R dx + \varphi(y - \frac{bx}{2})$ , dalla cui integrazione

V

FIG.

$$\text{ne viene } z = \int dx \int^x R dx + x \varphi(ay - bx) + f(ay - bx).$$

205. La natura del nostro Libro non ci permette di estenderci più oltre sull'equazioni a differenze parziali. Solo aggiungeremo che questa teoria si applica sempre utilmente e spesso per necessità a tutti i problemi geometrici ove si considerano le superficie curve; poichè tali superficie esigendo tre assi a cagione delle loro tre dimensioni, e quindi anche tre coordinate  $z, y, x$  rispettivamente parallele ai tre assi e legate in equazione tra loro, una di esse, come  $z$ , deve esser funzione dell'altre due, e ciò per lo più conduce alle differenze parziali. Si voglia, per esempio, l'equazion generale di tutte le superficie di rivoluzione intorno all'asse

39.  $AA$ , e si supponga  $dz = d^x z + d^y z = P dx + Q dy$  (194) la differenziale di questa equazione. Intendendo abbassata da un punto qualunque  $H$  della superficie sul piano  $AEA$  l'ordinata perpendicolare  $HF = z$ , onde l'altre due coordinate sieno  $FP = y$ ,  $PC = x$ , si congiunga  $PH$ , e prolungata  $FP$  in  $M$  sicchè si abbia  $PM = u = PH$  per la natura della rivoluzione, il triangolo  $HFP$  rettangolo in  $F$  darà  $u^2 = z^2 + y^2$ , o differenziando,  $dz = \frac{u du}{z} - \frac{y dy}{z} = P dx + Q dy$ ; e poichè  $Q dy$  deve eguagliarsi a  $-\frac{y dy}{z}$  (122), sarà  $P dx = \frac{u du}{z}$ ; dunque  $u$  è funzione di  $x$  e può farsi  $u = n x$ . Si avrà pertanto  $Q = -\frac{y}{z}$ ,  $P = \dots$

$$\frac{n^2 x}{z}, \frac{P}{n^2 x} + \frac{Q}{y} = 0 = \frac{d^x z}{dx} + \frac{n^2 x d^y z}{y dy}, \text{ ed in}$$

tegrando (198) con prendere il fattore  $m = 2y$ , verrà  $z = \phi(y^2 - n^2 x^2)$ , equazione di tutte le possibili superficie di rivoluzione intorno all'asse  $AA$ .

206. Poichè però non possono aver qui luogo le notizie occorrenti per dedurre da questa generale equazione l'equazioni particolari di superficie determinate, osserveremo per ora al nostro intento, che se nell'equazione  $u^2 = z^2 + y^2$  trovata sopra, si sostituisca il valor di  $u$  cavato dall'equazioni della curva genitrice  $AEAE$ , si avrà subito l'equazione alla superficie generata: così se  $AEAE$  sia un circolo, un'ellisse ec., avremo  $u^2 = a^2 - x^2$ ,  $n^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$  ec.; e l'equazioni alle superficie del-

39.

la sfera, dell'ellissoide ec. saranno  $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2}$ ,  $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2}$  ec. E se la semiel-

fisse  $AEAE$  cresca o scemi uniformemente nel primo quarto di rivoluzione, e all'incontro scemi o cresca del pari nel secondo ec., cosicchè la superficie generata abbia il semiasse  $CK = c$  oltre i due  $AC = a$ ,  $CE = b$ , è ben vero che non sarà più  $PM = PH$  perchè la sezione  $MLP$  normale al piano  $AEAE$ , non sarà più un circolo ma un'ellisse: per altro essendo  $MLP$  simile alla sezione  $EKC$  segata pur normalmente per  $ECE$ , avremo  $EC (b) :$

$$CK (c) :: MP (u) : PL = \frac{cu}{b}; \text{ onde } HF^2 = z^2 = \frac{c^2 u^2}{b^2 u^2} (u^2 - y^2);$$

riducendo dunque e sostituendo il valor di  $u^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$ , l'equazione a questa superficie sarà  $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ .

207. Abbiasi dunque un'infinità di tali superficie ellittico-sferoidali  $AEAKL$  simili tra loro e

concentriche, e si cerchi l'equazione di quella che tutte le tagli ad angoli retti. Poichè per una delle date superficie abbiamo  $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$  (206) e tutte son simili, supposta  $a : b : c : m : n : z$  la ragione costante dei loro semiassi, e però  $a = mc, b = nc$ , la generale equazione di tutte diverrà

$$1 = \frac{x^2}{m^2 c^2} + \frac{y^2}{n^2 c^2} + \frac{z^2}{c^2}, \text{ ove } m, n \text{ sara} \text{ costan-}$$

ti in ciascuna sferoide e il solo  $c$  varierà dall'una all'altra: perciò differenziando, la comune equazione delle superficie da tagliarsi sarà  $dz = -\frac{x dx}{m^2 z} - \frac{y dy}{n^2 z} = X' dx + Y' dy$  fatto  $X = -\dots$   
 $\frac{x}{m^2 z}, Y' = -\frac{y}{n^2 z}$ . Ora se ad un punto qualun-

39. que  $R$  della superficie  $AEAKL$  si alzi la normale  $RT = f$  che incontri il piano  $AEA$  nel punto  $T$  a cui rispondono (condotta  $OST$  parallela a  $CA$ ) le coordinate  $CI = OT = a', IT = GS = b'$ , e da  $R$  si conduca sul piano  $AEA$  la perpendicolare  $RV = z$ , da  $K$  sopra  $CA$  la perpendicolare  $VG = y$ , e congiunta  $RS$ , pongasi  $CG = OS = x$ , sarà  $TS = IG = a' - x, VS = b' - y$ , e il triangolo  $RVS$  rettangolo in  $V$  darà  $RS^2 = z^2 + (b' - y)^2$ : ma appartenendo  $RS$  al piano  $RVS$  perpendicolare ad  $OT$ , anche il triangolo  $RST$  è rettangolo in  $S$ ; dunque  $RT = f = \sqrt{z^2 + (b' - y)^2 + (a' - x)^2}$ , che per la natura delle normali alle superficie dovrà esser la massima o la minima di tutte le linee che da  $T$  posson condursi alla superficie  $AEAKL$ . Differenziando pertanto, verrà  $z dz - (b' - y) dy - (a' - x) dx = 0$  (60) o sostituendo il valor di  $dz$  trovato di sopra,  $(X' z - (a' - x)) dx + (Y' z - (b' - y)) dy = 0$ , e quindi (63)  $X' z - a' + x = 0, Y' z - b' + y = 0, a' = X' z + x, b' = Y' z + y$  ed  $f = z \sqrt{1 + X'^2 +$

$Y'^2$ ). Ma giacchè nei punti ove le superficie si tagliano, le coordinate della cercata e della data debbono esser le stesse, supposta  $dz = d^x z + d^y z = P'dx + Q'dy$  l'equazion differenziale della cercata,  $k = RZ$  la sua normale in  $R$ ,  $g = CY$  ed  $h = YZ$  le coordinate che determinano il punto  $Z$  in cui ella incontra il piano  $AEA$ , si troverà col raziocinio medesimo  $g = P'z + x$ ,  $h = Q'z + y$  e  $k = z\sqrt{(1 + P'^2 + Q'^2)}$ , onde se sia  $TZ = t$  l'intervallo tra le due normali  $f, k$ , si avrà  $t = \sqrt{(ZX^2 + XT^2)} = \sqrt{[(a' - g)^2 + (b' - h)^2]} = z\sqrt{[(X' - P')^2 + (Y' - Q')^2]}$ . Or le due superficie debbon tagliarsi ad angoli retti e però è retto l'angolo  $ZRT$ ; dunque  $t = \sqrt{(f^2 + k^2)} = z\sqrt{[(x' - P')^2 + (Y' - Q')^2]}$ , cioè  $1 + P'X' + Q'Y' = 0$ , o mettendo i valori di  $X', Y', P', Q'$  dati di sopra,  $\frac{d^x z}{dx} +$

$$\frac{m^2 y d^y z}{n^2 x dy} - \frac{m^2 z}{x} = 0 \text{ e però (101) } z = \dots$$

$$x^{mm} \phi\left(\frac{y}{mn}\right), \text{ equazione alle superficie cercate,}$$

che diviene  $z = x\phi\left(\frac{y}{x}\right)$  se le date sferoidi si cangino in sfere, ove essendo i semiassi  $a = b = c$ , si ha  $m = n = 1$ .

*Del Calcolo delle Variazioni.*

208. Oltre quel genere di *Massimi e Minimi* di cui già parlammo di sopra (59), un altro ve ne è più elevato che ha data origine al *Calcolo delle Variazioni*. In quello si cerca il punto di una data linea ove una certa quantità variabile diventa massima o minima, cosicchè cangiandosi gli altri punti o elementi della curva, la quantità massima o mi-

nima non soffre alcun cangiamento; in questo si vuole la linea stessa in cui abbia luogo la proprietà del massimo o del minimo, di modo che la quantità massima o minima dipende da tutta la curva, e cangiandone qualunque elemento essa pure si cangia. Così il problema di determinat nel circolo la massima ordinata, riguarda il primo genere: ma quello di trovar tra tutte l'isoperimetre la curva che con l'ordinata e con l'ascissa racchiude la massima area, appartiene al secondo. E' vero che ambedue i generi dipendono dagli stessi principj e che alcuni problemi spettanti al secondo possen trattarsi anche coi metodi del primo; ma tali soluzioni son per lo più assai complicate e poco naturali.

46. 209. Sia  $BD$  una curva che abbia per asse la retta  $AE = a$ , e fatta l'ascissa  $AP = x$ , si conducano l'ordinate perpendicolari  $AB, PM, ED$ . Pongo  $PM = z$  intendendo per  $z$  una quantità composta comunque di  $x, y, p = \frac{dy}{dx}, q = \frac{dp}{dx}, r = \frac{dq}{dx}$  ec. e anche degli integrali  $\int \varphi dx, \int \varphi' dx$  ec., supposte  $\varphi, \varphi'$  ec. delle nuove funzioni di  $x, y, p, q$  ec. Se si prenda  $PT = dx$  e si conduca l'ordinata  $TV$ , sarà  $PMVT = z dx$  (132),  $ABMP = \int z dx$  che va a zero se  $x = 0$ , e diviene  $ABDE$  se  $x = a$ . Chiamasi  $H$  l'area  $ABDE$ ; dunque se ciascuna ordinata  $PM = z$  varj in più o in meno di una quantità infinitesima  $Mf$  e sia  $\beta$  la caratteristica della variazione come  $d$  lo è della differenziazione, avremo  $Mf = \beta z$  variazione di  $z, Mf i V = \beta z dx$  variazione di  $z dx = PMVT; Bc f M = \int \beta z dx$  somma degli elementi  $Mf i V$  e variazione dell'area  $ABMP$ , e finalmente  $BCKD = \beta H$  variazione dell'area  $ABDE = H$ . Quindi se quest'area

$H$  debba essere un massimo o un minimo, bisognerà che l'area  $BckD$  si annulli e sarà  $\beta H = \beta \cdot ABDE = \beta \int z dx = 0$  (60), presa l'integrale da  $x = 0$  fino ad  $x = a$ . Da questa formula  $\beta \int z dx = 0$  si avrà la relazione tra  $x$  ed  $y$  o l'equazione alla curva che ha la proprietà cercata del massimo o del minimo: cosicchè qualunque altra equazione tra  $x$  ed  $y$  darà un valor più piccolo per  $H$  quando  $H$  è un massimo, o un valor più grande quando  $H$  è un minimo.

210. Il Calcolo delle Variazioni dee dunque insegnarci a trovar la variazione di  $H$  o il valor di  $\beta H$ , che andando poi a zero determina il cercato massimo o minimo. Ora  $H$  può riguardarsi o nello stato primitivo quando  $z$  o  $PM$  non ha ricevuta in  $H$  alcuna variazione, o nello stato variato quando  $z$  vi ha avuta una variazione  $Mf$ , e si è cangiata in  $PM \pm Mf = z \pm \beta z$ . Ma siccome nello stato primitivo di  $H$  se  $x$  divenga  $x \pm dx$  anche  $y$  diviene  $y \pm dy$  (2); così nello stato variato mentre  $H$  passa in  $H \pm \beta H$  ed  $x$  ( $= AP$ ) resta lo stesso in ambedue gli stati,  $z$  ed  $y$  diventano  $z \pm \beta z$ ,  $y \pm \beta y$ : onde  $x$  non influisce nella variazione.  $\beta H$ , che solo dipende dalla variazione  $\beta z$ , e si ha sempre  $\beta x = 0$ , e perciò anche  $\beta dx = 0$ .

211. Come  $z$  diventa  $z + \beta z$ , così  $z'$  ( $= QN$ ) si cangia in  $z' + \beta z' = Qg$ ,  $z''$  ( $= RS$ ) in  $z'' + \beta z'' = Sh$  ec.: ma  $z' = z + dz$  (2) onde  $\beta z' = \beta z + \beta dz$ ; dunque  $\beta dz = \beta z' - \beta z = d\beta z$  (2), cioè la variazione d'una differenziale eguaglia la differenziale della sua variazione. Perciò scrivendo  $dz$  in vece di  $z$ , sarà  $\beta d^2 z = d\beta dz = d^2 \beta z$ , e di nuovo scrivendo qui  $dz$  in luogo di  $z$ , verrà  $\beta d^3 z = d\beta d^2 z = d^2 \beta dz = d^3 \beta z$ ; e in generale  $\beta d^n z = d^n \beta z$ , o preso  $m < n$ ,  $\beta d^m z = d^m \beta d^{n-m} z$ .



212. Del pari supposto  $u = \int z dx$ , sarà variando,  $\beta u = \beta \int z dx$ , e differenziando,  $du = z dx$ ; dunque  $\beta du (= d\beta u) = \beta z dx$ , e integrando,  $\beta u = \int \beta z dx = \beta \int z dx$ , cioè la *variazione dell'integrale*  $\int z dx$  eguaglia l'*integrale della variazione* di  $z dx$ . Perciò scrivendo  $\int z$  in vece di  $z$ , avremo  $\int \beta \int z dx = \beta \iint z dx = \iint \beta z dx$  ec.

213. Si raccoglie da tutto ciò 1.<sup>o</sup> che la differenziale  $dz$  è diversissima dalla variazione  $\beta z$ ; poichè  $dz$  è l'aumento che riceve  $z$  quando  $x$  aumenta di  $dx$  onde non si altera il rapporto tra  $z$  ed  $x$  o tra  $y$  ed  $x$  (19), laddove  $\beta z$  è l'aumento di  $z$  quando quel rapporto talmente varia che nell'alterarsi  $z$  o  $y$ , la variabile  $x$  resta la stessa (210): 2.<sup>o</sup> che le variazioni  $\beta y$  di ciascun valore di  $y$  nel suo passaggio allo stato variato essendo bensì infinitesime (209) ma indipendenti da ogni legge o condizione, non hanno alcun rapporto coi valori stessi di  $y$ , e sono anzi tanto arbitrarie e indefinite che posson poi determinarsi a piacere e anche mandarsi tutte a zero, fuorchè quella o quelle che corrispondono alla linea infinitesima  $PT = dx$  dalla quale risulta la formula  $\int z dx$ : 3.<sup>o</sup> che  $z$  cangiandosi in  $z \pm dz$  nella differenziazione, ed in  $z \pm \beta z$  nella variazione, ad onta della diversità tra le differenze e le variazioni, si ha la variazione di  $z$  come se ne ha la differenza purchè in luogo di  $dz, dy$  si scriva  $\beta z, \beta y$  e si faccia  $x$  costante: così la variazione di  $z = ax^2y + bxy^2$  sarà  $\beta z = ax^2\beta y + 2bxy\beta y$  ec.

214. Dunque  $\beta(z dx) = dx\beta z + z\beta dx$ : ma  $\beta dx = 0$  (210); dunque  $\beta(z dx) = dx\beta z$  e  $\int \beta(z dx) = \int dx\beta z = \beta \int (z dx)$  (212).

215. Parimente poichè  $p = \frac{dy}{dx}$ ,  $q = \frac{dp}{dx}$ ,  $r = \frac{dq}{dx}$  ec. (209), presa  $dx$  costante, si avrà  $dp = \frac{d^2y}{dx^2} dx$ ,  $dq = \frac{d^3y}{dx^3} dx$ ,  $dr = \frac{d^4y}{dx^4} dx$  ec. ed integrando,  $p = \frac{dy}{dx}$ ,  $q = \frac{d^2y}{dx^2}$ ,  $r = \frac{d^3y}{dx^3}$  ec. ;

dunque  $\beta p = \frac{\beta dy}{dx}$  (210)  $= \frac{d\beta y}{dx}$  (211),  $\beta q = \dots$   
 $\beta \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2\beta y}{dx^2}$ ,  $\beta r = \frac{\beta d^3y}{dx^3} = \frac{d^3\beta y}{dx^3}$  ec., differenziali che facilmente si determinano osservando che  $d\beta y = \beta y' - \beta y$ ,  $d\beta y' = \beta y'' - \beta y'$ ,  $d\beta y'' = \beta y''' - \beta y''$  ec. (211), e perciò  $d^2\beta y = d\beta y' - d\beta y = \beta y'' - \beta y' - \beta y' + \beta y = \beta y'' - 2\beta y' + \beta y$ ,  $d^3\beta y = d\beta y'' - 2d\beta y' + d\beta y = \beta y''' - \beta y'' - 2\beta y'' + 2\beta y' + \beta y' - \beta y = \beta y''' - 3\beta y'' + 3\beta y' - \beta y$  ec. : e se le variazioni di  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$  ec. sieno zero (213), verrà  $d\beta y = -\beta y$ ,  $d^2\beta y = \beta y$ ,  $d^3\beta y = -\beta y$  ec.

216. Volendo pertanto la variazione di  $z$  funzione di  $x$ ,  $y$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$  ec. (209), siccome la sua differenza sarebbe  $dz = P dx + Q dy + R dp + S dq$  ec. supposte  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  ec. funzioni di  $x$ ,  $y$ ,  $p$ ,  $q$  ec. ; così la sua variazione, fatto  $\beta x = 0$  (210), sarà  $\beta z = Q\beta y + R\beta p + S\beta q$  ec.  $= Q\beta y + R\frac{d\beta y}{dx} + S\frac{d^2\beta y}{dx^2}$  ec. (215).

217. Similmente per aver la variazione di  $\int z dx$ , essendo sempre  $z$  una funzione di  $x$ ,  $y$ ,  $p$ ,  $q$  ec. , si farà  $dx$  costante e avremo 1.<sup>o</sup>  $\beta z = Q\beta y + R\beta p + S\beta q$  ec.  $= Q\beta y + \frac{Rd\beta y}{dx} + \frac{Sd^2\beta y}{dx^2}$  ec. (216):  
 2.<sup>o</sup>  $\beta(z dx) = dx\beta z$  (214)  $= Q dx\beta y + R d\beta y + \frac{Sd^2\beta y}{dx}$  ec. ; 3.<sup>o</sup>  $\int \beta z dx = \beta \int z dx$  (212)  $= \int Q dx\beta y +$   
 X

FIG.

$$\int R d\beta y + \int \frac{S d^2 \beta y}{dx} \text{ ec. : ma } \int R d\beta y = R \beta y - \int dR \beta y \text{ (100)} = R \beta y - \int \frac{dx dR \beta y}{dx}, \text{ e parimen-}$$

$$\text{te } \int \frac{S d^2 \beta y}{dx} = \frac{S d\beta y}{dx} - \int \frac{dS d\beta y}{dx} = \frac{S d\beta y}{dx} - \frac{dS \beta y}{dx}$$

$$+ \int \frac{d^2 S \beta y}{dx} = \frac{S d\beta y}{dx} - \frac{dS \beta y}{dx} + \int \frac{d^2 S dx \beta y}{dx^2} \text{ ec. ;}$$

dunque  $\beta \int z dx = \int dx \beta y (Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2 S}{dx^2} - \text{ec.})$   
 $+ \beta y (R - \frac{dS}{dx} + \text{ec.}) + \frac{d\beta y}{dx} (S - \text{ec.}) + \text{ec.}$  Fer-  
 miamoci a considerar questa formula .

218. Osservo primieramente che ella è compo-  
 sta di una parte integrale  $\int dx \beta y (Q - \frac{dR}{dx} \text{ ec.})$ , e  
 di una parte assoluta  $\beta y (R - \text{ec.}) + d\beta y (S - \text{ec.})$   
 + ec. Or nel caso del massimo o del minimo per  
 aver tutta la variazione  $\beta H$  bisogna porre  $x = a$   
 nell'intera formola (209), ciò che di fatto eseguito  
 nella sua parte assoluta,  $\beta y$  vi indicherà la varia-  
 zione dell'ultima ordinata  $ED$  corrispondente all'  
 ascissa  $AE = a$ : ma tal variazione essendo arbitra-  
 ria si può supporre zero (213); dunque nel caso di  
 46.  $x = a$  tutta la parte assoluta i cui termini son mol-  
 tiplicati per  $\beta y = 0$ , per  $d\beta y = 0$  ec. si annichi-  
 lerà e avremo la sola parte integrale  $\int dx \beta y (Q -$   
 $\frac{dR}{dx} + \text{ec.}) = \beta H = 0$  (209).

219. In secondo luogo osservo che quest'ulti-  
 ma espressione è la somma di tutte le variazioni  
 che nascono dalla variazione di ciascun valore di  
 $y$ : ma tutte posson mandarsi a zero fuorchè una  
 (213), dunque la somma di esse si ridurrà a quella  
 sola, e si avrà  $dx \beta y (Q - \frac{dR}{dx} + \text{ec.}) = 0$ , ovve-

10  $Q - \frac{dR}{dx} + \text{ec.} = 0$ . Dal che si raccoglie 1<sup>o</sup> che se  $z$  è solamente funzione di  $x, y$ , nella formula di sopra  $\beta z = Q\beta y + R\beta p + S\beta q$  ec. (217) sarà  $p = 0, q = 0, r = 0$  ec., onde  $R\beta p = 0, S\beta q = 0$  ec., e l'equazione ora trovata diverrà  $Q = 0$ ; 2<sup>o</sup> che se  $z$  sia funzione di  $x, y, p$ , nella formula stessa (217) sarà  $q = 0, r = 0$  ec. onde  $S\beta q = 0$  ec., e la nostra equazione diverrà  $Q - \frac{dR}{dx} = 0$ ; e così di seguito.

220. Ma riguardo a questa seconda conseguenza conviene riflettere che l'equazione  $Q - \frac{dR}{dx} = 0$ ,  $Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2 S}{dx^2} = 0$  ec. son sempre differenziali o del primo o di altri ordini più elevati; onde la loro integrazione esigendo l'aggiunta di una o più costanti arbitrarie, l'equazione tra  $x$  ed  $y$  che somministra il massimo o il minimo, non sarà interamente determinata, e si avranno tanti massimi o minimi quanti sono i valori che possono darsi a ciascuna costante. Per fissar dunque in tali casi il vero massimo o minimo, si ricorre alla parte assoluta della formula variata cioè a  $\beta y (R - \frac{dS}{dx} + \text{ec.}) + d\beta y (S - \text{ec.}) + \text{ec.} = 0$  (218), che attesa la variazione arbitraria  $\beta y$  (213), non può generalmente andare a zero se non vi vada ciascun suo termine, e sia perciò  $\beta y (R - \frac{dS}{dx} + \text{ec.}) = 0, d\beta y (S - \text{ec.}) = 0$  ec., ovvero  $R - \frac{dS}{dx} + \text{ec.} = 0, S - \text{ec.} = 0, \text{ec.}$ , sempre nella supposizione di  $x = a$  (218): ciò determina le costanti e quindi il cercato massimo o minimo, come vedremo.

221. Troviamo ora la variazione di  $\int z dx$  quando  $z$  contiene non solo  $x, y, p, q$  ec. ma anche un integrale  $\int \varphi dx$  (209). Sia  $\int \varphi dx = \tau$  e avremo  $I. \beta \tau = \beta \int \varphi dx = \int Q' dx \beta y + \int R' d\beta y + \int \frac{S' d^2 \beta y}{dx}$  ec. (217); di più essendo  $z$  funzione di  $\tau, x, y, p, q$  ec., supposta  $V$  una funzione come  $z$ , verrà  $II. \beta z = V \beta \tau + Q \beta y + \frac{R d \beta y}{dx} + \frac{S d^2 \beta y}{dx^2}$  ec., che sostituendo il valor della  $I.$ , diviene  $\beta z = V \int Q' dx \beta y + V \int R' d \beta y + V \int \frac{S' d^2 \beta y}{dx}$  ec.  $+ Q \beta y + \frac{R d \beta y}{dx} + \frac{S d^2 \beta y}{dx^2}$  ec. Ora  $\int \beta z dx = \beta \int z dx$  (212); dunque  $\beta \int z dx = \dots$   
 $\int (V dx \int Q' dx \beta y) + \int (V dx \int R' d \beta y) + \int (V dx \int \frac{S' d^2 \beta y}{dx})$  ec.  $+ \int Q dx \beta y + \int R d \beta y + \int \frac{S d^2 \beta y}{dx}$  ec. Per liberar la formola dal segno integrale moltiplicato, pongo  $V dx = dK$  onde  
 $\int (V dx \int Q' dx \beta y) = \int (dK \int Q' dx \beta y) = K \int Q' dx \beta y - \int K Q' dx \beta y$   
 $\int (V dx \int R' d \beta y) = \int (dK \int R' d \beta y) = K \int R' d \beta y - \int K R' d \beta y$ ,  $\int (V dx \int \frac{S' d^2 \beta y}{dx}) = \int (dK \int \frac{S' d^2 \beta y}{dx}) = K \int \frac{S' d^2 \beta y}{dx} - \int \frac{K S' d^2 \beta y}{dx}$  ec.; dunque  $\beta \int z dx = K \int dx (Q' \beta y + \frac{R' d \beta y}{dx} + \frac{S' d^2 \beta y}{dx^2}$  ec.)  $+ \int dx [(Q - K Q') \beta y + (R - K R') \frac{d \beta y}{dx} + (S - K S') \frac{d^2 \beta y}{dx^2}$  ec.], ove posson farsi le riduzioni di sopra (217).

222. Quasi nel modo stesso potrebbe aversi la variazione di  $\int z dx$  quando  $z$  contiene più integrali.

$\int \phi dx$ ,  $\int \phi' dx$  ec., e generalmente quando è data da un' equazion differenziale di qualunque ordine; potrebbe anche indagarsi la variazione di  $\int z dx$  o di  $\int z$  quando  $x$  non fosse costante come lo abbiamo supposto di sopra, e fino introdursi in questo Calcolo le differenze parziali che ne formano un nuovo ramo: ma tali ricerche sarebbero inutili alla presente nostra intenzione di terminar questo Libro con alcune più semplici e più elementari applicazioni dell' esposta dottrina.

PROBL. I. Tra tutte le curve riferite ad una stessa ascissa determinar quella in cui  $\int z dx = \int (gx - y^2) y dx$  è un massimo o un minimo.

Si avrà  $z dx = (gx - y^2) y dx$ ,  $z = (gx - y^2) y$  e  $\beta z = (gx - 3y^2) \beta y$  (213)  $= Q\beta y + R\beta p + S\beta q$  ec. (217); dunque  $Q = gx - 3y^2$ ,  $R = 0$ ,  $S = 0$  ec.: ma dee esser  $Q = 0$  (219. 1.<sup>o</sup>); dunque  $gx - 3y^2 = 0$  ovvero  $y^2 = \frac{gx}{3}$ , equazione alla parabola. Sostituito

il valor di  $y = \sqrt{\frac{gx}{3}}$  nella formula  $\int (gx - y^2) y dx$ ,

ella diviene  $z \int \left(\frac{gx}{3}\right)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4gx^2}{15} \sqrt{\frac{gx}{3}}$  che si annulla quando  $x = 0$ , ed è un massimo o un minimo quando  $x = a$ . Per distinguere qual dei due abbia qui luogo, prendo in vece della parabola un' altra linea qualunque (209), per esempio la linea retta coincidente con l'asse onde sia  $y = 0$ , e trovo che  $y = 0$  riduce la data formula a zero, mentre  $y = \sqrt{\frac{gx}{3}}$  la riduceva a  $\frac{4gx^2}{15} \sqrt{\frac{gx}{3}} > 0$ ; dunque si ha qui un massimo.

II. Trovar la curva in cui  $\int z dx = \int (19g^2 x^2 - 15g^2 x + 5g^2 y^2 - 3y^4) y dx$  è un massimo o un minimo.

Dunque  $\beta z = (g^2 x^2 - g^2 x + g^2 y^2 - y^4) 19\beta y$   
 $= Q\beta y$ , e  $Q = 0 = g^2 x^2 - g^2 x + g^2 y^2 - y^4 = (y^2 - g^2 + gx)(gx - y^2)$ , e perciò soddisfanno al quesito due parabole dell'equazioni I.  $y^2 = g(g-x)$ , II.  $y^2 = gx$ . Per sapere quale delle due dia il massimo, supponrò  $x$  infinitesima, il che riduce la I. ad  $y = g$ , valore che posto nella formula data, la cangia in  $\int 2g^2 dx$ , mentre sostituendovi  $y = \sqrt{gx}$  preso dalla II., si ha  $\int -10g^2 x dx \sqrt{gx}$ : ma fatto, come sopra,  $y = 0$ , la formula va a zero e  $\int 2g^2 dx > 0$  laddove  $\int -10g^2 x dx \sqrt{gx} < 0$ ; dunque la I. dà un massimo, la II. un minimo.

III. Qual'è la curva in cui  $\int z dx = \dots$   
 $\int \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{y}}$  è un massimo o un minimo?

Poichè  $\frac{dy}{dx} = p$ , verrà  $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1+p^2}$ , onde  $z = \sqrt{\frac{1+p^2}{y}}$ ,  $dz (= Pdx + Qdy + Rdp) = \frac{p dp}{\sqrt{y(1+p^2)}} - \frac{dy \sqrt{1+p^2}}{2y\sqrt{y}}$  e  
 $\beta z = \frac{p\beta p}{\sqrt{y(1+p^2)}} - \frac{\beta y \sqrt{1+p^2}}{2y\sqrt{y}} = Q\beta y + R\beta p$ ;  
 dunque  $P = 0$ ,  $Q = -\frac{\sqrt{1+p^2}}{2y\sqrt{y}}$ ,  $R = \dots$   
 $\frac{p}{\sqrt{y(1+p^2)}}$ ; e poichè dee qui aversi  $Q - \frac{dR}{dx} = 0$   
 (2.9.2<sup>o</sup>), sarà  $Qp dx (= Qdy) = p dR$ : ma es

sendo  $P=0$ , viene  $dz = Qdy + Rdp = p dR + R dp$ ; dunque integrando,  $z (= \sqrt{\frac{1+p^2}{y}}) = pR + C = \frac{p^2}{\sqrt{y(1+p^2)}} + C$ , e  $C = \frac{1}{\sqrt{y(1+p^2)}}$ . Per-

tanto se si faccia  $C = \frac{1}{\sqrt{m}}$ , avremo  $m = y(1+p^2)$ ,  $p (= \frac{dy}{dx}) = \sqrt{\frac{m-y}{y}}$ , e  $dy = dx \sqrt{\frac{m-y}{y}}$ , equazione ad una cicloide (55) il cui circolo genitore ha per diametro  $m$ . La riduco a  $dx = dy \sqrt{\frac{y}{m-y}} = \frac{y dy}{\sqrt{(my-y^2)}}$  ed integrandola ottengo  $x = \text{arc. sen } v. y - \sqrt{(my-y^2)} + C$  (171. 4° 5°), con che abbiamo le due costanti arbitrarie  $m, C$ .

Per determinarle faccio  $R - \frac{dS}{dx} = 0$  (220), cioè

$$R (= \frac{p}{\sqrt{y(1+p^2)}}) = 0 \text{ perchè qui } S = 0, \text{ e viene } p = 0 = \sqrt{\frac{m-y}{y}}$$

e perciò  $y = m$ : quindi l'equazione integrata, postovi  $y = m$  ed  $x = a$  (220), diverrà  $a = \text{arc. sen } v. m + C$ : ma essendo  $m$  il diametro,  $\text{arc. sen } v. m$  è evidentemente la semicirconferenza  $m\pi$ ; dunque  $C = a - m\pi$ ; di più se quando  $x = 0$  si vuole anche  $y = 0$ , l'equazione integrata si cangierà in  $0 = a - m\pi$  e sarà  $m = \frac{a}{\pi}$ . Del resto, si ha quì un minimo; poichè la data

formula, sostituito il valor di  $p = \sqrt{\frac{m-y}{y}}$ , diventa  $\int dx \sqrt{\frac{m}{y}}$ , da cui, facendo al solito  $y = 0$ , viene un infinitamente grande.

IV. Tra tutte le curve isoperimetre trovar quella in cui l'area  $\int y dx$  (132) è un massimo o un minimo.



Giacchè l'espressione della lunghezza d'un arco è (136)  $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \int dx \sqrt{(1 + p^2)}$  (III.) e questa per la natura degli isoperimetri non varia, avremo  $\beta \int dx \sqrt{(1 + p^2)} = 0$ : ma anche  $\beta \int y dx = 0$  (109); dunque il problema si ridurrà a trovar la curva in cui  $\int z dx = \int y dx + \int g dx \sqrt{(1 + p^2)}$  è un massimo o un minimo, moltiplicata per  $g$  costante l'espressione dell'arco onde sieno omogenee le due integrali. Si avrà pertanto  $z = y + g\sqrt{(1 + p^2)}$ ,  $\beta z = \beta y + \frac{gp\beta p}{\sqrt{(1 + p^2)}}$ , onde  $Q = 1$ ,  $R = \frac{gp}{\sqrt{(1 + p^2)}}$ ,  $Q - \frac{dR}{dx} = \sigma$ ; e ripetuto il raziocinio del passato problema, verrà  $z (= y + g\sqrt{(1 + p^2)}) = pR + C = \frac{gp^2}{\sqrt{(1 + p^2)}} + C$ ,  $(C - y)\sqrt{(1 + p^2)} = g$ ,  $p (= \frac{dy}{dx}) = \frac{\sqrt{[g^2 - (C - y)^2]}}{C - y}$ , e  $dx = \frac{dy(C - y)}{\sqrt{[g^2 - (C - y)^2]}}$ ; dunque integrando,  $x = \sqrt{[g^2 - (C - y)^2]} + C'$ , cioè  $(C - y)^2 = g^2 - (x - C')^2$ , equazione al circolo, in cui le costanti  $g$ ,  $C$ ,  $C'$  si determineranno come sopra (III) avvertendo di più che la lunghezza della curva può supporre data: ed è chiaro che il radicale portando il doppio segno, e perciò potendo descriversi il circolo onde rivolga all'ascissa o la concavità o la convessità, avremo un massimo nel primo caso, un minimo nel secondo.

V. Tra tutte le curve isoperimetre trovar quella il cui solido di rivoluzione ha la massima

o minima superficie  $2\pi \int y \sqrt{dx^2 + dy^2}$ . (144)

Trascurato  $2\pi$  che è un numero costante e fatta  $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + p^2}$ , dovrà essere, come nell' antecedente problema,  $\int z dx =$

$\int y dx \sqrt{1 + p^2} + \int g dx \sqrt{1 + p^2}$  un massimo o un minimo; dunque  $z = (y + g) \sqrt{1 + p^2}$ ;  
 $\beta z = \beta y \sqrt{1 + p^2} + \frac{(y + g) p \beta p}{\sqrt{1 + p^2}}$ , onde  $Q =$

$\sqrt{1 + p^2}$ ,  $R = \frac{(y + g)p}{\sqrt{1 + p^2}}$ ,  $Q - \frac{dR}{dx} = 0$ , e fatto il solito raziocinio,  $z (= (y + g) \sqrt{1 + p^2})$   
 $= pR + C = \frac{(y + g)p^2}{\sqrt{1 + p^2}} + C$ ,  $C = \frac{y + g}{\sqrt{1 + p^2}}$ ,

$p (= \frac{dy}{dx}) = \frac{1}{C} \sqrt{[(y + g)^2 - C^2]}$ , e  $dx = \dots$   
 $\frac{C dy}{\sqrt{[(y + g)^2 - C^2]}}$ , equazione alla curva volgarmente

detta la *Catenaria* perchè una catena flessibilissima se sia sospesa per le sue estremità, si conforma in questa curva. E qui pure atteso il doppio segno che compete al radicale, si avrà un massimo quando la curva rivolga la concavità all'asse, ed un minimo quando gli volga la convessità.

**F I N E**

1914

1. The first part of the report deals with the general situation of the country and the progress of the work during the year.

2. The second part contains a detailed account of the various expeditions and the results obtained.

3. The third part is devoted to the study of the flora and fauna of the region.

4. The fourth part discusses the geology and the physical features of the country.

5. The fifth part deals with the history and the ethnography of the region.

6. The sixth part contains a list of the names of the various places visited and the names of the people met.

7. The seventh part is a list of the names of the various plants and animals collected.

8. The eighth part is a list of the names of the various minerals and fossils found.

9. The ninth part is a list of the names of the various languages spoken in the region.

10. The tenth part is a list of the names of the various tribes and clans.

11. The eleventh part is a list of the names of the various religions and sects.

12. The twelfth part is a list of the names of the various customs and traditions.

13. The thirteenth part is a list of the names of the various festivals and ceremonies.

14. The fourteenth part is a list of the names of the various occupations and professions.

15. The fifteenth part is a list of the names of the various social and political organizations.

16. The sixteenth part is a list of the names of the various educational institutions.

17. The seventeenth part is a list of the names of the various medical and health services.

18. The eighteenth part is a list of the names of the various public works and infrastructure projects.

19. The nineteenth part is a list of the names of the various cultural and artistic activities.

20. The twentieth part is a list of the names of the various sports and recreational activities.



1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry should be supported by a valid receipt or invoice.

2. The second part outlines the procedures for handling discrepancies between the recorded amounts and the actual cash received. It suggests a systematic approach to identify the source of the error.

3. The third part details the process of reconciling the bank statements with the company's ledger. It provides a step-by-step guide to ensure that the balances match.

4. The fourth part discusses the role of internal controls in preventing fraud and ensuring the integrity of the financial data. It highlights the need for segregation of duties and regular audits.

5. The fifth part covers the requirements for preparing financial statements in accordance with the relevant accounting standards. It lists the necessary components and the order in which they should be presented.

6. The sixth part addresses the legal obligations of the company regarding the retention and disposal of financial records. It provides information on the minimum retention period and the proper methods for archiving documents.

7. The seventh part discusses the impact of tax regulations on the company's financial reporting. It explains how to properly calculate and report taxable income.

8. The eighth part provides a summary of the key points discussed in the document and offers final recommendations for improving the company's financial management practices.

